REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

UCLA-UPEL-UNEXPO

MAESTRA INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA

EXTINCIÓN EN SISTEMAS DEL TIPO LOTKA-VOLTERRA CON RETARDO

Lic. Miguel J. Vivas C.

Barquisimeto, Julio 2001

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

UCLA-UPEL-UNEXPO

MAESTRA INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA

EXTINCIÓN EN SISTEMAS DEL TIPO LOTKA-VOLTERRA CON RETARDO

Trabajo de Grado Presentado como Requisito Parcial Para Optar al

Título de Magíster en Matemática, Mención Matemática Pura.

Autor: Lic. Miguel J. Vivas C.

Tutor: Dr. Francisco Montes de Oca.

Barquisimeto, Julio 2001

Dedico este trabajo a la vida y la esperanza representada por mis sobrinos María, José, Rafael, Eva y Jesús, ustedes son el futuro y la alegría en mi familia.

Agradecimientos

Al Dr. Francisco Montes de Oca, por su valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo, demostrando no solamente ser una persona brillante, sino también un extraordinario ser humano.

A la Msc. Luz E. Rodríguez, por soportarme durante el proceso de transcripción de este trabajo, su esfuerzo y dedicación es invaluable, muchas gracias amiga.

A mis amigos Jorge, Iván, Ebner, Alexander, Jurancy y Liliana que compartieron conmigo mis estudios tanto en pregrado, como en la maestría por su apoyo en los momentos díficiles.

A todos los que contribuyeron en mi formación académica y humana.

Es de Uds. este triunfo.

Resumen

En el presente trabajo obtendremos resultados similares a los presentados por Shair Ahmad en su artículo científico titulado .ºn Non autonomous Volterra-Lotka Competition Equations”[1].

Estudiaremos un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo infinito dado por:

$$
(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\,x_1(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d(t) - f(t)\,x_2(t) - e(t)\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds], \;\; t \geq t_0 \geq 0 \\ x_1(t) = \phi_1(t), \;\; x_2(t) = \phi_2(t), \;\; t \leq t_0 \end{cases}
$$

donde las funciones $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t)$ son continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, +\infty)$ y los núcleos k_1 y k_2 con

$$k_i : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \;\; i = 1, 2$$

son continuos y satisfacen que:

$$\int_0^{+\infty} k_i(s)\,ds = 1, \quad \text{para} \;\; i = 1, 2;$$

las funciones $\phi_1(s), \phi_2(s)$ son las condiciones iniciales del sistema (1) y representa la historia de los tamaños de las poblaciones en el pasado, estas funciones están definidas en $(-\infty, t_0]$, son continuas, no negativas, acotadas y en t_0 son estrictamente positivas.

Si g es una funcin de un subconjunto D en $I\!R$, denotaremos por $g_L = \inf\{g(t) : t \in D\}$ $g_M = \sup\{g(t) : t \in D\}$, y por $col\,(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ a cualquier solución del sistema dado, donde

$$x_1(t,\phi_1,\phi_2) = \begin{cases} \phi_1(t), & \text{si } t \in (-\infty, t_0] \\ x_1(t), & \text{si } t \in [t_0, +\infty), \end{cases}$$

$$x_2(t,\phi_1,\phi_2) = \begin{cases} \phi_2(t), & \text{si } t \in (-\infty, t_0] \\ x_2(t), & \text{si } t \in [t_0, +\infty). \end{cases}$$

Demostraremos que cuando se satisfacen las desigualdades:

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{d_M} \quad \text{y} \quad \frac{b_M}{a_L} \leq \frac{e_L}{d_M}$$

las soluciones $col\,(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ con ϕ_1, ϕ_2 condiciones iniciales del sistema dado tienen el siguiente comportamiento:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t,\phi_1,\phi_2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\longrightarrow\infty} [x^*(t) - x_1(t,\phi_1,\phi_2)] = 0$$

donde $x^*(t)$ es la única solución de la ecuación logística

$$x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)\,x(t)]$$

tal que $\dfrac{a_L}{b_M} \leq x^*(t) \leq \dfrac{a_M}{b_L}$ para todo $t \in I\!R$.

Índice General

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Introducción

La Ecología estudia las relaciones mutuas entre el hombre y en general entre los organismos vivos y el medio ambiente. El objeto principal de la Ecología es la evolución de las poblaciones, su extinción o supervivencia. En este trabajo presentaremos un modelo competitivo entre dos especies con interrelación en el pasado y estudiaremos su comportamiento a lo largo del tiempo.

En los aos 20, el famoso matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) y el biólogo americano Alfred J. Lotka (1880-1949) desarrollaron el modelo matemático de la competencia de dos especies con recursos limitados en un medio cerrado, que a continuación damos y que se conoce como **modelo de Lotka – Volterra**.

Consideremos dos especies (de animales, plantas o bacterias, por ejemplo) cuyas poblaciones son $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las cuales compiten una con la otra por un abastecimiento limitado en el ambiente común. Para construir un modelo matemático tan realista como sea posible, se supuso que en ausencia de la otra especie una de ellas tendría una población limitada, logística. Cuando no se da iteracción entre las especies, la población satisfaría el siguiente sistema:

$$(I) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a - b\, x_1(t)] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d - f\, x_2(t)] \end{cases}$$

donde a, b, d y f son constantes positivas y tienen la interpretación que se da a continuación:

- a y d representan la razón de crecimiento de las especies x_1 y x_2 respectivamente.
- b y f representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento.

Si suponemos que la competencia tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional a su producto $x_1(t)\, x_2(t)$, insertamos tales términos con una constante de proporcionalidad negativa en las ecuaciones (I) para obtener el sistema competitivo del tipo Lotka-Volterra:

$$(II) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = a\, x_1(t) - b\, x_1^2(t) - c\, x_1(t)\, x_2(t) \\ x_2'(t) = d\, x_2(t) - f\, x_2^2(t) - e\, x_1(t)\, x_2(t) \end{cases}$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e y f son números reales positivos; tales constantes tienen la siguiente interpretación:

- a, b, d y f tienen la misma interpretación que en el sistema (I).
- c y e representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra.

Volterra probó que si se satisface $af > cd$ y $bd \leq ae$ entonces toda solución $col\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ de (II) tiende a la solución de equilibrio $x_1(t) = \dfrac{a}{b}$ y $x_2(t) = 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$; conocido como principio de exclusión competitiva.

Ahmad en [1] y Tineo en [7], consideraron el sistema (II) con $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $d = d(t)$, $e = e(t)$ y $f = f(t)$ como funciones continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Ellos probaron que las condiciones:

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{d_M} \quad \text{y} \quad \frac{b_M}{a_L} \leq \frac{e_L}{d_M}$$

implican que cualquier solución $col\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ de (II) con condiciones iniciales $x_1(t_0) > 0$ y $x_2(t_0) > 0$ satisfacen que $x_2(t) \longrightarrow 0$ y $x_1(t) - x^*(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $x^*(t)$ es la única solución acotada superior e inferiormente por constantes postiivas de la ecuación logística $x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)\,x(t)]$, lo cual generaliza el principio de exclusión competitiva al caso no autónomo.

1.2. Modelo de Competencia de Dos Especies Tomando en Cuenta la Interrelación de Éstas en el Pasado

Volterra también consideró sistemas de la forma:

$$(III) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a - b\,x_1(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d - f\,x_2(t) - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds] \end{cases}$$

donde los coeficientes son números reales positivos, los núcleos $k_1(t)$ y $k_2(t)$ son funciones continuas, positivas que satisfacen las condiciones $\int_0^{+\infty} k_i(s)\, ds = 1$ para $i = 1, 2$, y las integrales

$$c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds \qquad \text{y} \qquad e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds$$

representan el efecto inhibidor hereditario o acumulado en el pasado que el tamao de una especie ha tenido sobre la otra. Las condiciones iniciales para el sistema (III) son de la forma $x_1(t) = \phi_1(t)$ y $x_2(t) = \phi_2(t)$ para $t \leq 0$, es decir, se debe conocer la historia de los tamaos de las poblaciones en el pasado. Este tipo de ecuaciones se conocen como sistemas de ecuaciones integro-diferenciales con retardo en el infinito.

En el presente trabajo obtendremos resultados similares a los presentados por Ahmad en [1] y Tineo en [7], pero para un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo infinito dado por:

$$(IV) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\, x_1(t) - c(t) \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d(t) - f(t)\, x_2(t) - e(t) \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds],\ t \geq t_0 \geq 0 \\ x_1(t) = \phi_1(t),\ x_2(t) = \phi_2(t),\ t \leq t_0 \end{cases}$$

bajo las condiciones

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{d_M} \quad \text{y} \quad \frac{b_M}{a_L} \leq \frac{e_L}{d_M}.$$

En el capítulo 2, haremos un estudio sobre existencia, unicidad, intervalo de existencia y algunos aspectos cualitativos de las soluciones de (IV), además se estudiará el caso donde las funciones $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$ y $f(t)$ son constantes, esto se hace con la intención de intuir el comportamiento de las soluciones en el caso no constante. Demostraremos que el sistema tiene una única solución definida en $[t_0, +\infty)$, además se probará que cuando:

$$\frac{c}{f} < \frac{a}{d} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a} \leq \frac{e}{d}$$

y las condiciones iniciales $\phi_1(s), \phi_2(s)$ están definidas en $(-\infty, t_0]$, son continuas, no negativas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas y en t_0 estrictamente positivas, si $col\big(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2)\big)$ es una solución del sistema (IV) entonces $x_2(t, \phi_1, \phi_2) \longrightarrow 0$ y $x_1(t, \phi_1, \phi_2) - \frac{a}{b} \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $\frac{a}{b}$ es la solución de la ecuación logística $x'(t) = x(t)[a - b\,x(t)]$.

En el capítulo 3, se probará que si

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{d_M} \quad \text{y} \quad \frac{b_M}{a_L} \leq \frac{e_L}{d_M}$$

donde $\phi_1(s), \phi_2(s)$ son como antes, y $col\big(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2)\big)$ es una solución del sistema (IV), se tiene que $x_2(t, \phi_1, \phi_2) \longrightarrow 0$ y $x_1(t, \phi_1, \phi_2) - x^*(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $x^*(t)$ es la única solución acotada superior e inferiormente por constantes positivas de la ecuación logística $x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)\,x(t)]$ con $\frac{a_L}{b_M} \leq x^*(t) \leq \frac{a_M}{b_L}$ para todo $t \in R$.

Tales resultados representan un aporte original al estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo infinito.

