CARACTERIZACION Y CLASIFICACION DE CIERTOS FLUJOS CONTINUOS

Por

RAMON E. MOGOLLON M.

Máster en Ciencias
Universidad de Carabobo
Valencia, Venezuela

Tesis presentada al Area de Estudios de Postgrado de la
Universidad de Carabobo como uno de los requisitos
para el conferimiento del Título de
Doctor en Ciencias
Julio, 1976

PREFACIO

En virtud de que los trabajos de caracterización y clasificación de flujos son de gran interés e importancia para quienes estudian los sistemas dinámicos desde un punto de vista topológico, es decir, topología dinámica, así como también para quienes los estudian como una rama del Análisis, particularmente dentro de las ecuaciones diferenciales, en este trabajo nos hemos trazado una meta en ese sentido para cinco tipos fundamentales de flujos.

Para cada uno de éstos, se han elegido espacios fases lo más generales posibles, siendo la condición de ser un espacio de Hausdorff la única restricción común que se ha impuesto a los mismos a lo largo de todo el trabajo. Igualmente, para cada tipo de flujo, se ha considerado el caso particular de que el espacio fase sea un subespacio de R^2.

El criterio que se ha seguido para el ordenamiento de los resultados, ha sido el acostumbrado en este tipo de trabajo; es decir, en un primer capítulo se han coleccionado todos los resultados conocidos que van a ser utilizados como fundamentación en la obtención de los resultados nuevos, los cuales ocupan los restantes tres capítulos del trabajo.

Debo expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas per-

sonas que en una u otra forma han hecho posible la feliz culminación de este trabajo, en particular a las siguientes:

A mi Consejero de tesis, el Dr. Shair Ahmad, por sus valiosas sugerencias y excelente guiatura.

A mi esposa Gladys, porque supo infundirme el aliento necesario en los momentos más difíciles de mi trabajo.

A las autoridades del Instituto Universitario Pedagógico Experimental de Barquisimeto, por las facilidades de tiempo que me brindaron, incluyendo un permiso para viajar a U.S.A.

A la señora Rebeca de Blanco, por su excelente trabajo de mecanografiado.

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo Página

INTRODUCCION 1

I. SISTEMAS DINAMICOS 4

Definiciones básicas y notaciones 4
Invarianza 6
Conjuntos límites y prolongaciones 7
Dispersión 11
Estabilidad y atracción 12
Flujos de característica 0^+, 0^-, $0^\pm$ y 0 15

II. CARACTERIZACION DE FLUJOS QUE VERIFICAN $D^+(x) = C^+(x)$ (o $D^-(x) = C^-(x)$) PARA TODO x EN X 18

III. CARACTERIZACION DE FLUJOS QUE VERIFICAN $D^+(x) = C(x)$ PARA TODO x EN X 35

IV. CARACTERIZACION DE FLUJOS TALES QUE PARA CADA x EN X SE CUMPLE UNA DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES: $D^+(x) = C^-(x)$, $D(x) = K^+(x)$, $D^+(x) = K(x)$ 44

Caracterización de flujos tales que $D^+(x) = C^-(x)$ para todo x en X 44
Caracterización de flujos tales que $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X 45
Caracterización de flujos que verifican $D^+(x) = K(x)$ para todo x en X 52

CONCLUSIONES 59

BIBLIOGRAFIA 62

INTRODUCCION

Históricamente, la teoría sobre sistemas dinámicos tuvo su origen a finales del siglo XIX con el trabajo de Henry Poincaré (ver [15]), quien seguido por Ivan Bendixson (ver [3]) estudió las propiedades topológicas de soluciones de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano. Por esta razón, muchos autores consideran los sistemas dinámicos como un tópico dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales, mientras que algunos los consideran como topología aplicada y otros como una disciplina matemática independiente.

Casi simultáneamente con Poincaré, A.M. Liapunov (ver [13] desarrolló su teoría de estabilidad de un movimiento (solución) para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Allí definió los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad, y dió un método (el segundo método o método directo de Liapunov) para analizar las propiedades de estabilidad de una solución dada de una ecuación diferencial ordinaria. Tanto su definición como su método caracterizan, en un sentido estrictamente local, las propiedades de estabilidad de una solución de una ecuación diferencial ordinaria. En este aspecto, la teoría de Liapunov difiere de la de Poincaré, en la cual, por el contrario, se presta mayor atención al estudio de las propiedades globales de ecuaciones diferenciales en el plano.

La definición de un sistema dinámico abstracto ha sido atribuida a los trabajos independientes de A.A. Markov y H. Whitney a comienzos de la década de 1930. Sin embargo, es G.D. Birkhoff quien inicia un desarrollo sistemático de la teoría (ver [9]). En 1947, V.V. Nemytski y V.V. Stepanov publicaron su libro "Qualitative Theory of Differential Equations" [14], el cual renovó el interés por el estudio de los sistemas dinámicos y estableció los fundamentos para un desarrollo moderno de la teoría.

Desde que Liapunov introdujo sus nociones de estabilidad, varios nuevos tipos de ésta han sido definidos, y es V.I. Zubov quien establece el primer desarrollo completo de la teoría (ver [18]). Durante el mismo período T. Ura [17] introduce la teoría de prolongación y, en términos de ésta, establece una caracterización simple de estabilidad para conjuntos compactos. Desde entonces, la teoría de la prolongación ha sido un poderoso instrumento para el estudio de los sistemas dinámicos, muy particularmente en el área de la estabilidad.

S. Ahmad, en [1] y [2], proporcionó una clasificación de los flujos continuos en los cuales la primera prolongación positiva $D^+(x)$ de cada punto x en el espacio fase, coincide con la clausura $K^+(x)$ de la semi-órbita positiva de x. Tales flujos los denominó flujos de característica 0^+. Más tarde, Knight, un alumno de Ahmad, en su tesis para optar al Ph.D. en la Universidad del Estado de Oklahoma, proporcionó una clasificación similar para flujos planos de característica 0, parte de la cual aparece en [11]. Poco después, el mismo autor, en [12], establece una clasificación de los flujos de característica 0 en espacios fases más generales.

En este trabajo nos hemos propuesto seguir la ruta trazada por Ahmad y Knight mediante un intento de caracterización y clasificación de los tipos de flujos tales que para cada punto x del espacio fase verifican una de las siguientes propiedades: $D^+(x) = C^+(x)$, $D^+(x) = C(x)$, $D^+(x) = C^-(x)$, $D(x) = K^+(x)$, $D^+(x) = K(x)$. También se han considerado las relaciones de cada uno de ellos con sus respectivas versiones negativas.

CAPITULO I

SISTEMAS DINAMICOS

Definiciones básicas y notaciones

Notaremos por R, R^+, R^- y R^2 los conjuntos de los números reales, los números reales no negativos,los números reales no positivos y el plano Euclídeo con la topología usual, respectivamente.

Definición 1.1. Dado un espacio topológico X y una aplicación Π del espacio producto $X \times R$ en X, se dice que el par (X,Π) define un sistema dinámico o flujo (continuo) sobre el espacio fase X si se satisfacen las siguientes condiciones

(1) Axioma de identidad: $\Pi(x,0) = x$ para cada $x \in X$

(2) Axioma de homomorfismo: $\Pi(\Pi(x,t),s) = \Pi(x,s+t)$ para cada $x \in X$ y $t,s \in R$.

(3) Axioma de continuidad: Π es continua.

En este trabajo supondremos que el espacio fase X del sistema dinámico (X,Π) es Hausdorff. Para abreviar notaremos $\Pi(x,t)$ por $x \cdot t$, o simplemente xt. Similarmente, si $A \subset X$ y $B \subset R$, entonces el conjunto $\Pi(A,B) = \{\Pi(x,t) : x \in A, t \in B\}$ lo notaremos por AB.

Cuando nos refiramos a un punto o a un subconjunto sin mencionar su localización, supondremos que pertenece al espacio fase X o está contenido en X, respectivamente.

Definición 1.2. Para cada x, $C(x) = xR = \{xt : t\varepsilon R\}$, $C^+(x) = xR^+ = \{xt : t\varepsilon R^+\}$, y $C^-(x) = xR^- = \{xt : t\varepsilon R^-\}$ se denominan la trayectoria u órbita, la semitrayectoria positiva, y la semitrayectoria negativa de x, respectivamente.

NOTACION. Para un subconjunto M usaremos los símbolos $C(M)$, $C^+(M)$, y $C^-(M)$ para notar los conjuntos $U\{C(x) : x\varepsilon M\}$, $U\{C^+(x) : x\varepsilon M\}$ y $U\{C^-(x) : x\varepsilon M\}$, respectivamente.

Definición 1.3. Un punto x es llamado punto crítico (o estacionario) si $x = xt$ para todo $t\varepsilon R$, y periódico si existe un $t \neq 0$ tal que $x = xt$. En este último caso el número t es denominado un período de x.

Observación 1.4. En cada una de las siguientes secciones de este capítulo estableceremos las definiciones, proposiciones y teoremas que servirán de fundamento para el desarrollo de los siguientes capítulos. Como estos resultados son bien conocidos, no probaremos ninguno de ellos; sin embargo, en cada caso daremos una referencia bibliográfica. Muchos de los resultados son ejercicios, pero han sido incluidos para fundamentar debidamente el resto del trabajo.

Casi todas las definiciones, proposiciones y teoremas en este capítulo tienen una versión positiva, negativa y bilateral. Como las versiones positiva y negativa son duales, se acostumbra establecer solamente la versión positiva de los resultados. Así lo haremos en este capítulo, excepto para las definiciones. También haremos notar los casos donde la versión bilateral se satisfaga.

<u>Proposición 1.5</u>. Si τ es un período del punto x, entonces $n\tau$ es también un período de x para cualquier entero n. (ver [7], I, p.9)

<u>Proposición 1.6</u>. $C(x) = C(xt)$ para todo $t\varepsilon R$ y $x\varepsilon X$. (ver [7], I, p.20.)

<u>Teorema 1.7</u>. $x\varepsilon X$ es periódico si y sólo si $C^+(x)$ (o equivalentemente, $C^-(x)$) es compacto. (ver [7], I, p.23.)

<u>Invarianza</u>

<u>Definición 1.8</u>. Un conjunto $M \subset X$ se denomina (bilateralmente) invariante si $C(M) = M$ y positivamente (negativamente) invariante si $C^+(M) = M$ ($C^-(M) = M$).

<u>Proposición 1.9</u>. $M \subset X$ es invariante si y sólo si es positivamente y negativamente invariante. (ver [7], I, p.26.)

<u>Proposición 1.10</u>. $M \subset X$ es positivamente (bilateralmente) invariante si y sólo si $X\text{-}M$ es negativamente (bilateralmente) invariante. Además, M es positivamente (bilateralmente) invariante si y sólo si cada una de sus componentes es positivamente (bilateralmente) invariante. (ver [7], I, pp. 26-27 y [8], p. 13.)

<u>Proposición 1.11</u>. Si $\{M_i : i\varepsilon I\}$ es una familia de conjuntos positivamente (bilateralmente) invariantes, entonces $\cup\{M_i : i\varepsilon I\}$ y $\cap\{M_i : i\varepsilon I\}$ son positivamente (bilateralmente) invariantes. (ver [7], I, p.26 y [8], p.12.)

Denotaremos la frontera, el interior y la clausura de un conjunto M por ∂M, M^o y $\overline{M}$ respectivamente.

Proposición 1.12. Si un conjunto M es positivamente (bilateralmente) invariante, entonces $\overline{M}$ y M^o son positivamente (bilateralmente) invariantes (ver [7], I, p.27 y [8], p.13.)

Proposición 1.13. Si un conjunto M es invariante, entonces ∂M es invariante. El recíproco es cierto si M es abierto o cerrado (ver [7], I, p.28 y [8], p.13.)

Teorema 1.14. Sea X' un subconjunto invariante de X y $\Pi' = \Pi|X'$ (la restricción de Π a X'). Entonces (X', Π') es un sistema dinámico (ver [7], I, p.32.)

NOTACION. Para cualquier $x\varepsilon X$, notaremos $K(x) = \overline{C(x)}$, $K^+(x) = \overline{C^+(x)}$ y $K^-(x) = \overline{C^-(x)}$.

Proposición 1.15. Para cada $x\varepsilon X$,

(1) $K^+(x)$ es cerrado y positivamente invariante

(2) $K^+(xt) \subset K^+(x)$ para cada $t\varepsilon R^+$, y

(3) $K(x) = K^+(x) \cup K^-(x)$

Las versiones bilaterales se cumplen para (1) y (2) (ver [6], p. 50; [7], I, p.30; y [8], pp. 22-23.)

Conjuntos límites y prolongaciones

Definición 1.16. El conjunto límite positivo (negativo) de un punto $x\varepsilon X$ es $L^+(x) = \{y\varepsilon X : xt_i \to y$ para alguna red $t_i \to +\infty\}$

$(L^-(x) = \{y\varepsilon X : xt_i \to y$ para alguna red $t_i \to -\infty\})$

El conjunto límite (bilateral) de x es $L(x) = L^+(x) \cup L^-(x)$.

Proposición 1.17. Para cada $x\varepsilon X$,

(1) $L^+(x)$ es cerrado e invariante

(2) $L^+(x) = L^+(xt)$ para cada $t\varepsilon R$.

(3) $K^+(x) = C^+(x) \cup L^+(x)$

(4) $K(x) = K(xt)$ para cada $t\varepsilon R$.

Las versiones bilaterales son ciertas para (1), (2) y (3) (ver [6], p.50; [7], I, p.35; y [8] pp. 22-23, 58.)

Notaremos mediante $\eta(x)$ y $\eta(M)$ los filtros de entornos del punto x y del conjunto M, respectivamente.

Definición 1.18. Un espacio X es llamado rim-compacto si para cada $x\varepsilon X$ y $V\varepsilon\eta(x)$ existe un $U\varepsilon\eta(x)$ tal que $U \subset V$ y ∂U sea compacta.

Proposición 1.19. Si X es rim-compacto, entonces para cualquier $x\varepsilon X$, $K^+(x)$ es compacto si y sólo si $L^+(x)$ es no vacío y compacto (ver [6], p.54 y [7], I, p.36.)

Teorema 1.20. Sea X un subespacio de R^2. Entonces, para cualquier x en X, $x\varepsilon L^+(x)$ si y sólo si x es periódico o crítico (ver [16])

Proposición 1.21. Si x es periódico, entonces $C^+(x) = C^-(x) = C(x) = L^+(x) = L^-(x) = L(x)$ (ver [7], I, p.35.)

Definición 1.22. Para cada $x\varepsilon X$, la prolongación positiva (negativa) de x es $D^+(x) = \{y\varepsilon X : x_i t_i \to y$ para algunas redes $x_i \to x$ y $t_i \geqslant 0\}$

($D^-(x) = \{y\varepsilon X : x_i t_i \to y$ para algunas redes $x_i \to x$ y $t_i \leqslant 0\}$)

La prolongación (bilateral) de x es $D(x) = D^+(x) \cup D^-(x)$

Proposición 1.23. Para cada $x\varepsilon X$,

(1) $D^+(x)$ es cerrado y positivamente invariante

(2) $D^+(xt) \subset D^+(x)$ para cada $t\varepsilon R^+$, y

(3) $K^+(x) \subset D^+(x)$

Las versiones bilaterales también son ciertas. (Ver [6], p.60; [7], I, pp.42-44; y [8], p.26.)

