UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

ANILLOS ORDENADOS CON INVOLUCION

DENNYS RAMOS AMARO.

Barquisimeto, 2004

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
POSTGRADO EN MATEMATICA

ANILLOS ORDENADOS CON INVOLUCION

Trabajo de grado para obtar al título de
Magister Scientiarium
Mención Matemática Pura

Autor: DENNYS RAMOS.
Tutor: Ms. RAUL ROJAS.

Barquisimeto, 2004

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre, **Gregoria de Ramos** por apoyarme durante todo mis estudios y por confiar en mi a pesar de todo.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a:

Al DIOS VIVO, por su infinito amor e inspiración que necesite para la resolución de varios problemas y por darme la fortaleza en la realización de este trabajo.

Ms. Raul Rojas, tutor, por su permanente orientación académica, por sus consejos durante la maestría y el trabajo presente.

Ms. Nicolas Arias quien me brindó sus consejos y orientación para la realización de este trabajo.

Brenda porque su presencia llena de alegría mi vida.

Karmela por su apoyo y gran dedicación al trabajo, y por permitirme trabajar hasta los domingo para poder transcribir este trabajo.

al Analista de Sistemas **Henry Rodríguez** quien me brindó apoyo en la parte técnica e impresión.

Cristian Rojas Mi amigo y compañero quien en las buenas y malas estuvo conmigo y me hizo reir.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es generalizar parte de la teoría de $*$-órdenes de un semicampo con involución a un anillo general con involución. Generalizaremos las nociones de orden de Baer y $*$-orden a un anillo con involución. Mostraremos que la $*$-valuación natural asociada a un $*$-orden está bien definida y usaremos esto para mostrar que el $*$-orden se extiende (como en el caso conmutativo). Analizaremos el camino en el cual un $*$-orden (en el conjunto de los elementos simétricos) puede ser extendido (en el sentido de la inclusión) a un orden cerrado multiplicativamente. Este trabajo esta basado principalmente en los trabajos de Craven [4] y Marshall [10]. En el caso en que la involución es la identidad el anillo bajo consideración es conmutativo y el $*$-orden es justamente el $*$-orden usual. Los anillos que consideramos son unitarios y tienen característica 0. Por simplicidad siempre asumiremos que 2 es unidad.

Los ejemplos dados en este trabajo son aportes originales del autor en el marco de las referencias consultadas disponibles al igual que el Teorema 2.1 y la Proposición 3.8. La prueba del Lema 3.3 es distinta a la dada por Craven y Smith [4], en ella no se utilizó la existencia de la extención débil Q. Para simplificar algunas demostraciones fueron introducidas algunas obsevaciones y proposiones cuyas pruebas podrían también ser originales.

Palabras claves: $*$-orden, valuación, extensión, dominio de Ore.

Índice general

INTRODUCCION

T. Craven [2], en 1995 presentó una serie de resultados relativos a órdenes y valuaciones, sobre anillos de división con involución. Posteriormente M. Marshall [10] durante el año 2000 ha extendido la teoría de $*$-orden al caso de anillos generales con involución ($*$-orden). El desarrolló la noción de un $*$-orden extendido débilmente a un $*$-anillo y mostró que todo $*$-orden se extiende, como en el caso de semicampos. También extendió la nocion de orden de Baer a los anillos genéricos y mostró que todo $*$-orden genera un $*$-ideal primo, el cual permite que el anillo cociente generado por este ideal tenga $*$-orden con soporte cero, como en el caso de semi campo.

En el año 2001, T. Craven y T. Smith [4] modificaron la definición de extensión dada por Marshall agregando una condición adicional, obteniendo una caracterización completa de las extensiones multiplicativas del $*$-orden con soporte nulo sobre los dominios de Ore y, finalmente, una clasificación parcial de estas extensiones sobre un $*$-dominio.

Esta teoría tiene diversas aplicaciones en la teoría de C^*-algebras, las formas cuadrácticas, formas hermitianas, en la geometría algebráica real no conmutativa, en los espacios de signos abstractos y en los conjuntos costructibles de generación minimal.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría de anillos y terminología en este trabajo estará basada en los libros de Lam [8], [9]. Recordaremos algunos tópicos en forma breve de teoría de anillos con involución y finalmente expondremos en forma resumida los anillos de Ore.

Los anillos que consideramos son unitarios con característica 0 y en donde supondremos que 2 es unidad. Para un subconjunto A de un anillo R el conjunto $A^\times$ representa a todos los elementos de A excepto al 0, esto es $A^\times = A \setminus \{0\}$.

1.1. Anillos con involución.

Definición 1.1. [5] *Si R es un anillo, una **involución** en R es una aplicación $* : R \to R$ tal que cumple las siguientes condiciones:*

(1) $(a+b)^* = a^* + b^*$

(2) $(ab)^* = b^*a^*$

(3) $(a^*)^* = a$

Definición 1.2. [5] *Sea R un anillo con involución entonces:*

(1) Un elemento $a \in R$ es **simétrico** si $a^* = a$.

(2) Un elemento $a \in R$ es **semisimétrico** o simplemente **semi** si $a^* = -a$.

(3) Para todo $a \in R$, $a + a^*$ recibe el nombre de **traza** de a.

(4) Para todo $a \in R$, $a - a^*$ recibe el nombre de la **semitraza** de a.

(5) Para todo $a \in R$, aa^* recibe el nombre de **norma** de a.

(6) Para todo $a, b \in R$, $ab + ba$ recibe el nombre de **producto de Jordan** de a y b.

El conjunto de todos los elementos simétricos de un anillo R con involución es denotado por $S(R)$. El conjunto de todos los elementos semisimétricos es denotado con $SK(R)$. Nótese que para todo $a \in R$ se cumple que $aa^*, a + a^* \in S(R)$ y $a - a^* \in SK(R)$ también, para todo $a, b \in S(R)$ tenemos que $ab + ba \in S(R)$. Un hecho que es importante resaltar es que todo elemento $r \in R$ se puede descomponer en forma única como $r = s + k$ donde s es simétrico y k es un elemento semi, estos elementos son, $s = \frac{a+a^*}{2}$ y $k = \frac{a-a^*}{2}$. En efecto, supongamos que existen $s_1 \in S(R)$ y $k_1 \in SK(R)$ tales que $r = s_1 + k_1$, entonces $r^* = s_1 - k_1$, luego $r + r^* = (s_1 + k_1) + (s_1 - k_1) = 2s_1$ y de aquí que $s_1 = \frac{r+r^*}{2} = s$, en forma similar se demuestra que $k_1 = k$. Por tanto, todo elemento del anillo R se escribe en forma única como suma de un elemento simétrico y un elemento semisimétrico. También se puede demostrar que el conjunto S(R) es un grupo bajo la adición, pero no necesariamente es un grupo bajo la multiplicación.

Definición 1.3. *Sea R_1 un anillo con involución $*$ y R_2 otro anillo con involución $\star$. Un homomorfimos $h : R_1 \to R_2$ se dice que es un $*$-homomorfismo si se cumple que $h(a^*) = h(a)^\star$ para todo $a \in R_1$.*

En la siguiente proposición consideramos algunos resultados que se cumplen en un anillo con involución, que serán usadas en otras pruebas.

Proposición 1.1. *Supongamos que R es un anillo con una involución $*$. Entonces:*

(1) $0^* = 0$

(2) $(-a)^* = -a^*$ para todo $a \in R$.

(3) $(1)^* = 1$

(4) $n^* = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(5) $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$ para toda unidad a en R.

(6) Si a es una unidad y a es simétrico, entonces a^{-1} es también simétrico.

Demostración:

(1) $(0+0)^* = 0^* \Rightarrow 0^* + 0^* = 0^* \Rightarrow 0^* = 0$

(2) Sea $a \in R$. $(a + (-a))^* = 0^* \Rightarrow a^* + (-a)^* = 0 \Rightarrow (-a)^* = -a^*$

(3) Sea $a \in R$, entonces $1a^* = a^*$ y $a^*1 = a^*$, luego $(1a^*)^* = (a^*)^*$ y $(a^*1)^* = (a^*)^*$, de aquí que $a1^* = a$ y $1^*a = a$ y por unicidad de la identidad tenemos que $1^* = 1$.

(4) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 0$ entonces:

$$n^* = (1 + 1 + \cdots + 1)^* = 1^* + 1^* + \cdots + 1^* = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Si $n < 0$, entonces $-n > 0$, luego por lo anterior tenemos que $(-n)^* = -n$, pero por (2), se tiene que $-n^* = -n$ por tanto $n^* = n$.

(5) Sea a una unidad en R. Luego, $(aa^{-1})^* = (1)^* \Rightarrow (a^{-1})^*a^* = 1$. También tenemos que $a^*(a^{-1})^* = 1$ y por la unicidad del inverso se tiene $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

(6) Por (5) tenemos que $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1} = a^{-1}$, ya que a es simétrico. ■

Definición 1.4. [[*10*], *Definición 1.3*] *Sea R un $*$-anillo. Entonces:*

(1) un **$*$-ideal** de R es un ideal (bilátero) $\mathfrak{a}$ de R tal que $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$

(2) Un ideal $\mathfrak{q}$ será llamado **primo** si es es primo en el sentido fuerte, esto es, si y sólo si $R/\mathfrak{q}$ es un dominio [1], esto es, si $\mathfrak{q} \neq R$ y $ab \in \mathfrak{q}$, entonces $a \in \mathfrak{q}$ ó $b \in \mathfrak{q}$.

(3) Por un **$*$-ideal restricto** de R se entiende la intersección con $S(R)$ de un $*$-ideal de R. Por un **$*$-ideal primo restricto** entenderemos la intersección con $S(R)$ de un $*$-ideal primo de R.

(4) Por un **ideal de Jordan** de $S(R)$ se entiende un subconjunto $\mathfrak{a}$ de $S(R)$ que es un grupo bajo la adición y satisface $a \in \mathfrak{a}, b \in S \Rightarrow ab + ba \in \mathfrak{a}$. Por un **ideal de Jordan primo** de S(R) entendemos un ideal de Jordan $\mathfrak{p}$ de $S(R)$ tal que $1 \notin \mathfrak{p}$ y $a, b \in S(R)$, $ab + ba \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$.

Observación 1.1. [[*10*], *Nota 1.4*] *Si $\mathfrak{q}$ es un $*$-ideal primo de R el anillo factor $R/\mathfrak{q}$ tiene una involución inducida $* : R/\mathfrak{q} \to R/\mathfrak{q}$ definida $(a + \mathfrak{q})^* = a^* + \mathfrak{q}$, y la imagen de $S(R)$ en $R/\mathfrak{q}$ es el conjunto de elementos simétricos de $R/\mathfrak{q}$. En efecto, veamos que $* : R/\mathfrak{q} \to R/\mathfrak{q}$ está bien definida supongamos que $a + \mathfrak{q}, b + \mathfrak{q} \in R/\mathfrak{q}$ son tales que $a + \mathfrak{q} = b + \mathfrak{q}$. Entonces $a - b \in \mathfrak{q}$, como $\mathfrak{q}$ es un $*$-ideal de R obtenemos $a^* - b^* = (a - b)^* \in \mathfrak{q}$, por tanto $a^* + \mathfrak{q} = b^* + \mathfrak{q}$. Si $a + \mathfrak{q} \in R/\mathfrak{q}$ es simétrico, entonces $(a + \mathfrak{q})^* = a + \mathfrak{q}$, luego $a^* + \mathfrak{q} = a + \mathfrak{q}$ y por tanto $a^* - a \in \mathfrak{q}$ (I). Además, como todo elemento de R se puede escribir como suma de un elemento en $S(R)$ con un elemento en $SK(R)$, tenemos que existen $a_1 \in S(R)$ y $a_2 \in SK(R)$ tales que $a = a_1 + a_2$, así $a - a_1 = a_2$ (II). De (I) tenemos que $-2a_2 = a_1 - a_2 - a_1 - a_2 = (a_1 + a_2)^* - (a_1 + a_2) = a^* - a \in \mathfrak{q}$. Por ser $\mathfrak{q}$ un ideal de R y $\frac{-1}{2} \in R$, entonces $a_2 = (\frac{-1}{2})(-2a_2) \in q$ (III). De (II) y (III) tenemos que $a - a_1 = a_2 \in \mathfrak{q}$, luego $a + \mathfrak{q} = a_1 + \mathfrak{q}$, donde a_1 es un elemento simétrico. Si $a \in S(R)$, entonces $(a + \mathfrak{q})^* = a^* + \mathfrak{q} = a + \mathfrak{q}$.*

[1] Los dominios no son necesariamente conmutativos. Los dominios conmutativos son llamados **dominios integrales**.

