ESTADO LARA | DIA 09 | MES 06 | AÑO 2000 | Bs.192

ESTADO LARA | DIA 09 | MES 06 | AÑO 2000 | Bs.192

*********************ACTA DE VEREDICTO DE TRABAJO DE GRADO******************

Nosotros Miembros del Jurado Examinador del Trabajo de Grado titulado: **"COMPETENCIA ENTRE 2 ESPECIES TOMANDO EN CUENTA LA INTERRELACIÓN DE ÉSTAS EN EL PASADO"**, presentado por el Prof. **SOLANO CASTILLO DAN ALDEMAR**, titular de la cédula de identidad No. **81.151.625,** como requisito para optar al Grado Académico de **MAGISTER EN MATEMÁTICA, Mención: MATEMÁTICA PURA,** ofrecido por el Programa de Maestría Interinstitucional en Matemática: **UCLA-UNEXPO-UPEL************************

*************************** **H A C E M O S C O N S T A R** ********************************

Que hoy **NUEVE DE JUNIO DE DOS MIL (09-06-2000)** a las **TRES DE LA TARDE (03:00 pm),** se realizó el examen público de Defensa de Trabajo de Grado, de acuerdo a lo establecido en el Artículo 67 del Capítulo IX de la Elaboración, Presentación y Evaluación de Trabajos de Grado. Una vez rendido el examen, este jurado emite el siguiente veredicto: **El Trabajo de Grado fue: APROBADO.** Dando fe de ello, levantamos la presente acta en la Ciudad de Barquisimeto a **los NUEVE DIAS DEL MES DE JUNIO DE DOS MIL*************************

REPUBLICA DE VENEZUELA
Ministerio de Educación
UCLA - UNEXPO
BARQUISIMETO

Dr. FRANCISCO MONTES DE OCA
(Presidente del Jurado)
C.I. No. 4.067.229

Dr. RAMÓN GÓMEZ
Jurado Principal
C.I. No. 2.824.306

Dr. JOSÉ SARABIA
Jurado Principal
C.I. No. 3.087.736

Índice General

Índice General

Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar un sistema de ecuaciones integro-diferenciales, las cuales modelan dos especies en competencia por un suministro limitado de alimentos tomando en consideración la interrelación de estas en el pasado.
El sistema a considerarse es:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)\,ds] \\ v'(t) = v(t)[d(t) - e(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)\,ds - f(t)v(t)],\ t \geq 0 \\ u(t) = \phi(t),\ v(t) = \psi(t),\ t \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Donde las funciones $a(t)\dots, f(t)$ son continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, \infty)$ y notamos

$$g_L = \inf\{g(t) \colon t \in \mathbb{R}\} \text{ y } g_M = \sup\{g(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$$

y los núcleos k_1, k_2 con $k_i \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ con $i = 1,2$ son continuos y satisfacen $\hat{k}_i = \int_0^\infty k_i(s)ds < \infty$; $i = 1,2$, $\int_0^\infty sk_i(s) < \infty$ para $i = 1,2$; aquí $\phi(s)$, $\psi(s)$ son las historias de los tamaños de las poblaciones en el pasado, estas funciones pertenecen al conjunto

$$FA = \{g \colon (-\infty,0] \to \mathbb{R} \text{ ,continuas, no negativas, } \sup_{s\in(-\infty,0]} g(s) < \infty;\ g(0) > 0\}.$$

Como es costumbre por abuso del lenguaje, hablaremos de $\phi(s)$ y $\psi(s)$ con $s \in (-\infty, 0]$ como las condiciones iniciales en el pasado.
Nosotros denotaremos por $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ a la solución del sistema (1) donde

$$u(t,\phi,\psi) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\infty, 0] \\ u(t), & t \in [0,\infty) \end{cases};\quad v(t,\phi,\psi) = \begin{cases} \psi(t), & t \in (-\infty, 0] \\ v(t), & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

El propósito del presente trabajo consiste en mostrar que si $a(t)$, $b(t), \ldots, f(t)$ y k_1, k_2 satisfacen las condiciones especificadas y además

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} < \text{ y } \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{c_M \bar{k}_2} \tag{2}$$

Entonces el sistema (1) tiene una solución acotada, asintóticamente estable. El segundo propósito consiste en mostrar que si se satisface la condición (2) y

$$col(u(t, \phi_1, \psi_1), v(t, \phi_1, \psi_1), \quad col(u(t, \phi_2, \psi_2), v(t, \phi_2, \psi_2))$$

son dos soluciones de (1) entonces $u(t, \phi_1, \psi_1) - u(t, \phi_2, \psi_2)$ y $v(t, \phi_1, \psi_1) - v(t, \phi_2, \psi_2)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito.

El sistema (1) es más general que el sistema considerado por Ahmad en [1] ya que si definimos la *función impulso unitario*, denotada δ como aquella función tal que si f es una función continua entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) = f(0)$$

Al tomar como núcleo a la función δ entonces el sistema(1) se convierte en

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\{a(t) - b(t)u(t) - c(t)v(t)\} \\ v'(t) &= v(t)\{d(t) - e(t)u(t) - f(t)v(t)\} \end{aligned}$$

Y este es similar al sistema considerado por el autor mencionado en [1]. Además este sistema se adapta más a la realidad de los sistemas ecológicos. Por tanto esto nos demuestra el significado, el valor de la investigación y el análisis del sistema a considerar; lo que nosotros vamos a realizar en el presente trabajo es considerar la referencia [1] y ver que los resultados allí probados siguen siendo válidos para este tipo de ecuaciones integro -diferenciales.

Contenido del trabajo

Este trabajo constará de una introducción, dos capítulos y referencia bibliográfica. El contenido del trabajo se resume a continuación.

Capítulo 1

Fundamento teórico. En este capítulo se considerará el modelo matemático en (1) y (2) bajo la condición que las funciones a considerar $a(t), \ldots, f(t)$ son constantes. Se determinarán las condiciones bajo las cuales las dos especies pueden coexistir.

Capítulo 2

Enunciamos y demostramos los resultados de la publicación [1] y damos condiciones para la coexistencia de ambas especies.

Capítulo 1

Estudio cualitativo del sistema integro–diferencial Lotka–Volterra con coeficientes constantes

Estudiaremos el sistema de ecuaciones integro–diferenciales

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] \\ v'(t) = v(t)[d - e\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)], & t \geq 0 \\ u(t) = \phi(t),\ v(t) = \psi(t), & t \leq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

con las condiciones iniciales $u(t) = \phi(t)$, $v(t) = \psi(t)$ con $\phi, \psi \in FA$ donde a, b, c, d, e, f son constantes positivas que satisfacen las siguientes desigualdades

$$\frac{\bar{k}_2 e}{b} < \frac{d}{a} < \frac{f}{c\bar{k}_1} \tag{1.2}$$

y donde $u'(t) = du(t)/dt$ denota la derivada con respecto al tiempo.

Este sistema representa un sistema competitivo entre dos especies con recursos limitados teniendo en cuenta la interrelación de estas en el pasado. Las constantes a, b, c, d, e, f tienen la siguiente interpretación: a y d representan la razón de crecimiento de las especies u y v respectivamente, b y f representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento, c y e representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra. las integrales representan el efecto inhibidor hereditario o acumulado en el pasado que el tamaño de una especie ha tenido sobre la otra especie.

La primera ecuación del sistema (1.1) la podemos escribir

$$\begin{aligned}
u'(t) &= u(t)\left[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)v(s)ds - c\int_{0}^{t} k_1(t-s)v(s)ds\right] \\
&= u(t)\left[a - bu(t) - H_1(t) - c\int_{0}^{t} k_1(t-s)v(s)ds\right] \\
& t \in [0, \infty).
\end{aligned}$$

donde $H_1(t) = c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)v(s)ds$ con $t \geq 0$, la cual es continua y está bien definida ya que si $z = t - s$ tendremos

$$\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)ds = -\int_{\infty}^{t} k_1(z)dz = \int_{t}^{\infty} k_1(z)dz \leq \int_{0}^{\infty} k_1(z)dz = \bar{k}_1$$

entonces

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)v(s)ds = c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)\psi(s)ds \\
&\leq c\psi_M \int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)ds \leq c\psi_M \bar{k}_1
\end{aligned}$$

en forma análoga la segunda ecuación de (1.1) la podemos escribir como

$$v'(t) = v(t)[d - H_2(t) - e\int_{0}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)]$$

con

$$H_2(t) = e\int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)u(s)ds = e\int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)\phi(s)ds \leq e\phi_M \bar{k}_2$$

De lo anterior deducimos que podemos usar los teoremas de existencia, unicidad, continuación de soluciones y continuidad respecto a parámetros para el sistema (1.1) de ecuaciones integro diferenciales en $[0, t]$ con t positivo. Ver Driver [2] y Kuang [3]. En la referencia [2] se puede ver el teorema de existencia y unicidad para el sistema (1.1) a través de la condición inicial (ϕ, ψ). Las soluciones son prolongables hasta $t = +\infty$, si estas permanecen acotadas, como lo demostraremos en el Lema 1.2. Por lo tanto siempre supondremos que las soluciones están definidas en $\mathbb{R}$.

Puntos de equilibrio del sistema (1.1)

Los puntos de equilibrio de (1.1) se obtienen cuando

$$u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] = 0$$
$$v'(t) = v(t)[d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)] = 0$$

Entonces u y v son constantes en $[0, \infty)$ y deben satisfacer el sistema algebraico

$$\begin{cases} u[a - bu - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)vds] = 0 \\ v[d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)uds - fv] = 0 \end{cases}$$

si en $\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)ds$ hacemos $z = t - s$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)ds = -\int_{\infty}^{0} k_1(z)dz = \int_{0}^{\infty} k_1(z)dz = \bar{k}_1,$$

análogamente

$$\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)ds = \bar{k}_2$$

por tanto cuando u y v son constantes podemos escribir el sistema algebraico como

$$\begin{aligned} u[a - bu - c\bar{k}_1 v] &= 0 \\ v[d - e\bar{k}_2 u - fv] &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

resolviendo simultáneamente el sistema algebraico (1.3) obtenemos los puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(0, d/f)$, $(a/b, 0)$ y cuando $u \neq 0 \neq v$ y el determinante Δ del sistema al cancelar u y v es diferente de cero obtenemos otro punto crítico

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{af - dc\bar{k}_1}{\Delta}, \frac{bd - ae\bar{k}_2}{\Delta}\right)$$

donde $\Delta = bf - ce\bar{k}_1\bar{k}_2$

Nosotros estudiaremos el punto crítico (α, β) y veremos que si se satisface la cadena de desigualdades (1.2) entonces (α, β) es un atractor global.

Lemas preliminares

Lema 1.1 *Si* $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ *es solución de (1.1) con* $\phi, \psi \in FA$. *Entonces* $u(t,\phi,\psi) \geq 0$ *y* $v(t,\phi,\psi) \geq 0$ *para todo* $t \in [0,\infty)$

Prueba

Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1.1) y consideremos la solución $col(u_\varepsilon(t,\phi,\psi), v_\varepsilon(t,\phi,\psi))$ del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] + \varepsilon \\ v'(t) = v(t)[d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)] + \varepsilon, & t \geq 0 \\ u_\varepsilon(t) = \phi(t), \; v_\varepsilon(t) = \psi(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

con ε pequeño y positivo. Como $u_\varepsilon(0) = \phi(0) > 0$ y $v_\varepsilon(0) = \psi(0) > 0$, entonces por continuidad existen $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ tales que $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t,\phi,\psi) > 0$ en $[0,t_1]$ y $v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t,\phi,\psi) > 0$ en $[0,t_2]$. Si tomamos $t^* = \min\{t_1,t_2\}$ entonces se cumplen las dos desigualdades anteriores en $[0,t^*]$. Si la afirmación del lema es falsa debe existir un primer tiempo $\bar{t} > t^*$ tal que $u_\varepsilon(t) > 0$ y $v_\varepsilon(t) > 0$ en $[0,\bar{t})$ pero (i) $u_\varepsilon(\bar{t}) = 0$ ó (ii) $v_\varepsilon(\bar{t}) = 0$.