Definición 1.24. Para cada $x\varepsilon X$, el conjunto límite prolongacional positivo (negativo) es

$J^+(x) = \{y\varepsilon X : x_i t_i \to y$ para algunas redes $x_i \to x$ y $t_i \to +\infty\}$

($J^-(x) = \{y\varepsilon X : x_i t_i \to y$ para algunas redes $x_i \to x$ y $t_i \to -\infty\}$

El conjunto límite prolongacional (bilateral) de x es $J(x) = J^+(x) \cup J^-(x)$.

Proposición 1.25. Para cada $x\varepsilon X$,

(1) $J^+(x)$ es cerrado e invariante

(2) $J^+(xt) = J^+(x)$ para cada $t\varepsilon R$

(3) $L^+(x) \subset J^+(x)$

(4) $D^+(x) = C^+(x) \cup L^+(x)$

Las versiones bilaterales también se cumplen. (Ver [6], p.60, [7], I, pp. 44-45; y [8], pp.26, 58.)

Proposición 1.26. Si $y\varepsilon K(x)$, entonces $J^+(x) \subset J^+(y)$. (Ver [6], p. 72 y [7], I, p.51.)

Proposición 1.27. $y \varepsilon D^+(x)$ si y sólo si $x \varepsilon D^-(y)$. Además, $y \varepsilon J^+(x)$ si y sólo si $x \varepsilon J^-(y)$. (Ver [7] , I, p.46; [8] , p.29; y [17] , p. 127.)

Definición 1.28. Un conjunto M se denomina positivamente d-invariante si $D^+(M) = M$ (los conjuntos $D^+(M)$, $J^+(M)$, etc, se interpretan en forma análoga a $C^+(M)$, etc). Las versiones negativa y bilateral se definen en forma análoga.

Proposición 1.29. Si M es positivamente d-invariante, entonces es positivamente invariante. La versión bilateral también es cierta (ver [7] , II, p.3.)

Proposición 1.30. Sea X' un subconjunto invariante de X y $\Pi' = \Pi|X'$. Entonces para cualquier $x \varepsilon X'$, $L'^+(x) = L^+(x) \cap X'$; además $L'^+(x) = L^+(x)$ si X' es cerrado. Por otra parte, $J'^+(x) \subset J^+(x) \cap X'$; además $J'^+(x) = J^+(x) \cap X'$ si X' es abierto (ver [7] , I, pp. 52-53).

Recursión

Definición 1.31. Un punto $x \varepsilon X$ se denomina

(1) positivamente Poisson estable, negativamente Poisson estable, (bilateralmente) Poisson estable si, respectivamente, $x \varepsilon L^+(x)$, $x \varepsilon L^-(x)$, $x \varepsilon L^+(x) \cap L^-(x)$.

(2) no extraviado si $x \varepsilon J^+(x)$

Teorema 1.32. Sea X un espacio localmente compacto o un espacio métrico completo. Si un punto $x \varepsilon X$ no es periódico ni crítico entonces

$$\overline{L^+(x) - C(x)} = L^+(x)$$

(ver [7], I, p.59.)

Teorema 1.33. Sea X un espacio métrico localmente compacto o un espacio métrico completo. Si todo punto $x \varepsilon X$ es no extraviado, entonces el conjunto de los puntos (bilateralmente) Poisson estables es denso en X. (Ver [7], I, p.60.)

Definición 1.34. Un conjunto M se denomina positivamente minimal, negativamente minimal, (bilateralmente) minimal si y sólo si es cerrado y, respectivamente, positivamente invariante, negativamente invariante, invariante y no contiene ningún subconjunto propio con estas propiedades.

Teorema 1.35. Un subconjunto de un espacio fase localmente compacto es positivamente (o negativamente) minimal si y sólo si es compacto minimal (ver [7], II, p. 48.)

Dispersión

Definición 1.36. Un punto x se denomina positivamente, negativamente, o (bilateralmente) dispersivo, si y sólo si, respectivamente, $J^+(x) = \emptyset$, $J^-(x) = \emptyset$, $J^+(x) = J^-(x) = \emptyset$. El flujo (X, Π) es positivamente, negativamente, o (bilateralmente) dispersivo, si y sólo si, respectivamente, cada uno de sus puntos es tal.

Definición 1.37. Dos flujos (X, Π) y (X', Π') son dinámicamente isomorfos si y sólo si existe un homeomorfismo (topológico) $f\colon X \approx X'$ que satisface $f(\Pi(x,t)) = \Pi'(f(x),t)$ para todo $x \varepsilon X$ y $t \varepsilon R$.

Definición 1.38. Un sistema dinámico $(Y \times R, \Pi')$ se denomina paralelo si y sólo si $(y,s)t = (y,s+t)$ para cada $y \in Y$ y $s,t \in R$.

Definición 1.39. Un flujo (X, Π) se denomina paralelizable si y sólo si es dinámicamente isomorfo a un flujo paralelo.

Proposición 1.40. Todo sistema dinámico paralelizable es dispersivo (ver [4], p. 548 y [7], I, p.83.)

Estabilidad y Atracción

Definición 1.41. $M \subset X$ se denomina

(1) positivamente estable si y sólo si todo entorno de M contiene un entorno positivamente invariante de M.

(2) positivamente d-estable si y sólo si todo entorno de M contiene un entorno positivamente d-invariante de M.

Las versiones negativa y bilateral se definen de manera análoga.

Se acostumbra omitir el adjetivo "positivo" pero nunca los adjetivos "negativo" o "bilateral" cuando se hace referencia al concepto de estabilidad. Nosotros adoptaremos este criterio.

Proposición 1.42. Si $M \subset X$ es d-estable entonces es estable. La versión bilateral también es cierta (ver [7], II, p.6.)

Teorema 1.43. Si $M \subset X$ es estable, o d-estable, entonces M es, respectivamente, positivamente invariante, o positivamente d-invariante. La versión bilateral también es cierta. (Ver [7], II, pp.6-7)

Proposición 1.44. La unión de conjuntos estables o d-estables tiene la correspondiente propiedad. La versión bilateral también es cierta (ver [7], II, p.6.)

Teorema 1.45. Sea X localmente compacto. Entonces un subconjunto cerrado M, con ∂M compacta, es estable si y sólo si $D^+(M) = M$. La versión bilateral también es cierta. (ver [6], p.77; [7], II, p.8; y [17], p. 127.)

En lo que sigue, consideraremos a R dirigido por el orden natural $\geqslant$ sobre R. Así, para cada $x \varepsilon X$, la aplicación Π con x fijo es una red sobre R la cual notaremos por (xt). La expresión "(xt) está últimamente en V" significa que existe un $T \varepsilon R$ tal que $xt \varepsilon V$ para $t \geqslant T$, mientras que "(xt) está frecuentemente en V" significa que existe una red (t_i) en R con $t_i \rightarrow +\infty$ tal que $xt_i \varepsilon V$. La red negativa se define en forma análoga utilizando el orden $\leqslant$ sobre R.

Definición 1.46. Dado $M \subset X$ y un punto $x \varepsilon X$ se dice que

(1) x es positivamente débilmente atraído hacia M si y sólo si la red (xt) está frecuentemente en todo entorno de M

(2) x es positivamente atraído hacia M si y sólo si la red (xt) está últimamente en todo entorno de M. Las versiones negativas de los conceptos anteriores se introducen usando las correspondientes redes negativas, y las versiones bilaterales son las conjunciones de las versiones positiva y negativa.

Tal como se hizo en el caso de estabilidad omitiremos el adjetivo "positivo" cuando nos refiramos a las versiones positivas de atracción. Los adjetivos "negativo" y "bilateral" nunca serán omitidos.

Proposición 1.47. Un punto $x \varepsilon X$ es atraído débilmente hacia $M \subset X$, si y sólo si $K^+(xt) \cap M \neq \emptyset$ para todo $t \varepsilon R$. La versión bilateral también es cierta (ver [7], II, p.18.)

Definición 1.48. Sea $M \subset X$. Entonces los conjuntos

(1) $A_w^+(M) = \{x \varepsilon X : x \text{ es débilmente atraído hacia } M\}$

(2) $A^+(M) = \{x \varepsilon X : x \text{ es atraído hacia } M\}$

se denominan las regiones de atracción débil y atracción, respectivamente. En forma análoga se definen las correspondientes regiones de atracción negativa y se notan por $A_w^-(M)$ y $A^-(M)$, respectivamente. Las regiones de atracción bilateral son entonces las intersecciones de las regiones correspondientes a las respectivas versiones positiva y negativa.

Proposición 1.49. Para cualquier $M \subset X$,

(1) $A_w^+(M) \supset A^+(M)$

(2) $A_w^+(M)$ y $A^+(M)$ son invariantes

Las versiones bilaterales son también ciertas (ver [2], p. 159 y [7], II, p.25.)

Proposición 1.50. Si X es localmente compacto y $M \subset X$ es compacto, entonces $x \varepsilon A^+(M)$ si y sólo si $\emptyset \neq L^+(x) \subset M$. La versión bilateral también es cierta (ver [2], p.159)

Definición 1.51. Un conjunto $M \subset X$ es un atractor débil (positivo) o un atractor (positivo), si y sólo si, respectivamente, $A_w^+(M)$, o $A^+(M)$, es entorno de M. Las versiones negativa y bilateral se definen en forma análoga.

Proposición 1.52. Un conjunto $M \subset X$ es un atractor débil, o un atractor, si y sólo si, respectivamente, $A_w^+(M)$, o $A^+(M)$, es un conjunto abierto invariante que contiene a M. La versión bilateral también es cierta (ver [7], II, p.28.)

Definición 1.53. Un conjunto $M \subset X$ se denomina (positivamente) asintóticamente estable si y sólo si es un atractor estable. Las versiones negativa y bilateral se definen en forma análoga.

Proposición 1.54. Un conjunto $M \subset X$ es bilateralmente asintóticamente estable si y sólo si es abierto e invariante (ver [7], II, p. 33.)

Flujos de característica 0^+, 0^-, $0^{\pm}$ y 0

Definición 1.55. Un flujo (X, Π) tiene característica $0^+(0^-)$ si y sólo si $D^+(x) = K^+(x)$ $(D^-(x) = K^-(x))$ para cada $x \varepsilon X$. Si el flujo tiene características 0^+ y 0^-, se dice entonces que tiene característica $0^{\pm}$. El flujo tiene característica 0 si y sólo si $D(x) = K(x)$ para todo x en X.

Proposición 1.56. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $D^+(x) = K^+(x)$ para todo x en X.

(2) $J^+(x) = L^+(x)$ para todo x en X

(3) Todo subconjunto cerrado positivamente invariante es positivamente d-invariante. (Ver [7], II, p.52.)

Proposición 1.57. La restricción de un sistema dinámico de característica 0^+ a un subconjunto cerrado invariante tiene también característica 0^+ (ver [7], II, p.53.)

Proposición 1.58. Sea (X, Π) un sistema dinámico de característica 0^+ y sea $x \varepsilon X$. Entonces $L^+(x)$ y $L^-(x)$ son positivamente minimales si no son vacíos (ver [2], p. 160 y [7], II, p.53.)

Definición 1.59. Sea $X = R^2$. Un punto crítico s es un centro global de Poincaré, si para cada $x \neq s$, $C(x)$ es una trayectoria periódica alrededor de s. Es un centro local de Poincaré si tiene un entorno M tal que para cada $x \varepsilon M - \{s\}$, $C(x)$ es una trayectoria periódica alrededor de s.

Teorema 1.60. Sea (R^2, Π) un flujo de característica $0^\pm$ y S el conjunto de los puntos críticos. Entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple.

(1) $S = \emptyset$ y el flujo es paralelizable

(2) $S = R^2$

(3) $S = \{s_0\}$ y s_0 es un centro global de Poincaré

(ver [1], p. 573.)

NOTACION. Para cualquier curva cerrada simple C en R^2 notaremos las componenetes acotada y no acotada de $R^2 - C$ por int C y ext C, respectivamente.

Si $s \varepsilon R^2$ es un punto crítico, entonces $N_s = \{x \varepsilon R^2 : x = s$ o x es periódico y $S \cap \text{int } C(x) = \{s\}\}$ siendo S el conjunto de los puntos críticos.

Proposición 1.61. Sea (R^2, Π) un flujo de característica 0 y S el conjunto de los puntos críticos. Si s_0 es un punto aislado de S, entonces s_0 es un centro de Poincaré y N_{s_0} es un conjunto abierto conexo no acotado (ver [11], p.451.)

Teorema 1.62. Si S es el conjunto de los puntos críticos, un flujo (R^2, Π) tiene característica 0 si y sólo si se cumple una de las siguientes afirmaciones.

(1) $S = \emptyset$ y (R^2, Π) es paralelizable

(2) S consiste a lo sumo de dos centros de Poincaré. Para cada $s \varepsilon S$, o s es un centro global de Poincaré o N_s es no acotado y ∂N_s es una trayectoria. La restricción del flujo a $R^2 - \bigcup_{s \varepsilon S} N_s$ es paralelizable

(3) $S = R^2$

(ver [11], pp. 455-456.)

CAPITULO II

Caracterización de Flujos

que verifican $D^+(x) = C^+(x)$ (o $D^-(x) = C^-(x)$)

para todo x en X

Teorema 2.1. Sea (X, Π) un flujo tal que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X. Entonces

(1) $X = P \cup D$, donde $P = \{x \in X$: x es crítico o periódico con $L^+(x) = J^+(x)\}$ y $D = \{x \in X$: x es dispersivo$\}$

(2) $D^-(x) = C^-(x)$ para todo x en X

(3) P es cerrado e invariante. D es abierto e invariante.