1.2. Localización de Ore.

Definición 1.5. [9] *Por un* ***conjunto multiplicativo*** *en un anillo R, es un subconjunto S de R tal que S es cerrado bajo la multiplicación, $0 \notin S$, y $1 \in S$.*

Definición 1.6. [9] *Sea R un anillo y S un conjunto multiplicativo de R. Un homomorfismo $f : R \to R'$ es llamado* ***S-inversión*** *si para cada $s \in S$, $f(s)$ es un elemento invertible de R', (una unidad de R').*

Definición 1.7. [9] *Un anillo R' se dice que es un* ***anillo derecho de fracciones*** *(con respecto a $S \subset R$) si existe un homomorfismo $\varphi : R \to R'$ tal que :*

(1) φ es S-inversión.

(2) Todo elemento de R' tiene la forma $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ para algún $a \in R$ y algún $s \in S$.

(3) $Ker(\varphi) = \{r \in R \mid rs = 0 \text{ para algún } s \in S\}$.

Nótese que $R' \neq 0$ en vista de (c), porque si $R' = 0$, entonces $Ker(\varphi) = R$, luego $1 \in R = Ker(\varphi)$ y así existe un $s \in S$ tal que $s = 1s = 0$, esto es una contradicción ($0 \notin S$). Para simplificar notación, escribiremos los elementos de R' como rs^{-1}, en lugar de $\varphi(r)\varphi(s)^{-1}$.

Si R' existe, podemos deducir rápidamente dos condiciones en S, como siguen:

Observación 1.2. [9] *Para $a \in R$ y $s \in S$, $aS \cap sR \neq \emptyset$. (Nos referiremos a esta propiedad diciendo que S es* ***permutable derecho*** *ó que S es un* ***conjunto de Ore derecho****.) Para probar esta propiedad, escribamos $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ en la forma $\varphi(r)\varphi(s')^{-1}$ donde $r \in R$ y $s' \in S$. Entonces $\varphi(as') = \varphi(rs)$, así $(as' - sr)\tilde{s} = 0$ para algún $\tilde{s} \in S$ por la Definición 1.7 (3). Por tanto tenemos que $as'\tilde{s} = sr\tilde{s} \in aS \cap sR$.*

De esta observación tenemos la siguiente definición.

Definición 1.8. [*1*] *Si para $r \in R$ y $s \in S$ existen $s', \tilde{s} \in S$ tales que $as'\tilde{s} = sr\tilde{s}$, entonces esta propiedad recibe el nombre de* ***condición de Ore derecha.***

Observación 1.3. [*9*] *Para $a \in R$, si $s'a = 0$ para algún $s' \in S$, entonces $as = 0$ para algún $s \in S$. (Nos referiremos a esta propiedad diciendo que S es* ***reversible derecho****.) Para probar esta propiedad, nótese que $s'a = 0$, implica que $\varphi(s')\varphi(a) = 0$. Luego, $\varphi(a) = 0$, y la Definición 1.7* (3) *implica que $as = 0$, para algún $s \in S$.*

Definición 1.9. [*9*] *Si el conjunto multiplicativo $S \subseteq R$ es simultáneamente permutable derecho y reversible derecho, diremos que s es un* ***conjunto denominador derecho****.*

Teorema 1.1. [*9*] *El anillo R tiene un anillo derecho de fracciones con respecto a S si y sólo si S es un conjunto denominador derecho.*

Ya hemos probado la parte sólo si de este resultado (como una motivación para la Definición 1.9). En lo siguiente supondremos que S es un conjunto denominador derecho, y costruiremos un anillo de fracciones derecho denotado por RS^{-1}. La costrucción no es muy difícil, pero la demostración de que esta construcción da un anillo es muy tediosa, y nosotros suprimiremos todos los detalles. Para mayor referencia ver [1] y [9]
.

Puesto que los elementos de RS^{-1} son fracciones derecha de la forma as^{-1} donde $a \in R$, $s \in S$, empezaremos la construcción trabajando sobre $R \times S$. Definimos una relación $\sim$ en $R \times S$ como sigue:

$(a, s) \sim (a', s')$ si existen $b, b' \in R$ tales que $sb = s'b' \in S$ y $ab = a'b' \in R$.

Intuitivamente, la condición implica que después que trabajamos con el mínimo común denominador de s y s' ($sb = s'b' \in S$), los numeradores ab y $a'b'$ son iguales. Es el mismo método para chequear que dos fracciones son iguales. Nótese que aunque $sb = s'b' \in S$, no necesariamente $b, b' \in S$. Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en $R \times S$. La reflexividad y simetría son evidentes, sólo probaremos la transitividad. Supongamos que $(a, s) \sim (a', s')$ y $(a', s') \sim (\tilde{a}, \tilde{s})$, entonces existen $b, b', c, c' \in R$ tales que $sb = s'b' \in S$ (1), $ab = a'b' \in R$ (2), $s'c = \tilde{s}c' \in S$ (3), $a'c = \tilde{a}c' \in R$ (4). De $(s'c)S \cap (s'b')R \neq \emptyset$, existen $r \in R$ y $t \in S$ tales que $s'b'r = s'ct \in S$ (5). Como $s'(b'r - ct) = 0$, usando la reversibilidad derecha tenemos que existe un $t' \in S$ tal que $(b'r - ct)t' = 0$, de aquí que $b'rt' = ctt'$ (6). Ahora,

$$\begin{aligned} sbr &= s'b'r && \text{(por (1))} \\ &= s'ct && \text{(por (5))} \\ &= \tilde{s}c't \in S && \text{(por (3) y } t \in S) \end{aligned}$$

Luego, $s(brt) = \tilde{s}(c'tt') \in S$. También tenemos que:

$$\begin{aligned} a(brt') &= (ab)rt' \\ &= (a'b')rt' && \text{(por (2))} \\ &= a'(b'rt') \\ &= a'(ctt') && \text{(por (6))} \\ &= (a'c)tt' \\ &= (\tilde{a}c')tt' && \text{(por (4))} \\ &= \tilde{a}(c'tt') \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $(a, s) \sim (\tilde{a}, \tilde{s})$.

Nótese que si $t' = 1$ en la definición de $\sim$, entonces $(a, s) \sim (ab, sb)$, puesto que $sb = 1s = s \in S$ tiene sentido. Por tanto, podemos penzar en $\sim$ como la relación de equivalencia que identifica a (a, s) con (ab, sb) para todo $a \in R$, $s \in S$ con $sb \in S$.

Escribiremos a/b ó as^{-1} para la clase de equivalencia (a, s). El conjunto de todas las clases de equivalencia será denotado por RS^{-1}.

Para definir la adición en RS^{-1}, observemos que dos fracciones a_1/s_1 y a_2/s_2 pueden ser llevada a su mínimo común denominador. De $s_1S \cap s_2R \neq \emptyset$, obtenemos que existen

$r \in R$ y $s \in S$ tales que $s_2 r = s_1 s \in S$, así tenemos $a_1/s_1 = a_1 s/s_1 s$, y $a_2/s_2 = a_2 r/s_2 r$. Podemos definir la adición:

$$a_1/s_1 + a_2/s_2 = (a_1 s + a_2 r)/t \text{ , donde } t = s_1 s = s_2 r.$$

$(RS^{-1}, +)$ es un grupo aditivo (ver Lam [9], Cohn [1]), con elemento neutro $0/1$. La aplicación $\varphi : R \to RS^{-1}$ dada por $\varphi(a) = a/1$ es un homomorfismo de grupos con

$$Ker(\varphi) = \{a \in R \mid (a, 1) \sim (0, 1)\} = \{a \in R \mid as = 0 \text{ para algún } s \in S\}.$$

Como se esperaba. Para definir la multiplicación de las fracciones a_1/s_1 y a_2/s_2, usemos $s_1 R \cap a_2 S \neq \emptyset$ para encontrar $r \in R$ y $s \in S$. Entonces definimos

$$(a_1/s_1)(a_2/s_2) = (a_1 r)/(s_2 s).$$

Manteniendo en cuenta que $(a_1 s_1^{-1})(a_2 s_2^{-1})$ podría ser :

$$a_1(s_1^{-1} a_2) s_2^{-1} = a_1(r s^{-1}) s_2^{-1} = (a_1 r)(s_2 s)^{-1}.$$

Nótese que $1/1$ es el elemento identidad multiplicativa en RS^{-1} y la función φ define justamente un homomorfismo de anillos de R en RS^{-1}. También $1/s$ ($s \in S$) es el inverso de $\varphi(s) = s/1$, así φ es S-inversión. Vemos que $a/s = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. Hemos mostrado que RS^{-1} es un anillo derecho de fracciones de R con respecto a S. ■

Corolario 1.1. [9] *Si S es un conjunto denominador derecho, entonces $\varphi : R \to RS^{-1}$ es un homomorfismo S-inversión. En particular, existe un único isomorfismo $g : R \to R_S$ tal que $g \circ \varepsilon = \varphi$, donde $\varepsilon : R \to R_S$.*

También tenemos la noción de permutabilidad izquierda, reversibilidad izquierda y conjunto denominador izquierdo. Si S es un conjunto denominador izquierdo, el anillo de fracciones izquierdo de R con respecto a S es denotado por $S^{-1}R$. Del Corolario 1.1 y su correspondiente versión izquierda tenemos:

Corolario 1.2. [9] *Si RS^{-1} y $S^{-1}R$ existen, entonces* $\quad RS^{-1} \cong S^{-1}R$

Corolario 1.3. [9] *Si S es central en R, entonces S es un conjunto denominador izquierda y derecha y podemos identificar RS^{-1} con $S^{-1}R$.*

Definición 1.10. [9] *Hablamos de $RS^{-1} = S^{-1}R$, como una **localización central** de R.*

Definición 1.11. [9] *Decimos que un elemento $s \in R$ es un **elemento regular** si este no es un divisor de cero a derecha ni a izquierda.*

Nótese que si S consiste de elementos regulares entonces, S es claramente reversible a izquierda y a derecha.

Definición 1.12. [9], [1] *Sea S el conjunto multiplicativo de todos los elementos regulares. Decimos que R es un **anillo de Ore derecho** si y sólo si S cumple con la condición de Ore derecha si y sólo si S es permutable derecho, si y sólo si RS^{-1} existe. En este caso, hablamos de RS^{-1} como el **anillo derecho clásico** ó **campo de fracciones** y lo denotaremos por $Q_{cl}^{r}(R)$ ó simplemente por D.*

Los análogos izquierdos a estas nociones son definidas en forma similar.

Definición 1.13. [9] *Si R es un anillo de Ore izquierdo y derecho decimos que R es un **anillo de Ore**, en este caso $Q_{cl}^{r}(R) = Q_{cl}^{l}(R)$ (por Corolario 1.2)*

Nótese que todo anillo conmutativo es un anillo de Ore, de acuerdo con el Cor. 1.3.