Si ocurre (i), como $u_\varepsilon(t) > 0$ en $[0,\bar{t}\,)$ y $u_\varepsilon(\bar{t}\,) = 0$ entonces

$$u'_\varepsilon(\bar{t}\,) = u'_{\varepsilon_-}(\bar{t}\,) \lim_{h\to 0^-} \frac{u_\varepsilon(\bar{t}+h) - u_\varepsilon(\bar{t})}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{u_\varepsilon(\bar{t}+h)}{h} \leq 0$$

ya que $u_\varepsilon(\bar{t}+h) > 0$, $h < 0$ y $u_\varepsilon(\bar{t}\,) = 0$, pero

$$u'_\varepsilon(\bar{t}\,) = u_\varepsilon(\bar{t}\,)[a - bu_\varepsilon(\bar{t}\,) - c\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)v_\varepsilon(s)ds] + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon > 0$$

pero esto es una contradicción luego (i) no puede ocurrir. Si ocurre(ii) en forma análoga llegamos a una contradicción, por lo tanto $u_\varepsilon(t) > 0$ y $v_\varepsilon(t) > 0$, si $t \geq 0$ y por el teorema de continuidad respecto a las condiciones iniciales tendremos $u(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t) \geq 0$ y $v(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(t) \geq 0$ para $t \in [0,\infty)$. Esto prueba el lema. □

Lema 1.2 *Las soluciones* $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ *de (1.1) son acotadas en* $(-\infty,\infty)$.

Prueba

Sea $col(x(t), y(t))$ solución del sistema logístico

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)[a - bx(t)] \\ y'(t) &= y(t)[d - fy(t)], \quad t > 0 \\ x(0) &= \phi(0), \; y(0) = \psi(0) \end{aligned}$$

tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] \leq u(t)[a - bu(t)] \\ v'(t) = v(t)[d - fv(t) - e\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds] \leq v(t)[d - fv(t)] \end{array}\right. ;\ t \in [0, \infty)$$

entonces $u'(t) \leq x'(t)$ y $v'(t) \leq y'(t)$ para $t \geq 0$, integrando en $[0, t]$ tendremos

$$u(t) - \phi(0) = \int_0^t u'(s)ds \leq \int_0^t x'(s)ds = x(t) - \phi(0)$$
$$v(t) - \psi(0) = \int_0^t v'(s)ds \leq \int_0^t y'(s)ds = y(t) - \psi(0)$$

Entonces $u(t) \leq x(t)$ y $v(t) \leq y(t)$ para $t \in [0, \infty)$ y como las soluciones de la logística son acotadas en $[0, \infty)$ (ver Montes de Oca [4]), entonces por comparación las soluciones $col(u(t, \phi, \psi), v(t, \phi, \psi))$ de (1.1) son acotadas en $[0, \infty)$.

Nota:

Como $\phi, \psi \in FA$ y $u(t, \phi, \psi)$, $v(t, \phi, \psi)$ son acotadas en $[0, \infty)$ entonces $u(t, \phi, \psi)$ y $v(t, \phi, \psi)$ son acotadas en $\mathbb{R}$

Lema 1.3 *Si $a/b < d/(e\bar{k}_2)$ y $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ entonces el punto de equilibrio (α, β) pertenece al cono positivo de $\mathbb{R}^2$*

Prueba

Como $a/b < d/(e\bar{k}_2)$ y $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ entonces $bd - ae\bar{k}_2 > 0$ y $af - cd\bar{k}_1 > 0$, $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ implica $d < (af)/(c\bar{k}_1)$, por tanto tendremos

$$\frac{a}{b} < \frac{d}{e\bar{k}_2},\ \text{de donde}\ \frac{a}{b} < \frac{af}{c\bar{k}_1}\frac{1}{e\bar{k}_2};\ bf - ce\bar{k}_1\bar{k}_2 = \Delta > 0$$

por tanto

$$\alpha = \frac{af - dc\bar{k}_1}{\Delta} > 0, \quad \beta = \frac{bd - ae\bar{k}_2}{\Delta} > 0$$

luego la solución (α, β) del sistema algebraico (1.3) pertenece al cono positivo de $\mathbb{R}^2$ luego es una solución factible en un problema ecológico. $\square$

El siguiente teorema lo utilizaremos en la demostración del lema 1.5)

Teorema 1 (Perron–Frobenius) *Si $A = (a_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} > 0$; $1 \leq i, j \leq n$, entonces*

(i) $\gamma(A) > 0$ donde $\gamma(A) = \max\{|\lambda|: \lambda$ es un valor propio de $A\}$.

(ii) $\gamma(A)$ *es un valor propio de* A.

(iii) Existe un $x \in \mathbb{R}^n$ *con* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ *y* $Ax = \gamma(A)x$.

Ver prueba en [6][p. 307].

Lema 1.4 *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} a - bx - c\bar{k}_1 y = 0 \\ d - e\bar{k}_2 x - fy = 0 \end{aligned} \qquad ó \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

donde $a_{11} = b$; $a_{12} = c\bar{k}_1$; $a_{21} = e\bar{k}_2$; $a_{22} = f$; $b_1 = a$; $b_2 = d$. *Todos estos coeficientes son positivos, por hipótesis.*
Si

$$b_1 > a_{12}\frac{b_2}{a_{22}} \quad ó \quad a > c\bar{k}_1\frac{d}{f} = \frac{dc\bar{k}_1}{f}$$
$$b_2 > a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \quad ó \quad d > \frac{ae\bar{k}_2}{b}$$

entonces, existen λ_1, λ_2 *y* m *números positivos tales que*

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} \geq m + \lambda_2 a_{21} \\ \lambda_2 a_{22} \geq m + \lambda_1 a_{12} \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} -\lambda_1 b + \lambda_2 e\bar{k}_2 \leq -m \\ -\lambda_2 f + \lambda_1 c\bar{k}_1 \leq -m \end{cases} \tag{1.4}$$

Prueba
Para $1 \leq i, j \leq 2$ definamos la matriz $(m_{ij})_{2\times 2}$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad \text{y } \gamma_j = \frac{b_j}{a_{jj}}$$

tendremos entonces:

$$m_{11} = m_{22} = 0$$
$$m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{c\bar{k}_1}{b}; \; m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{c\bar{k}_2}{f};$$
$$\gamma_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{a}{b}; \; \gamma_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{d}{f}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{2} m_{1j}\gamma_j = m_{11}\gamma_1 + m_{12}\gamma_2 = 0 + \frac{c\bar{k}_1}{b}\frac{d}{f}$$
$$= \frac{1}{b}\left(\frac{cd\bar{k}_1}{f}\right) < \frac{1}{b}a = \frac{a}{b} = \gamma_1,$$

ya que $(c\bar{k}_1 d)/f < a$

$$\sum_{j=1}^{2} m_{2j}\gamma_j = m_{21}\gamma_1 = \frac{e\bar{k}_2}{f}\frac{a}{b} = \frac{1}{f}\left(\frac{e\bar{k}_2 a}{b}\right) < \frac{1}{f}d = \frac{d}{f} = \gamma_2,$$

ya que $(e\bar{k}_2 a)/b < d$.

Consideremos la función $g(x) = (a/b) - (d/f)x$, la cual es decreciente y continua con

$$g\left(\frac{c\bar{k}_1}{b}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c\bar{k}_1}{b}\frac{d}{f} = \frac{1}{b}\left(\frac{af - c\bar{k}_1 d}{f}\right) > 0 \text{ por } (1.2)$$
$$g\left(\frac{af}{db}\right) = \frac{a}{b} - \frac{d}{f}\frac{af}{db} = 0.$$

Entonces dado $\varepsilon_1 > 0$ con $g((af)/(bd)) < \varepsilon_1 < g((c\bar{k}_1)/b)$, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas y ser g decreciente, existe p_{12} con $(c\bar{k}_1)/h < p_{12} < (af)/(bd)$ tal que $g(p_{12}) = (a/b) - p_{12}(d/f) = \varepsilon_1$. Sea $p_{11} > 0$ tal que $\varepsilon_1 > p_{11}(a/b)$, entonces

$$\frac{a}{b} - p_{12}\frac{d}{f} = \varepsilon_1 > p_{11}\frac{a}{b} \text{ ó } p_{11}\frac{a}{b} + p_{12}\frac{d}{f} < \frac{a}{b} \tag{1.5}$$

por lo tanto

$$p_{11}\gamma_1 + p_{12}\gamma_2 < \gamma_1$$

Consideremos $h(x) = (d/f) - (a/b)x$. esta h es continua y decreciente con

$$h\left(\frac{e\bar{k}_2}{f}\right) = \frac{d}{f} - \frac{e\bar{k}_2}{f}\frac{a}{b} = \frac{1}{f}\left(\frac{bd - ae\bar{k}_2}{b}\right) > 0 \text{ por } (1.2)$$
$$h\left(\frac{bd}{af}\right) = \frac{d}{f} - \frac{bd}{af}\frac{a}{b} = 0.$$

Entonces por el teorema del valor intermedio para funciones continuas y ser h decreciente, con un razonamiento análogo al anterior tendremos que dado $\varepsilon_2 > 0$ con $0 = h(bd/af) < \varepsilon_2 <$

Escojamos $m > 0$ tal que $\lambda_j a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{2} \lambda_j a_{jj} > m$; $j = 1, 2$, de donde

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} > m + \lambda_2 a_{21} \\ \lambda_2 a_{22} > m + \lambda_1 a_{12} \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} -\lambda_1 b + \lambda_2 c\bar{k}_2 < -m \\ -\lambda_2 f + \lambda_1 c\bar{k}_1 < -m \end{cases}$$

Lema 1.5 *Si $g(t)$ es una función diferenciable satisfaciendo $g(t) > 0$, $|g'(t)| \leq M$ para $t \geq t_0$ y $\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt < \infty$, $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$*

Prueba

Tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} |2g'(t)g(t)|dt \leq 2M \int_{t_0}^{\infty} g(t)dt < \infty,$$

entonces $\int_{t_0}^{\infty} 2g(t)g'(t)dt$ converge, teorema 14-5, Apostol [5] p. 412. Por otra parte,

$$\int_{t_0}^{\infty} 2g(t)g'(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} \frac{d}{dt}[g(t)]^2 dt = \lim_{t\to\infty}[g^2(t) - g^2(t_0)] < \infty$$

implica $\lim_{t\to\infty} g^2(t) < \infty$ y en consecuencia $\lim_{t\to\infty} g(t) < \infty$. Como $g(t) \geq 0$ para $t \geq t_0$, entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) \geq 0$. Supongamos que $\lim_{t\to\infty} g(t) = \alpha > 0$. Por tanto dado $\varepsilon > 0$, con $0 < \varepsilon < \alpha$, existe $\bar{M} \in \mathbb{R}$ con $\bar{M} \geq t_0$ tal que si $t \geq \bar{M}$ entonces $|g(t) - \alpha| < \varepsilon$, lo cual implica

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt \geq \int_{\bar{M}}^{\infty} g(t)dt \geq \int_{\bar{M}}^{\infty} (\alpha - \varepsilon)dt = (\alpha - \varepsilon) \lim_{t\to\infty}(t - \bar{M}) = \infty,$$

esto contradice que $g(t)$ es integrable en $[t_0, \infty)$, por tanto debemos tener $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, esto prueba el lema. $\square$

