VARIEDADES SIMPLECTICAS HOMOGENEAS

Jorge Sáenz

TRABAJO PRESENTADO AL CONSEJO DE LA ESCUELA DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD CENTRO-OCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO", EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER LA CATEGORIA DE PROFESOR TITULAR.

Barquisimeto, Mayo de 1986.

INDICE

1. INTRODUCCION

Las estructuras simplécticas constituyen un tema importante de la Geometría Diferencial, conocido con el nombre de Geometría Simpléctica. Estas estructuras cobraron especial relevancia en la Mecánica Clásica con la introducción, por parte de Poincaré, de métodos cualitativos en la Física. De hecho, los nuevos modelos de la mecánica consisten, fundamentalmente, de una variedad simpléctica y un campo vectorial hamiltoniano.[1], [2].

Una variedad homogénea es un espacio cociente $\frac{G}{K}$ de un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado K de G. El grupo G actúa sobre $\frac{G}{K}$ a la izquierda, de la manera obvia. En este tipo muy especial de variedades, el interés se concentra en los tensores que son invarientes por la acción del grupo; es decir en los tensores G-invariantes.

En el presente trabajo se prueban fundamentalmente, dos resultados sobre estructuras simplécticas homogéneas. El primero de ellos, expuesto en el teorema 3.6 dice:

Si una variedad homogénea $\frac{G}{K}$, con G compacto, tiene una estructura simpléctica homogénea (G-invariante), entonces $\frac{G}{K}$ posee una estructura casi-hermitiana homogénea.

Este resultado es ya conocido para estructuras simplécticas generales (no necesariamente homogéneas) [7] . En nuestro caso, a la estructura se le exige la condición adicional, bastante fuerte, de ser G-invariante.

El segundo resultado relaciona las estructuras simplécticas homogéneas, los fibrados toroidales y las f-estructuras. Dado un fibrado toroidal $Q(\frac{G}{K}, T)$, si $\frac{G}{K}$ es compacto y simplemente conexo, Q tiene un subfibrado de la forma $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{H})$, donde $\frac{K}{H}$ es un toro. Este resultado, probado en el teorema 4.9, dice:

Si la variedad homogénea $\frac{G}{K}$ es compacta, simplemente conexa y tiene una estructura simpléctica homogénea, entonces $\frac{G}{H}$ tiene una f-estructura con referencias homogéneas.

El trabajo está dividido en 4 secciones, siendo la primera, la introducción. En la segunda se desarrollan, rapidamente, los aspectos generales y convenientes de las variedades homogéneas. En la tercera y cuarta se presentan el primer y segundo resultados antes mencionados, respectivamente.

Todas las variedades y tensores que aparecen son diferenciables de clase C^{∞}, y este hecho se expresa diciendo simplemente que son diferenciables. En la notación seguiremos a [6], [10] y [11].

2. VARIEDADES HOMOGENEAS

A continuación presentamos algunos resultados conocidos sobre variedades homogéneas.

Sea G un grupo de Lie y $K \subset G$ un subgrupo cerrado. G actúa sobre el cociente $\frac{G}{K}$ a la izquierda y transitivamente del modo siguiente:

$$G \times \frac{G}{K} \longrightarrow \frac{G}{K}$$

$$(a, bK) \longrightarrow abK$$

$\frac{G}{K}$ tiene una única estructura diferenciable [11] tal que:

i) La proyección $\pi : G \to \frac{G}{K}$ es diferenciable.

ii) Cada punto de $\frac{G}{K}$ tiene una vecindad U y una sección diferenciable $s : U \longrightarrow G$.

LLamaremos *variedades homogéneas* a las variedades del tipo $\frac{G}{K}$, con la estructura antes mencionada.