Definición 1.14. [9] *Sea R un dominio y $\quad S = R^{\times}$. Luego el dominio R es un **dominio de Ore derecho** (resp. Ore izquierdo) si y sólo si R satisface la condición de Ore derecha (resp. izquierda).*

Un anillo de división es un anillo de Ore.

Capítulo 2

$*$-orden

2.1. Orden de Baer

Definición 2.1. [[10],*Definición 1.1*] *Si* R *es un semicampo*[1]*, un orden de* ***Baer*** *en* R *es un subconjunto* P *de* $S(R)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

(1) $1 \in P$

(2) $P + P \subseteq P$

(3) $rPr^* \subseteq P$ para todo $r \in R$

(4) $P \cup -P = S(R)$

(5) $P \cap P = \{0\}$

[1] Los semicampos también son llamados anillos de división.

Un $*$-**orden** (también llamado un **orden de Jordan**) es un orden de Baer que satisface la condición adicional

(6) $a, b \in P \Rightarrow ab + ba \in P$

Definición 2.2. [[*10*],*Definición 1.2*] *Si R es un anillo, un orden de* ***Baer*** *en R es un subconjunto P de $S(R)$ que satisface las siguientes propiedades:*

(1) $1 \in P$ y $-1 \notin P$

(2) $P + P \subseteq P$

(3) $rPr^* \subseteq P$ para todo $r \in R$

(4) $P \cup -P = S(R)$

(5) Para todo $a, b \in S(R)$, $aba \in P \cap -P \Rightarrow a \in P \cap -P$ ó $b \in P \cap -P$

Un $*$-**orden** (también llamado un **orden de Jordan**) es un orden de Baer que satisface la condición adicional

(6) $a, b \in P \Rightarrow ab + ba \in P$

El conjunto $P \cap -P$ es llamado el **soporte** de P.

Como es usual en la geometría algebraica real, aquí usaremos que el soporte es nulo, esto difiere de las primeras definiciones en donde se toma al soporte como un conjunto vacío, es decir se excluye al cero de los ordenes.

Aunque hemos hablado de orden de Baer un poco, estamos interesado principalmente en este trabajo en $*$-orden.

La operación rar^* vista arriba ocurre tan frecuentemente que le daremos el nombre $*$**-conjugación**.

Proposición 2.1. *Cuando R es un anillo de división*[2]*, la Definition 2.1 es equivalente a la Definición 2.2.*

Demostración: Definición 2.1 $\Rightarrow$ Definición 2.2

Por hipótesis tenemos que $1 \in P$, falta ver que $-1 \notin P$. Si $-1 \in P$, entonces $1 \in -P$. Así, $1 \in P \cap -P$, esto contradice la Defenición 2.1 parte (5). Por tanto $-1 \notin P$. Las condiciones (2),(3),(4) y (6) son evidentes por la Definición 2.1. Para la condición (5). Supongamos que $aba \in P \cap -P = \{0\}$. Entonces, $aba = 0$, como R es un anillo de división, tenemos que $a = 0$ ó $b = 0$. Por tanto, $a \in P \cap -P$ ó $b \in P \cap -P$.

Definición 2.2 $\Rightarrow$ Definición 2.1

Las condiciones (1),(2),(3),(4) y (6) son evidentes por la Definión 2.2. Sólo falta chequear que (5) también se cumple. Supongamos que $P \cap -P \neq \{0\}$. Sea $a \in P \cap -P$ tal que $a \neq 0$. Como R es un anillo de división existe a^{-1}. Luego, por ser a un elemento de $P \cap -P$, tenemos que $a \in P$ y $-a \in P$. Por la condición (3) se tiene que $a^3 = aaa^* \in P$ y $-a^3 - 2a^2 - a = (a+1)(-a)(a+1) \in P$, usando ahora la condición (2) de la definición tenemos que $-2a^2 = (-a^3 - 2a^2 - a) + a + a^3 \in P$. Nuevamente por la condición (3), obtenemos $-2 = a^{-1}(-2a^2)(a^{-1})^* \in P$, $((a^{-1})^* = a^{-1}$, vea la proposición 1.1 (6)). Luego, $-1 = -2 + 1 \in P$, esto contradice la condición (1) de la Definición 2.2. $\blacksquare$

En la definición 2.2 se habla de un $*$-orden que puede no existir, es decir puede haber un anillo con involución que no tiene $*$-orden. Esto se verá en los dos siguientes ejemplos.

[2] Los anillos de división también son llamados semicampo.

Ejemplo 2.1. *Sea R el anillo de las matrices de orden 2 definida sobre $\mathbb{R}$. Una involución en R, es la transpuesta de una matriz, es decir:*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

Se puede chequear fácilmente que ésta aplicación es una involución. Si

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in S(R)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow y = z.$$

Por tanto $S(R) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} \mid x, y, w \in \mathbb{R} \right\}$. Supongamos que P es un $*$-orden del anillo R. Como $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S(R)$, por la Definición 2.2 (4) tenemos que $A \in P$ ó $A \in -P$. Procedamos por casos, primero supongamos que $A \in P$, por la Definición 2.2 (3) tenemos que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \in P.$$

También aplicando la Definición 2.2 (3) tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \in P.$$

Ahora aplicando la Definición 2.2 (2) obtemos:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in P$$

Esto contradice la definición 2.2 (1). Para el segundo caso supongamos que $-A \in P$. Por la Definición 2.2 (3) tenemos que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \in P.$$

También aplicando la Definición 2.2 (3) tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \in P.$$

Ahora aplicando la Definición 2.2 (2) obtemos:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in P$$

En este caso también se contradice la Definición 2.2 (1). La contradicción proviene de haber supuesto que R tiene un $*$-orden.

Veamos otro ejemplo de un $*$-anillo que no tiene $*$-orden.

Ejemplo 2.1. *Sea R el anillo de las matrices triangulares inferiores de orden 2 definida sobre $\mathbb{R}$. Definamos una involución en R, como sigue:*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} z & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Se puede chequear fácilmente que ésta aplicación es una involución. Si $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in S(R)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Rightarrow x = z.$$

Por tanto $S(R) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Supongamos que P es un $*$-orden del anillo R. Entonces, por la Definición 2.2 (1) tenemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ y $-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin P$. Pero también por la Definición 2.2 (3) tenemos que:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \in P.$$

Esto es una contradicción por tanto R no tiene un $*$-orden.

Ejemplo 2.1. *Sea R el anillo conmutativo de las matrices diagonales, con involución la identidad. Entonces $P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \text{ y } x \geq 0 \right\}$ es un $*$-orden.*

Demostración: Nótese que $S(R) = R$. Sean $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in P_1$ y sea $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \in R$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_1$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin P_1$, esto ocurre por las definición de P_1.

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in P_1$ (porque $a_1 + a_2 \geq 0$).

(3) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x^2a_1 & 0 \\ 0 & y^2b_1 \end{pmatrix} \in P_1$ (porque $x^2a_1 \geq 0$).

(4) $P_1 \cup -P_1 \subseteq R = S(R)$. Sea $A \in R = S(R)$ como arriba tenemos dos posibilidades para x, la primera es que $x \geq 0$ y como consecuencia $A \in P_1$ y la segunda es que $x \leq 0$ y como consecuencia $A \in -P_1$. De estas dos posibilidades tenemos que $R \subseteq P_1 \cup -P_1$. Por tanto $P_1 \cup -P_1 = R = S(R)$.

(5) Sea A como arriba $A \in P_1 \cap -P_1$, entonces $x \geq 0$ y $x \leq 0$, de aquí que $x = 0$. Por tanto $P_1 \cap -P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Sea A, B como arriba, tales que $ABA \in P_1 \cap -P_1$ (recordemos que S(R) = R). Efectuando la multiplicaciones de estas matrices tenemos que $\begin{pmatrix} x^2z & 0 \\ 0 & y^2w \end{pmatrix} \in P_1 \cap -P_1$, de aquí que $x^2z = 0$,

luego $x = 0$ ó $z = 0$, por tanto $A \in P_1 \cap -P_1$ ó $B \in P_1 \cap -P_1$.

(6) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & 0 \\ 0 & 2a_2b_2 \end{pmatrix} \in P_1$

Por tanto P_1 es un $*$-orden. Nótese que el soporte de P_1 es diferente de $\{0\}$ y es infinito. También se puede chequear que $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R} \right\}$ es un $*$-orden. Pero, $P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \geq 0 \right\}$ no es un $*$-orden. Ya que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un elemento simétrico de R que no pertenece a P_3 ni pertenece a $-P_3$.

En el siguiente teorema establecemos el número de $*$-órdenes que tiene el anillo de las matrices diagonales de orden n con involución la identidad.

Teorema 2.1. *Si R es el anillo de las matrices diagonales de orden n. Con involución la identidad. Entonces el número de $*$-órdenes de R es n.*

Demostración: Sea n un entero positivo fijo. Denotaremos por I_n a la matriz identidad de orden n. Para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ definamos $P_i = \{A \in R \mid a_{i,i} \geq 0\}$. Veamos que este conjunto es un $*$-orden de R.

Sean $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ y $B = (b_{i,j})_{n\times n}$ dos matrices en el conjunto P_i y $C = (c_{i,j})_{n\times n}$ y $D = (d_{i,j})_{n\times n}$ elementos de R. Entonces:

(1) Por definición de P_i tenemos que $I_n \in P_i$ y $-I_n \notin P_i$.

(2) $A + B = (a_{i,j})_{n\times n} + (b_{i,j})_{n\times n} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{n\times n}$. Como $A, B \in P_i$, entonces $a_{i,i} \geq 0$ y $b_{i,i} \geq 0$, como consecuencia $a_{i,i} + b_{i,i} \geq 0$. Por tanto $A + B \in P_i$.

(3) Por propiedad de multiplicación de matrices diagonales tenemos que

$$CAC^* = CAC = (c_{i,j}a_{i,j}c_{i,j})_{n\times n} = (c_{i,j}^2 a_{i,j})_{n\times n}.$$

Como $A \in P_i$ tenemos que $a_{i,i} \geq 0$ y como consecuencia $c_{i,i}^2 a_{i,i} \geq 0$. Por tanto $CAC^* \in P_i$.

(4) Como $*$ es la identidad tenemos que $P_i \cup -P_i \subseteq R = S(R)$. Sea $C \in R$ como arriba tenemos dos posibilidades para $c_{i,i}$, la primera es que $c_{i,i} \geq 0$ y como consecuencia $C \in P_i$ y la segunda es que $c_{i,i} \leq 0$ y como consecuencia $C \in -P_i$. De estas dos posibilidades tenemos que $R \subseteq P_i \cup -P_i$. Por tanto $P_i \cup -P_i = R = S(R)$.

(5) Sea C como arriba $C \in P_i \cap -P_i$ $(S(R) = R)$, entonces $c_{i,i} \geq 0$ y $c_{i,j} \leq 0$, de aquí que $c_{i,i} = 0$. Por tanto $P_i \cap -P_i = \{(d_{i,j})_{n\times n} \in R \mid d_{i,i} = 0\}$. Sea C, D como arriba, tales que $CDC \in P_i \cap -P_i$ (recordemos que $S(R) = R$). Efectuando la multiplicaciones de estas matrices tenemos que $CDC = (c_{i,j}^2 d_{i,j})_{n\times n} \in P_i \cap -P_i$, de aquí que $c_{i,i}^2 d_{i,i} = 0$, luego $c_{i,i} = 0$ ó $d_{i,i} = 0$, por tanto $C \in P_i \cap -P_i$ ó $D \in P_i \cap -P_i$.