Lema 1.6 *Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1.1) con $\phi, \psi \in FA$ definamos las funciones*

$$h_1(t) = \int_0^{\infty} \int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s,\phi,\psi) - \beta|ds\, d\sigma$$

$$h_2(t) = \int_0^{\infty} \int_{t-\sigma}^{t} k_2(\sigma)|u(s,\phi,\psi) - \alpha|ds\, d\sigma$$

con $t \in [0, \infty)$. Entonces están bien definidas, con

$$h_1'(t) = -\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s,\phi,\psi) - \beta|ds + \bar{k}_1|v(t) - \beta|$$

$$h_2'(t) = -\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s,\phi,\psi) - \alpha|ds + \bar{k}_2|u(t) - \alpha|$$

Prueba

h_1 está bien definida porque

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s,\phi,\psi) - \beta|ds\, d\sigma &\leq \int_0^{\infty} k_1(\sigma)\int_{t-\sigma}^{t} \sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta|ds\, d\sigma \\ &= \int_0^{\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta|k_1(\sigma)\,|_{t-\sigma}^{t} d\sigma \\ &= \sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta|\int_0^{\infty}\sigma k_1(\sigma)d\sigma < \infty\end{aligned}$$

la última desigualdad es debida a que $\sigma k_1(\sigma) \in L^1[0,\infty)$ y por la nota después del Lema 1.2. Para obtener que h_1 es derivable usaremos el teorema 14-23 de [5] con $h_1(t) = \int_0^{\infty} f(\sigma,t)dt$, donde

$$f(\sigma,t) = \int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s) - \beta|ds$$

Veamos que $\int_0^{\infty} D_2 f(\sigma,t)d\sigma$ converge uniformemente en $(0,\infty)$. En efecto, por el teorema fundamental del Cálculo

$$D_2 f(\sigma,t) = k_1(\sigma)|v(t) - \beta| - k_1(\sigma)|v(t-\sigma) - \beta|$$

por lo tanto

$$\int_0^{\infty}|D_2 f(\sigma,t)|d\sigma = \int_0^{\infty}|[k_1(\sigma)|v(t) - \beta| - k_1(\sigma)|v(t-\sigma) - \beta|]|d\sigma$$

$$\leq \int_0^{\infty}|v(t) - \beta|k_1(\sigma)d\sigma + \int_0^{\infty}|v(t-\sigma) - \beta|k_1(\sigma)d\sigma$$

por lo tanto

$$\int_0^{\infty}|D_2 f(\sigma,t)|d\sigma \leq 2\int_0^{\infty} M k_1(\sigma)d\sigma < \infty$$

con $M = \sup_{s\in\mathbb{R}} |v(s) - \beta|$. Por el criterio M de Weirstrass (Teorema 14-19; [5]) se tiene que la integral $\int_0^\infty D_2 f(\sigma, t)d\sigma$ converge uniformemente en $[0, \infty)$ así que podemos aplicar el Teorema 14-23 de [5] para obtener

$$\begin{aligned}
h_1'(t) =& \int_0^\infty D_2 f(\sigma, t)d\sigma \\
=& \int_0^\infty k_1(\sigma)(|v(t) - \beta| - |v(t-\sigma) - \beta|)d\sigma \\
=& |v(t) - \beta| \int_0^\infty k_1(\sigma)d\sigma - \int_0^\infty k_1(\sigma)|v(t-\sigma) - \beta|d\sigma \\
=& |v(t) - \beta|\bar{k}_1 - \int_{-\infty}^t k_1(t-s)|v(s) - \beta|ds,
\end{aligned}$$

haciendo $s = t - \sigma$ en la última integral. En forma análoga se prueba que

$$h_2'(t) = |u(t) - \alpha|\bar{k}_2 - \int_{-\infty}^t k_2(t-s)|u(s) - \alpha|ds$$

Esto prueba el lema. □

Comportamiento asintótico del sistema (1.1)

Teorema 2 *El punto de equilibrio (α, β) es un atractor global para el sistema (1.1)*

Prueba

Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1.1) con $\phi, \psi \in FA$, denotemos $u(t) = u(t,\phi,\psi)$ y $v(t) = v(t,\phi,\psi)$. Consideremos la función

$$\begin{aligned}
w(t) =& w(t, u(t), v(t)) \\
=& \lambda_1 \left|\ln \frac{u(t)}{\alpha}\right| + \lambda_2 \left|\ln \frac{v(t)}{\beta}\right| + \lambda_1 c h_1(t) + \lambda_2 e h_2(t) \text{ para } t \in [0, \infty).
\end{aligned}$$

Claramente $w(t)$ es positiva y está bien definida en $[0, \infty)$. También es diferenciable pues cada sumando lo es.

Hallemos la derivada de $w(t)$. Por los lemas 1.5 y 1.6 y el hecho de que (α, β) es solución de (1.1) con $\phi(t) = \alpha$ y $\psi(t) = \beta$ tendremos

$$\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 \frac{u'(t)}{u(t)} \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) - \lambda_1 c \int_{-\infty}^t k_1(t-s)|v(s) - \beta|ds \\
&+ \lambda_1 c\bar{k}_1|v(t) - \beta| + \lambda_2 \frac{v'(t)}{v(t)} \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) - \lambda_2 e \int_{-\infty}^t k_2(t-s)|u(s) - \alpha|ds \\
&+ \lambda_2 e\bar{k}_2|u(t) - \alpha|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 \left[\frac{u'(t)}{u(t)} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right] \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha) + \lambda_2 \left[\frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{\beta'}{\beta}\right] \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) \\
&+\lambda_1 \bar{k}_1 c|v(t)-\beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s)-\beta|ds + \lambda_2 \bar{k}_2 e|u(t)-\alpha| \\
&-\lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s)-\alpha|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 [(a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds) - \Big(a - b\alpha - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\beta ds)] \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha)\Big) \\
&+\lambda_1 \bar{k}_1 c|v(t)-\beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s)-\beta|ds \\
&+\lambda_2 [(d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)) - (d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\alpha ds - f\beta)] \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) \\
&+\lambda_2 \bar{k}_2 e|u(t)-\alpha| - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s)-\alpha|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w'(t) =& -\lambda_1 b(u(t)-\alpha) \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha) - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)(v(s)-\beta) \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha) ds \\
&+\lambda_1 \bar{k}_1 c|v(t)-\beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(S)-\beta|ds \\
&-\lambda_2 f(v(t)-\beta) \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)(u(s)-\alpha) \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) ds \\
&-\lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s)-\alpha|ds + \lambda_2 \bar{k}_2 e|u(t)-\alpha|
\end{aligned}
$$

en virtud de que $h \operatorname{sgn}(h) = |h|$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
w'(t) =& -\lambda_1 b|u(t)-\alpha| - \lambda_2 f|v(t)-\beta| \\
&-\lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)[(v(s)-\beta) \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha) + |v(s)-\beta|]ds \\
&-\lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)[(u(s)-\alpha) \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) + |u(s)-\alpha|]ds \\
&+\lambda_1 \bar{k}_1 c|v(t)-\beta| + \lambda_2 \bar{k}_2 e|u(t)-\alpha|.
\end{aligned}
$$

Probemos que $w(t)$ es decreciente y $w'(t) \leq -m(|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|)$ en $[0,\infty)$

$$
\begin{aligned}
w'(t) =& (-\lambda_1 b + \lambda_2 \bar{k}_2 e)|u(t)-\alpha| + (-\lambda_2 f + \lambda_1 \bar{k}_1 c)|v(t)-\beta| \\
&-\lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)[(v(s)-\beta) \operatorname{sgn}(u(t)-\alpha) + |v(s)-\beta|]ds \\
&-\lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)[(u(s)-\alpha) \operatorname{sgn}(v(t)-\beta) + |u(s)-\alpha|]ds \\
\leq& (-\lambda_1 b + \lambda_2 \bar{k}_2 e)|u(t)-\alpha| + (-\lambda_2 f + \lambda_1 \bar{k}_1 c)|v(t)-\beta|
\end{aligned}
$$

ya que $\operatorname{sgn}(v(t)-\beta) = 1$ ó -1 y $\pm(u(s)-\alpha)+|u(s)-\alpha|) \geq 0$, análogamente se tiene $(\pm(v(s)-\beta)+|v(s)-\beta|) \geq 0$. En virtud del Lema 2.4 se tiene:

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq -m|u(t)-\alpha| - m|v(t)-\beta| \\ &= -m(|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|) \leq 0 \end{aligned}$$

esto prueba que $w(t)$ es decreciente en $[0,\infty)$. Por lo tanto acotada en $[0,\infty)$. A continuación veremos que el punto de equilibrio (α,β) es un atractor global.
Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ una solución de (1.1), veamos que $u(t)$ tiende a α y $v(t)$ tiende a β cuando t tiende a infinito.
Tenemos que $w'(t) \leq -m(|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|)$. Entonces

$$|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta| \leq \frac{1}{m}(-w'(t)).$$

Integrando en $[0,t]$ tendremos

$$\int_0^t (|u(s)-\alpha| + |v(s)-\beta|)ds \leq \frac{1}{m}\int_0^t -w'(s)ds = \frac{1}{m}(w(0)-w(t)) \leq M$$

para $t \in [0,\infty)$; ya que $w(t)$ es acotada, esto implica que

$$\int_0^\infty (|u(s)-\alpha| + |v(s)-\beta|)ds \leq M < \infty,$$

entonces $g(t) = |u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|$ con $t \in [0,\infty)$ es integrable, acotada ya que $u(t)$ y $v(t)$ lo son y como de (2.1) se deduce que sus derivadas (las de $u(t)$ y $v(t)$) son acotadas por serlo $u(t)$, $v(t)$ y $\int_{-\infty}^t k_i(t-s)ds = \bar{k}_i < \infty$, para $i = 1,2$ entonces el lema 1.5 implica que $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ y de aquí se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \alpha \text{ y } \lim_{t\to\infty} v(t) = \beta.$$

Por tanto (α,β) es un atractor global. Esto prueba el lema. □

Capítulo 2

Estudio cualitativo del sistema integro–diferencial Lotka–Volterra con coeficientes variables

En este capítulo estudiaremos el sistema de ecuaciones integro–diferenciales

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] & \\ v'(t) = v(t)[d(t) - e(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - f(t)v(t)]; & t \geq 0 \\ u(t) = \phi(t),\ v(t) = \psi(t), & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

donde las funciones $a(t)$, $b(t), \ldots, f(t)$ son continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, \infty)$ y tienen la misma interpretación que las constantes a, $b, \ldots, f$ en el Capítulo 1, los núcleos k_1, k_2 con $k_i\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ son continuos y satisfacen $\int_0^\infty k_i(s)ds < \infty$; $\int_0^\infty sk_i(s) < \infty$ $i = 1, 2$; las expresiones

$$c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds \text{ y } e(t)\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds$$

tienen la misma interpretación que en el caso constante. probaremos primeramente que si $col(u(t,\phi_1,\psi_1), v(t,\phi_1,\psi_1))$ son soluciones de (2.1) con $u(0,\phi_k,\psi_k) > 0$ y $v(0,\phi_k,\psi_k) > 0$ para $k = 1, 2$. Entonces $u(t,\phi_1,\psi_1) - u(t,\phi_2,\psi_2)$ y $v(t,\phi_1,\psi_2) - v(t,\phi_2,\psi_2)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito y finalmente probamos que si se satisfacen las desigualdades

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} \text{ y } \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{e_M \bar{k}_2},$$

entonces existe una solución $col(u(t,\phi,\psi),v(t,\phi,\psi))$ de (2.1) satisfaciendo las desigualdades

$$\begin{aligned}0 < \frac{a_L f_L - d_M c_M \bar{k}_1}{b_M f_L - c_M e_L \bar{k}_1 \bar{k}_2} = s_1 \leq & u(t,\phi,\psi) \leq r_1 = \frac{a_M f_M - c_L d_L \bar{k}_1}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2} \\ 0 < \frac{b_L d_L - a_M e_M \bar{k}_2}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2} = r_2 \leq & v(t,\phi,\psi) \leq s_2 = \frac{b_M d_M - a_L e_L \bar{k}_2}{b_M f_L - c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2}\end{aligned}$$

para $0 \leq t < \infty$.