Para cada $a \in G$ se tiene el difeomorfismo

$$\mathbb{L}_a : \frac{G}{K} \longrightarrow \frac{G}{K}$$

$$\mathbb{L}_a(bK) = abK$$

Si $L_a : G \longrightarrow G$ es la traslación a la izquierda $L_a(b) = ab$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \frac{G}{K} \\ {\scriptstyle L_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_a} \\ G & \xrightarrow[\pi]{} & \frac{G}{K} \end{array} \qquad \pi \circ L_a = \mathbb{L}_a \circ \pi$$

Cada elemento $a \in G$ determina el automorfismo interno de G,

$$A_a : G \longrightarrow G$$

$$A_a(g) = a g a^{-1} = (R_{a^{-1}} \circ L_a)(g) = (L_a \circ R_{a^{-1}})(g),$$

donde $R_{a^{-1}}$ es la traslación derecha $R_{a^{-1}}(g) = g a^{-1}$. La derivada de este automorfismo nos da otro automorfismo,

$$Ad(a) = (R_{a^{-1}} \circ L_a)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

del algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Además, la función $a \to Ad(a)$ nos proporciona una representación de G en $\mathfrak{g}$, llamada la *representación adjunta* de G.

DEFINICION 2.1 Una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ es *reductiva* si el algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G puede descomponerse como una suma directa del algebra de Lie $\mathfrak{k}$ de K y un subespacio $\mathfrak{m}$ que es $Ad(K)$-invariante; esto es, si

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 2) $Ad(K)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$

Se prueba fácilmente que $\frac{G}{K}$ es reductiva si K es compacta [6].

DEFINICION. Una métrica riemanniana g en un grupo de Lie G es biinvariante si g es invariante por traslaciones a la izquierda y a la derecha. Esto es, si $\forall\, a \in G$ y $\forall\, X,Y$, campos en G, se cumple:

1) $g((L_a)_* X, (L_a)_* Y) = g(X,Y)$ 2) $g((R_a)_* X, (R_a)_* Y) = g(X,Y)$

Observar que si g es biinvariante, entonces también se cumple que:

$$3)\quad g(Ad(a)X,\ Ad(a)Y) = g(X,Y),\ \forall\ a \in G$$

Esta última expresión nos dice que $Ad(a)$ es una transformación ortogonal.

Una métrica riemanniana g de $\frac{G}{K}$ es invariante por G o, simplemente, invariante, si $\forall\ a \in G$ y $\forall\ X, Y$ campos de $\frac{G}{K}$,

$$4)\quad g(\mathbb{L}_a)_* X),\ (\mathbb{L}_a)_* Y) = g(X,Y),\ \forall\ a \in G$$

Si G es compacto, entonces G tiene una métrica riemanniana biinvariante [11], y si K es compacto $\frac{G}{K}$ tiene una métrica invariante [6].

Ahora consideremos una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ y la proyección natural $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{K}$. Para cada $a \in G$ y para cada $k \in K$, se tiene que

$$5)\quad \mathbb{L}_a \circ \pi = \pi \circ L_a \qquad 6)\quad \pi = \pi \circ R_k$$

Luego,

$$7)\quad \mathbb{L}_k \circ \pi = (\pi \circ R_{k^{-1}}) \circ L_k = \pi \circ A_k$$

De donde, derivando,

$$8)\quad (\mathbb{L}_k)_* \circ \pi_* = \pi_* \circ Ad(k)$$

Sea e el elemento neutro de G, 0 la clase K en $\frac{G}{K}$ y π_* es la derivada de π en e. Se tiene la función lineal

$$\pi_* : T_e(G) \longrightarrow T_0\left(\frac{G}{K}\right)$$

cuyo núcleo es $\{ X_e \ /\ X \in \mathfrak{k} \}$

Ahora si $\frac{G}{K}$ es reductiva, con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

y si identificamos $\mathfrak{g}$ con $T_e(G)$ mediante el isomorfismo $X \longrightarrow X_e$, entonces obtenemos el isomorfismo $\pi_* : \mathfrak{m} \longrightarrow T_0(\frac{G}{K})$. Además (8) nos proporciona el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \xrightarrow{Ad(k)} & \mathfrak{m} \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ T_0(\frac{G}{K}) & \xrightarrow{\mathbb{L}_k} & T_0(\frac{G}{K}) \end{array}$$

LEMA 2.2 Si $\frac{G}{K}$ es reductiva con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

entonces existe una correspondencia natural biunívoca entre las métricas riemannianas invariantes g en $\frac{G}{K}$ y los productos internos $Ad(K)$-invariantes $< >$ de $\mathfrak{m}$. La correspondencia es dada por

10) $$< X, Y > = g_0(\pi_* X, \pi_* Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m}$$

Demostración.