Capítulo 2

Estudio de un Sistema del Tipo Lotka-Volterra con Retardo (con coeficientes constantes)

El objetivo de este capítulo es el estudio sobre existencia, unicidad, intervalo de existencia y algunos aspectos cualitativos de las soluciones del sistema del tipo Lotka-Volterra con retardo infinito:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a - b\,x_1(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d - f\,x_2(t) - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds],\ t \geq t_0 \geq 0 \\ x_1(t) = \phi_1(t),\ x_2(t) = \phi_2(t),\ t \leq t_0 \end{cases}$$

donde la derivada en t_0 se interpreta como derivada por la derecha, es decir, $x_i'(t_0) = x_{i_+}'(t_0)$, para $i = 1, 2$ y a, b, c, d, e, f son constantes positivas que satisfacen:

$$\frac{c}{f} < \frac{a}{d} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a} \leq \frac{e}{d}\ , \tag{2,1}$$

$k_i : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty),\ i = 1, 2$ son núcleos continuos y satisfacen las condiciones dadas en el Capítulo 1. Las condiciones iniciales ϕ_1 y ϕ_2 pertenence al conjunto:

$FA_{t_0} = \{\, \phi : (-\infty, t_0] \to I\!R^+ \cup \{0\} /\ \phi$ es continua, no negativa, acotada superiormente y $\phi(t_0) > 0\}$

A continuación estableceremos un teorema de existencia y unicidad para el caso más general del sistema (1), es decir, el caso donde a, b, c, d, e, f son funciones $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t)$ continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas.

El sistema (1), se puede escribir como:

$$x'(t) = h(t, x(t)) - A(x(t)) \int_{-\infty}^{t} g\big(t, \tau, x(\tau)\big)\, d\tau \tag{2.1}$$

donde $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $h : (-\infty, +\infty) \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$, $g : \{(t, s) \in I\!R^2 /\ s \leq t\} \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ son continuas y están dadas por:

$$h(t, x) = \begin{pmatrix} a(t)\, x_1 - b(t)\, x_1^2 \\ d(t)\, x_2 - e(t)\, x_2^2 \end{pmatrix}; \qquad g(t, s, x) = \begin{pmatrix} c(t)\, k_1(t - s)\, x_2 \\ f(t)\, k_2(t - s)\, x_1 \end{pmatrix}$$

es importante resaltar que:

$$\|A(x)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \right\| \leq |x_1| + |x_2| = \|x\|. \tag{2.2}$$

Notemos ahora que:

(i) h satisface una condición local de Lipschitz en x, en el sentido que para cada

$(t_0, x_0) \in I\!R^+ \cup \{0\} \times I\!R^2$ y cada $M > 0$, existe $k > 0$ tal que:

Si $\|x - x_0\| \leq M$; $\|\overline{x} - x_0\| \leq M$ y $|t - t_0| \leq M$ entonces

$$\|h(t,x) - h(t,\overline{x})\| \leq k\|x - \overline{x}\|$$

donde $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$.

En efecto, basta observar que $k = \text{máx}\{a_M + 2\,M\,b_M, d_M + 2\,M\,e_M\}$ satisface las condiciones anteriores.

(ii) La función g satisface una condición local de Lipschitz en x, en el siguiente sentido, para cada $M > 0$, existe $k > 0$ tal que:

Si $-M \leq s \leq t \leq M$, $\|x\| \leq M$; $\|\overline{x}\| \leq M$ entonces

$$\|g(t,s,x) - g(t,s,\overline{x})\| \leq k\|x - \overline{x}\|.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|g(t,s,x) - g(t,s,\overline{x})\| &= \left\| \begin{pmatrix} c(t)\,k_1(t-s)\,(x_2 - \overline{x}_2) \\ \\ f(t)\,k_2(t-s)\,(x_1 - \overline{x}_1) \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq k\big(|x_1 - \overline{x}_1| + |x_2 - \overline{x}_2|\big) \\ &= k\|x - \overline{x}\| \end{aligned}$$

donde $k = \text{máx}\{c_M\ \text{máx}_{s\in[0,M]}\, k_1(s);\ f_M\ \text{máx}_{s\in[0,M]}\, k_2(s)\}$.

Lema 2.1 *Sea $t_0 \geq 0$, el conjunto $B(t_0) = \{\Phi = (\phi_1, \phi_2)/\ \phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}\}$ es un conjunto convexo contenido en el espacio de las funciones continuas $\Phi : (-\infty, t_0] \longrightarrow I\!R^2$ y satisface que si $\Phi \in B(t_0)$ entonces*

$$G(t, t_0, \Phi) = \int_{-\infty}^{t_0} g(t, s, \Phi(s))\, ds$$

define una función continua en $[t_0,+\infty),$ *donde* $g(t,s,(\phi_1,\phi_2)) = \begin{pmatrix} c(t)\,k_1(t-s)\,\phi_2 \\ \\ f(t)\,k_2(t-s)\,\phi_1 \end{pmatrix}.$

Demostración:

sean $\alpha,\ \lambda \in [0,1]$ con $\alpha+\lambda = 1$ y $(\phi_1,\phi_2),\ (\overline{\phi}_1,\overline{\phi}_2) \in B(t_0)$ entonces:

$$\alpha(\phi_1,\phi_2)+\lambda(\overline{\phi}_1,\overline{\phi}_2) = (\alpha\,\phi_1+\lambda\,\overline{\phi}_1, \alpha\,\phi_2+\lambda\,\overline{\phi}_2).$$

Ahora bien, como $\phi_1,\overline{\phi}_1,\phi_2,\overline{\phi}_2 \in FA_{t_0}$ y α,λ son no negativas y no se anulan simultneamente entonces

$\alpha\,\phi_1,\lambda\,\overline{\phi}_1,\alpha\,\phi_2,\lambda\,\overline{\phi}_2$ son continuas en $(-\infty,t_0]$, no negativas, estrictamente positivas en t_0 y acotadas. Así $\alpha\,\phi_1+\lambda\,\overline{\phi}_1$ y $\alpha\,\phi_2+\lambda\,\overline{\phi}_2$ pertenecen a FA_{t_0}, de donde $(\alpha\,\phi_1+\lambda\,\overline{\phi}_1,\alpha\,\phi_2+\lambda\,\overline{\phi}_2) \in B(t_0)$. En consecuencia $B(t_0)$ es convexo.

Por otra parte:

(i) $G(t;t_0,\Phi)$ está bien definida pues:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0} c(t)\,k_1(t-s)\,\phi_2(s)\,ds &\leq c_M\,\phi_{2M}\int_{-\infty}^{t_0} k_1(t-s)\,ds \\ &= c_M\,\phi_{2M}\int_{t-t_0}^{+\infty} k_1(\sigma)\,d\sigma \\ &\leq c_M\,\phi_{2M}\int_{0}^{+\infty} k_1(\sigma)\,d\sigma \\ &= c_M\,\phi_{2M} < +\infty \end{aligned}$$

de igual manera:

$$\int_{-\infty}^{t_0} f(t)\,k_2(t-s)\,\phi_1(s)\,ds \leq f_M\,\phi_{1M} < +\infty.$$

(ii) $G(t,t_0,\Phi)$ es continua en cualquier $\bar{t} \geq t_0$, ya que si consideramos el intervalo $[t_0,d]$

tal que $t_0 \leq \bar{t} \leq d$, cada componente:

$$G_1(t, t_0, \Phi) = G_1(t, t_0; (\phi_1, \phi_2)) = \int_{-\infty}^{t_0} c(t)\, k_1(t-s)\, \phi_2(s)\, ds$$

y

$$G_2(t, t_0, \Phi) = \int_{-\infty}^{t_0} f(t)\, k_2(t-s)\, \phi_1(s)\, ds$$

es continua en $\bar{t}$. Para verificar esto apliquemos el Teorema 14-21, pag. 421 [2]. La integral, $\int_{-\infty}^{t_0} c(t)\, k_1(t-s)\, \phi_2(s)\, ds$ se puede escribir como $\int_{-t_0}^{+\infty} c(t)\, k_1(t+s)\, \phi_2(-s)\, ds$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\int_{-t_0}^{+\infty} c(t)\, \phi_2(s)\, k_1(t+s)\, ds &\leq c_M\, \phi_{2\,M} \int_{-t_0}^{+\infty} k_1(t+s)\, ds \\
&\leq c_M\, \phi_{2\,M} \int_{t-t_0}^{+\infty} k_1(\sigma)\, d\sigma \leq c_M\, \phi_{2\,M}\, \overline{k}_1\,.
\end{aligned}$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\left| \int_{-t_0}^{b} k_1(\sigma)\, d\sigma - \int_{-t_0}^{+\infty} k_1(\sigma)\, d\sigma \right| < \frac{\epsilon}{c_M\, \phi_{2\,M} + 1}, \;\; \forall\, b \geq R \;\; \text{y} \;\; \forall\, t \in [t_0, d]$$

o sea:

$$\left| \int_{b}^{+\infty} k_1(\sigma)\, d\sigma \right| < \frac{\epsilon}{c_M\, \phi_{2\,M} + 1}, \;\; \forall\, b \geq R \;\; \text{y} \;\; \forall\, t \in [t_0, d].$$

Sea $b > R - t_0$, entonces

$$\begin{aligned}
t_0 \leq t \leq d \;\; &\Longrightarrow \;\; t_0 + b \leq t + b \leq b + d \\
&\Longrightarrow \;\; R < t + b \leq b + d
\end{aligned}$$

luego, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que:

Para $b > R - t_0$

$$\begin{aligned} \int_b^{+\infty} c(t)\, \phi_2(-s)\, k_1(t+s)\, ds &\leq c_M\, \phi_{2\,M} \int_b^{+\infty} k_1(t+s)\, ds \\ &= c_M\, \phi_{2\,M} \int_{t+b}^{+\infty} k_1(\sigma)\, d\sigma < c_M\, \phi_{2\,M}\, \epsilon < \epsilon, \quad \forall\ t \in [t_0, d]. \end{aligned}$$

Así, $\int_b^{+\infty} c(t)\, \phi_2(-s)\, k_1(t+s)\, ds$ converge uniformemente en $[t_0, d]$.

En consecuencia $G_1(t, t_0; \Phi)$ es continua en $\bar{t}$ (más aún en $[t_0, d]$). De la misma manera $G_2(t, t_0; \Phi)$ es continua en $\bar{t}$, así $G(t, t_0; \Phi)$ es continua para todo $\bar{t} \geq t_0$, es decir, es continua en $[t_0, +\infty)$.

∎

Teoremas de Existencia, Unicidad y Prolongación de Soluciones.

Dado un número real no negativo y una función inicial $\Phi \in B(t_0)$ buscamos una solución continua $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ que satisfaga la ecuación (2.1) para $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ para algún $\beta > 0$ y $x(t) = \Phi(t)$ para $t \leq t_0$.

Un análisis del problema arriba planteado comienza con la observación de que si este problema tiene una solución $x(t) = x(t, t_0, \Phi) = col(x_1, x_2)$ en $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ y $x(t) = \Phi(t),\ \ t \leq t_0$ entonces $x(t)$ es también una solución de la ecuación:

$$(\,\widehat{I}\,) \quad x(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \leq t_0 \\ \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t \big[h(s, x(s)) - A(x(s))\, G(s, t_0, \Phi)\big] ds - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s A(x(s))\, g\big(s, \tau, x(\tau)\big)\, d\tau\, ds, & \\ & t_0 \leq t \leq t_0 + \beta. \end{cases}$$

Recíprocamente, cualquier función $x(t)$ que satisfaga $(\,\widehat{I}\,)$ es necesariamente una solución del problema (2.1) con función inicial Φ. Así que el problema de existencia para la ecuación (2.1) con condición inicial (t_0, Φ) es equivalente al problema de existencia de $(\,\widehat{I}\,)$.