(6) Como R es el anillo de las matrices diagonales tenemos que

$$AB + BA = 2AB = (2a_{i,j}b_{i,j})_{n\times n}.$$

Luego, por ser $a_{i,i}b_{i,i} \geq 0$ ya que $a_{i,i} \geq 0$ y $b_{i,i} \geq 0$ tenemos que $AB + BA \in P_i$.

Por tanto P_i es un $*$-orden. Nótese que el soporte de P_i es diferente de $\{0\}$ y es infinito.

Sea P un $*$-orden de R. Veamos que existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $P = P_i$. Para $r \in \{1, 2, ..., n\}$, sea $A_r = (a_{i,j})_{n\times n} \in R$ dada por $a_{i,j} = -1$ si $i = j = r$ y 0 en otro caso. Si $A_r \in P$ para cada $r \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces por Definicion 2.2 (2) tenemos que $-I_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \in P$, pero esto contradice la Definición 2.2 (1), por tanto existe un $t \in \{1, 2, ..., n\}$ tal $A_t \notin P$. Como el producto de matrices diagonales es el producto componente a componente, entonces $A_rA_s = O_{n\times n}$, si $r \neq s$, aquí $O_{n\times n}$ representa la matriz nula de orden $n \times n$. Ahora supongamos que existe un $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $k \neq t$ y $A_k \notin P$. Sea $B = A_t - A_k$. Como $R = P \cup -P$, supongamos que $B \in P$ por Definición 2.2 (3) tenemos que $A_tBA_t \in P$. Pero, $A_tBA_t = A_t^3 - A_tA_kA_t = A_t^3 - O_{n\times n} = A_t$. De aquí que $A_t \in P$, pero esto es una contradicción. Ahora, supongamos que $-A_t + A_k = -B \in P$. Nuevamente por la Definición 2.2 (3) tenemos que $A_k(-B)A_k \in P$, además se tiene que $A_k(-B)A_k = -A_kA_tA_k + A_k^3 = O_{n\times n} + A_k^3 = A_k$. Luego, $A_k \in P$, que nuevamente es una contradicción. La contradicción proviene de haber supuesto que $t \neq k$. Por tanto existe un único $t \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $A_t \notin P$.

Supongamos que existe una matriz $C = (c_{i,j})_{n\times n} \in P$ tal que $c_{t,t} = -c < 0$ $(c > 0)$. Sea $D = (d_{i,j})_{n\times n}$ dada por $d_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ si $i = j = t$ y 0 en otro caso. Por la Definición 2.2 (3) tenemos que $D^2C = DCD \in P$. Por ser D y C matrices diagonales tenemos que $D^2C = (d_{i,j}^2c_{i,j})_{n\times n}$, luego $d_{i,j}^2c_{i,j} = (\frac{1}{\sqrt{c}})^2(-c) = -1$, si $i = j = t$ y $d_{i,j}^2c_{i,j} = 0$ en otro caso, así por la definición de A_t se tiene que $A_t = DCD \in P$, pero esto es una contradicción. Por tanto, $\forall C \in P$, $c_{t,t} \geq 0$. De esta forma hemos probado que $P \subseteq P_t$. Supongamos que $P \neq P_t$, entonces existe un $C \in P_t$ tal que $C \notin P$. Como $R = P \cup -P$, entonces $-C \in P$, así $c_{t,t} \geq 0$ y $-c_{t,t} \geq 0$ (por definición de P_t y por ser $P \subseteq P_t$), luego $c_{t,t} = 0$. Nótese que hemos probado que $A_k \in P$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\} - \{t\}$, de aquí tenemos que $E = A_1 + \cdots + A_{t-1} + A_{t+1} + \cdots + A_n \in P$. Como P es cerrado bajo el producto de Jordan se tiene que $2((-E)C) = E(-C) + (-C)E \in P$. Nótese que $-E$ es casi la identidad, sólo difiere en que la componente $e_{t,t} = 0$, pero como $c_{t,t} = 0$ y el producto de matrices diagonales es el producto componente a componente, entonces $(-E)C = C$, de aquí que $2C = 2((-E)C) \in P$. Por ser P cerrado bajo la adición y bajo la $*$-conjugación tenemos que $C = (\frac{1}{2}I_n)(2C + 2C)(\frac{1}{2}I_n) \in P$, esto es una contradicción. Luego, $P = P_t$. Por tanto R tiene exactamente n $*$-orden. ■

Ejemplo 2.1. $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ *es un anillo conmutativo, con involución dada por:* $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. *Entonces* $P = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \geq 0 \right\}$ *es un $*$-orden.*

Demotración:

Se puede chequear que R es en efecto un anillo conmutativo. Probemos que la aplicación $*$ es una involución en R.

Sean $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ elementos de R. Entonces:

(1) $$(A^*)^* = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}^* \right)^* = \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = A$$

(2) $$(AB)^* = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} xa & -xb - ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$$ y

$$B^*A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & -ya - xb \\ 0 & xa \end{pmatrix}.$$

Por tanto $(AB)^* = B^*A^*$.

(3) $(A+B)^* = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ 0 & x+a \end{pmatrix}$ y $A^* + B^* = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ 0 & x+a \end{pmatrix}$.

Por tanto $(A+B)^* = A^* + B^*$.

De (1),(2) y (3) tenemos que $*$ es una involución.

Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S(R)$, entonces:

$$A = A^* \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0.$$

Por tanto $S(R) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Sean $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in P$, $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \in S(R)$ y $\begin{pmatrix} y & w \\ 0 & y \end{pmatrix} \in R$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin P$, esto ocurre por las definición de P.

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 \end{pmatrix} \in P$ (pues $a_1 + a_2 \geq 0$).

(3) $\begin{pmatrix} y & w \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & w \\ 0 & y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} y^2 a_1 & 0 \\ 0 & y^2 a_1 \end{pmatrix} \in P$ (pues $y^2 a_1 \geq 0$).

(4) Por la definición de $S(R)$ y la definición de P, tenemos que $P \cup -P = S(R)$.

(5) Sea A como arriba $A \in P \cap -P$, entonces $x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 0$, de aquí que $x = 0$. Por tanto $P \cap -P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Sea A, B como arriba, tales que $ABA \in P_1 \cap -P_1$. Efectuando la multiplicaciones de estas matrices tenemos que

$\begin{pmatrix} x^2 z & 0 \\ 0 & x^2 z \end{pmatrix} \in P_1 \cap -P_1$, de aquí que $x^2 z = 0$, luego $x = 0 \quad \text{ó} \quad z = 0$,

por tanto $A \in P_1 \cap -P_1 \quad \text{ó} \quad B \in P_1 \cap -P_1$.

(6) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & 0 \\ 0 & 2a_1a_2 \end{pmatrix} \in P_1$.

Este ejemplo nos permite obtener la siguiente conclusión; una involución en un anillo comutativo no necesariamente es la identidad. Aunque si la involución es la identidad, tenemos que el anillo es conmutativo.

Ejemplo 2.1. *Como el anillo del ejemplo anterior es conmutativo podemos considerar como involución la identidad. Se puede demostrar que* $P = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \geq 0 \right\}$, *es un $*$-orden y su soporte es* $P \cap -P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

Observación 2.1. *Un hecho que vamos a usar varias veces es que toda norma está en P, pero no toda traza está en P. En efecto, sea $r \in R$. Como $1 \in P$ y P es $*$-conjugado tenemos que $rr^* = r1r^* \in P$. Ahora bien, $(-1) + (-1)^* = -2 \notin P$ y esto prueba que no toda traza está en P. Además, si $x \in S(R)$, entonces $x^2 \in P$. En efecto, como P es $*$-conjugado y $1 \in P$ obtenemos que $x^2 = x1x = x1x^* \in P$.*

En la siguiente proposición consideramos algunas propiedades del soporte, que serán usadas en otras pruebas.

Proposición 2.2. *Supongamos que P es un orden de Baer del anillo R. Entonces:*

(1) $1 \notin P \cap -P$

(2) $x \in P \cap -P \Rightarrow -x \in P \cap -P$

(3) $x \in S(R)$ y $x^2 \in P \cap -P \Rightarrow x \in P \cap -P$

(4) Si n es un entero positivo, $x \in S(R)$ y $x^n \in P \cap -P$, entonces $x \in P \cap -P$

(5) $P \cap -P$ es $*$-conjugado.

(6) $x + y \in P \cap -P$ y $x, y \in P \Rightarrow x, y \in P \cap -P$.

(7) $P \cap -P$ es un subgrupo de S.

(8) $x \in P \cap -P \Rightarrow x^2 \in P \cap -P$

Demostración:

(1) Si $1 \in P \cap -P$, entonces $1 \in P$ y $-1 \in P$, esto es una contradicción.

(2) Si $x \in P \cap -P$, entonces $-(-x) = x \in P$ y $-x \in P$. Por tanto $-x \in P \cap -P$.

(3) Si $x^2 \in P \cap -P$, entonces $x1x = x^2 \in P \cap -P$, esto implica que $x \in P \cap -P$ ó $1 \in P \cap -P$. Pero por la parte (1) tenemos que $-1 \notin P \cap -P$. Por tanto tenemos que $x \in P \cap -P$.

(4) Supongamos que $x^n \in P \cap -P$, donde n es un entero positivo. Sea k el menor entero positivo tal que $x^k \in P \cap -P$. Afirmamos que $k = 1$, en efecto, supongamos que $k > 1$. Si k es par entonces $x^{\frac{k}{2}} 1 x^{\frac{k}{2}} = x^k \in P \cap -P$, esto implica que $x^{\frac{k}{2}} \in P \cap -P$ ó $1 \in P \cap -P$. Por la parte (1) tenemos que $1 \notin P \cap -P$. Por tanto $x^{\frac{k}{2}} \in P \cap -P$, pero esto contradice la minimalidad de k. Si k es impar

entonces $x^{\frac{k-1}{2}}xx^{\frac{k-1}{2}} = x^k \in P \cap -P$. De aquí que $x^{\frac{k-1}{2}} \in P \cap -P$ ó $x \in P \cap -P$, pero en los dos casos se contradice la minimalidad de k. Por tanto $k = 1$, y como consecuencias hemos probado que $x \in P \cap -P$.

(5) Sea $r \in R$ y $x \in P \cap -P$, entonces $x, -x \in P$. Por ser P $*$-conjugado tenemos que $rxr^*, r(-x)r^* \in P$, esto implica que $rxr^*, -rxr^* \in P$. Por tanto $rxr^* \in P \cap -P$, esto muestra que $P \cap -P$ es $*$-conjugado.

(6) Sean $x + y \in P \cap -P$ y $x, y \in P$. Entonces $x + y, -(x + y) \in P$. Esto implica que $-x - y \in P$. Como P es cerrado bajo la adición, y por hipótesis se tiene que $x, y \in P$, entonces tenemos que $-y = -x - y + x \in P$ y $-x = -x - y + y \in P$. De esta forma tenemos que $-x, -y \in P$. Por tanto $x, y \in P \cap -P$.

(7) Sean $x, y \in P \cap -P$, entonces $x, y \in P$ y $-x, -y \in P$. Por ser P cerrado bajo la adición tenemos que $x + y \in P$ y $-(x + y) = (-x) + (-y) \in P$. Por tanto $x + y \in P \cap -P$. Por (2) tenemos que $-y \in P \cap -P$, luego $x - y \in P \cap -P$.

(8) Sea $x \in P \cap -P$. Entonces, por (5) obtenemos que $x^3 = xxx = xxx^* \in P \cap -P$, de esta manera hemos probado que $x, x^3 \in P \cap -P$ (I). Luego,

$$\begin{aligned}
x \in P \cap P &\Rightarrow (x+1)x(x+1)^* \in P \cap -P && \text{(por (5))} \\
&\Rightarrow x^3 + 2x^2 + x \in P \cap -P \\
&\Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + (-x) + (-x^3) \in P \cap -P && \text{(por (I) y (7))} \\
&\Rightarrow 2x^2 \in P \cap -P \\
&\Rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x^2)\left(\frac{1}{2}\right)^* \in P \cap -P && \text{(por (5) y (7))} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Marshall [10] muestra en la siguiente proposición que el soporte genera un ideal primo $\mathfrak{p}$ $*$-cerrado[3] en R. Así, $R/\mathfrak{p}$ es un dominio con una involución inducida, que otra vez denotaremos por $*$.