Dado g definimos $< >$ como en (10). Como g_0 es un producto interno y π_* es un isomorfismo, $< , >$ también es un producto interno.

Para todo $k \in K$, usando (9) y la hipótesis de que g es invariante, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle Ad(k)X, Ad(k)Y\rangle &= g_0((Ad(k)\circ \pi_*)X, (Ad(k)\circ\pi_*)Y) \\ &= g_0((\mathbb{L}_k\circ\pi_*)X, (\mathbb{L}_k\circ\pi_*)Y) \\ &= g_0(\pi_* X, \pi_* Y) \\ &= \langle X, Y\rangle . \end{aligned}$$

Recíprocamente, dado $\langle\, ,\, \rangle$, definamos g: Sea $\bar{a} = aK$ un punto cualquiera de $\frac{G}{K}$

$$g_{\bar{a}} : T_{\bar{a}}\left(\frac{G}{K}\right) \times T_{\bar{a}}\left(\frac{G}{K}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{\bar{a}}(X,Y) = \langle (\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(Y)\rangle$$

Debemos verificar que g está bien definida. Si $bK = aK$, entonces $b = ak$ con $k \in K$. Por (9) y por el hecho de que $\langle\, ,\, \rangle$ es $Ad(K)$-invariante, se tiene:

$$\begin{aligned} g_{\bar{b}}(X,Y) &= \langle (\mathbb{L}_b\circ\pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_b\circ\pi_*)^{-1}(X)\rangle \\ &= \langle (\mathbb{L}_a\circ\mathbb{L}_k\circ\pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_a\circ\mathbb{L}_k\circ\pi_*)^{-1}(Y)\rangle \\ &= \langle (\mathbb{L}_a\circ\pi_*\circ Ad(k))^{-1}(X), (\mathbb{L}_a\circ\pi_*\circ Ad(k))^{-1}(Y)\rangle \\ &= \langle Ad(K^{-1})(\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(X), Ad(K^{-1})(\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(Y)\rangle \\ &= \langle (\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_a\circ\pi_*)^{-1}(Y)\rangle \\ &= g_{\bar{a}}(X,Y) . \end{aligned}$$

Es evidente, de la misma definición, que g es invariante. ■

LEMA 2.3 Sea $\frac{G}{K}$ reductiva con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

a) Existe una correspondencia biunívoca natural entre las r-formas invariantes Ω de $\frac{G}{K}$ y las funciones r-lineales alternantes Ad (K)-invariantes ω en $\mathfrak{m}$. La correspondencia está dada por

$$11) \qquad \omega = \pi^*(\Omega_0)$$

b) Existe una correspondencia biunívoca natural entre los tensores de tipo (1, 1) invariante J en $\frac{G}{K}$ y las funciones lineales Ad(K)-invariantes $\tilde{J}$ en $\mathfrak{m}$. La correspondencia está dada por

$$12) \qquad \tilde{J} = \pi_*^{-1} \circ J_0 \circ \pi_*$$

c) Existe una correspondencia biunívoca natural entre los campos vectoriales invariantes E en $\frac{G}{K}$ y los elementos $\tilde{E}$ en $\mathfrak{m}$ que son Ad(K)-invariantes. La correspondencia está dada por

$$13) \qquad E_0 = \pi_*(\tilde{E})$$

Demostración.

Se procede de manera similar a la demostración del lema anterior. ■

3. VARIEDADES SIMPLECTICAS HOMOGENEAS

En toda esta sección G es un grupo de Lie compacto y conexo. Se probará que toda estructura simpléctica homogénea en $\frac{G}{K}$ induce en la variedad una estructura casi-hermitiana homogénea.

DEFINICION 3.1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una forma bilineal

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

es *no degenerada* si

$$B(v_1, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

Si $\beta = \{v, \ldots, v_n\}$ es una base de V y

$$b_{ij} = B(v_i, v_j) \ ,$$

la matriz $n \times n$ (b_{ij}) es la matriz de B en la base β.

Se prueba fácilmente que las siguientes proposiciones son equivalentes [1] :

a) B es no degenerada

b) (b_{ij}) es no singular

c) V tiene dimensión par, digamos $n = 2m$, y

$$B^m = \underbrace{B \wedge \quad \wedge B}_{m} \neq 0$$

DEFINICION 3.2 Una *forma simpléctica* en un espacio vectorial real V es una forma bilineal B que es antisimétrica y no degenerada. El par (V,B) es llamado espacio vectorial simpléctico.