Lemas preliminares

Lema 2.1 *Dados $\phi,\psi \in FA$, si $col(u(t,\phi,\psi),v(t,\phi,\psi))$ es solución de (2.1), tal que $0 \leq \phi(s) \leq \phi_M < \infty$ y $0 \leq \psi(s) \leq \psi_M < \infty$ para $s \leq 0$ entonces $u(t,\phi,\psi) \geq 0$ y $v(t,\phi,\psi) \geq 0$ para $t \in [0,\infty)$.*

Prueba

La prueba es análoga a la del lema (1.1) del Capítulo 1.

Lema 2.2 *Sean $\phi_1,\phi_2,\psi_1,\psi_2 \in FA$ con $\phi_1(0) > \phi_2(0)$ y $\psi_2(0) > \psi_1(0)$ dos condiciones iniciales comparables, es decir $\phi_1(s) \geq \phi_2(s)$ y $\psi_2(s) \geq \psi_1(s)$ para $s \in (-\infty,0]$. Entonces las soluciones $col(u(t,\phi_1,\psi_1),v(t,\phi_1,\psi_1))$ y $col(u(t,\phi_2,\psi_2),v(t,\phi_2,\psi_2))$ de (2.1) correspondientes a las condiciones iniciales (ϕ_1,ψ_1) y (ϕ_2,ψ_2) respectivamente, satisfacen las desigualdades*

$$\begin{aligned}u(t,\phi_1,\psi_1) > & u(t,\phi_2,\psi_2) \\ v(t,\phi_1,\psi_1) > & v(t,\phi_2,\psi_2); \quad t \in [0,\infty)\end{aligned}$$

Prueba

Sean $col(u(t,\phi_1,\psi_1),v(t,\phi_1,\psi_1))$ y $col(u(t,\phi_2,\psi_2),v(t,\phi_2,\psi_2))$ soluciones del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] \\ v'(t) = v(t)[d(t) - e(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - f(t)v(t)], \quad t \geq 0 \end{cases}$$

correspondientes a las condiciones iniciales (ϕ_1,ψ_1) y (ϕ_2,ψ_2) respectivamente.

Consideremos las funciones continuas

$$h(t) = u(t,\phi_1,\psi_1) - u(t,\phi_2,\psi_2), \text{ y } , g(t) = v(t,\phi_2,\psi_2) - v(t,\phi_1,\psi_1)$$

Como

$$\begin{aligned}h(0) =& u(0,\phi_1,\psi_1) - u(0,\phi_2,\psi_2) = \phi_1(0) - \phi_2(0) > 0 \\ g(0) =& v(0,\phi_2,\psi_2) - v(0,\phi_1,\psi_1) = \psi_2(0) - \psi_1(0) > 0\end{aligned}$$

entonces, por continuidad existen t_1^* y t_2^* pequeños y positivos tales que $h(t) > 0$ para $t \in [0, t_1^*]$ y $g(t) > 0$, para $t \in [0, t_2^*]$ lo cual implica que $h(t) > 0$ y $g(t) > 0$ para $t \in [0, t^*]$ con $t^* = \min\{t_1^*, t_2^*\}$ entonces $u(t, \phi_1, \psi_1) > u(t, \phi_2, \psi_2)$ y $v(t, \phi_2, \psi_2) > v(t, \phi_1, \psi_1)$ para $t \in [0, t^*]$. Si las anteriores desigualdades no son válidas para $t \geq t^*$ entonces por continuidad debe existir un primer tiempo $\bar{t} > t*$ tal que $u(t, \phi_1, \psi_1) > u(t, \phi_2, \psi_2)$ y $v(t, \phi_2, \psi_2) > v(t, \phi_1, \psi_1)$ para $t \in [0, \bar{t})$ pero

(i) $u(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) = u(\bar{t}, \phi_2, \psi_2)$ ó

(ii) $v(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) = v(\bar{t}, \phi_1, \psi_1)$

Supongamos que ocurre (i), tenemos que $h(t) = u(t, \phi_1, \psi_1) - u(t, \phi_2, \psi_2) > 0$ para $t \in [0, \bar{t})$ y $h(\bar{t}) = u(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - u(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) = 0$. Por definición de derivada tendríamos $h'(\bar{t}) = u'(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - u'(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) \leq 0$.
Por otra parte:

$$\begin{aligned}
h'(\bar{t}) =& u'(t, \phi_1, \psi_1) - u'(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) \\
=& u(\bar{t}, \phi_1, \psi_1)[a(\bar{t}) - b(\bar{t})u(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - c(\bar{t}) \int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v(s, \phi_1, \psi_1)ds] \\
&- u(\bar{t}, \phi_2, \psi_2)[a(\bar{t}) - b(\bar{t})u(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) - c(\bar{t}) \int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v(s, \phi_2, \psi_2)ds] \\
=& a(\bar{t})[u(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - u(\bar{t}, \phi_2, \psi_2)] - b(\bar{t})(u^2(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - u^2(\bar{t}, \phi_2, \psi_2)] \\
&+ c(\bar{t}) \int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)[v(s, \phi_2, \psi_2) - v(s, \phi_1, \psi_1)]ds > 0;
\end{aligned}$$

ya que los dos primeros sumandos son nulos por ser $u_1(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) = u_2(\bar{t}, \phi_2, \psi_2)$ y $v(s, \phi_2, \psi_2) > v(s, \phi_1, \psi_1)$, y, $k_i(\bar{t} - s) > 0$ para $s \in (0, \bar{t}]$ y $\psi_2(s) \geq \psi_1(s)$ para $s \in (-\infty, 0]$. Esto contradice que $u'(\bar{t}, \phi_1, \psi_1) - u'(\bar{t}, \phi_2, \psi_2) \leq 0$. En forma análoga se prueba que si ocurre (ii) también llegamos a una contradicción. Todo lo anterior prueba que $u(t, \phi_1, \psi_1) > u(t, \phi_2, \psi_2)$ y $v(t, \phi_2, \psi_2) > v(t, \phi_1, \psi_1)$ para $t \geq 0$, esto prueba el lema. $\square$

Lema 2.3 *Si*

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} \ y \ \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{e_M \bar{k}_2}$$

entonces existen números $L_1 > (a_M/b_L)$; $L_2 > (d_M/f_L)$ *y* $\delta > 0$ *tales que*

$$a_L - c_M \bar{k}_1 L_2 - b_M \delta > 0, \ y \ , d_L - e_M \bar{k}_2 L_1 - f_M \delta > 0$$

Prueba

De las desigualdades en la hipótesis deducimos que:

$$\left(a_L - c_M\bar{k}_1\frac{d_M}{f_L}\right) > 0, \text{ y }, d_L - \frac{e_M\bar{k}_2a_M}{b_L} > 0.$$

Consideremos $f(x) = d_L - e_M\bar{k}_2x$ y $g(x) = a_L - c_M\bar{k}_1x$, ambas son continuas y decrecientes con

$$f\left(\frac{a_M}{b_L}\right) = d_L - \frac{e_M\bar{k}_2a_M}{b_L} > 0; \quad g\left(\frac{d_M}{f_L}\right) = \left(a_L - \frac{c_M\bar{k}_1d_M}{f_L} > 0\right),$$

entonces, por la continuidad y el decrecimiento de f y g existen números $L_1 > (a_M/b_L)$ y $L_2 > (d_M/f_L)$ tales que $f(L_1) = d_L - e_M\bar{k}_2L_1 > 0$; $g(L_2) = a_L - c_M\bar{k}_1L_2 > 0$, por la propiedad arquimediana aplicada a $f(L_1)$ y f_M existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(L_1) = d_L - e_M\bar{k}_2L_1 > \delta_1 f_M$. En forma análoga para $g(L_2)$ y b_M existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(L_2) = a_L - c_M\bar{k}_1L_2 > \delta_2b_M$. Si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tendremos que

$$a_L - c_M\bar{k}_1L_2 > b_M\delta, \text{ y }, d_L - e_M\bar{k}_2L_1 > f_M\delta$$

y esto implica

$$a_L - c_M\bar{k}_1L_2 - b_M\delta > 0, \text{ y }, d_L - e_M\bar{k}_2L_1 - \delta f_M > 0$$

que era lo que queríamos probar. □

Lema 2.4 *Sean* $u^*(t) = u(t,\phi^*,\psi^*)$, $u_*(t) = u(t,\phi_*,\psi_*)$, $v^*(t) = v(t,\phi^*,\psi^*)$, $v_*(t) = v(t,\phi_*,\psi_*)$ *tales que* $col(u(t,\phi_*,\psi_*), v(t,\phi_*,\psi_*))$, $col(u(t,\phi^*,\psi^*), v(t,\phi^*,\psi^*))$ *son soluciones de (2.1) y* $\phi_*(0) = \delta$, $\psi_*(0) = L_2$, $\phi^*(0) = L_1$ *y* $\psi^*(0) = \delta$ *con* ϕ^*, ϕ_*, ψ^*, $\psi_* \in FA$ *satisfaciendo* $L_1 \geq \phi^*(s) > \phi_*(s) \geq \delta$ *y* $L_2 \geq \psi_*(s) > \psi^*(s) \geq \delta$ *para todo* $s \in (-\infty, 0]$. *Entonces* $L_1 \geq \varphi^*(t) > \phi_*(t) \geq \delta$ *y* $L_2 \geq v_*(t) > v^*(t) \geq \delta$ *para todo* $t \geq t_0$, *donde* δ, L_1, L_2 *son como en el Lema 2.3, con* $\delta < L_1$, $\delta < L_2$.