El lado derecho de $(\widehat{I}\,)$ define una función continua en $(-\infty, t_0{+}\beta]$ para cada $\Phi \in B(t_0)$, $t \geq 0$ y

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \leq t_0 \\ col(x_1, x_2), & t_0 \leq t \leq t_0 + \beta. \end{cases}$$

continua en $(-\infty, t_0 + \beta]$. Además es continuamente diferenciable en $[t_0, t_0 + \beta]$.

Desde este punto de vista, $(\widehat{I}\,)$ nos permite definir un operador o aplicación P que envia la función continua

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \leq t_0 \\ col(x_1, x_2), & t_0 \leq t \leq t_0 + \beta. \end{cases}$$

en la función continua dada por el lado derecho de $(\widehat{I}\,)$. En particular, si $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ es solución del problema $(\widehat{I}\,)$ entonces $(P\,x)(t) = x(t)$. Por tanto, las soluciones de $(\widehat{I}\,)$ o, lo que es equivalente, del problema original (2.1) con condición inicial (t_0, Φ), aparecen como puntos fijos para el operador P. Para determinar la existencia y unicidad de un punto fijo usaremos el principio de las aplicaciones de contracción o teorema del punto fijo. Para esto necesitaremos definir P sobre un subconjunto S de las funciones continuas de $(-\infty, t_0 + \beta]$ en $I\!R^2$, al cual se le impondran ciertas condiciones para que el sea un espacio métrico completo, P envie S en sí mismo y P sea una contracción.

Dado el problema (2.1) con la condición inicial $\Phi \in B(t_0)$, $t_0 \geq 0$, y constantes M y β positivas, se considera el conjunto S de las funciones x que satisfacen las condiciones siguientes:

1. $x \in C\big[(-\infty, t_0 + \beta]; I\!R^2\big]$,

2. $x(t) = \Phi(t) \quad t \leq t_0$

3. $\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M\,|t_1 - t_2|$ para $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \beta]$

4. $\|x(t) - \Phi(t_0)\| \leq 1$ para $t \in [t_0, t_0 + \beta]$

y sobre S se define la función

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{t \in [t_0, t_0+\beta]} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

No es difícil verificar que (S, ρ) es un espacio métrico completo. El espacio métrico completo depende de los números positivos M y β; los cuales se seleccionarán adecuadamente para que P sea una contracción de S es sí mismo.

Seguidamente procedemos a la selección adecuada de M y β para $\Phi \in B(t_0)$, $t_0 \geq 0$ dados. Sea β_1 un número real positivo con $\beta_1 < 1$. En virtud de la continuidad de las funciones h, g, G y la compacidad del intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$ y de los conjuntos:

$C_1 = \{(t, x) \in I\!R \times I\!R^2 : \; \|x - \Phi(t_0)\| \leq 1 \quad \text{y} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \beta\}$ y

$C_2 = \{(t, s, x) \in I\!R \times I\!R \times I\!R^2 : \; \|x - \Phi(t_0)\| \leq 1 \quad \text{y} \quad t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \beta\}$

existen constantes positivas M_1, M_2 y M_3 tales que:

$$\|h(t, x)\| \leq M_1 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad (t, x) \in C_1; \tag{2.3}$$

$$\|G(t, t_0, \Phi)\| \leq M_2 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t \in [t_0, t_0 + \beta_1] \tag{2.4}$$

y

$$\|g(s, \tau, x)\| \leq M_3 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad (s, \tau, x) \in C_3. \tag{2.5}$$

Seleccionemos $M \in I\!R^+$ tal que:

$$M_1 + (M_2 + M_3)\,(1 + \|\Phi(t_0)\|) \leq M. \tag{2.6}$$

Aplicando la condición local de Lipschitz para $h(t,x)$ en el punto $(t_0, \Phi(t_0))$ con el conjunto $C_3 = \{(t,x) \in I\!R \times I\!R^2 : \; \|x - \Phi(t_0)\| \leq 1 \quad \text{y} \quad |t - t_0| \leq 1\}$, obtenemos que existe $L_1 \in I\!R^+$ tal que, si $(t,x), (t,\overline{x}) \in C_3$ entonces

$$\|h(t,x) - h(t,\overline{x})\| \leq L_1\, |x - \overline{x}|. \tag{2.7}$$

Similarmente, usando la condición de Lipschitz para g en el conjunto $C_4 = \{(t,s,x) \in I\!R \times I\!R \times I\!R^2 : \; \|x\| \leq T \quad \text{y} \quad -T \leq s \leq t \leq T\}$, donde $T = \text{máx}\{t_0 + \beta_1, 1 + \|\Phi(t_0)\|\}$, existe $L_2 \in I\!R^+$ tal que, si $(t,s,x), (t,s,\overline{x}) \in C_4$ entonces

$$\|g(t,s,x) - g(t,s,\overline{x})\| \leq L_2\, |x - \overline{x}|. \tag{2.8}$$

Sea $L = \text{máx}\{L_1, L_2\}$. Seleccionamos $\beta \in I\!R^+$ tal que

$$\beta < \beta_1 \quad \text{y} \quad \beta < \frac{1}{2\,M + 2\,L + L\,\|\Phi(t_0)\|}. \tag{2.9}$$

La condición $0 < \beta < \beta_1 < 1$ implica que $\beta^2 < \beta$. La segunda condición sobre β implica que $\beta < \dfrac{1}{M}$.

Ahora consideramos el espacio (S, ρ) con M dada por (2.6) y β por (2.9).

Sea $x \in S$. Por la condición 4 en la definición de S se tiene que: $\|x(s) - \Phi(t_0)\| \leq 1$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \beta]$. Por tanto $(s, x(s)) \in C_1$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \beta]$ y en consecuencia

$$\|h(s, x(s))\| \leq M_1 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad s \in [t_0, t_0 + \beta]. \tag{2.10}$$

También es fácil verificar que si $t_0 \leq \tau \leq s \leq t \leq t_0 + \beta$ entonces $(s, \tau, x(\tau)) \in C_2$ y por tanto

$$\beta_1\, \|g(s, \tau, x)\| \leq M_3 \quad \text{para} \quad t_0 \leq \tau \leq s \leq t \leq t_0 + \beta. \tag{2.11}$$

Además si $x, \overline{x} \in S$ entonces $(s, x(s)),\ (s, \overline{x}(s)) \in C_3$ para todo $[t_0, t_0+\beta]$ y $(s, \tau, x(\tau))$, $(s, \tau, \overline{x}(\tau)) \in C_4$, si $t_0 \le \tau \le s \le t \le t_0 + \beta$. Por tanto:

$$\|h(s, x(s)) - h(s, \overline{x}(s))\| \le L\,|x(s) - \overline{x}(s)| \le L\,\rho(x, \overline{x}), \quad s \in [t_0, t_0+\beta]; \tag{2.12}$$

y para $t_0 \le \tau \le s \le t \le t_0 + \beta$:

$$\|g(s, \tau, x(\tau)) - g(s, \tau, \overline{x}(\tau))\| \le L\,|x(s) - \overline{x}(s)| \le L\,\rho(x, \overline{x}). \tag{2.13}$$

La técnica que usaremos en la prueba del siguiente teorema es similar a la empleada en el teorema de existencia y unicidad encontrada en el Teorema 3.3.5, pág. 193 [3].

Teorema 2.1 (Existencia y Unicidad) *Sea $t_0 \ge 0$ y $\Phi \in B(t_0)$, existe una única solución $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ de (2.1) definida en un intervalo $[t_0, t_0+\beta]$ para algún $\beta > 0$ y $x(t, t_0, \phi) = \Phi(t)$ para $t \le t_0$.*

Demostración:

Consideremos el espacio métrico (S, ρ) antes descrito, con M dado por (2.6) y β como en (2.9).

Sea el operador P definido, para $x \in S$, por:

$$\big(P\,x\big)(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t < t_0 \\ \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} [h(s, x(s)) - A(x(s))\,G(s, t_0, \Phi)]\,ds - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} A(x(s))\,g(s, \tau, x(\tau))\,d\tau\,ds, & \\ & t_0 \le t \le \beta\,. \end{cases}$$

P envia elementos de S en sí mismo; en efecto, si $x \in S$ entonces claramente $\big(P\,x\big) \in C[(-\infty, t_0+\beta); I\!R^2]$ y $\big(P\,x\big)(t) = \Phi(t)$ para $t \le t_0$. Además de (2.2), (2.4), (2.6), (2.10) y

(2.11)

$$\begin{aligned}
\|\big(P\,x\big)(t)-\Phi(t_0)\| &\leq \int_{t_0}^{t}\|h(s,x(s))\|\,ds+\int_{t_0}^{t}\|A(x(s))\|\,\|G(s,t_0,\Phi)\|\,ds\\
&+ \int_{t_0}^{t}\|A(x(s))\|\int_{t_0}^{s}\|g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds\\
&\leq M_1\int_{t_0}^{t}ds+\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|\,M_2\,ds+\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|\int_{t_0}^{s}\frac{M_3}{\beta_1}\,d\tau\,ds\\
&\leq M_1(t-t_0)+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2\,(t-t_0)+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,\frac{M_3}{\beta_1}\,\frac{(t-t_0)^2}{2}\\
&\leq M_1\,\beta+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2\,\beta+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,\frac{M_3}{2}\,\frac{\beta^2}{\beta_1},
\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
\|\big(P\,x\big)(t)-\Phi(t_0)\| &\leq M_1\,\beta+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2\,\beta+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_3\,\beta\\
&= \big(M_1+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,(M_2+M_3)\big)\,\beta\leq M\,\beta<1.
\end{aligned}$$

Similarmente, para $t_1,t_2\in[t_0,t_0+\beta]$ con $t_1<t_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|\big(P\,x\big)(t_1)-\big(P\,x\big)(t_2)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2}\|h(s,x(s))\|\,ds+\int_{t_1}^{t_2}\|x(s)\|\,\|G(s,t_0,\Phi)\|\,ds\\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\|x(s)\|\int_{t_0}^{s}\|g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds\\
&\leq M_1\int_{t_1}^{t_2}ds+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2\int_{t_1}^{t_2}ds\\
&+ \int_{t_1}^{t_2}(1+\|\Phi(t_0)\|)\int_{t_0}^{s}\frac{M_3}{\beta}\,d\tau\,ds\\
&\leq M_1\,(t_2-t_1)+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2(t_2-t_1)\\
&+ (1+\|\Phi(t_0)\|)\,\frac{M_3}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}(s-t_0)\,ds\\
&\leq M_1\,(t_2-t_1)+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,M_2(t_2-t_1)+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,\frac{M_3}{\beta}\,(t_2-t_1)\\
&= \big(M_1+(1+\|\Phi(t_0)\|)\,(M_2+M_3)\big)\,(t_2-t_1)<M\,|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

Así que $\big(P\,x\big)$ satisface las condiciones 1,2,3 y 4, es decir $\big(P\,x\big)\in S$.