DEFINICION 3.3 Una estructura simpléctica en una variedad M es una 2-forma ω en M que es cerrada ($d\omega = 0$) y no degenerada. El par (M,ω) se llama ***variedad simpléctica.*** Si además M es una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ y ω es invariante, entonces ω es una ***estructura simpléctica homogénea*** y $(\frac{G}{K}, \omega)$ es una variedad simpléctica homogénea.

DEFINICION 3.4 Una estructura casi-compleja sobre una variedad M es un campo tensorial del tipo (1, 1) que asigna a cada punto $x \in M$ un endomorfismo

$$J_x : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$$

tal que

$$J_x^2 = - I$$

donde I es la transformación identidad de $T_x(M)$. El par (M, J) es una ***variedad casi-compleja.***

Una ***métrica hermitiana*** sobre una variedad casi-compleja (M, J) es una métrica riemanniana de M que es invariante respecto a J; esto es,

$$(1) \quad g(JX, JY) = g(X, y), \quad \forall \ X, Y, \text{ campos en } M$$

Una variedad casi-hermitiana es una tríada (M,J,g), donde g es una métrica hermitiana en la variedad casi compleja (M, J). Además, si M es homogénea, $M = \frac{G}{K}$ y J y g son invariantes, entonces $(\frac{G}{K}, J, g)$ es una ***variedad casi-hermitiana homogénea.***

Sea $GL(n,\mathbb{R})$ el grupo de matrices reales de orden $n \times n$ que son invertibles, $O(n)$ el subgrupo ortogonal y $H(n)$ el subconjunto de $GL(n,\mathbb{R})$ formado por todas las matrices simétricas y positivas definidas. El siguiente teorema se debe a Chevalier [3] y a Hatakeyama [4] :

TEOREMA 3.4

a) Toda matriz invertible $\tau \in GL(n,\mathbb{R})$ se puede descomponer de una única manera como un producto:

$$\tau = \sigma\alpha\,, \text{ donde } \sigma \in O(n) \text{ y } \alpha \in H(n)$$

b) La función $GL(n,\mathbb{R}) \to O(n) \times H(n)$, $\tau \longrightarrow (\sigma,\alpha)$ es un difeomorfismo analítico.

Ahora ya estamos preparados para enunciar y demostrar el resultado del presente trabajo.

TEOREMA 3.5 Sea $M = \frac{G}{K}$ una variedad homogénea con G compacta. Si $\frac{G}{K}$ tiene una estructura simpléctica homogénea, entonces $\frac{G}{K}$ tiene una estructura casi-hermitiana homogénea.

Demostración.

Sea Ω la estructura simpléctica invariante definida en $\frac{G}{K}$.

$\frac{G}{K}$ es reductiva, por ser G compacto. Sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad , \text{ con } Ad(K)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

Por el lema 2.3,

$$\omega = \pi^*(\Omega_0)$$

es una forma bilineal alternante y Ad(H)-invariante en $\mathfrak{m}$. Además , como $\pi_* : \mathfrak{m} \longrightarrow T_0(\frac{G}{K})$ es un isomorfismo, ω es no degenerada; es decir ω es una forma simpléctica en $\mathfrak{m}$.

Tomemos una métrica riemanniana biinvariante en G. Esta existe por ser G compacto. Esta métrica nos proporciona un producto interno Ad(G)-invariante en $\mathfrak{g} = T_e(G)$. Sea

$$\beta = \{X_1, \ldots, X_n\}$$

una base ortonorma de $\mathfrak{m}$ respecto a esta métrica, sea

$$b_{ij} = \omega(X_i, X_j) \quad y \quad B = (b_{ij})$$

Por ser ω no degenerada, B es invertible. Luego, por el teorema 3.4, existe una única matriz de O(n) y una única matriz $C \in H(n)$ tales que

$$(2) \quad B = DC$$

Por otro lado, por ser ω Ad(K)-invariante, para $k \in K$, se tiene que

$$(3) \quad \omega(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = \omega(X,Y)$$