Prueba

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{du_*(0)}{dt} &= u_*(0)[a(0) - b(0)u_*(0) - c(0)\int_{-\infty}^{0} k_1(0-s)\psi_*(s)ds] \\
&= \delta[a(0) - b(0)\delta - c(0)\int_{-\infty}^{0} k_1(-s)\psi_*(s)ds] \\
&\geq \delta[a_L - b_M\delta - c_M\psi_*^M\int_{-\infty}^{0} k_1(-s)ds], \; (\psi_*^M = \sup\{\psi_*(s) : s \in (-\infty, 0]\}) \\
&= \delta[a_L - b_M\delta - c_M\psi_*^M\bar{k}_1] \geq \delta[a_L - b_M\delta - c_M\bar{k}_1L_2] > 0,
\end{aligned}$$

por el lema 2.3 y ser $\psi_*^M \leq L_2$

$$\begin{aligned}\frac{dv_*(0)}{dt} =& v_*(0)[d(0) - f(0)v_*(0) - e(0)\int_{-\infty}^{0} k_2(-s)u_*(s)ds] \\ =& L_2[d(0) - f(0)L_2 - e(0)\int_{-\infty}^{0} k_2(-s)u_*(s)ds] \\ \leq& L_2[d_M - e(0)\phi_*^L \int_{-\infty}^{0} k_2(-s)ds - f_L L_2]; \ (\phi_*^L = \inf\{\phi_* : s \in (-\infty, 0]\}) \\ =& L_2[d_M - e_L\phi_*^L \bar{k}_2 - f_L L_2] \leq L_2[d_M - f_L L_2] < 0\end{aligned}$$

ya que $e_L\phi_*^L\bar{k}_2 \geq 0$ y $L_2 > (d_M/f_L)$, por tanto u_* es creciente en una vecindad de 0 y v_* es decreciente en una vecindad de 0, entonces por continuidad existe $t_1 > 0$ tal que $u_*(t) > u_*(0) = \delta$ y $v_*(0) = L_2 > v_*(t)$ para $t \in [0, t_1]$. Si es falso que $\delta < u_*(t)$ y $L_2 > v_*(t)$ con $0 < t < \infty$ entonces existe un primer tiempo $\bar{t} > t_1$ tal que $\delta < u_*(t)$ y $L_2 > v_*(t)$ para $t \in [0, \bar{t})$, pero ocure una de

(i) $u_*(\bar{t}) = \delta$

(ii) $v_*(\bar{t}) = L_2$

Si ocurre (i), o sea, $u_*(\bar{t}) = \delta$, por continuidad debemos tener $v_*(\bar{t}) \leq L_2$, si no, se romperá la continuidad. Consideremos la función $g(t) = u_*(t) - \delta$, entonces $g(t) > 0$ para $t \in [0, \bar{t})$ pero $g(\bar{t}) = u_*(\bar{t}) - \delta = 0$ luego, por definición de derivada tendremos:

$$g'(\bar{t}) = \frac{d}{dt}u_*(\bar{t}) \leq 0 \tag{*}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v_*(s)ds =& \int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t} - s)v_*(s)ds + \int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v_*(s)ds \\ \leq& \int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t} - s)\psi_*(s)ds + \int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)L_2 ds \\ \leq& \psi_*^M \int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t} - s)ds + L_2\int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)ds \\ \leq& L_2\int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t} - s)ds + L_2\int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)ds \\ =& L_2\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)ds = L_2\bar{k}_1\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_*(\bar{t}) =& u_*(\bar{t})[a(\bar{t}) - b(\bar{t})u_*(\bar{t}) - c(\bar{t})\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v_*(s)ds] \\ \geq& \delta[a_L - b_M\delta - c_M L_2\bar{k}_1] > 0\end{aligned}$$

esto contradice (*), por tanto (i) no puede ocurrir.
Si ocurre (ii), consideremos $h(t) = v_*(t) - L_2$. Entonces $h(t) < 0$ para $t \in [0, \bar{t})$ y $h(\bar{t}) = v_*(\bar{t}) - L_2 = 0$, de esto se deduce, por definición de derivada que

$$h'(\bar{t}) = v_*'(\bar{t}) \geq 0 \tag{**}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)u_*(s)ds =& \int_{-\infty}^{0} k_2(\bar{t}-s)\phi_*(s)ds + \int_0^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)u_*(s)ds \\ \leq& L_1 \int_{-\infty}^{0} k_2(\bar{t}-s)ds + L_1 \int_0^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)ds \\ =& L_1 \int_{-\infty}^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)ds = L_1\bar{k}_1\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}v_*'(\bar{t}) =& v_*(\bar{t})[d(\bar{t}) - e(\bar{t})\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)u_*(s)ds - f(\bar{t})v_*(\bar{t})] \\ \leq& L_2[d_M - e_L L_1 \bar{k}_2 - f_L L_2] \leq L_2[d_M - f_L L_2] = L_2 f_L\left[\frac{d_M}{f_L} - L_2\right] < 0,\end{aligned}$$

por el Lema 2.3 y ser $v_*(\bar{t}) = L_2$, absurdo, contradice (**). Por lo tanto (ii) tampoco puede ocurrir. En consecuencia $\delta < u_*(t)$ y $L_2 > v_*(t)$ para todo $t \in (0, \infty)$. La prueba de las desigualdades $u^*(t) < L_1$ y $v^*(t) > \delta$ en $(0, \infty)$ es similar a la anterior. Las desigualdades $u^*(t) > u_*(t)$ y $v^*(t) < v_*(t)$ en $(0, \infty)$ se deducen del Lema 2.2. Esto prueba el lema. □

Lema 2.5 *Sean $col(u(t,\phi^*,\psi^*), v(t,\phi^*,\psi^*))$ y $col(u(t,\phi_*,\psi_*), v(t,\phi_*,\psi_*))$ soluciones de (2.1) con ϕ^*, ϕ_*, ψ^*, $\psi_* \in FA$ tales que $(\phi^*(s) - \phi_*(s)) \in L^1(-\infty, 0]$, $(\psi_*(s) - \psi^*(s)) \in L^1(-\infty, 0]$ y $\phi^*(0) = L_1$, $\phi_*(0) = \delta$, $\psi^*(0) = \delta$, $\psi_*(0) = L_2$. Entonces*

$$\int_0^\infty [u^*(t) - u_*(t)]dt < \infty, \;\; y \;, \int_0^\infty [v_*(t) - v^*(t)]dt < \infty$$

Prueba
Tenemos que

$$\int_0^\infty [\phi^*(-s) - \phi_*(-s)]ds = \int_{-\infty}^0 [\phi^*(s) - \phi_*(s)]ds \in L^1(-\infty, 0]$$

entonces $(\phi^*(-s) - \phi_*(-s)) \in L^1[0, \infty)$, análogamente se tiene que $(\psi_*(-s) - \psi^*(-s)) \in L^1[0, \infty)$. Sea $L = \max\{L_1, L_2\}$ donde L_1 y L_2 son los del Lema 2.4, como $L_1, L_2 \leq L$

entonces por el Lema 2.4 tendremos $L \geq u^*(t) > u_*(t) \geq \delta$ y $L \geq v_*(t) > v^*(t) \geq \delta$ para $t \in [0, \infty)$.

Tenemos,

$$\frac{d}{dt} \ln u^*(t) = \frac{(u^*(t))'}{u*(t)} = a(t) - b(t)u^*(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v^*(s)ds$$

análogamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln u_*(t) =& a(t) - b(t)u_*(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v_*(s)ds \\ \frac{d}{dt} \ln v^*(t) =& d(t) - e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u^*(s)ds - f(t)v^*(t) \\ \frac{d}{dt} \ln v_*(t) =& d(t) - e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u_*(s)ds - f(t)v_*(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \frac{u_*(t)}{u^*(t)} =& \frac{d}{dt} \ln u_*(t) - \frac{d}{dt} \ln u^*(t) \\ =& b(t)[u^*(t) - u_*(t)] + c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)[v^*(s) - v_*(s)]ds, \\ \frac{d}{dt} \ln \frac{v_*(t)}{v^*(t)} =& e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)[u^*(s) - u_*(s)]ds + f(t)[v^*(t) - v_*(t)] \end{aligned}$$

integrando la primera ecuación $(d/dt) \ln \dfrac{u_*(t)}{u^*(t)}$ en $[0, t]$ tendremos

$$\int_0^t b(\theta)[u^*(\theta) - u_*(\theta)]d\theta = \ln \frac{u_*(s)}{u^*(s)}\bigg|_0^t + \int_0^t c(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta \quad (1)$$

como $L \geq u^*(t) > u_*(t) \geq \delta$ entonces $(L/\delta) \geq (u_*(t)/u^*(t)) \geq (\delta/L)$ entonces $\ln(L/\delta) \geq \ln(u_*(t)/u^*(t)) \geq \ln(\delta/L)$, por tanto

$$\ln \frac{u_*(s)}{u^*(s)}\bigg|_0^t = \ln \frac{u_*(t)}{u^*(t)} - \ln \frac{u_*(0)}{u^*(0)} \leq \ln \frac{L}{\delta} - \ln \frac{\delta}{L} = \ln \frac{L^2}{\delta^2}$$

reemplazando en (1) nos queda

$$\int_0^t b(\theta)[u^*(\theta) - u_*(\theta)]d\theta \leq \ln \frac{L^2}{\delta^2} + \int_0^t c(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta$$

como $b_L \leq b(\theta)$ y $c(\theta) \leq c_M$ nos queda

$$b_L \int_0^t [u^*(\theta) - u_*(\theta)]d\theta \leq \ln \frac{L^2}{\delta^2} + c_M \int_0^t \int_{-\infty}^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta \quad (2)$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{-\infty}^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta \\
&= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{0} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]ds + \int_0^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]ds \right) d\theta \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{0} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta + \int_0^t \int_0^{\theta} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta
\end{aligned}
$$

pero

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{-\infty}^{0} k_1(\theta - s)[v_*(s) - v^*(s)]dsd\theta \\
&= \int_0^t \int_0^{\infty} (k_1(\theta + z)[v_*(-z) - v^*(-z)dzd\theta \quad (z = -s) \\
&= \int_0^t \int_0^{\infty} k_1(\theta + z)[\psi_*(-z) - \psi^*(-z)]dzd\theta \\
&\leq \int_0^t \int_0^{\infty} k_1(\theta)[\psi_*(-z) - \psi^*(-z)]dzd\theta, \text{ ya que } \int_0^{\infty} k_1(\theta + z)d\theta \leq \int_0^{\infty} k_1(s)ds = \bar{k}_1 \\
&\leq \int_0^t \bar{k}_1(\psi_*(-z) - \psi^*(-z))dz \\
&= \bar{k}_1 \int_0^t (\psi_*(-z) - \psi^*(-z))dz \\
&\leq \bar{k}_1 \int_0^{\infty} (\psi_*(-z) - \psi^*(-z)\; dz < \infty \text{ ya que } (\psi_*(-z) - \psi^*(-z)) \in L^1[0, \infty) \\
&= \bar{k}_1 \Omega. \text{ donde } \Omega = \int_0^{\infty} (\psi_*(-z) - \psi^*(-z))dz < \infty \quad (3)
\end{aligned}
$$

Para la otra integral tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^{\theta} k_1(\theta - s)|v_*(s) - v^*(s)|dsd\theta \text{ con } 0 < s \leq \theta,\ 0 \leq \theta \leq t \\
&= \int_0^t \int_S^t k_1(\theta - s)|v_*(s) - v^*(s)|d\theta ds \text{ por el Teorema de Fubini} \\
&= \int_0^t [v_*(s) - v^*(s)] \left(\int_s^t k_1(\theta - s)d\theta ds \right) \\
&\leq \int_0^t (v_*(s) - v^*(s))ds \quad \int_0^{\infty} k_1(\theta)\, d\theta = \bar{k}_1 \int_0^t (v_*(s) - v^*(s))\, ds \quad (4).
\end{aligned}
$$