Demostración. (1) Sea $x \in X$ y supongamos que $x \notin D$. Queremos demostrar que $x \in P$. Si $x \notin D$, entonces $J^+(x) \neq \emptyset$ o $J^-(x) \neq \emptyset$. Supongamos primeramente que $J^+(x) \neq \emptyset$ y sea $y \in J^+(x) \subset D^+(x) = C^+(x)$. Entonces $y = xT_1$ para algún $T_1 \geqslant 0$. Además, ya que $J^+(x)$ es invariante (ver Proposición 1.25), $J^+(x) \supset C(y) = C(xT_1) = C(x)$. Luego, $C(x) \subset J^+(x) \subset C^+(x)$. Por tanto, existe un número $T \geqslant 0$ tal que $x(-1) = xT$. En consecuencia, $x = x(T + 1)$ de donde x es periódico o crítico. Por tanto $C(x) = C^+(x) = C^-(x) = L^+(x) = L^-(x)$ (ver Proposición 1.21.) Luego, $L^+(x) \subset J^+(x) \subset D^+(x) = C^+(x) = L^+(x)$ y, por tanto, $J^+(x) = L^+(x)$. Supongamos ahora que $J^-(x) \neq \emptyset$ y sea $y\varepsilon J^-(x)$. Entonces $x\varepsilon J^+(y)$ (ver Proposición 1.27) y, por tanto, según lo demostrado antes, y es crítico o periódico con $J^+(y) = L^+(y) = C^-(y)$. Luego, $x\varepsilon C^-(y)$, es decir, $x = yT$ para algún $T \leqslant 0$. Esto implica que $y = (yT)(-T) = x(-T)\varepsilon C^+(x)$. Luego, $J^-(x) \subset C^+(x)$. Como $J^-(x)$ es invariante, también $C^+(x) \subset J^-(x)$. Por tanto, $J^-(x) = C^+(x)$. Luego, $x\varepsilon J^-(x)$, de donde $x\varepsilon J^+(x) \neq \emptyset$. Esto implica, según lo demostrado antes, que x es crítico o periódico con $J^+(x) = L^+(x) = J^-(x)$. Esto completa la prueba de que si $x \notin D$, entonces $x\varepsilon P$. Luego, $X \subset P \cup D$ y como la desigualdad de sentido contrario es obvia, entonces $X = P \cup D$.

(2) Sea $x\varepsilon X$. Entonces o $x\varepsilon P$ o $x\varepsilon D$. Si $x\varepsilon D$, $J^-(x) = \emptyset$. Si $x\varepsilon P$, $J^-(x) = C^+(x) = C^-(x)$. Por tanto, en cualquier caso, $D^-(x) = C^-(x) \cup J^-(x) = C^-(x)$.

(3) Para probar que P es cerrado, sea $\{x_i\}$ una red en P tal que $x_i \to x$. Debemos probar que $x\varepsilon P$. Para cada x_i existe un $t_i > 0$ tal que $x_i = x_i t_i$. Se obtiene así una red (t_i) con $t_i > 0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $t_i \to +\infty$, ya que si $t_i \not\to +\infty$, reemplazamos la red (t_i) por la red $(n_i t_i)$ con n_i entero positivo tal que $n_i t_i \to +\infty$, obteniéndose igualmente que $x_i = x_i(n_i t_i)$ (ver Proposición 1.5.). Se tendrá entonces: $x_i \to x$ y $x_i t_i = x_i \to x$ cuando $t_i \to +\infty$. Por tanto $x\varepsilon J^+(x) \neq \emptyset$. En consecuencia $x\varepsilon P$. Vamos a probar ahora que P es invariante. Para ello, sea $x\varepsilon P$ y $y\varepsilon C(x)$. Entonces $y = xt$ para algún $t\varepsilon R$. Luego, $J^+(y) = J^+(xt) = J^+(x) \neq \emptyset$. Por tanto, $y\varepsilon P$, lo que prueba que $C(x) \subset P$. Luego, $C(P) = \bigcup_{x\varepsilon P} C(x) \subset P$.

Como también $P \subset C(P)$, entonces $P = C(P)$, de donde P es invariante. Finalmente, como P es cerrado e invariante, de la parte (1) y de la Proposición 1.10, se obtiene que D es abierto e invariante.

<u>Corolario 2.2</u>. Un flujo verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si $D^-(x) = C^-(x)$ para todo x en X.

<u>Demostración</u>. El resultado se deduce de la parte (2) del teorema anterior y de la correspondiente propiedad dual.

<u>Corolario 2.3</u>. Si $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X el flujo tiene características 0^+, 0^-, $0^\pm$ y 0. Además, $D(x) = C(x)$ para todo x en X. [illegible]

[illegible]

<u>Demostración</u>. Sea $x \in X$. Ya que $C^+(x)$ y $C^-(x)$ son cerrados, entonces $D^+(x) = C^+(x) = \overline{C^+(x)} = K^+(x)$ y $D^-(x) = C^-(x) = \overline{C^-(x)} = K^-(x)$. Luego, el flujo tiene características 0^+, 0^- y $0^\pm$. Además, todo sistema de característica $0^\pm$ tiene también característica 0. Finalmente, $D(x) = D^+(x) \cup D^-(x) = C^+(x) \cup C^-(x) = C(x)$.

<u>Observación 2.4</u>. Si un flujo verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X, dicho flujo no es equivalente a flujos de característica 0^+, 0^-, $0^\pm$, 0, o a flujos para los cuales $D(x) = C(x)$ para todo x en X. Para probarlo, presentamos a continuación dos ejemplos donde se muestra que la propiedad recíproca de cada una de las afirmaciones del corolario anterior es falsa.

<u>Ejemplo 2.5</u>. (Ver [8], p.33 y [7], I, p.57.) Sea (X, Π) un flujo de-

finido sobre un toro X mediante el sistema de ecuaciones diferenciales planas

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi,\theta);$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha\, f(\phi,\theta)$$

donde $f(\phi,\theta) \equiv f(\phi + 1, \theta) \equiv f(\phi, \theta + 1) \equiv f(\phi + 1, \theta + 1)$ y $f(\phi, \theta) > 0$ si ϕ y θ no son ambos nulos (mod 1), $f(0,0) = 0$. Sea α irracional > 0. Las trayectorias de este flujo consisten de un punto crítico p correspondiente al punto $(0,0)$. Hay una y sólo una trayectoria C_1 tal que para cada $x\varepsilon C_1$, $L^+(x) = X$ y $L^-(x) = \{p\}$. Hay una y sólo una trayectoria C_2 tal que para cada $x\varepsilon C_2$, $L^+(x) = \{p\}$ y $L^-(x) = X$. Para cualquier otra trayectoria C, y para cada $x\varepsilon C$, $L^+(x) = L^-(x) = X$ (ver Figura 2.1).

Consideremos ahora el flujo (X', Π'), donde $X' = X - (\{p\} \cup C_1 \cup C_2)$ y $\Pi' = \Pi|X'$. Entonces para cada $x\varepsilon X'$, $L'^+(x) = L^+(x) \cap X' = L^-(x) \cap X' = L'^-(x) = X'$ (ver Proposición 1.30). Luego, $K'^+(x) = K'^-(x) = X'$. Como $K'^+(x) \subset D'^+(x)$ y $K'^-(x) \subset D'^-(x)$, entonces, $D'^+(x) = D'^-(x) = K'^+(x) = K'^-(x) = X'$. Por tanto, el flujo tiene características $0^{\pm}$ (luego, tiene características 0^+, 0^- y 0). Sin embargo, $D'^+(x) = X' \neq C'^+(x)$.

<u>Ejemplo 2.6</u>. (Ver [11], pag. 450). El flujo (R^2, Π) definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -xy$$

$$\dot{y} = \begin{cases} x-1-y^2 & \text{para } x \geqslant 0 \\ -x-1-y^2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

verifica $D(x) = C(x)$ para todo $x\varepsilon R^2$. También es de característica

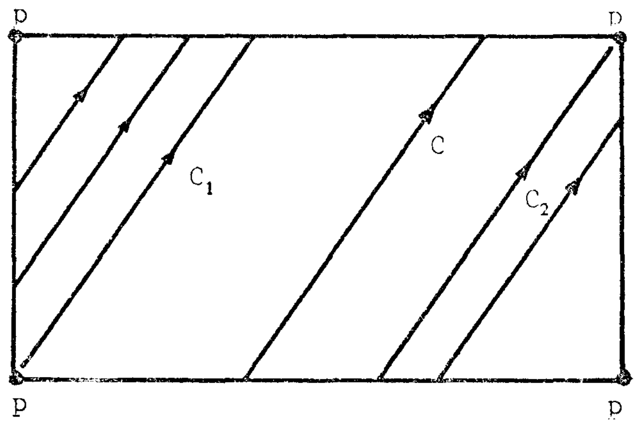

Figura 2.1

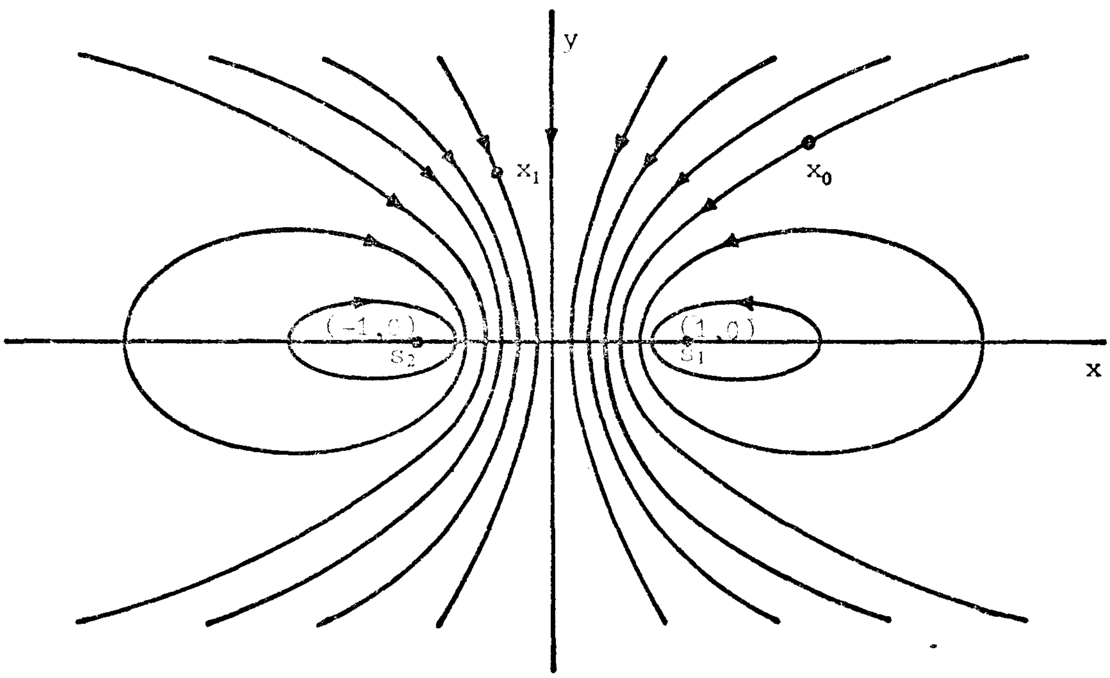

Figura 2.2

0 (ver Figura 2.2.)

Sin embargo, $D^+(x_0) = C(x_0) \neq C^+(x_0)$.

En lo que resta de este capítulo P y D serán los conjuntos definidos en el Teorema 2.1.

Corolario 2.7. Si $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X, entonces D es bilateralmente asintóticamente estable.

Demostración. Se deduce inmediatamente del Teorema 2.1, parte (3), y Proposición 1.54.

Teorema 2.8. $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si $X = P \cup D$.

Demostración. La parte directa ya fue probada en el Teorema 2.1. Para probar el recíproco, sea $x \varepsilon X$. Si $x \varepsilon P$, $J^+(x) = L^+(x) = C^+(x)$ y si $x \varepsilon D$, $J^+(x) = \emptyset$. Por tanto, en cualquier caso, $D^+(x) = C^+(x) \cup J^+(x) = C^+(x)$.

Obsérvese que el Teorema 3 de [5] es un caso particular del siguiente Corolario, ya que en aquél el espacio fase X es un espacio métrico.

Corolario 2.9. El flujo (X,Π) es (bilateralmente) dispersivo si y sólo si para cada x en X, $D^+(x) = C^+(x)$ y no hay puntos periódicos ni críticos.

Corolario 2.10. $X = P$ si y sólo si $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X y no hay puntos positivamente dispersivos (o negativamente dispersivos).

Corolario 2.11. Sea X compacto. Entonces $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si $X = P$.

<u>Proposición 2.12.</u> $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si todo subconjunto positivamente invariante es positivamente d-invariante.

<u>Demostración.</u> Supongamos que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X y sea $M \subset X$ positivamente invariante. Entonces, $D^+(M) = \bigcup_{x\varepsilon M} D^+(x) = \bigcup_{x\varepsilon M} C^+(x) = C^+(M) = M$. Luego, M es positivamente d-invariante. Supongamos ahora que todo subconjunto positivamente invariante es positivamente d-invariante y sea $x\varepsilon X$. Como $C^+(x)$ es positivamente invariante, entonces $D^+(C^+(x)) = C^+(x)$. Pero $D^+(C^+(x)) \subset D^+(x)$ (ver Proposición 1.23) y como también $D^+(x) \subset D^+(C^+(x))$, entonces $D^+(C^+(x)) = D^+(x)$. Por tanto, $D^+(x) = D^+(C^+(x)) = C^+(x)$.

<u>Proposición 2.13.</u> $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si todo subconjunto negativamente invariante es negativamente d-invariante.

<u>Demostración.</u> Se deduce inmediatamente del resultado dual de la Proposición 2.12 y del Corolario 2.2.

<u>Proposición 2.14.</u> Si $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X, entonces todo subconjunto invariante de X es d-invariante.

<u>Demostración.</u> Sea M un subconjunto invariante de X y $x\varepsilon X$. Como $D(x) = C(x)$ (ver Corolario 2.3), entonces $D(M) = \bigcup_{x\varepsilon M} D(x) = \bigcup_{x\varepsilon M} C(x) = C(M) = M$.

<u>Observación 2.15.</u> La propiedad recíproca de la expresada en la proposición anterior es falsa. Para probarlo obsérvese que si $D(x) = C(x)$

para cada x en X, todo subconjunto invariante es d-invariante. Sin embargo, no necesariamente $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X (ver Observación 2.4.)

Corolario 2.16. Supongamos que $D^+(x) = C^+(x)$ para cada x en X y sea $M \subset X$. Entonces M es estable, negativamente estable, o bilateralmente estable si y sólo si es d-estable, negativamente d-estable, o bilateralmente d-estable, respectivamente.

Demostración. Las propiedades recíprocas se deducen inmediatamente de la Proposición 1.42. Supongamos ahora que M es bilateralmente estable y sea U cualquier entorno de M. Entonces existe un entorno V de M tal que $V \subset U$ y $C(V) = V$. Luego, $D(V) = V$ (ver Proposición 2. 14). Por tanto, M es bilateralmente d-estable. En forma análoga se demuestran los otros dos resultados directos usando las Proposiciones 2.12 y 2.13.

Corolario 2.17. Sea X localmente compacto tal que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X y sea M un subconjunto cerrado de X con ∂M compacta. Entonces M es positivamente invariante, negativamente invariante o invariante si y sólo si es d-estable, negativamente d-estable o bilateralmente d-estable, respectivamente.

Demostración. Los resultados recíprocos se deducen inmediatamente del Corolario 2.16 y de la Proposición 1.43. Supongamos ahora que M es invariante. Luego, según Proposición 2.14, $D(M) = M$. Por tanto, M es bilateralmente estable (ver Teorema 1.45) y en consecuencia bilateralmente d-estable (ver Corolario 2.16.) En forma análoga se demuestran los otros dos resultados directos.

Proposición 2.18. Sea X localmente compacto tal que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X. Entonces el conjunto P del Teorema 2.1 es bilateralmente d-estable.