Sea A la matriz de Ad(k) en la base β. Por ser la métrica biinvariante, A es ortogonal. Además, (3) es equivalente a

$$(4) \quad A^t B A = B$$

Ahora, de (2) y tomando en cuenta que B es asimétrica, C es simétrica y D ortogonal, se tiene que

$$B = DC \quad \Rightarrow \quad B^t = C^t D^t \quad \Rightarrow$$

$$B = CD^t \Rightarrow \quad DC = -CD^t \quad \Rightarrow$$

$$C = DCD \quad \Rightarrow \quad C = (-D^2)(D^t CD)$$

Pero $-D^2 \in O(n)$ y $D^t C D \in H(n)$. Luego, por la unicidad del teore ma 3.4, se tiene que

$$(5) \quad D^2 = -I \qquad\qquad (6) \quad D^t C D = C$$

Además, de (2) y (4) y del hecho de que A es ortogonal, se tiene

$$DC = A^t(DC)A = (A^t D A)(A^t C A)$$

Pero $A^t D A \in O(n)$ y $A^t C A \in H(n)$. Luego, nuevamente por 3.4,

$$(7) \quad A^t D A = D \quad ó \quad DA = AD\,, \qquad (8) \quad A^t C A = C$$

La matriz $D = (d^i_j)$ nos proporciona la siguiente transformación li neal

$$\tilde{J} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m} \quad , \quad \tilde{J}(X_j) = \sum_i d^i_j X_i$$

La igualdad (5) nos dice que $\tilde{J}$ es una estructura casi-compleja en $\mathfrak{m}$, y la igualdad (8) dice que $\tilde{J}$ es Ad(K)-invariante; esto es,

$$(9) \quad \tilde{J}^2 = -I \qquad\qquad (10) \quad \tilde{J} \circ Ad(k) = Ad(k) \circ \tilde{J}, \quad \forall\, k \in K$$

Aplicando el lema 2.3 parte b, obtenemos un tensor J de tipo (1,1) sobre $\frac{G}{K}$, que es invariante. Además, de (9), se tiene

$$J^2 = -I\,;$$

es decir J es una estructura casi-compleja y homogénea en $\frac{G}{K}$.

Por otro lado, la matriz $C = (C_{ij})$ nos proporciona el siguiente producto interno

$$<\ > : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}\,, \quad < X_i, X_j > = C_{ij}$$

La igualdad (8) nos dice que este producto interno es Ad(K)-inva riante, y la igualdad (6) dice que éste es invariante respecto a $\tilde{J}$; esto es, para X , Y en $\mathfrak{m}$ y para $k \in K$, se tiene

(11) $< Ad(k)X, Ad(k)Y > = < X, Y >$ (12) $< \tilde{J}X, \tilde{J}Y > = < X, Y >$

Aplicando el lema 2.2 obtenemos una métrica riemanniana g en $\frac{G}{K}$ que es invariante. Además, la igualdad (12) nos dice que

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \text{ para campos en } \frac{G}{K} ;$$

es decir $(\frac{G}{K} , J, g)$ es una variedad casi-hermitiana homogénea. ∎

4. FIBRADOS TOROIDALES SOBRE VARIEDADES SIMPLECTICAS HOMOGENEAS

En esta sección tomamos una variedad homogénea $M = \frac{G}{K}$ compacta y simplemente conexa y $\mathfrak{F}[\frac{G}{K}, T^m]$, el conjunto de todos los fibrados principales sobre $\frac{G}{K}$ con grupo estructural el toro T^m. Sabemos que este conjunto tiene la estructura de grupo abeliano [5].

En primer lugar, veremos que todo fibrado $Q \in \mathfrak{F}[\frac{G}{K}, T^m]$ tiene un subfibrado de la forma $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{L})$, con grupo estructural $\frac{K}{H}$, un toro.

En segundo lugar probaremos que si $\frac{G}{K}$ tiene una estructura simpléctica homogénea, entonces $\frac{G}{H}$ tiene una f-estructura con referencia homogénea.

DEFINICION 4.1 Una f-estructura con referencias sobre una variedad M^{2n+s} es una tríada de objetos (f, E_i, η^i) donde f es un tensor de tipo (1,1), E_i y η^i, $i = 1,\dots, s$ son campos y 1-formas respectivamente, definidos en M y, son tales que:

1) $f(E_i) = 0$, $i = 1,\dots,s$. 2) $\eta^i(E_j) = \delta^i_j$ $i,j = 1,\dots,s$.