La última desigualdad es debido a que

$$
\int_s^t k_1(\theta - s)d\theta = \int_0^{t-s} k_1(z)dz \leq \int_0^{\infty} k_1(z)dz = \bar{k}_1;\ z = \theta - s,
$$

reemplazando (3) y (4) en (2) y cambiando s por θ en el lado izquierdo de (2) nos queda

$$b_L \int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds \leq \ln \frac{L^2}{\delta^2} + \bar{k}_1 \Omega c_M + c_M \bar{k}_1 \int_0^t (v_*(s) - v^*(s))ds$$

por tanto,

$$b_L \leq \frac{A}{\displaystyle\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds} + \frac{c_M \bar{k}_1 \displaystyle\int_0^t (v_*(s) - v^*(s))ds}{\displaystyle\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds}$$

donde $A = \ln(L^2/\delta^2) + \bar{k}_1 \Omega c_M$, luego

$$\frac{b_L}{c_M \bar{k}_1} \leq \frac{A}{c_M \bar{k}_1 \displaystyle\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds} + \frac{\displaystyle\int_0^t (v_*(s) - v^*(s))ds}{\displaystyle\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds} \qquad (5)$$

de manera análoga se tiene

$$\int_0^t f(\theta)(v_*(\theta) - v^*(\theta))d\theta = \int_0^t e(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} k_1(\theta - s)[u^*(s) - u_*(s))dsd\theta - \ln \frac{v_*(t)}{v^*(t)} \qquad (*)$$

y de $L > v_*(t) > v^*(t) > \delta$ se deduce $(\delta/L) < (v_*(t)/v^*(t) < (L/\delta)$, por tanto

$$-\ln \frac{v_*(s)}{v^*(s)} \Big|_0^t = \ln \frac{v_*(0)}{v^*(0)} - \ln \frac{v_*(t)}{v^*(t)} < -\ln \frac{\delta}{L} - \frac{L}{\delta} = -\ln \frac{\delta^2}{L^2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} k_2(\theta - s)[u^*(s) - u_*(s)]ds - \ln \frac{v_*(s)}{v^*(s)} \Big|_0^t \\
&\leq e_M \int_0^t \left[\int_{-\infty}^0 k_2(\theta - s)d\theta + \int_0^{\theta} k_2(\theta - s)d\theta\right] (u^*(s) - u_*(s))ds - \ln \frac{\delta^2}{L^2} \\
&= c_M \int_0^t \int_{-\infty}^0 k_2(\theta - s)d\theta(u^*(s) - u_*(s))ds + e_M \int_0^t \int_0^{\theta} k_2(\theta - s)d\theta(u^*(s) - u_*(s))ds - \ln \frac{\delta^2}{L^2} \\
&\leq e_M \bar{k}_2 \int_0^t (\phi^*(-s) - \phi_*(-s))ds + e_M \bar{k}_2 \int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds - \ln \frac{\delta^2}{L^2}
\end{aligned}$$

como $f_L \leq f(s)$ podemos concluir de (*) que,

$$f_L \int_0^t (v_*(s) - v^*(s))ds \leq B + e_M \bar{k}_2 \int_0^t (u^*(-s) - u_*(-s))ds - \ln \frac{\delta^2}{L^2} \qquad (**)$$

donde $c_M\bar{k}_2\int_0^t(\phi^*(-s)-\phi_*(-s))ds \leq e_M\bar{k}_2\int_0^\infty(\phi^*(-s)-\phi_*(-s))ds = B < \infty$ ya que $(\phi^*(-s)-\phi_*(-s)) \in L^1[0,\infty)$, por tanto

$$\frac{\displaystyle\int_0^t (v_*(s)-v^*(s))ds}{\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} \leq \frac{e_M\bar{k}_2}{f_L} + \frac{B}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} - \frac{\ln(\delta^2/L^2)}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds}$$

sustituyendo en (5) tendremos

$$\begin{aligned}\frac{b_L}{c_M\bar{k}_1} \leq & \frac{A}{c_M\bar{k}_1\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} \\ & + \frac{e_M\bar{k}_2}{f_L} + \frac{B}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} - \frac{\ln(\delta^2/L^2)}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}(10)\quad \frac{b_L}{c_M\bar{k}_1} - \frac{e_M\bar{k}_2}{f_L} = r \leq & \frac{A}{c_M\bar{k}_1\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} \\ & + \frac{B}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} - \frac{\ln(\delta^2/L^2)}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds}.\end{aligned}$$

Veamos que $r > 0$, en efecto, por hipótesis

$$\frac{b_L}{e_M\bar{k}_2} > \frac{a_M}{d_L} \text{ y } \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} > \frac{c_M}{f_L}$$

usando estas desigualdades se tiene

$$a_L > \frac{c_M d_M \bar{k}_1}{f_L} > \frac{\bar{k}_1 c_M d_L}{f_L} > \frac{k_1 c_M}{f_L}\frac{a_M e_M \bar{k}_2}{b_L} > \frac{\bar{k}_1 c_M}{f_L}\frac{e_M \bar{k}_2 a_L}{b_L}.$$

Por tanto

$$1 > \frac{\bar{k}_1 c_M e_M \bar{k}_2}{f_L b_L}, \text{ y en consecuencia}$$

$$r = \frac{b_L}{\bar{k}_1 c_M} - \frac{e_M k_2}{f_L} > 0$$

Luego

$$0 < r \leq \frac{A}{c_M\bar{k}_1\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} + \frac{B}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds} - \frac{\ln(\delta^2/L^2)}{f_L\displaystyle\int_0^t (u^*(s)-u_*(s))ds}$$

por consiguiente

$$\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds \leq \frac{1}{r}\left[\frac{A}{c_M\bar{k}_1} + \frac{B}{f_L} + \frac{1}{f_L}\ln\left(\frac{L^2}{\delta^2}\right)\right] < \infty$$

como $\int_0^t (u^*(s) - u_*(s))ds < \infty$ se tiene que $\int_0^\infty (u^*(s) - u_*(s))ds < \infty$, se deuce de (**) que $\int_0^\infty (v_*(s) - v^*(s))\, ds < \infty$. Esto prueba el lema. □

Lema 2.6 *Si* $col(u(t,\phi^*,\psi^*), v(t,\phi^*,\psi^*))$ *y* $col(u(t,\phi_*,\psi_*), v(t,\phi_*,\psi_*))$ *son soluciones de (2.1) con* $\phi_*(0) = \delta$, $\phi^*(0) = L_1$, $\psi_*(0) = L_2$, $\psi^*(0) = \delta$ *con* ϕ^*, ϕ_*, ψ^*, $\psi_* \in FA$ *satisfaciendo las condiciones iniciales* $L_1 > \phi^*(s) > \phi_*(s) > \delta$ *y* $L_2 > \psi_*(s) > \psi^*(s) > \delta$ *para* $s \in (-\infty, 0)$. *donde* L_1 *y* L_2 *son como en el Lema 2.3. Entonces* $u(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\phi_*,\psi_*)$ *y* $v(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\phi^*,\psi^*)$ *tienden a cero cuando* t *tiende a* ∞.

Prueba

Sean $w(t) = u^*(t) - u_*(t)$ y $z(t) = v_*(t) - v^*(t)$ con $t \in [0,\infty)$ entonces por el Lema 2.4, $w(t)$ y $z(t)$ son positivas y acotadas ya que $u^*(t)$, $u_*(t)$, $v_*(t)$, $v^*(t)$ lo son por el Lema 2.4.

$$\begin{aligned}
|w'(t)| &= \left|\frac{d}{dt}u^*(t) - \frac{d}{dt}u_*(t)\right| \\
&= \Big|u^*(t)[a(t) - b(t)u^*(t) - c(t)\int_{-\infty}^t k_1(t-s)v^*(s)ds] \\
&\quad - u_*(t)[a(t) - b(t)u_*(t) - c(t)\int_{-\infty}^t k_1(t-s)v_*(s)ds]\Big| \\
&= a(t)[u^*(t) - u_*(t)] + b(t)[u_*^2(t) - u^{*2}(t)] + c(t)\int_{-\infty}^t k_1(t-s)(v_*(s) - v^*(s))ds \\
&= (u^*(t) - u_*(t))[a(t) - b(t)(u_*(t) + u^*(t)] + c(t)\int_{-\infty}^t k_1(t-s)(v_*(s) - v^*(s))ds \\
&\leq (u^{*M} - u_{*L})(a_M + 2b_M u^{*M}) + c_M\int_0^\infty k_1(t+z)(v_*(z) - v^*(z))dz \\
&\quad \text{donde } u^{*M} = \sup_{s\in\mathbb{R}} u^*(s),\ u_{*L} = \inf_{s\in\mathbb{R}} u_*(s),\ z = -s \\
&\leq A + c_M(\psi_*^M - \psi_L^*)\int_0^\infty k_1(r)dr;\ \text{con } A = (u^{*M} - u_{*L})(a_M + 2b_M u^{*M}) < \infty \\
&= A + c_M(\psi_*^M - \psi_L^*)\bar{k}_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Luego existe M tal que $|w'(t)| \leq M$ y como $w(t)$ es positiva e integrable en $[0,\infty)$ por el Lema 2.5. Entonces por el Lema 1.5. $w(t) = u^*(t) - u_*(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. En forma análoga se prueba que $z(t) = v_*(t) - v^*(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Luego el lema está probado. □

Observación:

Como consecuencia de los lemas 2.2 y 1.5 se sigue que si $col(u(t,\theta,\phi),v(t,\theta,\psi))$ es cualquier solución de (2.1) satisfaciendo $\phi^*(s) > \theta(s) > \phi_*(s)$ y $\psi_*(s) > \psi(s) > \psi^*(s)$ para $s \in (-\infty, 0]$ con $\phi^*(0) > \theta(0) > \phi_*(0)$ y $\psi_*(0) > \phi(0) > \psi^*(0)$ entonces $u^*(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\theta,\phi)$ y $v_*(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\theta,\psi)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito ya que el Lema 2.2 implica que para $t \geq 0$

$$u^*(t.\phi^*,\psi^*) > u(t,\theta,\phi) > u_*(t,\phi_*,\psi_*)$$

$$v_*(t,\phi_*,\psi_*) > v(t,\theta,\phi) > v^*(t,\phi^*,\psi^*)$$

y como

$$0 < u^*(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\theta,\phi) < u^*(t,\phi^*,\psi^* - u_*(t,\phi_*,\psi_*)$$

$$0 < v_*(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\theta,\phi) < v_*(t,\phi_*,\psi_*) - v^*(t,\phi^*,\psi^*)$$

El Lema 2.6 implica $u^*(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\theta,\psi)$ y $v_*(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\theta,\phi)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito. A continuación usaremos un lema cuya prueba puede verse en [4].

Lema 2.7 *Si $0 < \delta < a_L/b_M)$ y $(a_M/b_L) < L_1$ entonces existe una única solución $u^*(t)$ de la ecuación logística*

$$u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t)] \tag{L}$$

tal que $\delta \leq u^*(t) \leq L$ con $t \in (-\infty, \infty)$.

Lema 2.8 *Sean $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (2.1) y $col(U(t), V(t))$ solución del sistema logístico*

$$\begin{cases} U'(t) = U(t)[a(t) - b(t)U(t)] & \\ V'(t) = V(t)[d(t) - f(t)V(t)] & t \geq 0 \\ U(0) = 0,\ V(0) = 0 & \end{cases}$$

entonces $u(t) < U(t)$ y $v(t) < V(t)$ para $t \in [0, \infty)$

Prueba Ver prueba del Lema 1.2

Teorema 3 *Sean* $col(u_1(t,\phi_1,\psi_1), v_1(t,\phi_1,\psi_1))$ *y* $col(u_2(t,\phi_2,\psi_2), v_2(t,\phi_2,\psi_2))$ *soluciones de (2.1) con* $0 \leq \phi_1(s) < \phi_2(s) \leq L_1$ *y* $0 \leq \psi_2(s) < \psi_1(s) \leq L_2$, $s \in (-\infty, 0]$ *donde* $u_k(0) = u(0,\phi_k,\psi_k) > 0$, $v_k(0) = v(0,\phi_k,\psi_k) > 0$; $k = 1,2$ *entonces* $u_1(t,\phi_1,\psi_1) - u_2(t,\phi_2,\psi_2)$ *y* $v_1(t,\phi_1,\psi_1) - v_2(t,\phi_2,\psi_2)$ *tienden a cero cuando t tiende a infinito.*