Finalmente veamos que P es una contracción. Sean $x, \overline{x} \in S$ y $t \in [t_0, t_0+\beta]$, por (2.2), (2.4), (2.11), (2.12), (2.13) haciendo $Q = \|\big(P\,x\big)(t) - \big(P\,\overline{x}\big)(t)\|$ tenemos que:

$$\begin{aligned} Q &\le \int_{t_0}^{t} \|h(s,x(s)) - h(s,\overline{x}(s))\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \|A(x(s) - \overline{x}(s))\|\,\|G(s,t_0,\Phi)\|\,ds \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \|A(\overline{x}(s))\,g(s,\tau,\overline{x}(\tau)) - A(x(s))\,g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} Q &\le L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \overline{x}(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \overline{x}(s)\|\,M_2\,ds \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \|A(\overline{x}(s))\,g(s,\tau,\overline{x}(\tau)) - A(\overline{x}(s))\,g(s,\tau,x(\tau)) \\ &+ A(\overline{x}(s))\,g(s,\tau,x(\tau)) - A(x(s))\,g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds \\ &\le (L_1+M_2)\int_{t_0}^{t} \|x(s) - \overline{x}(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \|A(\overline{x}(s))\,\Big(g(s,\tau,\overline{x}(\tau)) - g(s,\tau,x(\tau))\Big) \\ &+ \Big(A(\overline{x}(s)) - A(x(s))\Big)\,g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds \\ &\le (L_1+M_2)\int_{t_0}^{t} \|x(s) - \overline{x}(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \|\overline{x}(s)\|\,L_2\,\|\overline{x}(\tau) - x(\tau)\|\,d\tau\,ds \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \|x(s) - \overline{x}(s)\|\,g(s,\tau,x(\tau))\|\,d\tau\,ds \\ &\le (L_1+M_2)(t-t_0)\,\rho(x,\overline{x}) + \int_{t_0}^{t} (1+\|\Phi(t_0)\|)\,\rho(x,\overline{x})\,(s-t_0)\,ds \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \rho(x,\overline{x})\,\frac{M_3}{\beta_1}\,d\tau\,ds \\ &\le (L_1+M_2)\,\beta\,\rho(x,\overline{x}) + \beta\,(1+\|\Phi(t_0)\|)\,\rho(x,\overline{x})\,(t-t_0) + \rho(x,\overline{x})\,\frac{M_3}{\beta_1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\,ds \\ &\le (L_1+M_2)\,\beta\,\rho(x,\overline{x}) + \beta^2\,(1+\|\Phi(t_0)\|)\,\rho(x,\overline{x}) + \rho(x,\overline{x})\,\frac{M_3}{\beta_1}\,\beta^2 \\ &\le \Big((L_1+M_2)\,\beta + \beta\,(1+\|\Phi(t_0)\|) + \beta\,M_3\Big)\,\rho(x,\overline{x}) = K\,\rho(x,\overline{x}). \end{aligned}$$

O sea:

$$\|\big(P\,x\big)(t) - \big(P\,\overline{x}\big)(t)\| \le K\,\rho(x,\overline{x}) \quad \text{para} \;\; t \in [t_0, t_0+\beta] \;\; \text{y} \;\; x, \overline{x} \in S.$$

Así $\rho(P\,x, P\,\overline{x}) \leq \rho(x, \overline{x})$ para algún $\beta > 0$ escogido de tal manera que $K = \Big((L_1 + M_2) + (1 + \|\Phi(t_0)\|) + M_3\Big)\,\beta < 1$.

Luego, existe un $\beta > 0$, tal que $P\,x$ una contracción en $[t_0, t_0 + \beta]$ y en consecuencia existe un único $x \in S$ tal que $P\,x = x$.

Ahora bien, como vimos antes los puntos fijos del operador P son soluciones de (2.1), de donde podemos concluir que existe una única solución $x(t, t_0, \Phi)$ de (2.1) definida en el intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$ con $\beta > 0$, $t_0 > 0$ y tal que $x(t, t_0, \Phi) = \Phi(t)$ para $t \leq t_0$.

∎

De lo anterior se deduce que existe una única solución

$$x(t, t_0; (\phi_1, \phi_2)) = col\big(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2)\big)$$

de (2.1), en particular del sistema (1), definida en $(-\infty, t_0 + \beta]$ para algún $\beta > 0$.

Veamos ahora que las soluciones de (2.1) son prolongables a $[t_0, +\infty)$. Para esto, comencemos por establecer los siguientes lemas.

Lema 2.2 *Sea $\Phi \in B(t_0)$. Si $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ es una solución de (2.1) entonces $x_1(t) > 0$ y $x_2(t) > 0$ para todo t en su intervalo de definición.*

Demostración: La ecuación

$$x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\,x_1(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds]$$

es equivalente a:

$$x_1'(t) = x_1(t)\,P(t) \quad \text{donde} \quad P(t) = a(t) - b(t)\,x_1(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds$$

luego: $x_1'(s) - x_1(s)\,P(s) = 0$, multiplicando por el factor integrante $\exp\{-\int_{t_0}^{s} P(\tau)\,d\tau\}$ tenemos:

$$\frac{d}{ds}\Big(x_1(s)\,\exp\{-\int_{t_0}^{s} P(\tau)\,d\tau\}\Big) = 0.$$

Integrando desde t_0 a t se tiene:

$$x_1(t)\,\exp\{-\int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau\} - x_1(t_0) = 0$$

por lo tanto $x_1(t) = x_1(t_0)\,\exp\{\int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau\}$ y como $x_1(t_0) > 0$, entonces $x_1(t) > 0$ en su intervalo de existencia; de igual manera $x_2(t) > 0$.

$\blacksquare$

Lema 2.3 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$. Si col $(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ es solución del sistema (1) en el intervalo $I = [t_0, t_0+\beta]$ con $\beta > 0$ y col $(U(t), V(t))$ es solución del sistema logístico dado por:*

$$U'(t) = U(t)[a - b\,U(t)] \quad y \quad V'(t) = V(t)[d - f\,V(t)]$$

con $\phi_1(t_0) = U(t_0)$ y $\phi_2(t_0) = V(t_0)$ entonces $x_1(t) < U(t)$ y $x_2(t) < V(t)$ para $t \in I$. Aquí $x_1'(t_0) = {x_1}'_+(t_0)$ y $x_2'(t_0) = {x_2}'_+(t_0)$.

Demostración: La solución *col* $(U(t), V(t))$ del sistema logístico está definida para todo $t \geq t_0$.

Como *col* $(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ es solución del sistema (1) entonces se satisface que:

$$x_1'(t) = x_1(t)\,\left[a - b\,x_1(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\right]$$

$$x_2'(t) = x_2(t)\,\left[d - f\,x_2(t) - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\,x_1(s)\,ds\right]$$

para $t \in I$, y $x_1(t) = \phi_1(t)$, $x_2(t) = \phi_2(t)$ para $t \leq t_0$.

Ahora bien:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\,\left[a - b\,x_1(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\right] \\ &< x_1(t)[a - b\,x_1(t)]\,, \end{aligned}$$

debido a que $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $k_1(t) > 0$, $\phi_2(t) > 0$ y $c > 0$ en el intervalo I.

Entonces tenemos que:

$$x_1'(t_0) < x_1(t_0)[a - b\,x_1(t_0)] = U'(t_0) \quad (\text{ pues } \ x_1(t_0) = \phi_1(t_0) = U(t_0))$$

de donde $x_1'(t_0) < U'(t_0)$, luego por la continuidad de x_1' y U' existe $\delta > 0$ tal que para todo t en $[t_0, t_0+\delta] \subset I$ se cumple que $x_1'(t) < U'(t)$, integrando esta desigualdad desde t_0 hasta t con $t_0 < t < t_0 + \delta$ tenemos:

$$x_1(t) - x_1(t_0) < U(t) - U(t_0)$$

pero $x_1(t_0) = \phi_1(t_0)$ y $U(t_0) = \phi_1(t_0)$, luego $x_1(t) < U(t)$ para t en $[t_0, t_0+\delta] \subset I$. Supongamos que esta desigualdad no se mantiene en I, entonces existe un primer tiempo $t_1 = \inf\{t \geq t_0/\ \ x_1(t) = U(t)\}$, tal que $x_1(t) < U(t)$ para t en (t_0, t_1) y $x_1(t_1) = U(t_1)$.

Usando la definición de la derivada por la izquierda en el punto t_1 tenemos

$$\begin{aligned} x_1'(t_1) = x_{1-}'(t_1) &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{x_1(t_1+h) - x_1(t_1)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{x_1(t_1+h) - x_1(t_1)}{h} \\ &\geq \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{U(t_1+h) - U(t_1)}{h} = U_-'(t_1)\,. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} x_1'(t_1) &= x_1(t_1)\left[a - b\,x_1(t_1) - c\int_{-\infty}^{t_1} k_1(t_1-s)\,x_2(s)\,ds\right] \\ &< x_1(t_1)[a - b\,x_1(t_1)] \\ &= U(t_1)[a - b\,U(t_1)] = U'(t_1), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto:

$$x_1(t) \leq U(t) \quad \text{para} \quad t \in I.$$

Similarmente se prueba que

$$x_2(t) \leq V(t) \quad \text{para} \quad t \in I.$$

∎

Este lema también es válido cuando a, b, c, d, e, f se reemplaza por funciones continuas y acotadas por constantes positivas.

Teorema 2.2 (Prolongación) *Sean* $\Phi \in B(t_0)$ *y* $x(t, t_0, \Phi)$ *la solución de (2.1) en un intervalo* $[t_0, \beta)$. *Si* $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ *no puede ser prolongada más allá de* β *entonces*

$$\limsup_{t \longrightarrow \beta^-} \|x(t)\| = +\infty.$$

Demostración: Supongamos que:

$$\limsup_{t \longrightarrow \beta^-} \|x(t)\| < +\infty$$

y probemos que $\|x'(t)\|$ es acotada.