Demostración. Si $P = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea $P \neq \emptyset$ y $x \varepsilon P$. Como $C(x) = C^+(x)$ es invariante y compacto (ver Teorema 1.7), entonces $C(x)$ es bilateralmente d-estable (ver Corolario 2.17.) Además, por ser P invariante, $P = C(P) = \bigcup_{x \varepsilon P} C(x)$; es decir, P es la unión de conjuntos bilateralmente d-estables y, por tanto, según Proposición 1.44, P es bilateralmente d-estable.

Lema 2.19. Sea (X, Π) un flujo de característica 0^+ con X localmente compacto. Sea A una componente de X, $\Pi' = \Pi|A$ y $U = \{x \varepsilon A$; $L'^+(x) \neq \emptyset\}$. Entonces U es abierto en A.

Demostración. El flujo (A, Π') tiene característica 0^+ ya que A es cerrado e invariante (ver Proposiciones 1.57 y 1.10.) Sea $y \varepsilon U$. Entonces $L'^+(y) \neq \emptyset$. Luego, $L'^+(y)$ es positivamente minimal (ver Proposición 1.58). Además, como A es localmente compacto, $L'^+(y)$ es compacto minimal (ver Teorema 1.35.) En consecuencia $K'^+(y)$ es compacto (ver Proposición 1.19.) Por otra parte, ya que $K'^+(y)$ es cerrado y *positivamente invariante,* $D'^+(K'^+(y)) = K'^+(y)$ *(ver Proposición 1.56)* y, por tanto, $K'^+(y)$ es estable (ver Teorema 1.45.) Entonces A contiene un entorno compacto positivamente invariante V de $K'^+(y)$. Sea $z \varepsilon V$. Entonces $L'^+(z) \neq \emptyset$. Luego, $z \varepsilon U$ y, por tanto, $V \subset U$. Por otra parte, $y \varepsilon K'^+(y) \subset V$. Luego, y es un punto interior de U, lo que demuestra que U es abierto en A.

Teorema 2.20. Un flujo (X,Π), con X localmente compacto, verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si el flujo (A, Π'), donde A es cualquier componente de X y $\Pi' = \Pi|A$, es tal que o $A = P'$ o $A = D'$, donde $P' = \{x\varepsilon A : x$ es crítico o periódico con $L'^+(x) = J'^+(x)\}$ y $D' = \{x\varepsilon A : J'^+(x) = J'^-(x) = \emptyset\}$

Demostración. Supongamos que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X. Sea A una componente de X y $x\varepsilon A$. Entonces $J'^+(x) \subset J^+(x) \subset D^+(x) = C^+(x) = C'^+(x)$. Luego, $D'^+(x) = C'^+(x) \cup J'^+(x) = C'^+(x)$ y, por tanto, según Teorema 2.1, $A = P' \cup D'$. Esto implica que $\{x\varepsilon A : L'^+(x) \neq \emptyset\} = P'$. Como (X,Π) tiene característica 0^+ y A es cerrado, también (A,Π') tiene característica 0^+ (ver Proposición 1.57). Luego, según Lema 2.19, P' es abierto en A. Pero también P' es cerrado en A (ver Teorema 2.1). Por tanto D' es también abierto y cerrado en A y como éste es conexo, entonces o $A = P'$ o $A = D'$. Supongamos ahora que o $A \doteq P'$ o $A \doteq D'$ para cualquier componente A de X y sea $x\varepsilon X$. Entonces $x\varepsilon A$ para alguna componente A de X. Vamos a probar primeramente que $J^+(x) = J'^+(x)$. Como $J'^+(x) = J^+(x) \cap A$ (ver Proposición 1.30) basta con probar que $J^+(x) \subset A$. Para ello, supongamos lo contrario y sea $y\varepsilon J^+(x) - A$. Como X es regular existen entornos disjuntos U y V de A y y, respectivamente. Sea (x_n) una red tal que $x_n \to x$. Por ser A un entorno invariante de x, entonces (x_n) y $(x_n t_n)$ están últimamente en A para cualquier red (t_n) tal que $t_n \to +\infty$. Esto contradice que $y\varepsilon J^+(x)$. Luego, $J^+(x) \subset A$

y, por tanto, $J^+(x) = J'^+(x)$. Por otra parte, si $A = P'$, entonces $J'^+(x) = L'^+(x) = C'^+(x) = C^+(x)$, y si $A = D'$, entonces $J'^+(x) = \emptyset$. En cualquier caso, $J^+(x) = J'^+(x) \subset C^+(x)$. Por tanto, $D^+(x) = C^+(x) \cup J^+(x) = C^+(x)$.

Corolario 2.21. Sea X localmente compacto y conexo. Entonces $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si o $X = P$ o $X = D$.

Observación 2.22. Sea X localmente compacto con $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X. La condición o $X = P$ o $X = D$ no implica que X sea conexo, tal como se observa en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.23. Sean $A = \{(x,y)\varepsilon R^2 : (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x,y)\varepsilon R^2 : (x+2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$ y $X = A \cup B$. Consideremos el flujo (X, Π) definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{y} = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad (x,y)\varepsilon A \\ -x-2 & \text{si} \quad (x,y)\varepsilon B \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} -y & \text{si} \quad (x,y)\varepsilon A \\ y & \text{si} \quad (x,y)\varepsilon B \end{cases}$$

X es localmente compacto, $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X y $X = P$ (ver Figura 2.3). Sin embargo, X es disconexo.

Ejemplo 2.24. Sea $A = \{(x,y)\varepsilon R^2 : y = 1\}$, $B = \{(x,y)\varepsilon R^2 : y = -1\}$ y $X = A \cup B$. Consideremos el flujo (X, Π) definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{x} = 1$$

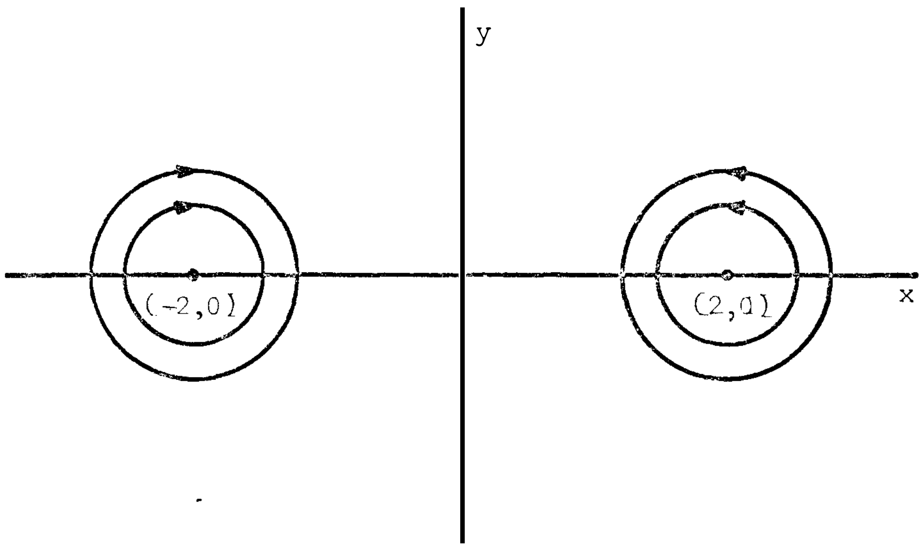

Figura 2.3

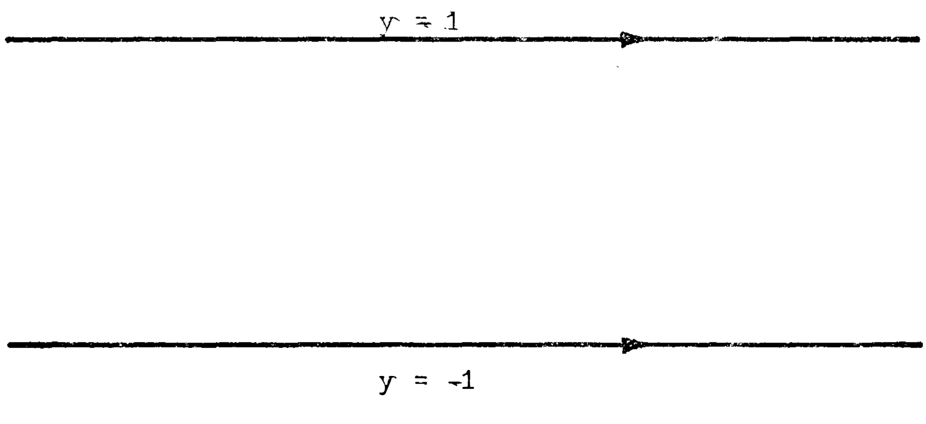

Figura 2.4

X es localmente compacto y el flujo es dispersivo. Por tanto, $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X. Sin embargo, X es disconexo. (Ver Figura 2.4)

A menos que se especifique otra cosa, en cada uno de los restantes resultados de este capítulo supondremos que (X, Π) es un flujo que verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X.

Proposición 2.25. Sea X localmente compacto y M un subconjunto compacto de X. Entonces M es un atractor si y sólo si es abierto e invariante.

Demostración. Supongamos que M es un atractor. Vamos a probar que $A^+(M) = M$. Supongamos que esto no es cierto y sea $y \varepsilon A^+(M) - M$. Entonces $\emptyset \neq L^+(y) \subset M$ (ver Proposición 1.50). Luego, $y \varepsilon P$ y, por tanto, $C^+(y) = L^+(y)$. Entonces $C^+(y) \subset M$, de donde $y \varepsilon M$. Esta contradicción prueba que $A^+(M) = M$, y en consecuencia M es abierto e invariante (ver Proposición 1.52.) La parte recíproca de la proposición se deduce fácilmente de la Proposicion 1.54.

Corolario 2.26. Sea X localmente compacto y M un subconjunto compacto de X. Entonces M es un atractor si y sólo si es bilateralmente asintóticamente estable.

Demostración. Se deduce de las proposiciones 2.25 y 1.54.

Corolario 2.27. Sea X localmente compacto y conexo. Entonces X no contiene ningún atractor compacto a menos que X sea compacto, en cuyo caso el único atractor compacto contenido en X es el propio X.

Demostración. Supongamos que X contiene un atractor M compacto. Entonces M es cerrado y abierto. Si X no es compacto, $\emptyset \neq M \neq X$ lo que contradice la conexidad de X. Esto prueba que no existe tal M. Si X es compacto, entonces necesariamente $M = X$.

Proposición 2.28. Sea X localmente compacto y M un subconjunto cerrado contenido en P. Entonces M es un atractor si y sólo si es abierto e invariante.

Demostración. Supongamos que M es un atractor. Vamos a probar que $A^+(M) = M$. Sea $y \varepsilon A^+(M)$. Vamos a mostrar primeramente que $\emptyset \neq L^+(y) \subset M$. En efecto, supongamos que $L^+(y) = \emptyset$. Entonces $C^+(y) \cap M = \emptyset$ ya que si $yT \varepsilon M$ para algún $T \varepsilon R^+$, entonces yT es periódico o crítico, de donde $\emptyset \neq L^+(yT) = L^+(y)$ lo cual sería una contradicción. Por tanto, $M \subset X - C^+(y)$. Como $C^+(y)$ es cerrado, $X - C^+(y)$ es abierto y en consecuencia es un entorno de M. Ya que $y \varepsilon A^+(M)$, la red (yt), $t \varepsilon R^+$, está últimamente en $X - C^+(y)$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $L^+(y) \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $L^+(y) \not\subset M$ y sea $z \varepsilon L^+(y)$ tal que $z \not\varepsilon M$. Por ser X regular existen entornos disjuntos U y V de M y z, respectivamente. Ya que $y \varepsilon A^+(M)$, la red (yt), $t \varepsilon R^+$, está últimamente en U lo que contradice que $z \varepsilon L^+(y)$. Luego, $\emptyset \neq L^+(y) \subset M$. Pero $L^+(y) \neq \emptyset$ implica que $y \varepsilon P$. Por tanto, $C^+(y) = L^+(y)$, de donde $C^+(y) \subset M$. Luego, $y \varepsilon M$ y en consecuencia $A^+(M) \subset M$. Como también $M \subset A^+(M)$, entonces $M = A^+(M)$ lo que prueba que M es abierto e invariante. La parte recíproca de la demostración se deduce de la Proposición 1.54.

Corolario 2.29. Sea X localmente compacto y M un subconjunto cerrado de X contenido en P. Entonces M es un atractor si y sólo si es bilateralmente asintóticamente estable.

Demostración. Se deduce de las Proposiciones 2.28 y 1.54.

Proposición 2.30. Sea M un subconjunto de X contenido en D. Si M es un atractor, entonces M es positivamente invariante y $A^+(M) = C^-(M)$.

Demostración. Supongamos que M es un atractor y sea $y \varepsilon A^+(M)$. Entonces $y \varepsilon A_w^+(M)$ (ver Proposición 1.49) y por tanto $K^+(y) \cap M \neq \emptyset$ (ver Proposición 1.47.) Puesto que $K^+(y) = C^+(y)$, entonces $C^+(y) \cap M \neq \emptyset$. Luego, $yT = x \varepsilon M$ para algún $T \varepsilon R^+$, de donde $y = x(-T) \varepsilon C^-(M)$. Luego, $A^+(M) \subset C^-(M)$. Por otra parte, sea $z \varepsilon C^-(M)$. Entonces $z = x(-T)$ para algún $x \varepsilon M$ y algún $T \varepsilon R^+$. Luego, $x = zT \varepsilon C^+(z) \cap M$. Ya que $M \subset A^+(M)$, entonces $C^+(z) \cap A^+(M) \neq \emptyset$ y como $A^+(M)$ es invariante, $C^+(z) \subset A^+(M)$, de donde $z \varepsilon A^+(M)$. Luego $C^-(M) \subset A^+(M)$. Esto completa la prueba de que $A^+(M) = C^-(M)$. Esto implica que $C^-(M)$ es invariante y, por tanto, positivamente invariante. Como $M \subset C^-(M)$, entonces $C^+(M) \subset C^-(M)$. Luego, $C^+(M) = C^+(M) \cap C^-(M) = M$ ya que si existe $y \varepsilon C^+(M) \cap C^-(M) - M$, entonces $y = xT_1 = xT_2$ para algunos $T_1 > 0$, $T_2 < 0$ y $x \varepsilon M$. Por tanto, $x = x(T_1 - T_2)$, con $T_1 - T_2 > 0$. Esto implica que x es periódico lo cual es una contradicción. Luego, M es positivamente invariante.

Proposición 2.31. Sea M un subconjunto de X contenido en D. Si

M es un atractor negativo, entonces M es negativamente invariante y $A^-(M) = C^+(M)$.

Demostración. Análoga a la de la Proposición 2.30.

Corolario 2.32. Sea M un subconjunto de X contenido en D. Entonces M es un atractor bilateral si y sólo si es abierto e invariante.