[3] Un conjunto A de un anillo R se dice que es $*$-cerrado si y sólo si $A^* = A$.

Proposición 2.3. *[[10],Proposición 1.5] Supongamos que P es un orden de Baer del anillo R. Entonces:*

(1) $\mathfrak{p} = \{a \in R \mid aa^* \in P \cap -P\}$ es un $*$-ideal primo de R y $\mathfrak{p} \cap S(R) = P \cap -P$.

(2) Si P es un $*$-orden entonces $P \cap -P$ es un ideal de Jordan primo de $S(R)$.

Demostración:

(1) Supongamos que $a \in \mathfrak{p}$. Entonces por definición de $\mathfrak{p}$ se tiene que $aa^* \in P \cap -P$. Por la Proposisión 2.2 (5) tenemos que $(a^*a)^2 = a^*(aa^*)a \in P \cap -P$ y usando nuevamente la Proposisión 2.2 (3) se obtiene que $a^*a \in P \cap -P$. Por tanto $a^* \in \mathfrak{p}$. Si $a \in \mathfrak{p}$ y $b \in R$, entonces $(ba)(ba)^* = b(aa^*)b^* \in P \cap -P$ (por la Proposición 2.2 (5)), así $ba \in \mathfrak{p}$. Similarmente como $a^* \in \mathfrak{p}$ y $b^* \in R$, se tiene que $b^*a^* \in \mathfrak{p}$. Como consecuencia, $ab = (b^*a^*)^* \in \mathfrak{p}$. Para $a, b \in \mathfrak{p}$ se tiene la fórmula $(a+b)(a+b)^* + (a-b)(a-b)^* = 2(aa^* + bb^*) \in P \cap -P$ (Proposicón 2.2(7)). Por Observación 2.1 tenemos que, $(a+b)(a+b)^*, (a-b)(a-b)^* \in P$ y por tanto $a+b, a-b \in \mathfrak{p}$ (Proposición 2.2 (6)). De esta manera hemos probado que $\mathfrak{p}$ es un $*$-ideal de R. Sólo falta probar que $\mathfrak{p}$ es primo. Sean $a, b \in R$ y $ab \in \mathfrak{p}$. Entonces $a(bb^*)a^* = ab(ab)^* \in P \cap -P$, luego $(a^*a)(bb^*)(a^*a) \in P \cap -P$ (Prop. 2.2 (5)). Por Definición 2.2(5), tenemos que $a^*a \in P \cap -P$ ó $bb^* \in P \cap -P$, esto implica que $a^* \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$. Como ya probamos que $\mathfrak{p}$ es $*$-cerrado, entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Por tanto $\mathfrak{p}$ es un $*$-ideal primo de R. Ahora probemos que $\mathfrak{p} \cap S(R) = P \cap -P$, en efecto:

$$
\begin{aligned}
a \in \mathfrak{p} \cap S(R) &\Rightarrow a \in \mathfrak{p} \wedge a \in S(R) \\
&\Rightarrow a^2 = aa^* \in P \cap -P \wedge a \in S(R) \\
&\Rightarrow a \in P \cap -P && \text{(por Proposición 2.2 (3))}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
a \in P \cap -P &\Rightarrow a^2 \in P \cap -P && \text{(por Proposición 2.2 (8))}\\
&\Rightarrow a^2 = aa^* \in P \cap -P \wedge a \in S(R) && (a \in P \cap -P \subseteq S(R))\\
&\Rightarrow a \in \mathfrak{p} \wedge a \in S(R)\\
&\Rightarrow a \in \mathfrak{p} \cap S(R)
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathfrak{p} \cap S = P \cap -P$.

(2) Supongamos que P es un $*$-orden de R. Probemos que $P \cap -P$ es un ideal primo de Jordan de S(R). Por la Proposición 2.2 (7) tenemos que el soporte es un subgrupo de $S(R)$ bajo la adición. Sean $a \in P \cap -P$ y $b \in S(R)$. Entonces, como $S(R) = P \cup -P$, tenemos que $b \in P$ ó $-b \in P$. Supongamos que $b \in P$, así,

$$\begin{aligned}
a \in P \cap -P \wedge b \in P &\Rightarrow a \in P \wedge -a \in P \wedge b \in P\\
&\Rightarrow ab + ba \in P \wedge -(ab + ba) = (-a)b + b(-a) \in P\\
&\Rightarrow ab + ba \in P \cap -P
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $-b \in P$, entonces:

$$\begin{aligned}
a \in P \cap -P \wedge -b \in P &\Rightarrow a \in P \wedge -a \in P \wedge -b \in P\\
&\Rightarrow a(-b) + (-b)a \in P \wedge (-a)(-b) + (-b)(-a) \in P\\
&\Rightarrow -(ab + ba) \in P \wedge ab + ba \in P\\
&\Rightarrow ab + ba \in P \cap -P
\end{aligned}$$

Por tanto $P \cap -P$ es un ideal de Jordan. Por la Proposición 2.2 (1) tenemos que $1 \notin P \cap -P$. Sean $a, b \in S(R)$ tales que $ab + ba \in P \cap -P$. Podemos suponer que $a, b \in P$ y $a - b \in P$. Entonces, por ser P un $*$-orden obtenemos $(a - b)b + b(a - b) = (ab + ba) - 2b^2 \in P$. Por hipótesis se tiene que $ab + ba$ es un elemento de $P \cap -P$, de aquí que $-(ab + ba) \in P$. Por tanto $-2b^2 = (ab + ba) - 2b^2 - (ab + ba) \in P$. Por Observación 2.1 también tenemos que $b^2 \in P$, luego $2b^2 = b^2 + b^2 \in P$. De esta forma obtenemos $b2b = 2b^2 \in P \cap -P$. Así, $b \in P \cap -P$ ó $2 \in P \cap -P$. Puesto que $2 \notin P \cap -P$ ($2 \in P \cap -P$, entonces

$-2 \in P$, y de aquí que $-1 = -2 + 1 \in P$, esto es una contradicción), entonces $b \in P \cap -P$. Por tanto el soporte es un ideal de Jordan primo $\blacksquare$

Proposición 2.4. *[[10],Nota 1.6] Para todo orden de Baer (respectivamente $*$-orden) de R con soporte $P \cap -P$, la imagen de P en $R/\mathfrak{p}$ es un orden de Baer (respectivamente $*$-orden) en $R/\mathfrak{p}$ con soporte $\{0\}$.*

Demostración:

Supongamos que P es un orden de Baer. Sea $Q = \{a + \mathfrak{p} \,|\, a \in P\}$. Veamos que Q es un orden de Baer. Como $P \subseteq S$, entonces $Q \subseteq S(R/\mathfrak{p})$ $(Q \subseteq \{a + \mathfrak{p} \mid a \in S\} = S(R/\mathfrak{p})$ por Observación 2.2)

(1) Como $1 \in P$ entonces $1 + \mathfrak{p} \in Q$. Supongamos que $-1 + \mathfrak{p} \in Q$, entonces existe un $a \in P$ tal que $-1 + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p}$, luego $-1 - a \in \mathfrak{p}$, así por definición de $\mathfrak{p}$ tenemos que $(1 + a)^2 = (-1 - a)(-1 - a)^* \in P \cap -P$, por Proposición 2.2 (3) se tiene que $1 + a \in P \cap -P$. Por tanto $-1 - a = -(1 + a) \in P$, y por ser P cerrado bajo la adición tenemos que $-1 = -1 - a + a \in P$, esto es una contradicción. Por tanto $-1 + \mathfrak{p} \notin Q$.

(2) Probemos que $Q + Q \subseteq Q$.
Sean $x + \mathfrak{p}, y + \mathfrak{p} \in Q$ entonces existen $a, b \in P$ tales que $x + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p}$ y $y + \mathfrak{p} = b + \mathfrak{p}$. Luego, $(x + \mathfrak{p}) + (y + \mathfrak{p}) = (a + \mathfrak{p}) + (b + \mathfrak{p}) = (a + b) + \mathfrak{p} \in Q$, pues $a + b \in P$.

(3) Probemos que Q es $*$-conjugado.
Sean $x + \mathfrak{p} \in R/\mathfrak{p}$ y $y + \mathfrak{p} \in Q$. Entonces existe un $a \in P$ tal que $y + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p}$. luego, $(x + \mathfrak{p})(y + \mathfrak{p})(x + \mathfrak{p})^* = (x + \mathfrak{p})(a + \mathfrak{p})(x + \mathfrak{p})^* = xax^* + \mathfrak{p} \in Q$; pues, por ser P $*$-conjugado tenemos que $xax^* \in P$.

(4) Veamos que $Q \cup -Q = S(R/\mathfrak{p})$.
Sea $x \in Q \cup -Q$, entonces $x \in Q$ ó $-x \in Q$. Si $x \in Q$, entonces existe un

$a \in P$ tal que $x = a + \mathfrak{p}$. Luego, $x = a + \mathfrak{p} \in \{b + \mathfrak{p} \mid b \in S\} = S(R/\mathfrak{p})$. Si $-x \in Q$ entonces procediendo en forma análoga tenemos que $-x \in S(R/\mathfrak{p})$, así $x \in S(R/\mathfrak{p})$. Por otra parte si $b + \mathfrak{p} \in S(R/\mathfrak{p})$, entonces existe un $a \in S(R)$ tal que $b + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p}$. Por ser $S(R) = P \cup -P$, entonces $b + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p} \in Q \cup -Q$. Por tanto $Q \cup -Q = S(R/\mathfrak{p})$.

(5) Probemos que $Q \cap -Q = \{0\}$.
Como $-\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \in Q$, entonces $\{\mathfrak{p}\} \subseteq Q \cap -Q$. Para probar la otra inclusión, sea $x \in Q \cap -Q$. Entonces, $x \in Q$ y $-x \in Q$, así existen $a, b \in P$ tales que $x = a + \mathfrak{p}$ y $x = -b + \mathfrak{p}$, por tanto $a + b \in \mathfrak{p}$, luego $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)^* \in P \cap -P$ y por Proposición 2.2 (3) tenemos que $a + b \in P \cap -P$, usando nuevamente la Proposición 2.2 (6) tenemos que $a, b \in P \cap -P$. Por tanto $aa^* = a^2 \in P \cap -P$ y $bb^* = b^2 \in P \cap -P$ (ver Proposición 2.2 (8)), en consecuencia $a, b \in \mathfrak{p}$. De esta manera tenemos que $x = a + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Así, $Q \cap -Q \subseteq \{0\}$. Luego, si P es un orden de Baer, entonces Q también es un orden de Baer.