Como $\limsup_{t \longrightarrow \beta^-} \|x(t)\| < +\infty$ entonces existe una constante positiva k tal que:

$$\|x(t)\| = \|col\big(x_1(t), x_2(t)\big)\| \leq k \quad \text{para} \quad t \in [t_0, \beta),$$

ya que usando la definición de límite superior tenemos que, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\sup_{-\delta < t - \beta < 0} \|x(t)\| < L + 1 \qquad \forall t \in [t_0, \beta),$$

luego $\|x(t)\| < L + 1$ en $(\beta - \delta_1, \beta)$. Así,

$$k = \max \Big\{ L + 1, \max_{t \in [t_0, \beta - \delta_1]} \|x(t)\| \Big\}.$$

Ahora bien, en el conjunto compacto $A = \big\{(t, x)/\ t \in [t_0, \beta] \quad \text{y} \quad \|x\| \leq k\big\}$ se cumple que $h(t, x)$ es continua y en consecuencia existe $k_1 > 0$, tal que $\|h(t, x)\| \leq k_1$, para todo $(t, x) \in A$. Ahora, claramente $(t, x(t)) \in A$ para todo $t \in [t_0, \beta)$. Así,

$$\|h(t, x(t))\| \leq k_1, \quad \text{para} \ \ t \in [t_0, \beta). \tag{2.14}$$

Por otra parte, en $B = \big\{(t, s, x)/\ t_0 \leq s \leq t \leq \beta \quad \text{y} \quad \|x\| \leq k\big\}$ la función $g(t, s, x)$ es continua y así existe $k_2 > 0$ tal que:

$$\|g(t, s, x)\| = \|g(t, s, (x_1, x_2))\| \leq k_2 \quad \text{en} \quad B. \tag{2.15}$$

Ahora bien, como se vio en la demostración del Lema 2.1,

$$\left\| \int_{-\infty}^{t_0} g(t, s, \Phi(s))\, ds \right\| \leq k_3 \quad \text{para} \quad k_3 = \max\{c_M\, \phi_{1M}, f_M\, \phi_{2M}\}.$$

En consecuencia, para $t \in [t_0, \beta)$ tenemos por (2.2), (2.14) y (2.15):

$$\begin{aligned}
\|x'(t)\| &= \|h(t,x(t))\| + \left\| A(x(t)) \int_{-\infty}^{t} g\big(t,s,x(s)\big)\, ds \right\| \\
&\leq k_1 + \|x(t)\| \left\| \int_{-\infty}^{t_0} g\big(t,s,\Phi(s)\big)\, ds + \int_{t_0}^{t} g\big(t,s,x(s)\big)\, ds \right\| \\
&\leq k_1 + k\Big(k_3 + \int_{t_0}^{t} \|g\big(t,s,x(s)\big)\|\, ds \Big).
\end{aligned}$$

Pero, si $s \in [t_0, t] \subset [t_0, \beta)$ entonces $t_0 \leq s \leq t \leq \beta$ y $\|x\| \leq k$, luego $(t,s,x(s)) \in B$, en consecuencia $\|g\big(t,s,x(s)\big)\| \leq k_2$, de donde:

$$\|x'(t)\| \leq k_1 + k\Big(k_3 + k_2(t - t_0)\Big) \leq k_1 + k\Big(k_3 + k_2(\beta - t_0)\Big).$$

Así que existe $R = k_1 + k\Big(k_3 + k_2(\beta - t_0)\Big) > 0$ tal que $\|x'(t)\| \leq R$ para $t \in [t_0, \beta)$, como $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds$ tenemos que:

$$x(t_1) - x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\, ds.$$

Así que:

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq k\, |t_2 - t_1| \;\; \text{para todo} \;\; t_1, t_2 \in [t_0, \beta],$$

es decir, se satisface la condición de Cauchy para límites laterales, luego $\lim_{t \longrightarrow \beta^-} \|x(t)\|$ existe y $x(t)$ puede ser extendida de forma única a una función continua sobre $[t_0, \beta]$, la cual satisface la ecuación integral (2.1) sobre $[t_0, \beta]$. Ahora si definimos la función

$$\widetilde{\Phi}(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \leq t_0 \\ x(t), & t_0 \leq t \leq \beta \end{cases}$$

al considerar la condición inicial $(\beta, \widetilde{\Phi})$ tenemos que:

$$\begin{aligned} G\big(t, \beta, \widetilde{\Phi}\big) &= \int_{-\infty}^{\beta} g\big(t, s, \widetilde{\Phi}(s)\big)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} g\big(t, s, \Phi(s)\big)\, ds + \int_{t_0}^{\beta} g\big(t, s, x(s)\big)\, ds \\ &= G\big(t, t_0, \Phi\big) + \int_{t_0}^{\beta} g\big(t, s, x(s)\big)\, ds \end{aligned}$$

es continua para $t \geq \beta$, ya que: $G(t, t_0, \Phi)$ es continua en $[t_0, +\infty)$ por el Lema 2.1, mientras que $\int_{t_0}^{\beta} g\big(t, s, x(s)\big)\, ds$ es continua en $[t_0, \beta]$ por ser el integrando continuo como función de t en $[t_0, \beta]$. (Véase Teorema 18.1.a, Pag.457 [4]).

Podemos entonces aplicar el Teorema 2.1 de existencia y unicidad, obteniendose una prolongación de $x(t, t_0, \Phi)$ más allá de β lo cual es una contradicción.

$\blacksquare$

Lema 2.4 *Sea $\Phi \in B(t_0)$. Las soluciones de (2.1) con condición inicial (t_0, Φ), y en particular las del sistema (1), tienen como intervalo maximal $[t_0, +\infty)$.*

Demostración: De acuerdo con el Teorema 2.2 es suficiente probar que las soluciones de (2.1) se mantienen acotadas por las mismas constantes en cada intervalo $[t_0, t_0 + \beta)$ con $\beta > 0$.

Sea $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ la única solución de (2.1) dada por el Teorema 2.1. En virtud de los Lemas 2.3 y 2.2 las componentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la solución $x(t)$ satisfacen las desigualdades $0 < x_i(t) < M, \;\; i = 1, 2$ para todo t donde esten definidas.

Aqui M es cota superior para las componentes de la solución del sistema logístico, las cuales están acotadas en $[t_0, +\infty)$ (Véase [6], Pag.18). Luego, por el Teorema 2.2 concluimos que la solución $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ tiene como intervalo maximal de existencia a el intervalo $[t_0, +\infty)$.

∎

Ahora, nuestro objetivo es estudiar el sistema (1) suponiendo que se satisface:

$$\frac{c}{f} < \frac{a}{d} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a} \leq \frac{e}{d}. \tag{2.16}$$

Lema 2.5 *Sean $x_1, x_2 : I\!R \longrightarrow I\!R$ funciones continuas, positivas y acotadas, $k_i(s); i = 1, 2$, núcleos continuos y no negativos, con*

$$\overline{x}_2 = \limsup_{t\to\infty}\ x_2(t)\ , \quad \underline{x_1} = \liminf_{t\to\infty}\ x_1(t) \quad y \quad \overline{k}_i = \int_0^\infty k_i(s)\, ds.$$

Entonces:

$$(i) \limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \overline{x}_2\, \overline{k}_1$$

$$(ii) \liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^t k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds \geq \overline{k}_2\, \underline{x_1}$$

Demostración:

(i) Como

$$\limsup_{t\to\infty}\ x_2(t) = \overline{x}_2$$

entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\tilde{T}$ positivo tal que para todo $t \geq \tilde{T}$

$$x_2(t) < \overline{x}_2 + \frac{\epsilon}{2\overline{k}_1}.$$

Además como

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t k_1(s)\, ds = \overline{k}_1,$$

entonces también, existe T_0 positivo tal que:

$$\left| \int_0^t k_1(s)\, ds - \int_0^\infty k_1(s)\, ds \right| < \frac{\epsilon}{2x_{2M}}, \quad t \geq T_0,$$

luego:

$$\left| \int_t^\infty k_1(s)\, ds \right| = \int_t^\infty k_1(s)\, ds < \frac{\epsilon}{2x_{2M}}, \quad t \geq T_0.$$

En consecuencia, dado $\epsilon > 0$, existe $T = \text{máx}\{\tilde{T}, T_0\}$ positivo tal que para $t \geq 2T$ se cumple:

$$\int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds = \int_{-\infty}^T k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds + \int_T^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds$$

haciendo el cambio de variable $\sigma = t - s$ y usando que $x_2(s) < \overline{x}_2 + \dfrac{\epsilon}{2\overline{k}_1}$ para $T \leq s \leq t$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \int_{t-T}^\infty k_1(\sigma)\, x_2(t-\sigma)\, d\sigma + \left(\overline{x}_2 + \frac{\epsilon}{2\overline{k}_1}\right) \int_0^{t-T} k_1(\sigma)\, d\sigma$$

como $t \geq 2T$, entonces $t - T \geq T > \tilde{T}$, luego:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds &\leq x_{2M} \frac{\epsilon}{2x_{2M}} + \left(\overline{x}_2 + \frac{\epsilon}{2\overline{k}_1}\right) \int_0^\infty k_1(\sigma)\, d\sigma \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \overline{x}_2\, \overline{k}_1 + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon + \overline{x}_2\, \overline{k}_1.
\end{aligned}$$

Así

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \overline{x}_2\, \overline{k}_1 + \epsilon,$$

Como ϵ es arbitrario entonces:

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^t k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \overline{x}_2\, \overline{k}_1.$$

(ii) Si

$$\liminf_{t\to\infty} \ x_1(t) = 0,$$

no hay nada que probar. Supongamos sin perdida de generalidad que $\underline{x_1} > 0$.

Como

$$\liminf_{t\to\infty} \ x_1(t) = \underline{x_1}$$

entonces dado ϵ con $0 < \epsilon < \underline{x_1}$, existe T_1, positivo tal que para $t \geq T_1 \ \ x_1(t) > \underline{x_1} - \epsilon$.

Por otro lado, como

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t k_2(\sigma)\, d\sigma = \overline{k}_2,$$

entonces, existe $T_0 > 0$ tal que para $t \geq T_0$

$$\left| \int_0^t k_2(\sigma)\, d\sigma - \overline{k}_2 \right| < \epsilon\,,$$

de donde

$$\int_0^t k_2(\sigma)\, d\sigma > \overline{k}_2 - \epsilon \ \text{ para } t \geq T_0.$$

En consecuencia, dado $\epsilon > 0$, existe $T = \max\{T_0, T_1\}$ de tal manera que para $t \geq 2T$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds &= \int_{-\infty}^T k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds + \int_T^t k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds \\
&\geq \int_T^t k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds \\
&\geq (\underline{x_1} - \epsilon) \int_T^t k_2(t-s)\, ds \\
&= (\underline{x_1} - \epsilon) \int_0^{t-T} k_2(\sigma)\, d\sigma \\
&\geq (\underline{x_1} - \epsilon)(\overline{k}_2 - \epsilon).
\end{aligned}$$

Así

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds \geq (\underline{x_1}-\epsilon)(\overline{k}_2-\epsilon),$$

haciendo $\epsilon \to 0$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds \geq \overline{k}_2\underline{x_1}.$$

$\blacksquare$

Observación:

Si
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x \quad \text{y} \quad k_1(t) = k_2(t) = k(t)$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k(t-s)\, x(s)\, ds = \overline{k}\, x.$$

Ejemplo 2.1 *La desigualdad del Lema 2.5 no puede ser mejorada, pues para* $k_1(s) = \exp(-s)$ *y* $x_1(s) = x_2(s) = 2 + \sin(s)$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds &= \int_{-\infty}^{t} \exp(s-t)\,(2+\sin(s))\, ds \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t)\right).\end{aligned}$$

De donde

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds = 2$$

y

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds = 2$$

pero $\overline{k}_1 = \int_0^\infty \exp(-s)\, ds = 1, \overline{x}_2 = 3$ *y* $\underline{x_2} = 1$*, luego:*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds < \overline{x}_2\, \overline{k}_1$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\, x_1(s)\, ds > \overline{k}_2\, \underline{x_1}.$$

El siguiente lema de oscilación o fluctuación fue establecido por Hisch, Haninch y Jean Pierre [5] y por Tineo [7].