Demostración. Si M es un atractor bilateral, entonces, según Proposiciones 2.30 y 2.31, M es positivamente y negativamente invariante, respectivamente, con $A^+(M) = C^-(M)$ y $A^-(M) = C^+(M)$. Luego, M es invariante y $A^+(M) = A^-(M) = A(M) = M$, de donde se deduce que M es abierto. La suficiencia se obtiene de la Proposición 1.54.

Corolario 2.33. Sea $M \subset D$. Entonces M es un atractor bilateral si y sólo si es bilateralmente asintóticamente estable.

Demostración. Se deduce del Corolario 2.32 y de la Proposición 1.54.

Proposición 2.34. Sea X localmente compacto y A una componente de X. Entonces el único atractor bilateral cerrado contenido en A es el propio A.

Demostración. Sean Π', P' y D' como en el Teorema 2.20. Entonces, según dicho teorema, o $A = P'$ o $A = D'$. Sea M un atractor bilateral cerrado contenido en A. Entonces, o $M \subset P'$ o $M \subset D'$. Luego, según Proposición 2.28 o Corolario 2.32, respectivamente, M es abierto. Como A es conexo y $M \neq \emptyset$, necesariamente $M = A$.

<u>Teorema 2.35</u>. Sea X cualquier subespacio de R^2. Entonces el flujo (X, Π) verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo $x \in X$ si y sólo si el flujo tiene característica $0^\pm$.

<u>Demostración</u>. La necesidad se probó en el Corolario 2.3. Supongamos ahora que el flujo tiene característica $0^\pm$ y que existe un $x \in X$ tal que $D^+(x) \neq C^+(x)$. Como $D^+(x) = K^+(x) \neq C^+(x)$, entonces $\emptyset \neq L^+(x) \not\subset C^+(x)$. Sea $y \in L^+(x) \subset J^+(x)$. Entonces $x \in J^-(y) \subset D^-(y) = K^-(y)$. Pero $K^-(y) \subset L^+(x)$ ya que éste es cerrado e invariante. Por tanto, $x \in L^+(x)$. Luego, x es periódico o crítico (ver Teorema 1.20.) En consecuencia $L^+(x) = C^+(x)$, lo que contradice que $L^+(x) \not\subset C^+(x)$. Esta contradicción prueba que $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X.

<u>Observación 2.36</u>. Según el resultado anterior los tipos básicos de flujos planos que verifican $D^+(x) = C^+(x)$ para todo $x \in R^2$, son los señalados en el Teorema 1.60.

CAPITULO III

Caracterización de Flujos que verifican $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X

Proposición 3.1. Para un flujo (X, Π) las siguientes condiciones son equivalentes

(1) $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X

(2) $J^+(x) = C(x)$ para todo x en X

(3) $J^-(x) = C(x)$ para todo x en X

(4) $J(x) = C(x)$ para todo x en X

(5) $D(x) = C(x)$ para todo x en X y no hay puntos positivamente dispersivos

(6) $D^-(x) = C(x)$ para todo x en X

Demostración. Sea $x \varepsilon X$. Supongamos que se cumple (1). Entonces $J^+(x) \neq \emptyset$, ya que si suponemos lo contrario, entonces $C^+(x) = C(x)$ lo que implica que x es periódico o crítico, obteniéndose así una contradicción. Luego, $J^+(x) \subset D^+(x) = C(x)$ y como $J^+(x)$ es invariante, también $C(x) \subset J^+(x)$. Por tanto, $J^+(x) = C(x)$, es decir, (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos ahora que se cumple (2). Entonces $x \varepsilon J^+(x)$, de donde $x \varepsilon J^-(x)$ (ver Proposición 1.27) y, por tanto, $C(x) \subset J^-(x)$. Sea ahora $y \varepsilon J^-(x)$. Entonces $x \varepsilon J^+(y) = C(y)$, de donde, $y \varepsilon C(x)$. Luego, $J^-(x) \subset C(x)$. Por tanto $J^-(x) = C(x)$. Esto prueba que (2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que se cumple (3). Entonces $C(x) = J^-(x) \subset J(x)$. Sea ahora $y \varepsilon J^+(x)$. Entonces $x \varepsilon J^-(y) = C(y)$, de donde $y \varepsilon C(x)$. Por tanto, $J^+(x) \subset C(x)$. Luego, $J(x) \subset C(x)$ lo que completa la prueba de que $J(x) = C(x)$, es decir, de que (3) $\Rightarrow$ (4). Si se cumple (4) obviamente $D(x) = C(x)$. Además, $x \varepsilon J^+(x) \neq \emptyset$ ya que si suponemos lo contrario, entonces $x \varepsilon J^-(x)$, de donde $x \varepsilon J^+(x)$ obteniéndose así una contradicción. Queda así probado que (4) $\Rightarrow$ (5). Supongamos que se cumple (5). Entonces $\emptyset \neq J^+(x) \subset D(x) = C(x)$. Luego, $C(x) \subset J^+(x)$, de donde $x \varepsilon J^+(x)$ y, por tanto, $x \varepsilon J^-(x)$. Esto implica que $C(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x)$. Como obviamente $D^-(x) \subset C(x)$, entonces $D^-(x) = C(x)$, lo que prueba que (5) $\Rightarrow$ (6). Finalmente, supongamos que se cumple (6). Entonces $J^-(x) \neq \emptyset$, ya que si suponemos lo contrario entonces $C^-(x) = C(x)$, de donde x es periódico o crítico obteniéndose así una contradicción. Luego, $\emptyset \neq J^-(x) \subset D^-(x) = C(x)$. Por tanto, $C(x) \subset J^-(x)$, de donde $x \varepsilon J^-(x)$ y, en consecuencia, $x \varepsilon J^+(x)$. Esto implica que $C(x) \subset J^+(x) \subset D^+(x)$. Sea ahora $y \varepsilon D^+(x)$. Entonces $x \varepsilon D^-(y) = C(y)$. Luego, $y \varepsilon C(x)$ y, por tanto, $D^+(x) \subset C(x)$. Esto completa la prueba de que $D^+(x) = C(x)$, es decir, de que (6) $\Rightarrow$ (1).

Corolario 3.2. Si $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X, el flujo tiene característica 0. Además, el flujo es no extraviado.

Demostración. Sea $x \varepsilon X$. Según proposición anterior, $D(x) = C(x) = K(x)$ ya que $C(x)$ es cerrado. Además, de $J^+(x) = C(x)$, se obtiene que $x \varepsilon J^+(x)$.

Observación 3.3. El recíproco del Corolario 3.2 es falso. Tampoco $D(x) = C(x)$ para todo x en X implica $D^+(x) = C(x)$ para cada x en X. Para probarlo obsérvese que el flujo del Ejemplo 2.6 verifica $D(x) = C(x)$ para todo x en X. Luego, tiene característica 0. Sin embargo, $D^+(x_1) = C^+(x_1) \neq C(x_1)$

Proposición 3.4. Sea M cualquier subconjunto invariante de X. Entonces $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X si y sólo si es cierta cualquiera de las siguientes afirmaciones

(1) $J^+(M) = M$

(2) $J^-(M) = M$

(3) $J(M) = M$

(4) $D^+(M) = M$ y no hay puntos positivamente dispersivos

(5) $D^-(M) = M$ y no hay puntos positivamente dispersivos

(6) $D(M) = M$ y no hay puntos positivamente dispersivos

Demostración. Supongamos que $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X. Vamos a probar que la afirmación (5) es necesaria. Sea $x \varepsilon X$. Entonces, según Proposición 3.1, $D^-(x) = C(x)$. Por tanto, $D^-(M) = \bigcup_{x \varepsilon M} D^-(x) = \bigcup_{x \varepsilon M} C(x) = C(M) = M$. Además, del Corolario 3.2 se obtiene que $J^+(x) \neq \emptyset$. Análogamente, utilizando las correspondientes definiciones y la Proposición 3.1, se prueba que las restantes afirmaciones son también necesarias. Vamos a probar ahora la suficiencia de (5). Sea $x \varepsilon X$. Como $C(x)$ es invariante, entonces $D^-(C(x)) = C(x)$. Pero $D^-(C(x)) = C^-(C(x)) \cup J^-(C(x)) = C(x) \cup J^-(x)$. Luego, $C(x) \cup J^-(x) = C(x)$, de donde $J^-(x) \subset C(x)$. Sea ahora $y \varepsilon J^+(x)$. Entonces $x \varepsilon J^-(y) \subset C(y)$. Luego, $y \varepsilon C(x)$

y, por tanto, $J^+(x) \subset C(x)$. Esto implica que $C(x) \subset J^+(x)$ y, en consecuencia, que $J^+(x) = C(x)$. Luego, según Proposición 3.1, $D^+(x) = C(x)$. En forma análoga, y utilizando la Proposición 3.1, se prueba que las restantes condiciones son también suficientes.

<u>Proposición 3.5</u>. Supongamos que $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X. Si para algún $x \in X$, $L^+(x) \neq \emptyset$ $(L^-(x) \neq \emptyset)$, entonces $L^+(x) = C(x)$ $(L^-(x) = C(x))$. En particular, x es positivamente (negativamente) Poisson estable.

<u>Demostración</u>. Sea $x \in X$ con $L^+(x) \neq \emptyset$. Entonces $L^+(x) \subset D^+(x) = C(x)$. Como $L^+(x)$ es invariante, también $C(x) \subset L^+(x)$. Por tanto, $L^+(x) = C(x)$. La demostración es análoga en el caso de que $L^-(x) \neq \emptyset$, ya que $D^+(x) = C(x)$ implica $D^-(x) = C(x)$.

<u>Corolario 3.6</u>. Supongamos que $D^+(x) = C(x)$ y $L^+(x) \neq \emptyset (L^-(x) \neq \emptyset)$ para todo x en X. Entonces, el flujo tiene característica 0^+ (característica 0^-). En particular, si $L^+(x) \neq \emptyset \neq L^-(x)$ para todo x en X, el flujo tiene característica $0^{\pm}$.

<u>Demostración</u>. Sea $x \in X$. Entonces $L^+(x) = C(x)$ según Proposición 3.5. Luego, $L^+(x) = J^+(x)$ (ver Proposición 3.1.) Por tanto, $D^+(x) = C^+(x) \cup L^+(x) = K^+(x)$ y el flujo tiene característica 0^+. Si $L^-(x) \neq \emptyset$ para todo x en X, la correspondiente demostración es análoga.

<u>Observación 3.7</u>. Los resultados recíprocos del corolario anterior son falsos. Para probarlo, obsérvese que el flujo (X', Π') del Ejemplo 2.5 tiene característica $0^{\pm}$ (por tanto, características 0^+ y 0^-) con

$L'^{+}(x) = L'^{-}(x) \neq \emptyset$ para todo x en X'. Sin embargo, $D'^{+}(x) = X' \neq C'(x)$ para cualquier $x \varepsilon X'$.

Es bien conocido que para cualquier flujo definido sobre un subespacio de R^2, un punto es positivamente o negativamente Poisson estable si y sólo si es periódico o crítico (ver Teorema 1.20). La siguiente proposición nos da un ejemplo de una clase de flujos sobre otros espacios fases, que presentan una propiedad similar.

<u>Proposición 3.8.</u> Sea X un espacio localmente compacto o métrico completo tal que $D^{+}(x) = C(x)$ para todo x en X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) $L^{+}(x) \neq \emptyset$ $(L^{-}(x) \neq \emptyset)$

(2) x es periódico o crítico

(3) x es Poisson estable

<u>Demostración.</u> Sea $x \varepsilon X$ con $L^{+}(x) \neq \emptyset$. Entonces $L^{+}(x) = C(x)$ según Proposición 3.5. Si suponemos que x no es periódico ni crítico, entonces $\emptyset = \overline{L^{+}(x) - C(x)} = L^{+}(x)$ (ver Teorema 1.32).
Esta contradicción prueba que x es periódico o crítico y que, por tanto $(1) \Rightarrow (2)$. La demostración en el caso $L^{-}(x) \neq \emptyset$ es similar usando el dual del Teorema 1.32. Finalmente, $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ son evidentes.

<u>Corolario 3.9.</u> Sea X un espacio métrico localmente compacto o un espacio métrico completo tal que $D^{+}(x) = C(x)$ para todo x en X. Entonces el conjunto de los puntos periódicos es denso en X.

<u>Demostración.</u> Ya que, según proposición anterior, el conjunto de los

puntos periódicos coincide con el de los puntos Poisson estables y el flujo es no extraviado (ver Corolario 3.2), el resultado se deduce del Teorema 1.33.

Teorema 3.10. Sea X cualquier subespacio de R^2. Un flujo (X, Π) verifica $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X si y sólo si tiene característica 0 sin puntos positivamente dispersivos.

Demostración. La necesidad fue demostrada en el Corolario 3.2. Supongamos ahora que el flujo tiene característica 0 con $J^+(x) \neq \emptyset$ para cada x en X y sea $x \varepsilon X$. Entonces $J^+(x) \subset D(x) = K(x)$. Si $L(x) = \emptyset$, entonces $K(x) = C(x)$ y, por tanto, $J^+(x) \subset C(x)$. Pero esto implica que también $C(x) \subset J^+(x)$. Luego, $J^+(x) = C(x)$, de donde $D^+(x) = C(x)$. Si $L(x) \neq \emptyset$, sea $y \varepsilon L(x)$. Entonces $y \varepsilon J(x)$, de donde $x \varepsilon J(y) \subset D(y) = K(y)$. Pero $K(y) \subset L(x)$ ya que $L(x)$ es invariante y cerrado. Luego, $x \varepsilon L(x)$ y, por tanto, $x \varepsilon L^+(x)$ o $x \varepsilon L^-(x)$. En cualquier caso, x es periódico o crítico (ver Teorema 1.20) y, en consecuencia, $D(x) = K(x) = C(x)$. Luego, $D^+(x) \subset C(x) = L^+(x) \subset D^+(x)$. Por tanto, $D^+(x) = C(x)$. Esto completa la prueba.

Teorema 3.11. Sea X un espacio localmente compacto o un espacio métrico completo. Un flujo (X, Π) verifica $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X si y sólo si tiene característica 0 sin puntos positivamente dispersivos.

Demostración. Es similar a la del teorema anterior, con la única variante de que la propiedad $x \varepsilon L^+(x)$ (o $x \varepsilon L^-(x)$) implica que x es periódico o crítico se deduce de la Proposición 3.8.

En el siguiente teorema S es el conjunto de los puntos críticos y N_s tal como en la Proposición 1.61.

Teorema 3.12. Un flujo (R^2, Π) verifica $D^+(x) = C(x)$ para todo x en R^2 si y sólo si es cierta una de las siguientes afirmaciones

(1) $S = R^2$

(2) S consiste de un centro global de Poincaré

(3) S consiste de dos centros de Poincaré, s_1 y s_2, con N_s no acotado para cada $s\varepsilon S$ y $\partial N_{s_1} = \partial N_{s_2} = R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s = C(x)$ para algún $x\varepsilon R^2$.