3) $\eta^i \circ f = 0$, $i = 1,\dots,s$. 4) $f^2 = I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes E_i$

Además, (f, E_i, η^i) es una f-estructura con referencias homogénea si M es una variedad homogénea y los tensores f, E_i, η^i son invariantes.

En vista de que hemos tomado $M = \frac{G}{K}$ compacta y conexa, sin pérdida de generalidad consideramos a G compacto y semisimple. En efecto, todo grupo conexo que actua transitivamente sobre una variedad compacta y simplemente conexa, tiene un subgrupo de Lie compacto y semisimple que actua transitivamente sobre la variedad [7],[12]. Aún más, podemos suponer que G es simplemente conexo, ya que si no es así, tomamos el cubrimiento universal de G.

Construyamos una función

$$\mathrm{Hom}(K, T^m) \longrightarrow \mathfrak{F}[\frac{G}{K}, T^m]$$
$$\lambda \longrightarrow Q$$

del modo siguiente: A cada homomorfismo $\lambda : K \rightarrow T^m$ le asignamos el fibrado $Q \in \mathfrak{F}[\frac{G}{K}, T^m]$ asociado a $G(\frac{G}{K}, K, \pi)$ mediante λ. Esto es,

$$Q = \frac{G \times T^m}{\sim}, \quad \text{donde } (a,t) \sim (ak, \lambda(k^{-1})t), \ k \in K$$

Se sabe que cuando G es compacto y simplemente conexo, la función anterior es un isomorfismo [8].

Proposición 4.2 Todo fibrado $Q \in \mathfrak{F}[\frac{G}{K}, T^m]$, tiene un subfibrado de la forma $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{H}, \rho)$, donde $\frac{K}{H}$ es un toro.

Demostración.

Dado Q, sea $\lambda : K \rightarrow T^m$ su correspondiente homomorfismo. Puesto que $\lambda(K)$ es un subgrupo compacto de T^m, $\lambda(K)$ es también un toro. Sea $T^r = \lambda(K)$ y sea Q' el fibrado

$$Q' = \frac{G \times T^r}{\sim}$$

Es claro que Q' es un subfibrado de Q. Además, si H es el núcleo de λ, entonces $\frac{K}{H} \approx T^r$ y $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{H}, \rho)$ es un fibrado toroidal.

Por otro lado, la función

$$\varphi : \frac{G}{H} \longrightarrow Q'$$

$$\varphi(aH) = [(a, e)]$$

es un isomorfismo de fibrados. Haciendo la identificación correspondiente, obtenemos el resultado buscado. ■

De aquí en adelante fijemos un fibrado Q juntamente con su correspondiente homomorfismo y el correspondiente subfibrado $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{H}, \rho)$.

Por ser K compacto, $\frac{G}{K}$ es reductiva. Fijemos una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad \text{con} \quad Ad(K)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

Esta descomposición nos permite definir la siguiente 1-forma en G con valores en .

$$\omega(X) = X_K$$

donde X_K es la componente de X en el espacio $\mathfrak{k}$. Se sabe que ω es una forma de conexión del fibrado $G(\frac{G}{K}, K, \pi)$, que es invariante a la izquierda [6]; esto es, ω satisface:

a) $\omega(X^*) = X, X \in \mathfrak{g}$, **b)** $(R_a)^*\omega = Ad(a^{-1})\,\omega$ **c)** $(L_a)^*\omega = \omega$

La conexión ω y el homomorfismo $\lambda : K \longrightarrow T^r$ nos permite definir la siguiente 1-forma ψ en G con valores en $\mathbb{R}^r$, el algebra de Lie de T^r:

$$\psi = \lambda_* \circ \omega$$

Proposición 4.3 La forma ψ satisface:

a) ψ es invariante a la izquierda

b) $\psi(X) = 0$, si $X \in \mathfrak{h}$, el algebra de Lie de H.

c) ψ es $Ad(K)$-invariante.