(6) Supongamos que P es un $*$-orden de Jordan. Sean $x + \mathfrak{p}, y + \mathfrak{p} \in Q$ entonces existen $a, b \in P$ tales que $x + \mathfrak{p} = a + \mathfrak{p}$ y $y + \mathfrak{p} = b + \mathfrak{p}$. Luego,

$$\begin{aligned}(x + \mathfrak{p})(y + \mathfrak{p}) + (y + \mathfrak{p})(x + \mathfrak{p}) &= (a + \mathfrak{p})(b + \mathfrak{p}) + (b + \mathfrak{p})(a + \mathfrak{p}) \\ &= (ab + ba) + \mathfrak{p} \in Q \qquad \text{(pues, } ab + ba \in P)\end{aligned}$$

Por tanto si P es un $*$-orden entonces Q es un $*$-orden. ■

Observación 2.2. *La proyección canónica $\pi : R \to R/\mathfrak{p}$, dada por $\pi(x) = x + \mathfrak{p}$ es un homomorfismo de anillo, además es un $*$-homomorfismo, en efecto, tenemos lo siguiente: $\pi(x^*) = x^* + \mathfrak{p} = (x + \mathfrak{p})^* = (\pi(x))^*$. Para recuperar el orden de Baer (respectivamente $*$-orden) inducido en $R/\mathfrak{p}$ utilizaremos la siguiente proposición.*

Proposición 2.5. [[*10*], *Proposición 1.7*] *Supongamos que $f : A \to B$ es un $*$-homomorfismo de anillos con involución tal que $f(1) = 1$. Sean S_A y S_B los conjuntos de* *elementos simétricos de A y B respectivamente. Entonces, para cada ordenación de Baer (resp. $*$-orden) Q de B, $f^{-1}(Q) \cap S_A$ es un orden de Baer (resp. $*$-orden) de A.*

Demostración: Supongamos que Q es un orden de Baer de B. Veamos que el conjunto $f^{-1}(Q) \cap S_A$ es un orden de Baer de A.

(1) Como $f(1) = 1$ y $f(-1) = -1$, entoces $1 \in f^{-1}(Q) \cap S_A$ y $-1 \notin f^{-1}(Q) \cap S_A$.

(2) Sean $x, y \in f^{-1}(Q) \cap S_A$. Entonces $f(x), f(y) \in Q$ y $x, y \in S_A$. También tenemos que $f(x+y) = f(x) + f(y) \in Q$ y $x + y \in S_A$. Por tanto $x + y \in f^{-1}(Q) \cap S_A$.

(3) Sean $x \in f^{-1}(Q) \cap S_A$ y $r \in A$. Entonces, $f(x) \in Q$ y $x \in S_A$. Por ser Q $*$-conjugado y f un $*$-homomorfismo se tiene que $f(rxr^*) = f(r)f(x)f(r)^* \in Q$. Por tanto, $rxr^* \in f^{-1}(Q) \cap S_A$.

(4) Antes de comenzar la prueba de (4), probemos lo siguiente:

   (a) $S_A \subseteq f^{-1}(S_B)$. En efecto, si $x \in S_A$, entonces $f(x)^* = f(x^*) = f(x)$. Por tanto, $f(x) \in S_B$, de aquí obtenemos que $x \in f^{-1}(S_B)$. De esta manera hemos probado que $S_A \subseteq f^{-1}(S_B)$. Luego, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(Q) \cap S_A) \cup -(f^{-1}(Q) \cap S_A) &= (f^{-1}(Q) \cap S_A) \cup (-f^{-1}(Q) \cap -S_A) \\
&= (f^{-1}(Q) \cap S_A) \cup (-f^{-1}(Q) \cap S_A) \\
&= (f^{-1}(Q) \cup -f^{-1}(Q)) \cap S_A \\
&= (f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(-Q)) \cap S_A \\
&= f^{-1}(Q \cup -Q) \cap S_A \\
&= f^{-1}(S_B) \cap S_A \\
&= S_A \qquad\qquad \text{(por (a))}
\end{aligned}
$$

(5) Sean $x, y \in S_A$ tales que $xyx \in (f^{-1}(Q) \cap S_A) \cap -(f^{-1}(Q) \cap S_B)$. Entonces, $f(x)f(y)f(x) \in Q \cap -Q$ y $f(x), f(y) \in S_A$, por tanto $f(x) \in Q \cap -Q$ ó $f(y) \in Q \cap -Q$. Luego,
$x \in (f^{-1}(Q) \cap S_A) \cap -(f^{-1}(Q) \cap S_A)$ ó $y \in (f^{-1}(Q) \cap S_A) \cap -(f^{-1}(Q) \cap S_A)$.

De todo lo anterior podemos concluir que $f^{-1}(Q) \cap S_A$ es un orden de Baer.

(6) Su pongamos que Q es un $*$-orden. Sean $x, y \in f^{-1}(Q) \cap S_A$, entonces $f(x), f(y) \in Q$ y $x, y \in S_A$. Por ser f un homomorfismo tenemos que $f(xy + yx) = f(x)f(y) + f(y)f(x) \in Q$ y así $xy + yx \in f^{-1}(Q) \cap S_A$. De esta manera hemos probado que $f^{-1}(Q) \cap S_A$ es un $*$-orden. ■

Capítulo 3

$*$-ordenación extendida y $*$-valuación

En este Capítulo estamos interesados en extender (en el sentido de la inclusión) a un $*$-orden en un conjunto cerrado adictivamente y multiplicativamente, conteniendo algunos de los elementos simétricos. También estudiaremos la teoría de valuaciones en forma genéricas que nos permitirá garantizar que dicha extensión existe.

3.1. $*$-ordenación extendida

Definición 3.1. [[*10*], *Definición 2.1*] *Un $*$-orden P del anillo R se dice que se* ***extiende débilmente*** *si existe un subconjunto Q de R tal que*

(1) $Q + Q \subseteq Q$

(2) $QQ \subseteq Q$

(3) $Q^* = Q$

(4) $rQr^* \subseteq Q$ para todo $r \in R$, y

(5) $Q \cap S = P$
Una tal Q se dice que es una **extensión débil** de P. Si se satisface también la condición adicional:

(6) $rxr^* \in Q \Rightarrow x \in Q$ para cada $r \in R$ que no está en el ideal generado por $Q \cap -Q$ también es válido, decimos que Q es un **$*$-orden extendido**. Un tal Q diremos en este caso que es una **extensión** de P.

Probaremos el siguiente resultado no trivial, debido a Marshall [10].

Teorema 3.1. [*[10], Teorema 2.2*] *Todo $*$-orden se extiende débilmente.*

La prueba de este Teorema será dada en la próxima sección. Esta prueba requiere la consideración de la teoría de valuaciones en forma genérica.

Proposición 3.1. *Sea Q una $*$-extensión débil de P en el anillo R. Entonces:*

(1) $aa^* \in Q$ para todo $a \in R$.

(2) $x \in Q \Rightarrow x + x^* \in P$.

Demostración:

(1) Sea $x \in R$. Como toda norma pertenece a P se obtiene que $xx^* \in P$, pero P es un subconjunto de Q, así que $xx^* \in Q$.

(2) Sea $x \in Q$. Como Q es $*$-cerrado, entonces $x^* \in Q$. De esta forma tenemos que $x + x^* \in Q$ y por ser toda traza un elemento simétrico tenemos que $x + x^* \in Q \cap S(R) = P$ ■

Denotaremos por $\tilde{S}$ el conjunto más pequeño de R que contiene a $S(R)$ y es cerrado bajo la multiplicación y bajo la operación unaria $a \mapsto rar^*$, $r \in R$. Nótese que $\tilde{S}^* = \tilde{S}$.

Proposición 3.2. [[*10*], *Proposición 2.3*] *Supongamos que P es un $*$-orden del anillo R y que $Q \subseteq R$ extiende débilmente a P. Entonces:*

(1) $Q \cup -Q \supseteq \tilde{S}$.

(2) $Q \cap \tilde{S} = \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\}$.

(3) $Q \cap -Q \subseteq \mathfrak{p}$.

(4) $Q \cap -Q \cap \tilde{S} = \mathfrak{p} \cap \tilde{S}$.

Demostración:

(1) Como $P \subseteq Q$, entonces $S = P \cup -P \subseteq Q \cup -Q$. Además Q es cerrado bajo la multiplicación y la operación unaria $a \mapsto rar^*$ para todo $r \in R$. Luego $Q \cup -Q$ también es cerrado bajo la multiplicación y la operación $a \mapsto rar^*$ para todo $r \in R$. Luego por definición de $\tilde{S}$, se tiene que $\tilde{S} \subseteq Q \cup -Q$.

(2) Supongamos que $x \in Q \cap \tilde{S}$, entonces $x \in Q$ y $x \in \tilde{S}$. Por Proposición 3.1 (2) tenemos que $x + x^* \in P$. Por tanto $x \in \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\}$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\}$. Si $x \notin Q$, entonces por (1) tenemos que $-x \in Q$, así $-x^* = (-x)^* \in Q$. Luego, $x = (-x^*) + (x + x^*) \in Q$ (pues $x + x^* \in P \subseteq Q$), esto es una contradicción. Por tanto, $x \in Q$.

(3) Ahora probemos la condición (3).

$$
\begin{aligned}
x \in Q \cap -Q &\Rightarrow x \in Q \ \wedge\ -x \in Q \\
&\Rightarrow x, x^* \in Q \ \wedge\ -x \in Q && \text{(Definición 3.1 (3))} \\
&\Rightarrow xx^* \in Q \ \wedge\ -xx^* \in Q && \text{(Definición 3.1 (2))} \\
&\Rightarrow (xx^* \in Q \ \wedge\ xx^* \in S(R)) \ \wedge\ (-xx^* \in Q \ \wedge\ -xx^* \in S(R)) \\
&\Rightarrow xx^* \in Q \cap S(R) \ \wedge\ -xx^* \in Q \cap S(R) \\
&\Rightarrow xx^* \in P \ \wedge\ -xx^* \in P && (\ P = Q \cap S(R)) \\
&\Rightarrow xx^* \in P \cap -P \\
&\Rightarrow x \in \mathfrak{p}
\end{aligned}
$$

(4) Por (3) tenemos que $Q \cap -Q \subseteq \mathfrak{p}$, así $Q \cap -Q \cap \tilde{S} \subseteq \mathfrak{p} \cap \tilde{S}$. Probemos la otra inclusión, supongamos que $a \in \mathfrak{p} \cap \tilde{S}$. Entonces, $a, a^* \in \mathfrak{p}$, luego $a + a^* \in \mathfrak{p} \cap S = P \cap -P$ (ver Proposición 2.3 (1)) así, $a + a^* \in P$ y además $(-a) + (-a)^* = -(a + a^*) \in P$. Como $-1 \in S \subseteq \tilde{S}$ y $\tilde{S}$ es cerrado bajo la multiplicación, $-a = (-1)a \in \tilde{S}$, y por (2) tenemos que $a \in Q \cap -Q \cap \tilde{S}$. ■

Para un $*$-orden P definamos $\tilde{P} = \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\}$, y definamos P^e como el conjunto de todas las suma finitas de $\tilde{P}$. Nótese que $\tilde{P} \subseteq P^e$. Si $x \in P^e$ entonces $x = \sum x_i$, donde $x_i \in \tilde{S}$ y $x_i + x_i^* \in P$. Así, $x + x^* = \sum (x_i + x_i^*) \in P$. En particular tenemos que si $x \in S(R)$, entonces $2x = x + x^* \in P$ así $x = (\frac{1}{2})(2x + 2x)(\frac{1}{2})^* \in P$. Esto prueba que $P^e \cap S(R) \subseteq P$, si $x \in P$, entonces $x \in \tilde{S}$ pues, $S(R) \subseteq \tilde{S}$, luego $x + x^* = x + x \in P$ por tanto $x \in \tilde{P}$ y como consecuencia $x \in P^e \cap S(R)$. Esto prueba la inclusión $P \subseteq P^e \cap S(R)$. De esta forma hemos probado que $P^e \cap S(R) = P$. Ahora probemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *[[10], Proposición 2.4] Sea P un $*$-orden. Entonces son equivalentes las siguientes definiciones:*

(i) P se extiende débilmente

(ii) $\tilde{P}$ es cerrado bajo la multiplicación

(iii) para todo $a, b \in \tilde{S}$, $a + a^*, b + b^* \in P \Rightarrow ab + b^*a^* \in P$.