Lema 2.6 *Supongamos que la función $f : (\alpha, \infty) \longrightarrow I\!R$ es diferenciable y acotada en (α, ∞). Entonces existen sucesiones $(\tau_n) \uparrow \infty$ y $(\sigma_n) \uparrow \infty$ tales que:*

$$f(\tau_n) \longrightarrow \lim_{t\to\infty} \sup\; f(t) = \overline{f}\ ,\ \ f'(\tau_n) \longrightarrow 0$$

$$f(\sigma_n) \longrightarrow \lim_{t\to\infty} \inf\; f(t) = \underline{f}\ ,\ \ f'(\sigma_n) \longrightarrow 0.$$

Demostración: ver Tineo, A. [7] o Hirsch, W., Haninch, H. y Jean Pierre, G. [5].

Lema 2.7 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y col $(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2))$ solución del sistema (1). Supongamos además que se satisfacen las desigualdades dadas por (2.16). Si $x_1(t, \phi_1, \phi_2) \geq \varepsilon_0$ para todo $t \geq t_0$ donde ε_0 es un número positivo, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} x_2(t, \phi_1, \phi_2) = 0.$$

Demostración: Por simplicidad escribimos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en lugar de $x_1(t, \phi_1, \phi_2)$ y $x_2(t, \phi_1, \phi_2)$.

Tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ son acotadas por constantes positivas para $t \geq t_0$. Sean

$$\underline{x_1} = \lim_{t\to\infty} \inf\; x_1(t)\ \text{ y }\ \overline{x}_2 = \lim_{t\to\infty} \sup\; x_2(t).$$

Como $x_1(t) \geq \varepsilon_0$ y $x_2(t) > 0$ entonces $\underline{x_1} \geq \varepsilon_0 > 0$ y $\overline{x}_2 \geq 0$.

Para demostrar el lema sólo necesitamos probar que $\overline{x}_2 = 0$, pues $0 \leq \underline{x_2} \leq \overline{x}_2$, luego

$$\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0.$$

Supongamos que $\overline{x}_2 > 0$, como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son acotadas y diferenciables en $[t_0, +\infty)$, podemos asegurar por el Lema 2.6 que existen sucesiones (τ_n) y (σ_n) tales que $\tau_n \longrightarrow \infty$, $\sigma_n \longrightarrow \infty$, $x_1'(\tau_n) \longrightarrow 0$, $x_2'(\sigma_n) \longrightarrow 0$ y $x_1(\tau_n) \longrightarrow \underline{x_1}$, $x_2(\sigma_n) \longrightarrow \overline{x}_2$.

Por otra parte

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\, x_2(s)\, ds$$

es una sucesión de números reales acotada, pues $0 < x_2(s) < x_{2M}$ y en consecuencia:

$$0 < \alpha_n = \int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\, x_2(s)\, ds \leq x_{2M} \int_0^{+\infty} k_1(\sigma)\, d\sigma = x_{2M}\,,$$

así α_n posee una subsucesión convergente. De igual manera

$$\beta_n = \int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\, x_1(s)\, ds$$

posee una subsucesión convergente, luego podemos suponer, sin perdida de generalidad, que tanto α_n como β_n son convergentes (pues de no ser así escogeríamos las subsucesiones convergentes respectivas). Por el Lema 2.5

$$\text{lím}\, \alpha_n \leq \overline{x}_2 \quad \text{y} \quad \text{lím}\, \beta_n \geq \underline{x_1}.$$

Así que:

$$x_1'(\tau_n) = x_1(\tau_n) \left[a - b\, x_1(\tau_n) - c \int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\, x_2(s)\, ds \right],$$

tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en ambos miembros de la igualdad anterior y usando el Lema 2.5 obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{x_1} \left[a - b\, \underline{x_1} - c \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\, x_2(s)\, ds \right] \\ &\geq \underline{x_1} \left[a - b\, \underline{x_1} - c\, \overline{x}_2 \right]. \end{aligned}$$

Como $\underline{x_1} \geq \epsilon_0 > 0$ entonces $0 \geq a - b\,\underline{x_1} - c\,\overline{x}_2$, o sea :

$$a \leq b\,\underline{x_1} + c\,\overline{x}_2. \tag{2.17}$$

Por otra parte:

$$x_2'(\sigma_n) = x_2(\sigma_n)\left[d - f\,x_2(\sigma_n) - e\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\,x_1(s)\,ds\right]$$

de donde, al tomar límites en ambos miembros tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{x}_2\left[d - f\,\overline{x}_2 - e\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\,x_1(s)\,ds\right] \\ &\leq \overline{x}_2\left[d - f\,\overline{x}_2 - e\,\underline{x_1}\right], \end{aligned}$$

como hemos supuesto que $\overline{x}_2 > 0$ entonces $0 \leq d - f\,\overline{x}_2 - e\,\underline{x_1}$ de donde:

$$d \geq e\,\underline{x_1} + f\,\overline{x}_2 \tag{2.18}$$

multiplicando en ambos miembros de (2.18) por $\left(\dfrac{-c}{f}\right)$ obtenemos:

$$-\frac{c\,d}{f} \leq -\frac{e\ c\ \underline{x_1}}{f} - c\,\overline{x}_2 \tag{2.19}$$

sumando miembro a miembro (2.17) y (2.19) obtenemos:

$$a - \frac{c\,d}{f} \leq \left(b - \frac{e\ c}{f}\right)\underline{x_1}.$$

La desigualdad $\dfrac{c}{f} < \dfrac{a}{d}$ implica que $a - \dfrac{c\,d}{f} > 0$. Debido a que $\underline{x_1} \geq \epsilon_0 > 0$ tenemos

$$0 < b - \frac{e\,c}{f}$$

o sea:

$$b\,f - e\,c > 0. \quad (f > 0) \tag{2.20}$$

Ahora bien, si multiplicamos en ambos miembros de (2.17) por $\left(-\dfrac{e}{b}\right)$ obtenemos:

$$-\frac{a\,e}{b} \geq -e\,\underline{x_1} - \frac{c\,\overline{x}_2\,e}{b} \tag{2.21}$$

sumando (2.21) y (2.18) obtenemos:

$$d - \frac{a\,e}{b} \geq f\,\overline{x}_2 - \frac{c\,\overline{x}_2\,e}{b}$$

o equivalentemente:

$$d - \frac{a\,e}{b} \geq \left(f - \frac{c\,e}{b}\right)\overline{x}_2. \tag{2.22}$$

La desigualdad $\dfrac{b}{a} \leq \dfrac{e}{d}$ implica que $d - \dfrac{a\,e}{b} \leq 0$. Como hemos supuesto $\overline{x}_2 > 0$, entonces $f - \dfrac{c\,e}{b} \leq 0$ o bien $f\,b - e\,c \leq 0$ lo cual es una contradicción con (2.20), luego $\overline{x}_2 = 0$.

En consecuencia

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t,\phi_1,\phi_2) = \lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t) = 0. \tag{2.23}$$

$\blacksquare$

Lema 2.8 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y supongamos además que se satisfacen las desigualdades dadas por (2.16). Si col $(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ es la solución del sistema (1) entonces existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq t_0$.*

Demostración: Sea $V(t)$ la solución de la ecuación logística:

$$V'(t) = V(t)[d - f\,V(t)] \quad \text{con} \quad V(t_0) = \phi_2(t_0).$$

Entonces por el Lema 2.3 $x_2(t) < V(t)$ para $t \geq t_0$.

Así

$$\limsup_{t\longrightarrow+\infty} x_2(t) \leq \limsup_{t\longrightarrow+\infty} V(t),$$

pero

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} V(t) = \frac{d}{f}$$

(véase [6], Pag.18), en consecuencia:

$$\overline{x}_2 = \limsup_{t\longrightarrow+\infty} x_2(t) \leq \frac{d}{f}.$$

En virtud del Lema 2.5,

$$\limsup \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \overline{x}_2.$$

Entonces dado $\epsilon = \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{c} - \frac{d}{f}\Big)$, $\Big(\frac{a}{c} - \frac{d}{f} > 0$, por hipótesis$\Big)$, existe $T_0 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds &< \epsilon + \overline{x}_2 \\ &\leq \epsilon + \frac{d}{f} \qquad \text{para} \quad t \geq T_0. \end{aligned}$$

Así que para $t \geq T_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \left[a - b\, x_1(t) - c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds\right] \\ &> x_1(t) \left[a - b\, x_1(t) - c \left(\epsilon + \frac{d}{f}\right)\right] \\ &= x_1(t) \left[a - c\,\frac{d}{f} - \epsilon\, c - b\, x_1(t)\right]. \end{aligned}$$

Si consideramos la solución de la ecuación logística:

$$x'(t) = x(t) \left[a - c\,\frac{d}{f} - \epsilon\, c - b\, x(t)\right]$$

$$\text{con} \quad x(T_0) = x_1(T_0)$$

entonces, usando el mismo razonamiento de la demostración del Lema 2.3 $x_1(t) > x(t)$ para $t \geq T_0$.

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\longrightarrow+\infty} x_1(t) \geq \liminf_{t\longrightarrow+\infty} x(t) &= \lim_{t\longrightarrow+\infty} x(t) \\
&= \frac{a - c\,\dfrac{d}{f} - \epsilon\, c}{b} = \frac{\frac{1}{2}\left(a - \frac{d\,c}{f}\right)}{b} = \alpha_1.
\end{aligned}$$

De donde

$$\underline{x_1} = \liminf_{t\longrightarrow+\infty} x_1(t) \geq \alpha_1 > 0,$$

usando la definición de límite inferior tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $T_1 > 0$ tal que: $x_1(t) > \underline{x_1} - \epsilon > \alpha_1 - \epsilon$ para $t > T_1$. Si escogemos $\epsilon = \dfrac{\alpha_1}{2}$, tenemos que $x_1(t) > \dfrac{\alpha_1}{2}$ para $t > T_1$.

Por otra parte, como $x_1(t) > 0$ en $[t_0, T_1]$ tenemos que $\text{mín}_{t\in[0,T_1]}\{x_1(t)\} = x_{1m} > 0$ y así $x_1(t) \geq \alpha > 0$ donde $\alpha = \text{mín}\{x_{1m}, \dfrac{\alpha_1}{2}\}$.