Prueba

Sea $col(U_1(t), V_1(t))$ solución del sistema

$$\begin{cases} U'(t) = U(t)[a(t) - b(t)U(t)] \\ V'(t) = V(t)[d(t) - f(t)V(t)] & t > 0 \\ U_1(0) = u_1(0), \; V_1(0) = v_1(0) \end{cases}$$

satisfaciendo $(a_M/b_L) < L_1$, $(d_M/f_L) < L_2$, entonces por el lema 2.6 tendremos,

$$0 < U_1(t) < L_1 \text{ y } 0 < V_1(t) < L_2$$

para todo $t \geq 0$, recordando el Lema 2.3 tenemos que

$$a_L - c_M\bar{k}_1L_2 > 0 \text{ y } d_L - e_M\bar{k}_2L_1 > 0$$

escojamos δ tal que $0 < \delta < \min\{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$ y tal que $a_L - c_M\bar{k}_1L_2 - b_M\delta > 0$ y $d_L - e_M\bar{k}_2L_1 - f_M\delta > 0$ sean $col(u(t,\phi^*,\psi^*), v(t,\phi^*,\psi^*))$ y $col(u(t,\phi_*,\psi_*), v(t,\phi_*,\psi_*))$ soluciones de (2.1) satisfaciendo las condiciones iniciales $\phi^*(s) > \phi_*(s) > 0$ y $\psi_*(s) > \psi^*(s) > 0$, $s \in (-\infty, 0]$, donde $\phi^*(0) = L_1$; $\phi_*(0) = \delta$; $\psi_*(0) = L_2$, $\psi^*(0) = \delta$, por la forma como escogimos δ, por ser $u_1(0) = U_1(0) < L_1$ y $v_1(0) = V_1(0) < L_2$ tendremos para $k = 1,2$ que

$$\begin{aligned} \delta =& \phi_*(0) < u_k(0) < \phi^*(0) = L_1 \\ \delta =& \psi^*(0) < v_k(0) < \psi_*(0) = L_2 \end{aligned}$$

entonces por el Lema 2.2 para $k = 1,2$ tendremos, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} u(t,\phi_*,\psi_*) < u_k(t,\phi_k,\psi_k) < u(t,\phi^*,\psi^*) \\ v(t,\phi^*,\psi^*) < v_k(t,\phi_k,\psi_k) < v(t,\phi_*,\psi_*) \end{aligned}$$

para $t \in [0,\infty)$. Como $\phi_1(s) < \phi_2(s)$ y $\psi_2(s) < \psi_1(s)$ para $s \in (-\infty, 0]$, por el Lema 2.2 tendremos

$$u_1(t,\phi_1,\psi_1) < u_2(t,\phi_2,\psi_2), \text{ y }, \; v_1(t,\phi_1,\psi_1) < v_2(t,\phi_2,\psi_2)$$

entonces

$$u(t,\phi_*,\psi_*) < u_1(t,\phi_1,\psi_1) < u_2(t,\phi_2,\psi_2) \leq u(t,\phi^*,\psi^*)$$

y

$$v(t,\phi^*,\psi^*) < v_1(t,\phi_1,\psi_1) < v_2(t,\phi_2,\psi_2) \leq v(t,\phi_*,\psi_*);\ t \geq 0$$

de lo anterior se deduce

$$0 < u_2(t,\phi,\psi_2) - u_1(t,\phi_1,\psi_1) < u(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\phi_*,\psi_*)$$

y

$$0 < v_2(t,\phi_2,\psi_2) - v_1(t,\phi_1,\psi_1) < v(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\phi^*,\psi^*)$$

por el Lema 2.6, $u(t,\phi^*,\psi^*) - u(t,\phi_*,\psi_*)$ y $v(t,\phi_*,\psi_*) - v(t,\phi^*,\psi^*)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito, entonces $u_1(t,\phi_2,\psi_2) - u_2(t,\phi_1,\psi_1)$ y $v_2(t,\phi_2,\psi_2) - v_1(t,\phi_1,\psi_1)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito. Esto prueba el teorema. □

Existencia de soluciones acotadas

Lema 2.9 *Sean r_1 y r_2 soluciones del sistema*

$$\begin{aligned} a_M &= b_L r_1 + c_L \bar{k}_1 r_2 \\ d_L &= e_M \bar{k}_2 r_1 + f_M r_2 \end{aligned}$$

entonces $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$. Además si $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ es una solución de (2.1) tal que $0 < \phi(s) \leq r_1$ y $\psi(s) \geq r_2$; $s \in (-\infty, 0]$. Entonces $0 < u(t) \leq r_1$ y $v(t) \geq r_2$ para $t \geq 0$.

Prueba

Las soluciones del sistema son

$$r_1 = \frac{a_M f_M - c_L d_L \bar{k}_1}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2}, \quad r_2 = \frac{b_L d_L - a_M e_M \bar{k}_2}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2}.$$

La hipótesis

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} \text{ y } \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{e_M \bar{k}_2}$$

implica $a_M f_M > a_L f_L > c_M \bar{k}_1 d_M > c_L d_L \bar{k}_1$. Luego $a_M f_M - c_L d_L \bar{k}_1 > 0$, $b_L d_L > a_M e_M \bar{k}_2$ entonces $b_L d_L - a_M e_M \bar{k}_2 > 0$. Como $b_L d_L > a_M e_M \bar{k}_2$ y $a_L f_L > c_M \bar{k}_1 d_M$ multiplicando miembro a miembro estas desigualdades resulta:

$$a_L f_L b_L d_L > a_M e_M c_M d_M \bar{k}_1 \bar{k}_2 > a_L d_L c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2,$$

lo cual implica $b_L f_M > b_L f_L > c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2$. Luego $b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2 > 0$ de las anteriores desigualdades obtenidas se deduce

$$r_1 = \frac{a_M f_M - c_L d_L \bar{k}_1}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2} > 0, \quad r_2 = \frac{b_L d_L - a_M e_M \bar{k}_2}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2} > 0.$$

Veamos que las soluciones de (2.1) son acotadas, como

$$\begin{aligned} u'(t) =& u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds]; \ t \in [0, \infty) \\ \leq& u(t)[a_M - b_L u(t) - c_L \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] \end{aligned}$$

y por el Lema 1.2 las soluciones de $u'(t) = u(t)[a_M - b_L u(t) - c_L \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds]$ son acotadas en $[0, \infty)$, entonces por comparación las soluciones de

$$u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds$$

también son acotadas en $[0, \infty)$. De forma análoga se ve que las soluciones de

$$v'(t) = v(t)[d(t) - e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - f(t)v(t)]$$

son acotadas en $[0, \infty)$ por tanto las soluciones de (2.1) son acotadas en $[0, \infty)$.
Si $r > 0$, δ son pequeños $col(u_\delta(t, \phi_\delta, \psi_\delta), v_\delta(t, \phi_\delta, \psi_\delta))$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] - \delta & \\ v'(t) = v(t)[d(t) - e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)ds - f(t)v(t)] + \delta; & t \in [0, \infty) \\ u_\delta(s) = \phi_\delta(s) = \phi(s) - \delta \leq r_1, \ v_\delta(s) = \psi_\delta(s) = \psi(s) + \delta \geq r_2; & s \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

Entonces la solución existe en $[0, r]$ y por continuidad de las soluciones respecto a las condiciones $u_\delta(t) \to u(t)$ y $v_\delta(t) \to v(t)$ cuando $\delta \to 0$ uniformemente en $[0, r]$. Veamos que $u_\delta(t) \leq r_1$ y $v_\delta \geq r_2$ para $t \in [0, \infty)$. Consideremos las funciones $h(t) = u_\delta(t) - r_1$ y $g(t) = v_\delta(t) - r_2$ con $t \in [0, r]$ entonces

$$h(0) = u_\delta(0) - r_1 = (\phi(0) - \delta) - r_1 = (\phi(0) - r_1) - \delta \leq -\delta < 0,$$

ya que $\phi(0) \leq r_1$ por hipótesis. En forma análoga

$$g(0) = v_\delta(0) - r_2 = (\psi(0) + \delta) - r_2 = (\psi(0) - r_2) + \delta > 0,$$

ya que $\psi(0) \geq r_2$. Entonces por continuidad existe un tiempo t^* con $0 < t^* \leq r$ tal que $h(t) < 0$ y $g(t) > 0$ para $t \in [0, t^*]$ o sea tal que $u_\delta(t) < r_1$ y $v_\delta(t) > r_2$ para $t \in [0, t^*]$. Si estas desigualdades no se cumplen para $t \in [0, r]$ entonces por continuidad debe existir un primer tiempo $\bar{t}$ con $t^* < \bar{t} \leq r$ tal que $u_\delta(t) < r_1$ y $v_\delta(t) > r_2$ para $t \in [0, \bar{t}]$ pero

(i) $u_\delta(\bar{t}) = r_1$ ó

(ii) $v_\delta(\bar{t}) = r_2$

Supongamos que ocurre (i), entonces por definición de derivada $u'_\delta(\bar{t}) \geq 0$ pero

$$\begin{aligned} u'_\delta(\bar{t}) =& r_1[a(\bar{t}) - b(\bar{t})r_1 - c(\bar{t}) \int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v_\delta(s)ds] - \delta \\ \leq& r_1[a_M - b_L r_1 - c_L \int_0^{\bar{t}} k_1(\bar{t} - s)v_\delta(s)ds] - \delta \\ \leq& r_1[a_M - b_L r_1 - c_L r_2 \bar{k}_1] - \delta = -\delta < 0 \end{aligned}$$

Puesto que $v_\delta(t) \geq r_2$ para $t \in [0, \bar{t}]$, $a_M - b_L r_1 - c_L r_2 \bar{k}_1 = 0$, y $v_\delta(s) = \psi_\delta(s) \geq r_2$; $s \in (-\infty, 0]$. Esto es una contradicción, por tanto (i) no puede ocurrir.
Si ocurre (ii), en forma análoga llegamos a una contradicción entonces $v_\delta(t) > r_2$ y $u_\delta(t) < r_1$ para $t \in [0, r]$. Como $u_\delta(t) \to u(t)$ y $v_\delta(t) \to v(t)$ en subintervalos compactos de $[0, \infty)$ y este es el dominio de la solución $col(u_\delta(t), v_\delta(t))$ entonces $u(t) = \lim_{\delta \to 0} u_\delta(t) \leq r_1$ y $\lim_{\delta \to 0} v_\delta(t) = v(t) \geq r_2$ si $t \geq 0$. Esto prueba el lema. $\square$

Lema 2.10 *Sean s_1 y s_2 soluciones del sistema*

$$\begin{aligned} a_L =& b_M s_1 + c_M s_2 \bar{k}_1 \\ d_M =& c_L \bar{k}_2 s_1 + f_L s_2 \end{aligned}$$

Entonces $0 < s_1 \leq r_1$ y $s_2 \geq r_2 > 0$ donde r_1 y r_2 son los números definidos en el Lema 2.9. Además si $col(u(t, \phi, \psi)), v(t, \phi, \psi))$ es una solución de (2.1) tal que $\phi(s) \geq s_1$ y $0 < \psi(s) \leq s_2$, $s \in (-\infty, 0]$ entonces $u(t) \geq s_1$ y $0 < v(t) \leq s_2$ para todo $t \geq 0$.