Si una de estas tres condición se cumple, entonces P^e es la única extensión minimal de P y recibe el nombre de **$*$-orden extendido generado por** P

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que P se extiende débilmente, entonces existe una extensión débil Q de P. Luego, por la Prop. 3.2 (2), $Q \cap \tilde{S} = \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\} = \tilde{P}$, y como Q y $\tilde{S}$ son cerrado bajo la multiplicación obtenemos que $\tilde{P}$ es cerrado bajo la multiplicación.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos que $\tilde{P}$ es cerrado bajo la multiplicación. Sean $a, b \in \tilde{S}$ y $a + a^*, b + b^* \in P$ por definición de $\tilde{P}$, $a, b \in \tilde{P}$ y como $\tilde{P}$ es cerrado bajo la multiplicación obtenemos que $ab \in \tilde{P}$, luego nuevamente por la definición de $\tilde{P}$, $ab + (ab)^* = ab + b^*a^* \in P$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que para todo $a, b \in \tilde{S}$, $a+a^*, b+b^* \in P \Rightarrow ab+b^*a^* \in P$. Probemos que P^e extiende a P débilmente. Sean $x, y \in P^e$, entonces $x = \Sigma x_i$, $y = \Sigma y_j$ donde $x_i, y_j \in \tilde{P}$ entonces:

(1) Como $x + y = \Sigma x_i + \Sigma y_j$, es suma finita de elementos de $\tilde{P}$, entonces $x + y \in P^e$.

(2) Como $x_i + x_i^*, y_j + y_j^* \in P$, luego por hipótesis, $x_i y_j + (x_i y_j)^* = x_i y_j + y_j^* x_i^* \in P$. Por tanto $x_i y_j \in \tilde{P}$, luego $xy = \Sigma x_i \Sigma y_j = \Sigma\Sigma x_i y_j$, así xy es suma finita de elementos de $\tilde{P}$ y por tanto $xy \in P^e$.

(3) $x^* = \Sigma x_i^*$, como $x_i^* + x_i = x_i + x_i^* \in P$, entonces $x_i^* \in \tilde{P}$, por tanto $x^* \in P^e$.

(4) Sea $r \in R$, entonces $rxr^* = \Sigma r x_i r^*$, como P es $*$-conjugado y $x_i + x_i^* \in P$ entonces $rx_ir^* + rx_i^*r^* = r(x_i + x_i^*)r^* \in P$ así $rx_ir^* \in \tilde{P}$ y por tanto $rxr^* \in P^e$.

(5) Ya se probó que $P^e \cap S = P$.

Veamos que P^e es la única extensión minimal de P. En efecto, supongamos que Q es una extensión débil de P. Entonces por la Proposición 3.2 (2) tenemos que $\tilde{P} = \{a \in \tilde{S} \mid a + a^* \in P\} = Q \cap \tilde{S} \subseteq Q$. Como P^e es suma finita de elemento de $\tilde{P}$ y Q es cerrado respecto de la adición, entonces $P^e \subseteq Q$ $(P \subset Q)$. ■

Proposición 3.4. *Sea Q una $*$-extensión débil en el anillo R con $P = Q \cap S(R)$. Sean $\mathfrak{q}$ el ideal (completamente primo) generado por $Q \cap -Q$ y $\mathfrak{p}$ el ideal (completamente primo) generado por $P \cap -P$. Entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.*

Demostración: sean $\mathfrak{q} = \{a \in R \mid aa^* \in Q \cap -Q\}$ y $\mathfrak{p} = \{a \in R \mid aa^* \in P \cap -P\}$. Veamos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
x \in \mathfrak{q} &\Leftrightarrow xx^* \in Q \cap -Q \\
&\Leftrightarrow xx^* \in Q \ \wedge\ -xx^* \in Q \\
&\Leftrightarrow (xx^* \in Q \ \wedge\ xx^* \in S(R)) \ \wedge\ (-xx^* \in Q \ \wedge\ -xx^* \in S(R)) \\
&\Leftrightarrow xx^* \in Q \cap S(R) \ \wedge\ -xx^* \in Q \cap S(R) \\
&\Leftrightarrow xx^* \in P \ \wedge\ -xx^* \in P \qquad\qquad \text{(ya que } P = Q \cap S(R)\text{)} \\
&\Leftrightarrow xx^* \in P \cap -P \\
&\Leftrightarrow x \in \mathfrak{p}
\end{aligned}
$$

Por tanto hemos demostrado que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ■

Proposición 3.5. [[4], *Proposición 1.3*] *Sea Q una $*$-extensión en el anillo R con $P = Q \cap S(R)$. Sea $\mathfrak{p}$ el ideal (completamente primo) generado por $Q \cap -Q$. Sea a y bc elementos de Q con $abc \notin \mathfrak{p}$. Entonces cb y bac también están en Q. En particular, $bac + c^*a^*b^* \in P$. Para todo $s \in P \setminus -P$ y $r \in R$, si $rs \in Q$, entonces $r \in Q$.*

Demostración: Como $abc \notin \mathfrak{p}$, entonces $a, b, c \notin \mathfrak{p}$ (ya que de lo contrario como $\mathfrak{p}$ es un ideal tendríamos que $abc \in \mathfrak{p}$ esto contradice nuestra hipótesis). También $ac \notin \mathfrak{p}$, pues si $ac \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$ (porque $\mathfrak{p}$ es un ideal primo), y por lo que probamos anteriormente esto es una contradicción. Puesto que bc y bb^* son elementos de Q, entonces $b(cb)b^* = (bc)(bb^*) \in Q$, luego, por la Definición 3.1 (6) tenemos que $cb \in Q$. Ahora $a, cb \in Q$, así $acb \in Q$ y de aquí $(ac)(bac)(ac)^* = (acb)[(ac)(ac)^*] \in Q$. Otra vez aplicando (6) tenemos que $bac \in Q$. Entonces $bac+c^*a^*b^* = (bac)+(bac)^* \in P$ (por Proposición 3.1 (2)). Para la parte final, $s \in P\setminus -P$ implica que $s \notin \mathfrak{p}$, ya que de lo contrario $s^2 = ss = ss^* \in P \cap -P$ y por la Proposición 2.2 (3) tenemos que $s \in P \cap -P$, de aquí tenemos que $s \in -P$ esto es una contradicción. Por tanto $s \notin \mathfrak{p}$. Por hipótesis tenemos que $rs \in Q$ y $s \in P$ esto implica que $srs^* = srs \in Q$ (ya que $P \subseteq Q$) y por la condición (6) nuevamente tenemos que $r \in Q$. ■

Proposición 3.6. [[4], *Proposición 1.4*] *Sea P un $*$-orden en R y sea $\mathfrak{p}$ igual al ideal generado por $P \cap -P$. Sea $r \in R$, $r \notin \mathfrak{p}$ y $x \in S(R)$. Si $rxr^* \in P$, entonces $x \in P$.*

Demostración: Asumamos que $rxr^* \in P$ pero $x \notin P$. Como $P \cup -P = S(R)$ y $x \in S(R)$ entonces $-x \in P$. Luego, $-rxr^* = r(-x)r^* \in P$. Por tanto, $rxr^* \in P \cap -P$. Por Prop. 2.2 (8), $(rxr^*)(rxr^*)^* = (rxr^*)(rxr^*) = (rxr^*)^2 \in P \cap -P$, luego $rxr^* \in \mathfrak{p}$. Por hipótesis, $r \notin \mathfrak{p}$ y luego $r^* \notin \mathfrak{p}$ ($r^* \in \mathfrak{p} \Rightarrow r = (r^*)^* \in \mathfrak{p}$). Puesto que $x \notin P$, entonces $x \notin \mathfrak{p}$ ($x \in \mathfrak{p}$, entonces $x^2 = xx^* \in P \cap -P$, y por Prop. 2.2 (3), se obtiene que $x \in P \cap -P$, y de aquí que $x \in P$, esto es una contradicción). Como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo y $rxr^* \in \mathfrak{p}$ tenemos las siguientes tres posibilidades: $r \in \mathfrak{p}$ ó $x \in \mathfrak{p}$ ó $r^* \in \mathfrak{p}$, todos estos casos son contradictorios y las contradicciones provienen de haber supuesto que $x \notin P$. Por tanto $x \in P$ ■

Observación 3.1. [4] *Una reflexión, es que esta prueba se podría haber simplificado considerando al dominio $R/\mathfrak{p}$ con el $*$-orden inducido por P. Para el resto de este trabajo, supondremos que R es un dominio y que el soporte de un $*$-orden P bajo consideración es $\{0\}$. Pero todos estos resultados podrán ser planteados y demostrados* *para $*$-anillos en general. Además nótese que cuando R es un dominio y $P\cap -P=\{0\}$, entonces $\mathfrak{p}=\{0\}$. En efecto: $a\in\mathfrak{p}$ si y sólo si $aa^*\in P\cap -P=\{0\}$, de aquí que $aa^*=0$, pero como R es un dominio se tiene que $a=0$ ó $a^*=0$, luego $a=0$. Así $\mathfrak{p}\subset\{0\}$. Claramente tenemos la inclusión $\{0\}\subset\mathfrak{p}$. Por tanto $\mathfrak{p}=\{0\}$. Este último resultado será usado en la prueba de la Observación 3.2.*

3.2. $*$-valuación

Supongamos que P es un $*$-orden en R. Factorizando por el ideal primo $\mathfrak{p}$, podemos suponer que R es un dominio y que P tiene soporte $\{0\}$. Estudiaremos la $*$-valuación natural asociada P.

Sea $\geqslant$ la relación de orden en S correspondiente a P, es decir, $a\leqslant b$ si y sólo si $a-b\in P$. Para $a\in S(R)$ definimos

$$|\,a\,|=\begin{cases} a & \text{si} \quad a\geq 0\\ -a & \text{si} \quad a\leq 0\end{cases}$$

$(S(R),+,\leqslant)$ es un grupo abeliano ordenado totalmente. Para $a,b\in S(R)^\times$ escribimos $a\sim b$ para indicar que a y b pertenecen a la misma clase arquimediana, es decir, existe un entero $n\geq 1$ tal que $n\,|\,a\,|\geq|\,b\,|$ y $n\,|\,b\,|\geq|\,a\,|$.

Proposición 3.7. [[*10*], *Proposición 3.1*] *Sean $a,b\in S(R)$, entonces:*

(1) Si a,b son positivos y $a\leq b$, entonces $2a^2\leq ab+ba\leq 2b^2$.

(2) Si $a,b\in P$ y $a\leq b$, entonces $a^2\leq b^2$.

(3) $a\sim b\Leftrightarrow a^2\sim b^2$

Demostración:

(1) $a, b \in P \wedge a \leq b \Rightarrow a, b, b-a \in P$

$$\Rightarrow (b-a)a + a(b-a), (b-a)b + b(b-a) \in P \quad \text{(Def. 2.2 (6))}$$
$$\Rightarrow ba - a^2 + ab - a^2 \wedge b^2 - ab + b^2 - ba \in P$$
$$\Rightarrow ab + ba - 2a^2 \in P \wedge 2b^2 - (ab+ba) \in P$$
$$\Rightarrow 2a^2 \leq ab + ba \wedge ab + ba \leq 2b$$
$$\Rightarrow 2a^2 \leq ab + ba \leq 2b^2$$

(2) Por (1) obtenemos que $2a^2 \leq 2b^2$, luego $2(b^2 - a^2) \in P$ y de aquí tenemos que: $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}(2(b^2 - 2a^2) + 2(b^2 - 2a^2))(\frac{1}{2})^* \in P$ y por tanto $a^2 \leq b^2$.