Demostración.

a) $(L_g)^*\psi = \lambda_* \circ (L_g)^*\omega = \lambda_* \circ \omega$

b) Inmediata.

c) $$\begin{aligned} \psi \circ Ad(k) &= \lambda_* \circ \omega \circ Ad(k) = \lambda_* \circ (Ad(k)^*\omega \\ &= \lambda_* \circ ((R_{k^{-1}})^* \omega) = \lambda_* \circ (Ad(k) \circ \omega) \\ &= (\lambda_* \circ Ad(k)) \circ \omega = \lambda_* \circ \omega = \psi . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Como $\lambda_* : K \longrightarrow \mathbb{R}^r$ es un homomorfismo de algebras de Lie sobreyectivo, éste lleva el centro de $\mathfrak{k}$ sobre $\mathbb{R}^r$. Tomamos $\tilde{E}_1,\ldots,\tilde{E}_r$ en el centro de $\mathfrak{k}$ tales que

$$(1) \quad \lambda_*(\tilde{E}_i) = e_i$$

Ahora, si $\psi_1,\ldots,\psi_r$ son las 1-formas tales que

$$\psi = \sum_{i=1}^{r} \psi_i \otimes e_i$$

se tiene que

$$(2) \quad \psi_i(\tilde{E}_j) = \delta_j^i$$

Proposición 4.4

a) $\tilde{E}_1,\ldots,\tilde{E}_r$ son linealmente independientes

b) $Ad(k)\tilde{E}_i = \tilde{E}_i$, $\quad i = 1,\dots, r$, $\quad \forall \; k \in K$

c) $\quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus (\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_r)$

Demostración.

a) Como $e_1, \dots, e_r$ son linealmente independientes, $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_r$ también lo son.

b) Sigue del hecho de que $\tilde{E}_i$ está en el centro de $\mathfrak{k}$.

c) Si $X \in \mathfrak{h}$, y $X \in (\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_r)$, entonces

$$X = \Sigma\, a_i \tilde{E}_i$$

Como $X \in \mathfrak{h}$, $\lambda_*(X) = 0$. Luego, por (2),

$$0 = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i \quad \text{y, por tanto,} \quad X = 0 \;. \blacksquare$$

Corolario 4.5 $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_s) \oplus \mathfrak{m}$

Ahora tomemos el siguiente subespacio de :

$$\mathfrak{m}' = (\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_s) \oplus \mathfrak{m}$$

Proposición 4.6 $\qquad \forall \; X \in \mathfrak{m}'$, se tiene

$$X = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(X)\tilde{E}_i + X_{\mathfrak{m}}$$

Demostración.

Si $X = \sum_{i=1}^{s} a_i \tilde{E}_i + X_{\mathfrak{m}}$, entonces

$$\psi_j(X) = \sum_{i=1}^{s} a_i \psi_j(E_i) = a_j . \blacksquare$$

Proposición 4.7 $\mathfrak{m}'$ es una composición reductiva de $\frac{G}{H}$; esto es,

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}'$ y 2) $Ad(H)\,\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}'$

Demostración.

1) Evidente

2) Si $X \in \mathfrak{m}'$, entonces $X = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(X)\tilde{E}_i + X_{\mathfrak{m}}$ y para $h \in H$,

$$Ad(h)(X) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(X)\, Ad(h)(\tilde{E}_i) + Ad(h)(X_{\mathfrak{m}})$$

Por la proposición 4.4 y por ser $\mathfrak{m}$ Ad(K)-invariante, se tiene que $Ad(h)(X) \in \mathfrak{m}'$. $\blacksquare$

Ahora suponemos que $\frac{G}{K}$ tiene una estructura simpléctica homogénea Ω. Por la demostración del teorema 3.5, Ω determina una transformación lineal

$$\tilde{J} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$$

tal que

a) $\tilde{J}^2 = -I$ y b) $Ad(k) \circ \tilde{J} = \tilde{J} \circ Ad(k), \quad \forall\, k \in K.$

Extendemos $\tilde{J}$ a $\mathfrak{m}'$ del modo siguiente:

$$J' : \mathfrak{m}' \longrightarrow \mathfrak{m}'$$

$$J'(X) = \begin{cases} \tilde{J}(X), & \text{si } X \in \mathfrak{m} \\ 0 \quad , & \text{si } X \in (\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_s) \end{cases}$$

Es evidente que

(3) $J'^2 = -I$ y (4) $J' \circ Ad(h) = Ad(h) \circ J', \forall\ h \in H$

Proposición 4.8 Se cumple que

a) $J'(\tilde{E}_i) = 0, \quad i = 1,\ldots, r$

e) $\psi_i(\tilde{E}_j) = \delta^i_j$

b) $\psi^i \circ J' = 0$

d) $J'^2 = -I + \sum_{i=1}^{r} \psi^i \otimes \tilde{E}_i$

Demostración.

a) y b) son inmediatas.