Prueba

Las soluciones del sistema dado son

$$s_1 = \frac{a_L f_L - d_M c_M \bar{k}_1}{b_M f_L - c_M c_L \bar{k}_1 \bar{K}_2}, \quad s_2 = \frac{b_M d_M - a_L c_L \bar{k}_2}{b_M f_L - c_M c_L \bar{k}_1 \bar{k}_2}$$

de la cadena de desigualdades

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} \text{ y } \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{e_M \bar{k}_2}$$

se deduce $a_L f_L > c_M d_M \bar{k}_1$ entonces $a_L f_L - c_M d_M \bar{k}_1 > 0$ y $b_M d_M > b_L d_L > a_M e_M \bar{k}_2 > a_L e_L \bar{k}_2$ entonces $b_M d_M - a_L e_L \bar{k}_2 > 0$ también se tiene $a_L f_L b_L d_L > c_M d_M \bar{k}_1 a_M e_M \bar{k}_2 > c_M d_L a_L e_L \bar{k}_1 \bar{k}_2$ eliminando $a_L d_L$ nos queda $f_L b_L > c_M e_L \bar{k}_1 \bar{k}_2$ entonces $f_L b_L - c_M e_L \bar{k}_1 \bar{k}_2 > 0$ de las anteriores desigualdades se deduce que $s_1 > 0$ y $s_2 > 0$ como:

$$b_M r_1 + c_M \bar{k}_1 r_2 \geq b_L r_1 + c_L \bar{k}_1 r_2 = a_M \geq a_L = b_M s_1 + c_M s_2 \bar{k}_1 \tag{1}$$

$$e_M \bar{k}_2 s_1 + f_M s_2 \geq e_L \bar{k}_2 s_1 + f_L s_2 = d_M \geq d_L = e_M \bar{k}_2 r_1 + f_M r_2 \tag{2}$$

De (1) deducimos;

$$b_M r_1 - b_M s_1 \geq c_M s_2 \bar{k}_1 - c_M \bar{k}_1 r_2, \; b_M(r_1 - s_1) + c_M \bar{k}_1 (r_2 - s_2) \geq 0 \tag{3}$$

De (2) se tiene

$$-e_M \bar{k}_2 r_1 + e_M \bar{k}_2 s_1 - f_M r_2 + f_M s_2 \geq 0, \; -e_M \bar{k}_2 (r_1 - s_1) - f_M (r_2 - s_2) \geq 0 \tag{4}$$

entonces

$$b_M f_M (r_1 - s_1) + c_M f_M \bar{k}_1 (r_2 - s_2) \geq 0 \text{ multiplicando (3) por } f_M \tag{5}$$

$$-c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2 (r_1 - s_1) - c_M \bar{k}_1 f_M (r_2 - s_2) \geq 0 \text{ multiplicando (4) por } c_M \bar{k}_1, \tag{6}$$

Por tanto sumando (5) y (6) y factorizando tendremos

$$(b_M f_M - c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2)(r_1 - s_1) \geq 0 \tag{7}$$

de las desigualdades

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{\bar{k}_1 d_M} \text{ y } \frac{a_M}{d_L} < \frac{b_L}{e_M \bar{k}_2}$$

se deduce $a_L f_L b_L d_L > a_M e_M c_M d_M \bar{k}_1 \bar{k}_2$ de donde $b_L f_l > c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2$ y esto implica $b_M f_M - c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2 > 0$ y (7) implica que $r_1 - s_1 \geq 0$ o sea $r_1 \geq s_1$.

En forma similar se prueba que $s_2 \geq r_2$. Consideremos $r > 0$, ε pequeño y positivo y $col(u_\varepsilon(t, \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon), v_\varepsilon(t, \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon))$ solución del sistema

$$\begin{aligned} u'(t) =& u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] + \varepsilon \\ v'(t) =& v(t)[d(t) - e(t)\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - f(t)v(t)] - \varepsilon,\ t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u_\varepsilon(s) = \phi_\varepsilon(s) = \phi(s) + \varepsilon \geq s_1, \text{ y, } v_\varepsilon(s) = \psi_\varepsilon(s) = \psi(s) - \varepsilon \leq s_2;\ s \in (-\infty, 0]$$

Sean $g(t) = u_\varepsilon(t) - s_1$ y $h(t) = v_\varepsilon(t) - s_2$, $t \in [0, \infty)$. Entonces $g(0) = u_\varepsilon(0) - s_1 = (\phi(0) - s_1) + \varepsilon > 0$; ya que $\phi(0) + \varepsilon \geq s_1$ por hipótesis y $h(0) = \psi_\varepsilon(0) - s_2 = (\psi(0) - s_2) - \varepsilon < 0$; pues $\psi(0) - \varepsilon \leq s_2$ entonces por continuidad existe t^* con $0 < t^* \leq r$ tal que $g(t) = u_\varepsilon(t) - s_1 > 0$ y $h(t) = v_\varepsilon(t) - s_2 < 0$ o sea $u_\varepsilon(t) > s_1$ y $v_\varepsilon(t) < s_2$ para $t \in [0, t^*]$. Si estas desigualdades no se cumplen para todo $t \in [0, r]$ entonces por continuidad existe un primer tiempo $\bar{t}$ con $t^* < \bar{t} \leq r$ tal que $u_\varepsilon(t) > s_1$ y $v_\varepsilon(t) < s_2$ para $t \in [0, \bar{t})$ pero

(i) $u_\varepsilon(\bar{t}) = s_1$ ó

(ii) $v_\varepsilon(\bar{t}) = s_2$

Supongamos que ocurre (i) entonces $u'_\varepsilon(\bar{t}) \leq 0$ por definición de derivada pero

$$\begin{aligned} u'_\varepsilon(\bar{t}) =& s_1[a(\bar{t}) - b(\bar{t})s_1 - c(\bar{t})\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)v_\varepsilon(s)ds] + \varepsilon \\ =& s_1[a(\bar{t}) - b(\bar{t})s_1 - c(\bar{t})\int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t}-s)\psi_\varepsilon(s)ds - c(\bar{t})\int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)v_\varepsilon(s)ds] + \varepsilon \\ \geq& s_1[a_L - b_M s_1 - c_M s_2\int_{-\infty}^{0} k_1(\bar{t}-s)ds - c_M s_2\int_{0}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)ds] + \varepsilon \\ =& s_1[a_L - b_M s_1 - c_M s_2\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)ds] + \varepsilon \\ =& s_1[a_L - b_M s_1 - c_M s_2\bar{k}_1] + \varepsilon = s_1 \times 0 + \varepsilon = \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

contradice $u'_\varepsilon(\bar{t}) \leq 0$. Por tanto (i) no puede ocurrir.
Si ocurre (ii) entonces $v'_\varepsilon(\bar{t}) \geq 0$ por definición de derivada pero

$$\begin{aligned} v'_\varepsilon(\bar{t}\,) =& s_2[d(\bar{t}\,) - e(\bar{t}\,)\int_{-\infty}^{t} k_2(\bar{t}-s)u_\varepsilon(s)ds - f(\bar{t})v(\bar{t})] - \varepsilon \\ \leq& s_2[d_m - e_L\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_2(\bar{t}-s)u_\varepsilon(s)ds - f_L s_2] - \varepsilon \\ \leq& s_2[d_M - e_L s_1\bar{k}_2 - f_L s_2] - \varepsilon \text{ ya que } u_\varepsilon(s) \geq s_1;\ s \in [-\infty, \bar{t}] \\ \leq& s_2 \times 0 - \varepsilon = -\varepsilon < 0 \text{ ya que } d_M - e_L s_1\bar{k}_2 - f_L s_2 = 0 \end{aligned}$$

absurdo, luego (ii) tampoco ocurre. Por tanto debemos tener $u_\varepsilon(t) > s_1$ y $v_\varepsilon(t) < s_2$ para $t \in [0, r]$. Como $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ y $v_\varepsilon(t) \to v(t)$ en subintervalos compactos de $[0, \infty)$ y la solución $col(u_\varepsilon(t, \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon), v_\varepsilon(t, \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon))$ está definida en $[0, \infty)$ entonces $u_\varepsilon(t) \geq s_1$ y $v_\varepsilon(t) \leq s_2$ para $t \geq 0$.

Resultado Fundamental

Teorema 4 (Teorema de Existencia) . *Existe una solución $col(u(t, \phi, \psi), v(t, \phi, \psi))$ de (2.1) tal que*

$$0 < \frac{a_l f_L - d_M c_M \bar{k}_1}{b_M f_l - c_M e_L \bar{k}_1 \bar{k}_2} = s_1 \leq u(t, \phi, \psi) \leq r_1 = \frac{a_M f_M - c_L d_L \bar{k}_1}{b_l f_M - c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2}$$
$$0 < \frac{b_L d_L - a_M e_M \bar{k}_2}{b_L f_M - c_L e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2} = r_2 \leq v(t, \phi, \psi) \leq s_2 = \frac{b_M d_M - a_L e_L \bar{k}_2}{b_M f_L - c_M e_M \bar{k}_1 \bar{k}_2}$$

para todo $t \geq 0$

Prueba

Sean $col(u(t, \phi, \psi), v(t, \phi, \psi))$ solución de (2.1) con $s_1 \leq \phi(s) \leq r_1$ y $r_2 \leq \psi(s) \leq s_2$; $s \in (-\infty, 0]$, como $0 < s_1$ tendremos $0 < \phi(s) \leq r_1$ y $r_2 \leq \psi(s)$ entonces el lema 2.9 implica $0 < u(t) \leq r_1$ y $r_2(t) \leq v(t)$ para $t \geq 0$.

Como $\phi(s) \geq s_1$ y $0 < \psi(s) \leq s_2$, el lema 2.10 implica $u(t) \geq s_1$ y $v(t) \leq s_2$ para $t \geq 0$, finalmente podemos concluir que $s_1 \leq u(t) \leq r_1$ y $r_2 \leq v(t) \leq s_2$ para $t \geq 0$. Esto prueba el teorema. □

Apéndice

Proposición 1 *Si f es continua, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0 - s) f(s) ds = f(t_0)$$

donde δ es la función impulso unitario ó Delta de Dirac.

Prueba

Haciendo $\theta = t_0 - s$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0 - s) f(s) ds &= -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(\theta) f(t_0 - \theta) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) f(t_0 - \theta) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) \hat{f}(\theta) d\theta; \ \hat{f}(\theta) = f(t_0 - \theta) \\ &= \hat{f}(0) = f(t_0)\end{aligned}$$

Esto prueba la proposición. □

Proposición 2

$$\int_{0}^{\infty} t\delta(t) dt = 0$$

Prueba Consideremos la función $f(t) = tH(t)$ con

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t\delta(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} tH(t)\delta(t)dt \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} (-s)H(-s)\delta(-s)(-ds);\ t = -s > 0 \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} sH(-s)\delta(-s)ds \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} sH(-s)\delta(-s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(-s)H(-s)\delta(0-s)ds = (-0)H(-0) = 0 \times 1 = 0
\end{aligned}
$$

Esto prueba la proposición. □

Sean

$$
V(s) = \begin{cases} v(s), & s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases}, \quad U(s) = \begin{cases} u(s), & s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases}
$$

entonces

$$
\int_{-\infty}^{t} \delta(t-s)v(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)V(s)ds = V(t) = v(t)
$$

análogamente se tiene

$$
\int_{-\infty}^{t} \delta(t-s)u(s)ds = u(t)
$$

por tanto cuando tomamos como núcleo la función δ el sistema (2.1) se convierte en

$$
\begin{aligned}
u'(t) =& u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)v(t)] \\
v'(t) =& v(t)[d(t) - e(t)u(t) - f(t)v(t)]
\end{aligned}
$$

y este el sistema considerado por el autor en [1]

Bibliografía

[1] Sahir Ahmad, *Convergence and Ultimate Bounds of Solutions of the Nonautonomous Volterra Lotka Competition Equations*, J. Math. Anal. Appl. **127** (1987), 377-387.

[2] R. D. Driver, *Existence and Stability of Solutions of a Delay–Differential system*, Arch. Rat. Mech. Anal. **10** 1962, 401-426.

[3] Yang Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press.

[4] Francisco Montes de Oca, *Dinámica poblacional de una especie*, Publicaciones UCLA, 1996.

[5] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, 1a. Edición. Editorial Reverté, 1960.

[6] Richard Bellman, *Introducción al Análisis Matricial*, Editorial Reverté. 1960.