$\blacksquare$

Lema 2.9 *Existe una única solución $x^*(t)$ de la ecuación logística*

$$x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\,x_1(t)]$$

tal que $\dfrac{a_L}{b_M} \leq x^*(t) \leq \dfrac{a_M}{b_L}$ sobre $(-\infty, +\infty)$.

Demostración: (ver [6] Teorema 1.1, Pag.15).

Lema 2.10 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y supongamos además que se satisfacen las desigualdades dadas por (2.16). Si col $(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ denota la solución del sistema (1) entonces $x^*(t) - x_1(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $x^*(t) = \dfrac{a}{b}$ es la única solución de la ecuación logística dada en el Lema 2.9 y $x_1(t) = x_1(t,\phi_1,\phi_2)$.*

Demostración: Como demostramos en el Lema 2.8, existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) > \alpha$ para todo $t \geq t_0$ y por el Lema 2.7

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x_2(t) = 0.$$

Sean $w(t) = \dfrac{1}{x_1(t)}$ y $w^*(t) = \dfrac{1}{x^*(t)} = \dfrac{b}{a}$ las cuales están bien definidas en $[t_0, +\infty)$, debido a que $x_1(t) > \alpha > 0$ y $x^*(t) = \dfrac{a}{b} > 0$ para todo t en el intervalo, además:

$$0 < w(t) \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad w^*(t) = \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto $z(t) = w(t) - \dfrac{b}{a}$ es acotada y diferenciable en $[t_0, +\infty)$, en consecuencia el Lema 2.6 es aplicable, es decir, existen sucesiones $(\tau_n) \uparrow \infty$ y $(\sigma_n) \uparrow \infty$ tales que

$$z(\tau_n) \longrightarrow \overline{z}\,; \quad z'(\tau_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$z(\sigma_n) \longrightarrow \underline{z}\,; \quad z'(\sigma_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Probaremos que $\underline{z} = \overline{z} = 0$, para esto comencemos por notar que:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \;=\; 0.$$

En efecto, como

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x_2(t) = 0 = \overline{x}_2$$

entonces

$$0 \leq \lim_{t \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \leq \overline{x}_2 = 0.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
z'(t) &= -\frac{x_1'(t)}{x_1^2(t)}\\
&= \frac{-a + b\,x_1(t) + c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds}{x_1(t)}\\
&= -a\,w(t) + b + c\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\\
&= -a\,w(t) + a\frac{b}{a} + c\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\\
&= -a\left(w(t) - \frac{b}{a}\right) + c\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\\
&= -a\,z(t) + c\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds
\end{aligned}$$

de donde

$$z(t) = \frac{c}{a}\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds - \frac{z'(t)}{a}. \tag{2.24}$$

Ahora debido a que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds = 0$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{c}{a}\,w(\tau_n)\int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n-s)\,x_2(s)\,ds = 0$$

y

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{c}{a}\,w(\sigma_n)\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_1(\sigma_n-s)\,x_2(s)\,ds = 0;$$

pero también

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{a}z'(\tau_n) = 0 = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{a}z'(\sigma_n).$$

Por lo tanto, si cambiamos t por τ_n y σ_n en la ecuación (2.24) y tomamos límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que $\overline{z} = \underline{z} = 0$.

En consecuencia

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} z(t) = 0,$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x^*(t)| &= \left| \frac{1}{w(t)} - \frac{1}{w^*(t)} \right| \\
&= \left| \frac{(b/a) - w(t)}{w(t)(b/a)} \right| \\
&= \left| w(t) - \frac{b}{a} \right| x_1(t) \, \frac{a}{b} \\
&= |z(t)| \, x_1(t) \, \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

pero $x_1(t)$ es acotada, entonces

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left(x_1(t) - \frac{a}{b} \right) = 0.$$

∎

Teorema Principal 2.1 *Supongamos que a, b, c, d, e, f son constantes positivas, satisfaciendo las desigualdades:*

$$\frac{c}{f} < \frac{a}{d} \quad y \quad \frac{b}{a} \leq \frac{e}{d}.$$

Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$. Si col $(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2))$ es solución del sistema (1) entonces $x_2(t) \longrightarrow 0$ y $x_1(t) - x^*(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $x^*(t)$ es la solución de la ecuación logística descrita en el Lema 2.9.

Demostración: Como vimos en el Lema 2.8, existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t, \phi_1, \phi_2) = x_1(t) \geq \alpha > 0$ para $t \geq t_0$. Luego por el Lema 2.7 $x_2(t, \phi_1, \phi_2) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Por otro lado por el Lema 2.10 $x_1(t) - x^*(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$

∎

Capítulo 3

Estudio de un Sistema del Tipo Lotka-Volterra con Retardo (con coeficientes variables)

En este capítulo estudiaremos el sistema de ecuaciones integro-diferenciales

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\,x_1(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds] \\ x_2'(t) = x_2(t)[d(t) - f(t)\,x_2(t) - e(t)\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)x_1(s)ds],\ t \geq t_0 \\ x_1(t) = \phi_1(t),\ x_2(t) = \phi_2(t),\ t \leq t_0 \end{cases}$$

donde las funciones $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t)$ son continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, +\infty)$ y tienen la misma interpretación que las costantes a,b,c,d,e,f en el Capítulo 1, los núcleos k_1 y k_2 con

$$k_i : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty),\ i = 1, 2$$

son continuos y satisfacen que:

$$\int_0^{+\infty} k_i(s)\,ds = 1, \quad \text{para } \; i = 1, 2,$$

las expresiones

$$c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(s-t)x_2(s)ds \quad \text{y} \quad e(t)\int_{-\infty}^{t} k_2(s-t)x_1(s)ds$$

tienen la misma interpretación que en el Capítulo 1.

Demostraremos ahora que cuando se satisfacen las siguientes desigualdades :

$$\frac{c_M}{f_L} < \frac{a_L}{d_M} \quad \text{y} \quad \frac{b_M}{a_L} \leq \frac{e_L}{d_M} \tag{3.1}$$

las soluciones $col\,(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ con $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ del sistema (2) tienen el siguiente comportamiento:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t,\phi_1,\phi_2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\longrightarrow\infty}[x^*(t) - x_1(t,\phi_1,\phi_2)] = 0$$

donde $x^*(t)$ es la única solución de la ecuación logística

$$x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)\,x(t)]$$

tal que $\dfrac{a_L}{b_M} \leq x^*(t) \leq \dfrac{a_M}{b_L}$ para todo $t \in I\!R$.

Los siguientes lemas son similares a los que aparecen en la publicación [1] de Shair Ahmad.

Lema 3.1 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y $col\,(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ solución del sistema (2). Si se satisfacen las desigualdades dadas por (3.1) y $x_1(t) \geq \varepsilon_0$ para todo $t \geq t_0$ donde ε_0 es un número positivo entonces*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} x_2(t,\phi_1,\phi_2) = 0.$$

Demostración: Seguiremos el mismo procedimiento que en el Lema 2.7.

Tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ son acotadas por constantes positivas para $t \geq t_0$. Sean

$$\underline{x_1} = \liminf_{t\to\infty}\ x_1(t) \ \text{ y } \ \overline{x_2} = \limsup_{t\to\infty}\ x_2(t),$$

como $x_1(t) \geq \varepsilon_0$ y $x_2(t) > 0$ entonces $\underline{x_1} \geq \varepsilon_0 > 0$ y $\overline{x_2} \geq 0$.

Para demostrar el lema sólo necesitamos probar que $\overline{x_2} = 0$, pues $0 \leq \underline{x_2} \leq \overline{x_2}$, luego

$$\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0.$$

Supongamos que $\overline{x_2} > 0$, como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son acotadas y diferenciables en $[t_0, +\infty)$, podemos asegurar por el Lema 2.6 que existen sucesiones (τ_n) y (σ_n) tales que $\tau_n \longrightarrow \infty, \sigma_n \longrightarrow \infty, x_1'(\tau_n) \longrightarrow 0, x_2'(\sigma_n) \longrightarrow 0$ y $x_1(\tau_n) \longrightarrow \underline{x_1}\,, x_2(\sigma_n) \longrightarrow \overline{x_2}$.

Así que:

$$\begin{aligned} x_1'(\tau_n) &= x_1(\tau_n)\left[a(\tau_n) - b(\tau_n)\,x_1(\tau_n) - c(\tau_n)\int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\,x_2(s)\,ds\right] \\ &\geq x_1(\tau_n)\left[a_L - b_M\,x_1(\tau_n) - c_M\int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\,x_2(s)\,ds\right], \end{aligned}$$

tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en ambos miembros de la desigualdad anterior y usando el Lema 2.5 tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \underline{x_1}\left[a_L - b_M\,\underline{x_1} - c_M \lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\,x_2(s)\,ds\right] \\ &\geq \underline{x_1}\left[a_L - b_M\,\underline{x_1} - c_M\,\overline{x_2}\right], \end{aligned}$$

como $\underline{x_1} \geq \epsilon_0 > 0$ entonces $0 \geq a_L - b_M\,\underline{x_1} - c_M\,\overline{x_2}$, o sea :

$$a_L \leq b_M\,\underline{x_1} + c_M\,\overline{x_2}. \tag{3.2}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} x_2'(\sigma_n) &= x_2(\sigma_n)\left[d(\sigma_n) - f(\sigma_n)\,x_2(\sigma_n) - e(\sigma_n)\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\,x_1(s)\,ds\right] \\ &\leq x_2(\sigma_n)\left[d_M - f_L\,x_2(\sigma_n) - e_L\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\,x_1(s)\,ds\right] \end{aligned}$$

de donde, al tomar límites en ambos miembros tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{x_2}\left[d_M - f_L\,\overline{x_2} - e_L \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\sigma_n} k_2(\sigma_n - s)\,x_1(s)\,ds\right] \\ &\leq \overline{x_2}\left[d_M - f_L\,\overline{x_2} - e_L\,\underline{x_1}\right], \end{aligned}$$

como hemos supuesto que $\overline{x_2} > 0$ entonces $0 \leq d_M - f_L\,\overline{x_2} - e_L\,\underline{x_1}$ de donde:

$$d_M \geq e_L\,\underline{x_1} + f_L\,\overline{x_2} \tag{3.3}$$

multiplicando (3.3) por $\left(\dfrac{-c_M}{f_L}\right)$ resulta:

$$-\frac{c_M\,d_M}{f_L} \leq -\frac{e_L\,c_M\,\underline{x_1}}{f_L} - c_M\,\overline{x_2} \tag{3.4}$$

sumando miembro a miembro (3.2) y (3.4) obtenemos

$$a_L - \frac{c_M\,d_M}{f_L} \leq \left(b_M - \frac{e_L\,c_M}{f_L}\right)\underline{x_1}$$

la desigualdad $\dfrac{c_M}{f_L} < \dfrac{a_L}{d_M}$ implica que $a_L - \dfrac{c_M\,d_M}{f_L} > 0$. Debido a que $\underline{x_1} \geq \epsilon_0 > 0$ tenemos

$$0 < b_M - \frac{e_L\,c_M}{f_L}$$

o sea:

$$f_L - \frac{e_L\,c_M}{b_M} > 0. \tag{3.5}$$

Ahora bien, si multiplicamos en ambos miembros de (3.2) por $\left(-\dfrac{e_L}{b_M}\right)$ obtenemos:

$$-\frac{a_L\, e_L}{b_M} \geq -e_L\, \underline{x_1} - \frac{c_M\, \overline{x_2}\, e_L}{b_M} \tag{3.6}$$

sumando (3.6) y (3.3) obtenemos:

$$d_M - \frac{a_L\, e_L}{b_M} \geq f_L\, \overline{x_2} - \frac{c_M\, \overline{x_2}\, e_L}{b_M}$$

o equivalentemente:

$$d_M - \frac{a_L\, e_L}{b_M} \geq \left(f_L - \frac{c_M\, e_L}{b_M}\right)\overline{x_2}. \tag{3.7}$$