Sea $X \in \mathfrak{m}'$ con $X = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(X)\tilde{E}_i + X_{\mathfrak{m}}$. Se tiene que

c) $\psi(J'(X)) = \psi(\tilde{J}(X_{\mathfrak{m}})) = \lambda_*(\omega(\tilde{J}X_{\mathfrak{m}})) = \lambda_*(0) = 0$

d) $J'^2(X) = \tilde{J}^2(X_{\mathfrak{m}}) = -X_{\mathfrak{m}} = -X + \sum_{i=1}^{s} \psi_i(X)\tilde{E}_i$. ∎

Ya estamos en condiciones de obtener el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.9 Sea $M = \frac{G}{K}$ una variedad homogénea compacta y simplemente conexa, Q un fibrado toroidal sobre $\frac{G}{K}$ y $\frac{G}{H}(\frac{G}{K}, \frac{K}{L}, \rho)$ el subfibrado toroidal de la proposición 4.2. Si $\frac{G}{K}$ tiene una estructura simpléctica homogénea, entonces $\frac{G}{H}$ tiene una f-estructura con referencias homogénea (f, E_i, η^i).

Demostración.

La transformación J' es Ad(H)-invariante. Luego, por el lema 2.3

parte b), este determina un tensor f en $\frac{G}{H}$, invariante del tipo (1,1) tal que

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}' \arrow[r, "J'"] \arrow[d, "\rho_*"'] & \mathfrak{m}' \arrow[d, "\rho_*"] \\ T_0(\frac{G}{H}) \arrow[r, "f"] & T_0(\frac{G}{H}) \end{tikzcd}$$

La 1-forma ψ^i es Ad(H)-invariante. Luego, por el lema 2.3 parte a), existe una 1-forma η^i en $\frac{G}{H}$, invariante tal que

$$\rho^*\eta^i = \psi^i$$

El vector $\tilde{E}_i$ es Ad(H)-invariante. Luego, por el lema 2.3 parte c), existe un campo E_i en $\frac{G}{H}$, invariante tal que

$$(E_i)_0 = \rho_*(\tilde{E}_i)$$

La proposición 4.8, nos dice que los tensores (f, E_i, η^i), $i=1,\ldots,s$ definen en $\frac{G}{H}$ una f-estructura con referencias homogéneas. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J., *Foundations of Mechanics*, Second edition, Benjamin, 1978.

[2] ARNOLD, V., *Méthodes Mathématiques de la Mécanica Classique*, MIR, Moscou, 1974.

[3] CHEVALIER, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1946

[4] HATAKEYAMA, Y., *"On the Existance of Riemann Metrics Associate with a 2-form of rank 2^r "*, Tohoku Mathematical Journal, 14, 1962 pp. 161-166.

[5] KOBAYASHI, S., *"Principal toroidal bundles with 1-dimensional toroidal group,* Tohoku Mathematical Journal 8 (1956) pp. 29-45.

[6] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, New York, John WIley & Sons, Vol. 1, 1963; Vol. 2 1969.

[7] MONTGOMERY, D., *"Simply Connected Homogéneos Spaces"*, Procceding of the American Mathematical Society, 1, 1950, pp. 467-469.

[8] MURACAMI, S.,*"Sur Certain Espaces Fibres Principales, Diferenciables et Holomorphes"*, Nagoya Mathematical Journal, 15, 1959, pp. 171-177.

[9] PLANCHART, E., *Geometría Simpléctica*, VII ELAM, Caracas, 1984.

[10] SAENZ, J., *Variedades Diferenciables*, Escuela de Ciencias, UCLA,1980.

[11] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* , Vol. 1, 1970, Vol. 5, 1975, Publish or Perish.

[12] WANG, H. C., *"Closed Manifolds with Homogeneuss Complex Structures"* Americal Journal of Mathematics, 76,1954; pp. 1-32.