Demostración. Según Teorema 3.10, un flujo (R^2, Π) verifica $D^+(x) = C(x)$ para todo x en R^2 si y sólo si es cierta una de las afirmaciones del Teorema 1.62 tales que $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en R^2. Vamos a probar que estas afirmaciones son precisamente las señaladas arriba. En efecto; cada una de las afirmaciones (1), (2) o (3), o coincide con una de las afirmaciones del Teorema 1.62, o se trata de un caso particular de alguna de ellas. Además, en los casos (1) y (2) es evidente que $J^+(x) \neq \emptyset$ para cada x en R^2. Vamos a probar que esto también es cierto en el caso (3). En efecto, sea $x\varepsilon R^2$. Si $x \varepsilon \bigcup_{s\varepsilon S} N_s$, evidentemente $J^+(x) \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $x\varepsilon R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s = \partial N_{s_1} = \partial N_{s_2}$ y sea (x_n) una red de puntos periódicos tal que $x_n \to x$. Entonces, existe una red (t_n), con $t_n > 0$, tal que $x_n = x_n t_n$. Sin perder generalidad, tal como se probó en la demostración del Teorema 2.1, parte (3), podemos suponer que $t_n \to +\infty$. Luego, $x_n \to x$ y $x_n t_n = x_n \to x$ cuando $t_n \to +\infty$. Esto implica que $x\varepsilon J^+(x)$ y, por tanto, $J^+(x) \neq \emptyset$.

Solo queda por demostrar que los restantes tipos de flujos correspondientes a las afirmaciones del Teorema 1.62, no satisfacen $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en R^2. En efecto, si $S = \emptyset$ y (R^2, Π) es paralelizable, entonces el flujo es positivamente dispersivo (ver Proposición 1.40.) Supongamos ahora que S consiste de centros locales de Poincaré (dos a lo sumo, según Teorema 1.62), y que $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en R^2. Entonces, según Teorema 3.10, $D^+(x) = C(x)$ para todo x en R^2. Vamos a probar primeramente que $R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s = \partial(\bigcup_{s\varepsilon S} N_s)$. Para ello, sea $X' = \operatorname{int}(R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s)$ y supongamos que $X' \neq \emptyset$. Ya que para cada $s\varepsilon S$, N_s es invariante, entonces $R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s$ también lo es (ver Proposiciones 1.11 y 1.10.) Luego, según Proposición 1.12, también X' es invariante. Consideremos el flujo (X', Π'), donde $\Pi' = \Pi|X'$. Ya que la restricción del flujo (R^2, Π) a $R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s$ es paralelizable (ver Teorema 1.62) y, por tanto, positivamente dispersivo, también el flujo (X', Π') es positivamente dispersivo. Luego, si $x\varepsilon X'$, $\emptyset = J'^+(x) = J^+(x) \cap X'$ (ver Proposición 1.30.) Por tanto, $x \not\varepsilon J^+(x)$ lo que contradice $D^+(x) = C(x)$ para todo x en R^2 (ver Corolario 3.2.) Esta contradicción prueba que $X' = \operatorname{int}(R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s) = \emptyset$. Ya que N_s es abierto para cada $s\varepsilon S$ (ver Proposición 1.61), entonces $R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s$ es cerrado. Por tanto, $R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s = \partial(R^2 - \bigcup_{s\varepsilon S} N_s) = \partial(\bigcup_{s\varepsilon S} N_s)$. Supongamos ahora que S consiste de dos centros de Poincaré, s_1 y s_2, con $\partial N_{s_1} \neq \partial N_{s_2}$. Como para cada $s\varepsilon S$, ∂N_s es una trayectoria (ver Teorema 1.62), entonces $\partial N_{s_1} \cap \partial N_{s_2} = \emptyset$. Luego, $\bar{N}_{s_1} \cap \bar{N}_{s_2} = \emptyset$. Además, de $R^2 - \bigcup_{s\in S} N_s = \partial(\bigcup_{s\in S} N_s)$ se obtiene que $R^2 = \overline{\bigcup_{s\in S} N_s} = \bigcup_{s\in S} \bar{N}_s = \bar{N}_{s_1} \cup \bar{N}_{s_2}$.

Pero esto contradice la conexidad de R^2. Por tanto, S no puede consistir de dos centros de Poincaré, s_1 y s_2, con $\partial N_{s_1} \neq \partial N_{s_2}$. Supongamos finalmente que S consiste de un centro local de Poincaré s. Entonces $R^2 - N_s = \partial N_s \neq \emptyset$. Ya que ∂N_s es una trayectoria, entonces $\partial N_s = C(x)$ para algún $x \in R^2$. Luego, el flujo $(C(x), \Pi')$, con $\Pi' = \Pi|C(x)$, es paralelizable (ver Teorema 1.62) y en consecuencia positivamente dispersivo. Por tanto, $\emptyset = L'^+(y) = L^+(y)$ para todo $y \in C(x)$ (ver Proposición 1.30). Esto implica que $C(x)$ no es una trayectoria periódica. Definamos $f: C(x) \to R \times \{0\}$ por $f(xt) = (t,0)$. Se comprueba fácilmente que f es un homeomorfismo y, por tanto, $C(x)$ y $R \times \{0\}$ son homeomorfos. Ya que $R^2 - R \times \{0\}$ es disconexo, también $R^2 - C(x) = R^2 - \partial N_s = N_s$ es disconexo, lo cual es una contradicción según Proposición 1.61. Luego, S no puede consistir de un centro local de Poincaré, lo cual completa la prueba del teorema.

<u>Observación 3.13.</u> El teorema anterior implica que hay tres tipo básicos de flujos planos para los cuales $D^+(x) = C(x)$ para todo x en R^2:

(1) Flujos que consisten solamente de puntos críticos

(2) Flujos que tienen un centro global de Poincaré

(3) Flujos similares al del Ejemplo 2.6 excepto que $\partial N_{s_1} = \partial N_{s_2}$ donde $S = \{s_1, s_2\}$.

CAPITULO IV

Caracterización de flujos tales que para cada x en X se cumple una de las siguientes afirmaciones: $D^+(x)=C^-(x)$, $D(x)=K^+(x)$, $D^+(x)=K(x)$

Caracterización de flujos tales que $D^+(x)=C^-(x)$ para todo x en X.

Teorema 4.1. Sea (X, Π) un flujo continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) Para cada x en X, x es crítico o periódico con $J^+(x) = L^+(x)$

(2) $D^+(x) = C^+(x)$ y $\mathcal{J}^+(x) \neq \emptyset$ para cada x en X

(3) $D^+(x) = C^-(x)$ para cada x en X

(4) $D^-(x) = C^+(x)$ para cada x en X

(5) $D(x) = C^+(x)$ para cada x en X

(6) $D(x) = C^-(x)$ para cada x en X

Demostración. Si se cumple (1) obsérvese que $X = P$, siendo P el conjunto definido en el Teorema 2.1. Luego, según Teorema 2.8, (1) $\Leftrightarrow$ (2). Además, (2) $\Leftrightarrow$ $D^-(x) = C^-(x)$ para todo x en X (ver Corolario 2.2.) Luego, si se cumple (1) entonces $D^+(x) = C^+(x) = C^-(x) = D^-(x)$, de donde (1) implica cada una de las restantes afirmaciones. Vamos a probar ahora que cada una de las afirmaciones (3), (4), (5) y (6), implica (2).

Sea $x \in X$. Supongamos que se cumple (3). Entonces $C^+(x) \subset D^+(x) = C^-(x)$. Luego, x es periódico o crítico y, por tanto, $D^+(x) = C^-(x) = C^+(x)$. Esto prueba que (3) $\Rightarrow$ (2). Si se cumple (4), entonces $C^-(x) \subset D^-(x) = C^+(x)$. Entonces x es periódico o crítico y, por tanto, $D^-(x) = C^+(x) = C^-(x)$. Luego, $D^+(x) = C^+(x)$ (ver Corolario 2.2.) Esto prueba que (4) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que se cumple (5). Entonces $C(x) \subset D(x) = C^+(x)$, de donde x es periódico o crítico y, por tanto, $J^+(x) \neq \emptyset$. Además, $D^+(x) \subset D(x) = C^+(x)$ y como también $C^+(x) \subset D^+(x)$, entonces $D^+(x) = C^+(x)$. Esto prueba que (5) $\Rightarrow$ (2). Finalmente, si se cumple (6) entonces $C(x) \subset D(x) = C^-(x)$, de donde x es periódico o crítico. Por tanto, $J^+(x) \neq \emptyset$. Además, $D^+(x) \subset D(x) = C^-(x) = C^+(x)$. Luego, $D^+(x) = C^+(x)$ lo que prueba que (6) $\Rightarrow$ (2).

Observación 4.2. Del teorema anterior y de la Observación 2.36, se deduce que hay dos tipos básicos de flujos planos que satisfacen cualquiera de las condiciones (1) a (6) de aquél

(1) $S = R^2$

(2) $S = \{s_0\}$ y s_0 es un centro global de Poincaré.

Caracterización de flujos tales que $D(x)=K^+(x)$ para todo x en X

Teorema 4.3. Para un flujo (X, π) las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(2) $J(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(3) $J^-(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(4) $D^-(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(5) $J^+(x) = K^+(x)$ para todo x en X

Demostración. Sea $x \in X$. Si se cumple (1) entonces $C(x) \cup J(x) = C^+(x) \cup L^+(x)$. Luego, $C(x) \subset C^+(x)$ o $C(x) \cap L^+(x) \neq \emptyset$. Si $C(x) \subset C^+(x)$ entonces x es periódico o crítico y $J(x) \subset D(x) = K^+(x) = L^+(x) \subset J(x)$. Por tanto, $J(x) = K^+(x)$. Si $C(x) \cap L^+(x) \neq \emptyset$, ya que $L^+(x)$ es invariante y cerrado, entonces $K^+(x) \subset L^+(x) \subset J(x) \subset D(x) = K^+(x)$. Por tanto, $J(x) = K^+(x)$. Entonces (1) $\Rightarrow$ (2). Si se cumple (2), entonces $x \in J(x)$. Luego, $x \in J^-(x)$ ya que si suponemos lo contrario, $x \in J^+(x)$, de donde $x \in J^-(x)$ obteniéndose así una contradicción. Ya que $J^-(x)$ es invariante y cerrado, $K^+(x) \subset J^-(x)$. Además, $J^-(x) \subset J(x) = K^+(x)$. Luego, $J^-(x) = K^+(x)$ lo que prueba que (2) $\Rightarrow$ (3). Si se cumple (3), $x \in J^-(x)$, de donde $C^-(x) \subset J^-(x)$. Luego, $D^-(x) = C^-(x) \cup J^-(x) = J^-(x) = K^+(x)$. Entonces (3) $\Rightarrow$ (4). Si se cumple (4), $C^-(x) \cup J^-(x) = C^+(x) \cup L^+(x)$. Luego, $C^+(x) \subset C^-(x)$ o $C^+(x) \cap J^-(x) \neq \emptyset$. Si $C^+(x) \subset C^-(x)$, entonces x es periódico o crítico y $K^+(x) = L^-(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x) = K^+(x)$. Por tanto, $J^-(x) = K^+(x)$. Si $C^+(x) \cap J^-(x) \neq \emptyset$, entonces $K^+(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x) = K^+(x)$, de donde $J^-(x) = K^+(x)$. Luego, en cualquier caso $J^-(x) = K^+(x)$. Esto implica que $x \in J^-(x)$ y, por tanto, que $x \in J^+(x)$, de donde $K^+(x) \subset J^+(x)$. Sea ahora $y \in J^+(x)$. Entonces $x \in J^-(y) = K^+(y)$. Luego, según Proposición 1.26, $J^-(x) \supset J^-(y)$ o, equivalentemente, $K^+(x) \supset K^+(y)$. Esto implica que $y \in K^+(x)$ y, por tanto, $J^+(x) \subset K^+(x)$. Luego $J^+(x) = K^+(x)$ lo que prueba que (4) $\Rightarrow$ (5). Finalmente, si se cumple (5), $D^+(x) = C^+(x) \cup J^+(x) = C^+(x) \cup K^+(x) = K^+(x)$. Por otra parte, sea $y \in D^-(x)$.

Entonces $x \varepsilon D^+(y) = K^+(y)$, de donde $J^+(x) \supset J^+(y)$ o, equivalentemente, $K^+(x) \supset K^+(y)$. Por tanto, $y \varepsilon K^+(x)$ y, en consecuencia, $D^-(x) \subset K^+(x)$. Luego, $D(x) \subset K^+(x)$ y como también $K^+(x) \subset D(x)$, entonces $D(x) = K^+(x)$. Esto completa la prueba del teorema.

<u>Proposición 4.4.</u> Un flujo (X, Π) verifica $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X si y sólo si es positivamente Poisson estable de característica 0^+. En particular, para cada $x \varepsilon X$, $L^+(x) = K^+(x)$.

<u>Demostración.</u> Supongamos que $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X y sea $x \varepsilon X$. Entonces $D^+(x) \subset D(x) = K^+(x)$. Como también $K^+(x) \subset D^+(x)$, entonces $D^+(x) = K^+(x)$, es decir, el flujo tiene característica 0^+. Por tanto, $L^+(x) = J^+(x) = K^+(x)$ (ver Proposiciones 1.56 y 4.3). Luego, $x \varepsilon L^+(x)$ y el flujo es positivamente Poisson estable. Supongamos ahora que el flujo es positivamente Poisson estable de característica 0^+ y sea $x \varepsilon X$. Ya que $x \varepsilon L^+(x)$, entonces $K^+(x) \subset L^+(x) \subset K^+(x)$. Por tanto, $L^+(x) = K^+(x)$. Pero también $L^+(x) = J^+(x)$ según Proposición 1.56. Luego, $J^+(x) = K^+(x)$, de donde, según Proposición 4.3, $D(x) = K^+(x)$.

<u>Observación 4.5.</u> El recíproco de la proposición anterior es falso si el flujo no es positivamente Poisson estable. Esto puede verse en el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo 4.6.</u> Consideremos el flujo (R^2, Π) definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{r} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant r \leqslant 4 \\ 4r \ln \dfrac{4}{r} & \text{para} \quad r > 4 \end{cases}$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad \text{para} \quad r \geqslant 0$$

Este flujo tiene característica 0^+ (ver Figura 4.1).

Sin embargo, $D(x_0) = C(x_0) \cup C_1 \neq C^+(x_0) \cup C_1 = K^+(x_0)$, donde C_1 es la circunferencia de centro 0 y radio 4. Obsérvese que $x_0 \notin L^+(x_0) = C_1$

Proposición 4.7. Un flujo verifica $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X si y sólo si tiene característica 0 con $L^+(x) \neq \emptyset$ para cada x en X.

Demostración. Supongamos que $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X y sea $x \varepsilon X$. Según Proposición 4.4, $x \varepsilon L^+(x)$ y, por tanto, $K^+(x) \subset K(x) \subset L^+(x) \subset K^+(x)$. Por tanto, $K(x) = K^+(x) = D(x)$, quedando así probada la necesidad. Supongamos ahora que el flujo tiene característica 0 con $L^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X. Sea $x \varepsilon X$ y $y \varepsilon L^+(x) \subset J^+(x)$. Entonces, $x \varepsilon J^-(y) \subset D(y) = K(y) \subset L^+(x)$. Luego, $D(x) = K(x) \subset L^+(x) \subset K^+(x)$. Como también $K^+(x) \subset D(x)$, entonces $D(x) = K^+(x)$, quedando así probada la suficiencia.