La desigualdad $\dfrac{b_M}{a_L} \leq \dfrac{e_L}{d_M}$ implica que $d_M - \dfrac{a_L\, e_L}{b_M} \leq 0$, ahora por (3.5) $f_L - \dfrac{c_M\, e_L}{b_M} > 0$, luego de (3.7) se tiene que $\overline{x_2} \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\overline{x_2} = 0$. En consecuencia

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t, \phi_1, \phi_2) = \lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t) = 0.$$

Lema 3.2 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y supongamos que se satisfacen las desigualdades dadas por (3.1). Si col $(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2))$ es solución del sistema (2) entonces existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq t_0$.*

Demostración: Sea $V(t)$ la solución de la ecuación logística:

$$V'(t) = V(t)[d_M - f_L\, V(t)] \quad \text{con} \quad V(t_0) = \phi_2(t_0).$$

Entonces razonando como en el Lema 2.3 $x_2(t) < V(t)$ para $t \geq t_0$.

Ahora bien,

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} V(t) = \frac{d_M}{f_L}.$$

Así

$$\overline{x_2} = \limsup_{t\longrightarrow+\infty} x_2(t) \leq \limsup_{t\longrightarrow+\infty} V(t) = \lim_{t\longrightarrow+\infty} V(t) = \frac{d_M}{f_L}.$$

Razonando como en el Lema 2.5 tenemos que dado $\epsilon = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a_L}{c_M} - \dfrac{d_M}{f_L}\Big) > 0$ (por hipótesis), existe $T_0 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds &\leq \epsilon + \overline{x_2} \\ &\leq \epsilon + \frac{d_M}{f_L} \qquad \text{para} \quad t \geq T_0. \end{aligned}$$

Así que para $t \geq T_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\left[a(t) - b(t)\, x_1(t) - c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\, x_2(s)\, ds\right] \\ &\geq x_1(t)\left[a_L - b_M\, x_1(t) - c_M\left(\epsilon + \frac{d_M}{f_L}\right)\right] \\ &= x_1(t)\left[a_L - c_M\,\frac{d_M}{f_L} - \epsilon\, c_M - b_M\, x_1(t)\right]. \end{aligned}$$

Si consideramos el sistema logístico:

$$x'(t) = x(t)\left[a_L - c_M\,\frac{d_M}{f_L} - \epsilon\, c_M - b_M\, x(t)\right]$$

$$x(T_0) = x_1(T_0).$$

Entonces por el Lema 2.3 $x_1(t) > x(t)$ para $t \geq T_0$.

En consecuencia

$$\begin{aligned} \liminf_{t\longrightarrow+\infty} x_1(t) \geq \liminf_{t\longrightarrow+\infty} x(t) &= \lim_{t\longrightarrow+\infty} x(t) \\ &= \frac{a_L - c_M\,\dfrac{d_M}{f_L} - \epsilon\, c_M}{b_M} = \frac{\frac{1}{2}\Big(a_L - \frac{c_M\, d_M}{f_L}\Big)}{b_M} = \alpha_1. \end{aligned}$$

De donde:

$$\underline{x_1} = \liminf_{t \longrightarrow +\infty} x_1(t) \geq \alpha_1 > 0,$$

usando la definición de límite inferior tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $T_1 > 0$ tal que: $x_1(t) > \underline{x_1} - \epsilon > \alpha_1 - \epsilon$ para $t > T_1$. Si escogemos $\epsilon = \dfrac{\alpha_1}{2}$, tenemos que $x_1(t) > \dfrac{\alpha_1}{2}$ para $t > T_1$.

Por otra parte, como $x_1(t) > 0$ en $[t_0, T_1]$ tenemos que $\min_{t \in [t_0, T_1]}\{x_1(t)\} = x_{1m} > 0$ y así $x_1(t) \geq \alpha > 0$ donde $\alpha = \min\{x_{1m}, \dfrac{\alpha_1}{2}\}$. ∎

Lema 3.3 *Sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$ y supongamos además que se satisfacen las desigualdades dadas por (3.1). Si col $(x_1(t, \phi_1, \phi_2), x_2(t, \phi_1, \phi_2))$ es una solución del sistema (2) entonces $x^*(t) - x_1(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, donde $x^*(t)$ es la única solución dada en el Lema 2.9.*

Demostración: Como demostramos en el Lema 3.2, existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq t_0$ y por Lema 3.1

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x_2(t, \phi_1, \phi_2) = \lim_{t \longrightarrow \infty} x_2(t) = 0.$$

Sean $w(t) = \dfrac{1}{x_1(t)}$ y $w^*(t) = \dfrac{1}{x^*(t)}$ las cuales están bien definidas en $[t_0, +\infty)$, debido a que $x_1(t) > \alpha > 0$ y $x^*(t) \geq \dfrac{a_L}{b_M} > 0$ para todo t en el intervalo $[t_0, +\infty)$, además:

$$0 < w(t) \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{b_L}{a_M} \leq w^*(t) \leq \frac{b_M}{a_L} \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Por lo tanto $z(t) = w(t) - w^*(t)$ es acotada y diferenciable en $[t_0, +\infty)$, en consecuencia el Lema 2.6 es aplicable, es decir, existen sucesiones $(\tau_n) \uparrow \infty$ y $(\sigma_n) \uparrow \infty$ tales que

$$z(\tau_n) \longrightarrow \overline{z}\,; \quad z'(\tau_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$z(\sigma_n) \longrightarrow \underline{z}\,; \qquad z'(\sigma_n) \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

Probaremos que $\underline{z} = \overline{z} = 0$, en efecto:

$$\begin{aligned}
z'(t) &= -\frac{x_1'(t)}{x_1^2(t)} + \frac{[x^*(t)]'}{[x^*(t)]^2} \\
&= \frac{x_1(t)\left[-a(t) + b(t)\,x_1(t) + c(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds\right]}{x_1^2(t)} + \frac{x^*(t)[a(t) - b(t)\,x^*(t)]}{[x^*(t)]^2} \\
&= -a(t)\,w(t) + c(t)\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds + w^*(t)\,a(t) \\
&= -a(t)\,[w(t) - w^*(t)] + c(t)\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds \\
&= -a(t)\,z(t) + c(t)\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$a(t)\,z(t) = c(t)\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds - z'(t)$$

luego:

$$z(t) = \frac{c(t)}{a(t)}\,w(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds - \frac{z'(t)}{a(t)} \tag{3.8}$$

por otra parte por el Lema 2.5

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)\,x_2(s)\,ds \;\;\leq\;\; \overline{x_2} \quad \text{y} \quad w(t) \leq \frac{1}{\alpha}$$

y como

$$\overline{x_2} = \limsup_{t\longrightarrow\infty} x_2(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} x_2(t) = 0$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{c(\tau_n)}{a(\tau_n)}\,w(\tau_n)\int_{-\infty}^{\tau_n} k_1(\tau_n - s)\,x_2(s)\,ds = 0$$

y

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{c(\sigma_n)}{a(\sigma_n)}\,w(\sigma_n)\int_{-\infty}^{\sigma_n}k_1(\sigma_n-s)\,x_2(s)\,ds=0$$

también

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{a(\tau_n)}\,z'(\tau_n)=0\qquad\text{y}\qquad\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{a(\sigma_n)}\,z'(\sigma_n)=0.$$

Por lo tanto, si cambiamos t por τ_n y σ_n en la ecuación (3.8) y tomamos límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que $\overline{z}=\underline{z}=0$.

En consecuencia

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}z(t)=0.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}|x_1(t)-x^*(t)| &= \left|\frac{1}{w(t)}-\frac{1}{w^*(t)}\right|\\ &= \frac{|w(t)-w^*(t)|}{|w(t)\,w^*(t)|}\\ &= |z(t)|\,x_1(t)\,x^*(t)\end{aligned}$$

pero tanto $x_1(t)$ como $x^*(t)$ son acotadas, así

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}(x_1(t)-x^*(t))=0.$$

■

Teorema Principal 3.1 *Supongamos que $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t)$ son funciones continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas y que satisfacen las desigualdades:*

$$\frac{c_M}{f_L}<\frac{a_L}{d_M}\quad y\quad \frac{b_M}{a_L}\leq\frac{e_L}{d_M}$$

y sean $\phi_1, \phi_2 \in FA_{t_0}$. *Si col* $(x_1(t,\phi_1,\phi_2), x_2(t,\phi_1,\phi_2))$ *es solución del sistema (2) entonces* $x_2(t) \longrightarrow 0$ *y* $x_1(t) - x^*(t) \longrightarrow 0$ *cuando* $t \longrightarrow \infty$*, donde* $x^*(t)$ *es la solución de la ecuación logística descrita en el Lema 2.9.*

Demostración: Por el Lema 3.2 existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq t_0$.

Así por el Lema 3.1 $x_2(t,\phi_1,\phi_2) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

Por otra parte por el Lema 3.3 $x^*(t) - x_1(t,\phi_1,\phi_2) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

∎

Bibliografía

[1] Ahmad Sahir (1993), On Non autonomous Volterra-Lotka Competition Equations, *Proceedings of the American Matematical Society*, **117**, No.**1**, 199-204.

[2] Apostol, T. (1957), *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, S.A. Barcelona.

[3] Burton, T.A. (1985), Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, *Mathematics in Science and Engineering*, **178**, Academic Press.

[4] Fulks, W. (1970), *Cálculo Avanzado.* Editorial Limusa-Wiley, S.A. México.

[5] Hirsch W., Hanisch H. y Gabriel J. (1985), Differential Equations Models of Some Parasitic Inflections Methods for Study of Asymptotic Behavior, *Comunications on Pure and Applied Mathematics* , **26**, 733-753.

[6] Montes de Oca, F. (1996), *Dinamica Poblacional de una Especie.* II ENEM. U.C.L.A., Barquisimeto-Lara.

[7] Tineo, A. (1993), Asymptotic Behavior of Positive Solutions of the Nonautonomus Lotka-Volterra Competitions Equations, *Differential and Integral Equations*, **6**, 419-457.