Observación 4.8. El recíproco de la proposición anterior es falso si $L^+(x) = \emptyset$ para algún $x \varepsilon X$. Esto puede verse en el flujo del Ejemplo 2.6, el cual tiene característica 0. Sin embargo, $D(x_0) = C(x_0) \neq C^+(x_0) = K^+(x_0)$. Nótese que $L^+(x_0) = \emptyset$

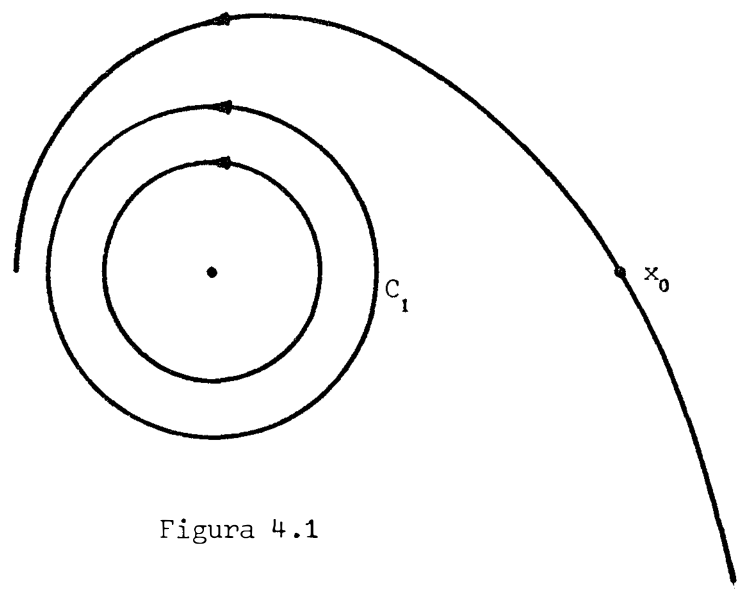

Figura 4.1

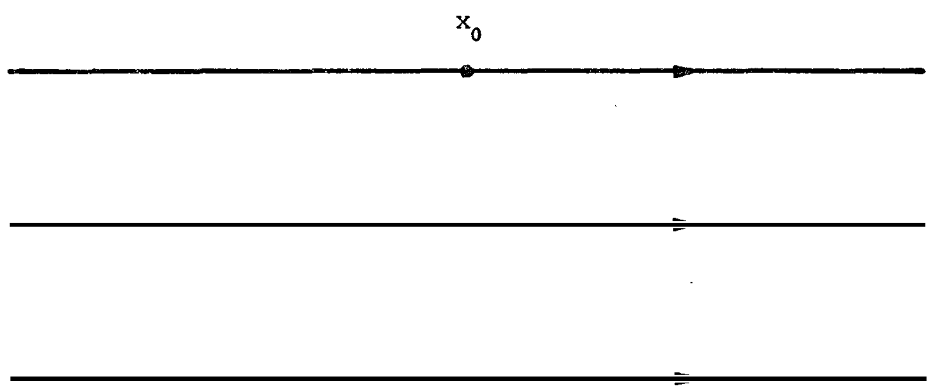

Figura 4.2

Proposición 4.9. Supongamos que $D(x) = K^{+}(x)$ y $L^{-}(x) \neq \emptyset$ para todo x en X. Entonces el flujo tiene característica $0^{\pm}$. El recíproco es cierto si no hay puntos positivamente dispersivos (o negativamente dispersivos). En tal caso, $D^{+}(x) = D^{-}(x) = K^{+}(x) = K^{-}(x)$ para cada x en X.

Demostración. Supongamos que $D(x) = K^{+}(x)$ y $L^{-}(x) \neq \emptyset$ para cada x en X. Según Proposición 4.4 el flujo tiene característica 0^{+}. Sea ahora $x \varepsilon X$ y $y \varepsilon L^{-}(x) \subset J^{-}(x)$. Entonces $x \varepsilon J^{+}(y) \subset D^{+}(y) = K^{+}(y) \subset L^{-}(x)$. Luego, $K^{+}(x) \subset L^{-}(x) \subset K^{-}(x) \subset D(x) = K^{+}(x)$. Por tanto, $K^{-}(x) = K^{+}(x)$. Ya que $D^{-}(x) = K^{+}(x)$ (ver Teorema 4.3), entonces $D^{-}(x) = K^{-}(x)$ quedando así probada la necesidad. Supongamos ahora que el flujo tiene característica $0^{\pm}$ sin puntos positivamente dispersivos. Sean $x \varepsilon X$ y $y \varepsilon L^{+}(x) = J^{+}(x)$. Entonces $x \varepsilon J^{-}(y) \subset D^{-}(y) = K^{-}(y) \subset L^{+}(x)$. Luego, $K^{+}(x) \subset D(x) = K(x) \subset L^{+}(x) \subset K^{+}(x)$. Por tanto, $D(x) = K^{+}(x)$ y, en consecuencia, de la hipótesis y del Teorema 4.3, $K^{-}(x) = D^{-}(x) = K^{+}(x) = D^{+}(x)$.

Observación 4.10. En la proposición anterior la necesidad es falsa si existe algún $x \varepsilon X$ tal que $L^{-}(x) = \emptyset$. También la suficiencia es falsa si $J^{+}(x) = \emptyset$ (o $J^{-}(x) = \emptyset$) para algún $x \varepsilon X$. Para probarlo consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.11. Sea (X, Π) el flujo del Ejemplo 2.5 y consideremos un nuevo flujo (X', Π') donde $X' = X - \{\{p\} \cup C_2\}$ y $\Pi' = \Pi|X'$. Si $x \varepsilon X'$, entonces $L'^{+}(x) = L^{+}(x) \cap X' = X \cap X' = X'$. Luego, $K'^{+}(x) = X'$. Ya que $D'(x) \subset X' = K'^{+}(x) \subset D'(x)$, entonces $D'(x) = K'^{+}(x)$;

es decir, el flujo verifica $D'(x) = K'^{+}(x)$ para todo x en X'. Por otra parte, si $x \varepsilon C_1$, $L'^{-}(x) = L^{-}(x) \cap X' = \{p\} \cap X' = \emptyset$. Además, ya que $x \varepsilon L'^{+}(x) \subset J'^{+}(x)$, entonces $x \varepsilon J'^{-}(x) \neq \emptyset = L'^{-}(x)$. Por tanto, el flujo no tiene característica $0^{\pm}$.

Ejemplo 4.12. Consideremos el flujo (R^2, Π) definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{y} = 0$$
$$\dot{x} = 1$$

Este flujo tiene característica $0^{\pm}$ (ver Figura 4.2). Sin embargo, $D(x_0) = C(x_0) \neq C^{+}(x_0) = K^{+}(x_0)$. Obsérvese que el flujo es dispersivo.

Teorema 4.13. Sea X cualquier subespacio de R^2. Entonces un flujo (X, Π) verifica $D(x) = K^{+}(x)$ (o equivalentemente, $D^{-}(x) = K^{+}(x)$) para todo x en X si y sólo si es de característica $0^{\pm}$ y no hay puntos positivamente dispersivos (o negativamente dispersivos).

Demostración. Supongamos que $D(x) = K^{+}(x)$ para todo x en X y sea $x \varepsilon X$. Entonces, según Proposición 4.4, $x \varepsilon L^{+}(x)$. Luego, x es periódico o crítico (ver Teorema 1.20) y, en consecuencia, $x \varepsilon L^{-}(x)$. Luego el resultado se deduce de la Proposición 4.9.

Corolario 4.14. Sea X cualquier subespacio de R^2. Entonces un flujo (X, Π) verifica $D(x) = K^{+}(x)$ para todo $x \varepsilon X$ si y sólo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes (1) a (6) del Teorema 4.1.

Demostración. De los Teoremas 4.13 y 2.35 se deduce que $D(x) = K^{+}(x)$ para todo x en X si y sólo si el flujo satisface la condición (2) del

Teorema 4.1.

Observación 4.15. Del Corolario 4.14 se obtiene que los tipos básicos de flujos planos para los cuales $D(x) = K^+(x)$ (o $D^-(x) = K^+(x)$) para todo x en R^2, son los señalados en la Observación 4.2.

Los duales de los resultados 4.3 a 4.15 caracterizan los tipos de flujos que verifican $D(x) = K^-(x)$ para todo x en X. El siguiente Corolario establece la relación entre esta última clase de flujos y los que verifican $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X, en el caso particular de que X sea un subespacio de R^2.

Corolario 4.16. Un flujo (X, Π), donde X es cualquier subespacio de R^2, verifica $D(x) = K^+(x)$ (o $D^-(x) = K^+(x)$) para todo x en X, si y sólo si $D(x) = K^-(x)$ (o $D^+(x) = K^-(x)$) para todo x en X.

Demostración. Se obtiene fácilmente del Teorema 4.13 y de su dual.

Corolario 4.17. Un flujo (X, Π) verifica $D(x) = K^+(x) = K^-(x)$ (o, $D^-(x) = K^+(x)$ y $D^+(x) = K^-(x)$) para todo x en X si y sólo si tiene característica $0^{\pm}$ sin puntos positivamente dispersivos.

Demostración. La necesidad se deduce de la Proposición 4.4 y de su dual. La suficiencia se obtiene de la Proposición 4.9.

Caracterización de flujos que verifican $D^+(x) = K(x)$ para todo x en X

Teorema 4.18. Para un flujo (X, Π) las siguientes afirmaciones son equivalentes

(1) $D^+(x) = K(x)$ para todo x en X

(2) $J^+(x) = K(x)$ para todo x en X

(3) $J^-(x) = K(x)$ para todo x en X

(4) $J(x) = K(x)$ para todo x en X

(5) $D(x) = K(x)$ y $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X

(6) $D^-(x) = K(x)$ para todo x en X

<u>Demostración</u>. Sea $x \in X$. Si se cumple (1) entonces $C^+(x) \cup J^+(x) = C(x) \cup L(x)$. Luego, $C(x) \subset C^+(x)$ o $C(x) \cap J^+(x) \neq \emptyset$. Si $C(x) \subset C^+(x)$, x es periódico o crítico y $K(x) = L^+(x) \subset J^+(x)$. Si $C(x) \cap J^+(x) \neq \emptyset$, también $K(x) \subset J^+(x)$ ya que $J^+(x)$ es invariante y cerrado. En cualquier caso, $K(x) \subset J^+(x)$. Por otra parte, $J^+(x) \subset D^+(x) = K(x)$. Luego, $J^+(x) = K(x)$; es decir, (1) $\Rightarrow$ (2). Si se cumple (2), entonces $x \in J^+(x)$, de donde $x \in J^-(x)$ y, por tanto, $K(x) \subset J^-(x)$. Sea ahora $y \in J^-(x)$. Entonces $x \in J^+(y) = K(y)$. Por tanto, $J^+(x) \supset J^+(y)$ o, equivalentemente, $K(x) \supset K(y)$. Luego, $y \in K(x)$, de donde $J^-(x) \subset K(x)$. Por tanto, $J^-(x) = K(x)$ lo que prueba que (2) $\Rightarrow$ (3). Si se cumple (3), $x \in J^-(x)$, de donde $x \in J^+(x) \neq \emptyset$. Sea $y \in J^+(x)$. Entonces $x \in J^-(y) = K(y)$. Luego, $J^-(x) \supset J^-(y)$ o, equivalentemente, $K(x) \supset K(y)$. Esto implica que $y \in K(x) = J^-(x)$, de donde $J^+(x) \subset J^-(x)$. Por tanto, $J(x) = J^-(x) = K(x)$ lo que prueba que (3) $\Rightarrow$ (4). Si se cumple (4), $x \in J(x)$ y $C(x) \subset J(x)$. Por tanto, $D(x) = C(x) \cup J(x) = J(x) = K(x)$. Además, $J^+(x) \neq \emptyset$ ya que si suponemos lo contrario, entonces $x \in J^-(x)$, de donde $x \in J^+(x)$ obteniéndose así una contradicción. Queda así probado que (4) $\Rightarrow$ (5). Si se cumple (5) sea $y \in J^+(x)$. Entonces $x \in J^-(y) \subset D(y) = K(y) \subset J^+(x)$. Luego, $x \in J^-(x)$ y, por tanto, $D(x) = K(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x)$. Como también $D^-(x) \subset D(x)$, entonces $D^-(x) = D(x) =$

$K(x)$ lo cual prueba que (5) $\Rightarrow$ (6). Finalmente, si se cumple (6), $C^-(x) \cup J^-(x) = C(x) \cup L(x)$. Luego $C(x) \subset C^-(x)$ o $C(x) \cap J^-(x) \neq \emptyset$. Si $C(x) \subset C^-(x)$, x es periódico o crítico y, por tanto, $K(x) = L^-(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x) = K(x)$, de donde $J^-(x) = K(x)$. Si $C(x) \cap J^-(x) \neq \emptyset$, entonces $K(x) \subset J^-(x) \subset D^-(x) = K(x)$, de donde $J^-(x) = K(x)$. En cualquier caso se ha obtenido que $J^-(x) = K(x)$. Esto implica que $x \varepsilon J^-(x)$ y, por tanto, $x \varepsilon J^+(x)$. Luego, $K(x) \subset J^+(x) \subset D^+(x)$. Sea ahora $y \varepsilon D^+(x)$. Entonces $x \varepsilon D^-(y) = K(y)$. Por tanto, $J^-(x) \supset J^-(y)$ o, equivalentemente, $K(x) \supset K(y)$. Entonces $y \varepsilon K(x)$, de donde $D^+(x) \subset K(x)$. Luego, $D^+(x) = K(x)$ lo que prueba que (6) $\Rightarrow$ (1).

<u>Observación 4.19.</u> La condición $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X es necesaria en la afirmación (5) de la proposición anterior. Esto puede verse en el flujo del Ejemplo 4.12 el cual tiene característica 0. Sin embargo $D^+(x_0) = C^+(x_0) \neq C(x_0) = K(x_0)$. Obsérvese que $J^+(x) = \emptyset$ para todo x en X.

<u>Corolario 4.20.</u> Sea X cualquier subespacio de R^2. Entonces un flujo (X, Π) verifica $D^+(x) = K(x)$ (o $D^-(x) = K(x)$) para todo x en X si y sólo si $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X.

<u>Demostración.</u> Se deduce fácilmente de los Teoremas 4.18, partes (1) y (5), y 3.10.

<u>Observación 4.21.</u> Según el corolario anterior, el Teorema 3.12 y la observación 3.13 nos proporcionan, respectivamente, criterios de caracterización y clasificación de flujos (R^2, Π) tales que $D^+(x) = K(x)$ (o $D^-(x) = K(x)$) para todo x en R^2.

Proposición 4.22. Un flujo (X,Π) verifica $D^+(x) = K(x)$ y $L^+(x) \neq \emptyset$ ($L^-(x) \neq \emptyset$) para todo x en X, si y sólo si es positivamente Poisson estable (negativamente Poisson estable) de característica 0^+ (de característica 0^-).

Demostración. Supongamos que $D^+(x) = K(x)$ y $L^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X. Sea $x\varepsilon X$ y $y\varepsilon L^+(x) \subset D^+(x)$. Entonces $x\varepsilon D^-(y) = K(y)$ (ver Teorema 4.18). Pero $K(y) \subset L^+(x)$, de donde $x\varepsilon L^+(x)$. Por tanto, $K(x) \subset L^+(x) \subset K(x)$. Esto implica que $L^+(x) = K(x) = J^+(x)$ (ver Teorema 4.18). Por tanto el flujo tiene característica 0^+, (ver Proposición 1.56.) Supongamos ahora que el flujo es positivamente Poisson estable de característica 0^+ y sea $x\varepsilon X$. Ya que $x\varepsilon L^+(x)$, $K(x) \subset L^+(x)$ $\subset D^+(x) = K^+(x) \subset K(x)$ y, por tanto, $D^+(x) = K(x)$.

Observación 4.23. Aunque $L^+(x) \neq \emptyset$ ($L^-(x) \neq \emptyset$) para todo x en X la parte recíproca de la proposición anterior es falsa si el flujo no es positivamente Poisson estable (negativamente Poisson estable). Esto puede verse en el flujo del Ejemplo 4.6 el cual tiene característica 0^+ con $L^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X. Sin embargo $D^+(x_0) = C^+(x_0) \cup C_1 \neq C(x_0) \cup C_1 = K(x_0)$. También la parte directa de la proposición anterior es falsa si $L^+(x) = \emptyset$ ($L^-(x) = \emptyset$) para algún $x\varepsilon X$. Para probarlo consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.24. Sea (X,Π) el flujo del Ejemplo 2.2 y definamos un nuevo flujo (X', Π'), donde $X' = \overline{N}_{S_1}$ y $\Pi' = \Pi|X'$. Este flujo verifica $D'^+(x) = K'(x)$ para todo x en X'. Sin embargo, $D'^+(x_0) = C'(x_0) \neq C'^+(x_0) = K'^+(x_0)$, lo que prueba que no es de característica 0^+. Obsérvese que $L'^+(x_0) = \emptyset$

Corolario 4.25. Un flujo (X,Π) verifica $D^+(x) = K(x)$ y $L^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X, si y sólo si $D(x) = K^+(x)$ (o $D^-(x) = K^+(x)$) para todo x en X.

Demostración. Se deduce de las Proposiciones 4.22 y 4.4.

Corolario 4.26. Un flujo (X, Π) verifica $D^+(x) = K(x)$ y $L^-(x) \neq \emptyset$ para todo x en X, si y sólo si $D(x) = K^-(x)$ (o $D^+(x) = K^-(x)$) para todo x en X.

Demostración. Se deduce de las Proposiciones 4.22 y dual de 4.4.

Proposición 4.27. Un flujo (X,Π) verifica $D^+(x) = K(x)$ y $L^+(x) \neq \emptyset \neq L^-(x)$ para todo x en X, si y sólo si tiene característica $0^{\pm}$ y no hay puntos positivamente dispersivos (ó negativamente dispersivos).

Demostración. La necesidad se deduce de la Proposición 4.22. Supongamos ahora que el flujo tiene característica $0^{\pm}$ con $J^+(x) \neq \emptyset$ para todo x en X. Sea $x \varepsilon X$ y $y \varepsilon J^+(x)$. Entonces $x \varepsilon J^-(y) \subset D^-(y) = K^-(y) \subset J^+(x) = L^+(x)$. Luego, según Proposición 4.22, $D^+(x) = K(x)$.

Teorema 4.28. Sea (X,Π) un flujo continuo con X compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) $D(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(2) $D^-(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(3) $D^+(x) = K^+(x)$ para todo x en X

(4) $D(x) = K(x)$ para todo x en X

(5) $D^+(x) = K^+(x)$ y $D^-(x) = K^-(x)$ para todo x en X

(6) $D(x) = K^-(x)$ para todo x en X

(7) $D^-(x) = K^-(x)$ para todo x en X

(8) $D^+(x) = K^-(x)$ para todo x en X

(9) $D^+(x) = K(x)$ para todo x en X

(10) $D^-(x) = K(x)$ para todo x en X

Demostración. Del Teorema 4.3 se obtiene que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Sea $x \varepsilon X$. Entonces $L^+(x) \neq \emptyset \neq L^-(x)$. Supongamos que se cumple (3) y sea $y \varepsilon L^-(x) \subset D^-(x)$. Entonces $x \varepsilon D^+(y) = K^+(y) \subset L^-(x) \subset J^-(x)$. Luego, $x \varepsilon J^+(x) = L^+(x)$. Por tanto, de la Proposición 4.4 se obtiene que (1) $\Leftrightarrow$ (3). Además, (1) $\Leftrightarrow$ (4) (ver Proposición 4.7), (1) $\Leftrightarrow$ (5) (ver Proposición 4.9), (5) $\Leftrightarrow$ (6) (por dual de Proposición 4.9). En forma análoga a la demostración de (1) $\Leftrightarrow$ (3), usando el resultado dual de la Proposición 4.4, se prueba que (6) $\Leftrightarrow$ (7). Del dual del Teorema 4.3 se deduce que (6) $\Leftrightarrow$ (8) y del Teorema 4.18 se obtiene que (9) $\Leftrightarrow$ (10) $\Leftrightarrow$ (4)

Teorema 4.29. Sea X un espacio localmente compacto o métrico completo y (X,Π) un flujo tal que $L^+(x) \neq \emptyset$ (o $L^-(x) \neq \emptyset$) para todo x en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X

(2) $D^-(x) = C(x)$ para todo x en X

(3) $D(x) = C(x)$ para todo x en X

(4) $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X

(5) $D^-(x) = C^-(x)$ para todo x en X

(6) $D^+(x) = C^-(x)$ para todo x en X

(7) $D^-(x) = C^+(x)$ para todo x en X

(8) $D(x) = C^{+}(x)$ para todo x en X

(9) $D(x) = C^{-}(x)$ para todo x en X

Demostración. De la Proposición 3.1 se obtiene que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Sea $x \in X$. Si se cumple (1), entonces, según Proposición 3.8, x es periódico o crítico y, por tanto, $C(x) = C^{+}(x)$. Luego, (1) $\Rightarrow$ (4). Por otra parte, si se cumple (4), según Corolario 2.10, x es periódico o crítico. Por tanto, $C^{+}(x) = C(x)$, de donde (4) $\Rightarrow$ (1). Del Corolario 2.2 se obtiene que (4) $\Leftrightarrow$ (5), y del Teorema 4.1 se deduce que (4) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8) $\Leftrightarrow$ (9).

Corolario 4.30. Sea X cualquier subespacio compacto de R^2. Entonces todas las afirmaciones de los Teoremas 4.28 y 4.29 son equivalentes.

Demostración. Según el Teorema 2.35, la afirmación (5) del Teorema 4.28 es equivalente a la afirmación (4) del Teorema 4.29.

CONCLUSIONES

Los principales resultados de la presente investigación pueden ser resumidos como sigue:

1. Un flujo (X,Π) verifica $D^+(x) = C^+(x)$ (o equivalentemente, $D^-(x) = C^-(x)$) para todo x en X, si y sólo si cada punto x en X o es dispersivo o es periódico (o crítico) con $L^+(x) = J^+(x)$. En el caso particular de que X sea localmente compacto, $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si para cada componente de X, o todos sus puntos son periódicos (o críticos) con $L^+(x) = J^+(x)$ o todos sus puntos son dispersivos.
2. Si X es un subespacio de R^2, un flujo (X,Π) verifica $D^+(x) = C^+(x)$ para todo x en X si y sólo si tiene característica $0^{\pm}$.
3. Para un flujo (X,Π) las condiciones $D^+(x) = C(x)$, $D^-(x) = C(x)$, $D(x) = C(x)$ con $J^+(x) \neq \phi$, $J^+(x) = C(x)$, $J^-(x) = C(x)$, $J(x) = C(x)$, para cada x en X, son equivalentes.

Los flujos que verifican cualquiera de las condiciones arriba señaladas son flujos no extraviado que presentan la propiedad, no cierta en general, de que $J^+(J^+(x)) \subset J^+(x)$ para cada x en X, (ver Proposición 3.4, parte (1)). Este hecho plantea la siguiente interrogante: ¿será posible encontrar un conjunto de propiedades que caractericen a los flujos para los cuales $J^+(J^+(x)) \subset J^+(x)$ para cada x del espacio fase tal que $J^+(x) \neq \phi$?

En particular, si el flujo satisface cualquiera de las condiciones de arriba, con X localmente compacto o métrico completo, un punto x en X es positivamente o negativamente Poisson estable si y sólo si es periódico o crítico, propiedad que sabemos se cumple para cualquier flujo cuyo espacio fase sea un subespacio de R^2.

4. Si $X = R^2$, hay tres tipos básicos de flujos que verifican $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X:

   (1) Flujos que consisten solamente de puntos críticos

   (2) Flujos que tienen un centro global de Poincaré

   (3) Flujos similares al del Ejemplo 2.6 excepto que $\partial N_{s_1} = \partial N_{s_2}$ donde $S = \{s_1, s_2\}$

5. Para un flujo (X, Π) cada una de las condiciones $D^+(x) = C^-(x)$, $D^-(x) = C^+(x)$, $D(x) = C^+(x)$, $D(x) = C^-(x)$, para todo x en X, es equivalente a la condición de que x es crítico o periódico con $J^+(x) = L^+(x)$ para cada x en X.

6. Para un flujo (X,Π), cada una de las afirmaciones $D(x) = K^+(x)$, $D^-(x) = K^+(x)$, $J^+(x) = K^+(x)$, $J^-(x) = K^+(x)$, $J(x) = K^+(x)$, para todo x en X, es equivalente a la afirmación de que el flujo es positivamente Poisson estable de característica 0^+. Igualmente, cada una de ellas es equivalente a la afirmación de que el flujo tiene característica 0 con $L^+(x) \neq \phi$ para cada x en X.

   En particular, si X es cualquier subespacio de R^2 un flujo (X,Π) verifica cualquiera de las afirmaciones de arriba si y sólo si tiene característica $0^{\pm}$ sin puntos positivamente dispersivos (o negativamente dispersivos).

7. Para un flujo (X,Π), cada una de las afirmaciones $D^+(x) = K(x)$, $D^-(x) = K(x)$, $J^+(x) = K(x)$, $J^-(x) = K(x)$, $J(x) = K(x)$, para todo x en X, es equivalente a la afirmación de que el flujo tiene carac-

terística 0 sin puntos positivamente dispersivos. Igualmente, cada una de ellas con la condición adicional de que $L^+(x) \neq \phi$ ($L^-(x) \neq \phi$) para todo x en X, es equivalente a la afirmación de que el flujo es positivamente Poisson estable (negativamente Poisson estable) de característica 0^+ (de característica 0^-).

En particular, si X es un subespacio de R^2, cualquiera de las condiciones de arriba es equivalente a la condición $D^+(x) = C(x)$ para todo x en X. Por tanto, si $X = R^2$ los tipos básicos de flujos que satisfacen una de tales condiciones son los señalados en 4.

8. Para un flujo (X,Π) con X compacto, cada una de las afirmaciones $D(x) = K^+(x)$, $D^+(x) = K(x)$, para todo x en X, es equivalente a la afirmación de que el flujo tiene característica 0^+.
9. Si X es localmente compacto o métrico completo, y (X,Π) un flujo tal que $L^+(x) \neq \phi$ (o $L^-(x) \neq \phi$) para cada x en X, las condiciones $D^+(x) = C^+(x)$, $D^+(x) = C(x)$, $D^+(x) = C^-(x)$, para todo x en X, son equivalentes.
10. Si X es un subespacio compacto de R^2, las cinco afirmaciones $D^+(x) = C^+(x)$, $D^+(x) = C(x)$, $D^+(x) = C^-(x)$, $D(x) = K^+(x)$, $D^+(x) = K(x)$, para todo x en X, las cuales corresponden, respectivamente, a los cinco tipos de flujos estudiados en este trabajo, son equivalentes.

BIBLIOGRAFIA

1. Ahmad, Shair. "Dynamical Systems of Characteristic 0^+". Pac. Jour. of Math. 32, 561-574, 1970.
2. Ahmad, Shair. "Strong Attraction and Classification of Certain Continuous Flows". Math. Systems Theory. 5, 157-163, 1971.
3. Bendixon, I. "Sur les Courbes Definiés par des Equations Différentielles' Acta Math. 24, 1-88, 1901.
4. Antosiewics, H.A., and Dugundji, J. "Parallelizable Flows and Liapunov's Second Method". Ann of Math. 73, 543-555, 1961.
5. Bhatia, Nam. "Criteria for Dispersive Flows". Math. Nachr. 32, 89-93, 1960.
6. Bhatia, Nam and Hajek, Otmar. Local Semi-Dynamical Systems, Lecture Notes in Math. 90. Springer-Verlag, New York, 1969.
7. Bhatia, Nam. Theory of Dynamical Systems. Parts I and II. Technical Notes BN-599 and BN-606. University of Maryland, 1969.
8. Bhatia, Nam and Szego, George. Stability Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag. New York, 1970.
9. Birkhoff, Garret. Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 9. New York, 1927.
10. Hajek, Otmar. Dynamical Systems in the Plane. Academic Press. New York, 1968.
11. Knight, Ronald. "Dynamical Systems of Characteristic 0", Pacific J. Math. 41, 447-457, 1972.
12. Knight, Ronald. "Structure and Characterizations of Certain Continuous

Flows". Funkcial. Ekvac. 17, 223-230, 1974.

13. Liapunov, A.M. Probleme Général de la Stabilité du Mouvement. Ann. of Math Studies 17. Princenton University Press, 1947. Traducido de la edición rusa aparecida en 1892.

14. Nemytskii, V.V. and Stepanov, V.V., Qualitative Theory of Differential Equations. Princenton Univ. Press. Princenton, New Jersey, 1960. Traducido de la edición rusa aparecida en 1947.

15. Poincaré, Henry. "Sur les Curbes Définiés par les Equations Differentielles". Jour Math Pures Appl. 4, 167-244, 1885.

16. Seibert, Peter and Tulley, Patricia. "On Dynamical Systems in the Plane". Arch. Math. 18, 290-292, 1967.

17. Ura, Taro. "Sur le Courant Extérieur a une Région Invariante; Prolongements d' une Caracteristique et l' order de Stabilité". Funkcial. Ekvac. 2, 143-200, 1959.

18. Zubov, V.I. The Methods of A.M. Liapunov and their Applications. U.S. Atomic Energy Conmission, 1964. Traducido de la edición rusa aparecida en 1957.