(3) ($\Rightarrow$) Supongamos que $a \sim b$. Entonces por definición existe un número natural $n \geqslant 1$ tal que $n\,|\,a\,| \geqslant |\,b\,|$ y $n\,|\,b\,| \geqslant |\,a\,|$. Entonces por la parte (2) tenemos que $n^2\,|\,b\,|^2 \geqslant |\,a\,|^2$ y $n^2\,|\,a\,|^2 \geqslant |\,b\,|^2$ por tanto $a^2 \sim b^2$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $a^2 \sim b^2$, entonces por definición existe un entero $n \geqslant 1$ tal que $n\,|\,a\,|^2 \geqslant |\,b\,|^2$ y $n\,|\,b\,|^2 \geqslant |\,a\,|^2$, de aquí que $n^2a^2 = (n\,|\,a\,|)^2 \geqslant |\,b\,|^2$ y $n^2b^2 = (n\,|\,b\,|)^2 \geqslant |\,a\,|^2$. Si suponemos que $n\,|\,a\,| < |\,b\,|$. Entonces por (2) tenemos que $(n\,|\,a\,|)^2 < |\,b\,|^2$, esto es una contradicción por tanto $n\,|\,a\,| \geqslant |\,b\,|$, de igual modo se concluye que $n\,|\,b\,| \geqslant |\,a\,|$ y por tanto $a \sim b$ ■

Extenderemos la relación $\sim$ a $R^\times$ por definición $a \sim b$ (con $a, b \in R^\times$) se entiende que existe un entero $n \geq 1$ tal que $naa^* \geq bb^*$ y $nbb^* \geq aa^*$. Denotaremos por $\nu(a)$ la clase de equivalencia de a y sea $\Gamma = \{\nu(a) \mid a \in R^\times\}$. Definamos una relación de orden $\geq$ en Γ por definición $\nu(a) \geq \nu(b)$ se entiende que $nbb^* \geq aa^*$ para algún entero $n \geqslant 1$. Este es un orden total en Γ y tenemos una aplicación $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ donde $\infty = \nu(0)$ se asume que satisface que $\infty > \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Como $aa^* = (-a)(-a)^*$, entonces $\nu(-a) = \nu(a)$. Usando la identidad $(a+b)(a+b)^* + (a-b)(a-b)^* = 2aa^* + 2bb^*$, tenemos que $2aa^* + 2bb^* = (a+b)(a+b)^* + (a-b)(a-b)^* \geq (a+b)(a+b)^*$. Supongamos que $2aa^* \geq 2bb^*$, entonces $\nu(b) \geq \nu(a)$. Luego, $4aa^* \geq (a+b)(a+b)^*$. Por tanto, $\nu(a+b) \geq \nu(a) = \min\{\nu(a), \nu(b)\}$. Por la Proposición 3.7 (3), la restricción de ν a S es justamente la valuación orden en S asociada a P.

Definición 3.2. *[[10], Terminología 3.2] Dado un $*$-orden P de un anillo R. Nos referimos a ν como la* ***$*$-valuación asociada*** *a P.*

Desearíamos tener una operación binaria $+$ en Γ tal que $(\Gamma, +, \leq)$ sea un semigrupo de cancelación ordenado totalmente y $\nu(a) + \nu(b) = \nu(ab)$. El problema sería mostrar que $+$ está bien definida.

Observación 3.2. *[10] Supongamos que a es un elemento no nulo, entonces se cumple la siguiente equivalencia: $\nu(b) \geq \nu(b_1) \Leftrightarrow \nu(ab) \geq \nu(ab_1)$. En efecto,*

$$\begin{aligned}
\nu(b) \geq \nu(b_1) &\Leftrightarrow nb_1b_1^* \geq bb^* \quad \textit{para algún } n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow nb_1b_1^* - bb^* \in P \\
&\Leftrightarrow a(nb_1b_1^* - bb^*)a^* \in P \qquad (\textit{la equiv. es por la Prop. 3.6 y } \mathfrak{p} = \{0\}) \\
&\Leftrightarrow n(ab_1)(ab_1)^* - (ab)(ab)^* \in P \\
&\Leftrightarrow n(ab_1)(ab_1)^* \geq (ab)(ab)^* \\
&\Leftrightarrow \nu(ab) \geq \nu(ab_1)
\end{aligned}$$

En particular, $\nu(b) = \nu(b_1) \Leftrightarrow \nu(ab) = \nu(ab_1)$.

Supongamos que ν es **$*$-invariante**, esto implica que $\nu(a^*) = \nu(a)$ para todo $a \in R$, entonces $+$ está bien definida, porque si $\nu(a) = \nu(a_1)$ y $\nu(b) = \nu(b_1)$, entonces por la Observación 3.2, $\nu(ab) = \nu(ab_1) = \nu((ab_1)^*) = \nu(b_1^*a^*) = \nu(b_1^*a_1^*) = \nu(a_1b_1)$. Como algo adicional tenemos que $+$ es conmutativa:
$\nu(a) + \nu(b) = \nu(ab) = \nu((ab)^*) = \nu(b^*) + \nu(a^*) = \nu(b) + \nu(a) = \nu(ba)$.

Otra propiedad que deseamos tener es la siguiente: Si $a, b \in S(R)$ y $a, b \neq 0$, entonces $\nu(ab - ba) > \nu(ab) = \nu(ba)$. Usaremos esta propiedad para mostrar que todo $*$-orden se extiende débilmente. En el caso de semicampo esta propiedad es equivalente a $a, b \in S(R)$ y $a, b \neq 0$, entonces $\nu(aba^{-1}b^{-1} - 1) > 0$ y esto es parafraseado diciendo que ν **colapsa conmutadores.**

En resumen queremos probar el siguiente resultado:

Teorema 3.2. [[*10*], *Teorema 3.3*] *Supongamos que R es un dominio integral, P es una $*$-orden con soporte $\{0\}$ y $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ es la $*$-valuación natural asociada a P. Entonces:*

(1) ν es $*$-invariante.

(2) La operación $+$ en Γ está bien definida.

(3) $(\Gamma, +, \leq)$ es un semigrupo abelino de cancelación.

(4) $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ satisface $\nu(-a) = \nu(a)$, $\nu(a + b) \geq \text{mín}\{\nu(a), \nu(b)\}$ y $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$

(5) Si $a, b \in S$, y $a, b \neq 0$ entonces $\nu(ab - ba) > \nu(ab) = \nu(ba)$.

Necesitamos algunas notaciones y resultados. No existe restricción al suponer que $\mathbb{Q} \subseteq R$ (justamente remplazando R por $R \otimes \mathbb{Q}$.) Para $c, d \in S(R)$, $d > 0$, $\nu(c) \geq \nu(d)$, escribimos $\frac{c}{d} \mapsto r$ para indicar que r es el único elemento de $\mathbb{R}$ satisfaciendo $r_1 \leq r \leq r_2$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo $r_1 d \leq c \leq r_2 d$.

Sean $R_1 = \{r_1 \in \mathbb{Q} | r_1 d \leq c\}$ y $R_2 = \{r_2 \in \mathbb{Q} | c \leq r_2 d\}$. Probemos que son conjuntos no vacíos y que son acotados superiormente e inferiormente, respectivamente. Como por hipótesis tenemos que $\nu(c) \geq \nu(d)$, entonces existe un $n \geq 1$ tal que $|c| \leq nd$, esto implica que $-nd \leq c \leq nd$ y de aquí tenemos que R_1 y R_2 son no vacíos.

Supongamos que existen $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ tales que $r_1 > r_2$, entonces $dr_1 > dr_2$ (ya que $(r_1 - r_2)d \in P^{\times}$) y por definición de r_1 y r_2 tenemos que $dr_2 < r_1 d \leq c \leq r_2 d$ luego, $dr_2 < dr_2$ esto es una contradicción, por tanto $r_1 \leq r_2$ para todo $r_1 \in R_1$ y todo $r_2 \in R_2$. Por tanto todo $r_2 \in R_2$ acota a R_1 superiormente y todo $r_1 \in R_1$ acota a R_2 inferiormente. Por tanto $\sup(R_1)$ e $\inf(R_2)$ existen. Probemos que $\sup(R_1) = \inf(R_2)$. Sea $r_2 \in R_2$, entonces por lo anterior tenemos que $r_1 \leq r_2$ para todo $r_1 \in R_1$, como consecuencia $\sup(R_1) \leq r_2$, y por definición de infimo tenemos que $\sup(R_1) \leq \inf(R_2)$. Supongamos que $\sup(R_1) < \inf(R_2)$. Como entre dos números reales existe un número racional, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup(R_1) < t < \inf(R_2)$. Si $t \in R_1$, entonces $t \leq \sup(R_1)$ y esto es una contradicción. Similarmente si $t \in R_2$, entonces $\inf(R) \leq t$, que es una contradicción. De aquí que $t \notin R_1$ y $t \notin R_2$ y como consecuencia $td > c > td$, pero esto es una contradicción. Por tanto, $\sup(R_1) = r = \inf(R_2)$ y de esta forma hemos probado que r existe y es único.

En los próximos dos lemas recojeremos algunos resultados que necesitamos.

Lemma 3.1. [[*10*], *Lema 3.4*]

(1) $\frac{c}{d} \mapsto 0 \Leftrightarrow \nu(c) > \nu(d)$.

(2) $\frac{b}{d} \mapsto r,\ \frac{c}{d} \mapsto s \Rightarrow \frac{b+c}{d} \mapsto r+s,\ \frac{-c}{d} \mapsto -s$ y $\frac{b-c}{d} \mapsto r-s$

(3) $\frac{c}{d} \mapsto r \Rightarrow \frac{aca^*}{ada^*} \mapsto r$ para todo $a \in R,\ a \neq 0$.

(4) $\frac{c}{d} \mapsto r,\ \frac{d}{e} \mapsto s \Rightarrow \frac{c}{e} \mapsto rs$.

(5) $\frac{c}{d} \mapsto r \Rightarrow \frac{cd+dc}{d^2} \mapsto 2r,\ \frac{c^2}{d^2} \mapsto r^2$ y $\frac{c^3}{d^3} \mapsto 3r$.

Demostración: Replazando c por $-c$ si fuera necesario podemos suponer que $c \geq 0$.

(1) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\nu(c) = \nu(d)$, entonces $c \sim d$, esto implica que un entero positivo $n \geq 1$ tal que $nc \geq d$ y $nd \geq c$ (porque $c, d \in S(R)$, $|\,c\,| = c$ y $|\,d\,| = d$),

de esta forma tenemos $\frac{1}{n}d \leq c \leq nd$, luego por hipótesis, $\frac{1}{n} \leq 0$ esto es una contradicción.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\nu(c) > \nu(d)$, entonces $dd^* > ncc^*$ para todo $n \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\nu(c) > \nu(d) &\Rightarrow d^2 > nc^2 \\
&\Rightarrow d^2 > n^2c^2 \\
&\Rightarrow \mid d \mid > n \mid c \mid \\
&\Rightarrow -\frac{1}{n}d < c < \frac{1}{n}d \\
&\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq r \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Para todo $n \geq 1$ y por tanto $r = 0$

(2) Como $\nu(b+c) \geq \text{mín}\{\nu(b), \nu(c)\} \geq \nu(d)$ ya que $\nu(b) \geq \nu(d)$ y $\nu(c) \geq \nu(d)$. Por tanto $\frac{b+c}{d} \mapsto t$ existe. Sean $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $r_1 d \leq b \leq r_2 d$ y $s_1 d \leq c \leq s_2 d$, de aquí se tiene lo siguiente $d(r_1 + s_1) \leq b + c \leq (r_2 + s_2)d$, por definición de t tenemos que $r_1 + s_1 \leq t \leq r_2 + s_2$, luego $r_1 \leq t - s_1$ y $t - s_2 \leq r_2$ y por tanto $r = sup(R_1) \leq t - s_1$ y $t - s_2 \leq inf(R_2) = r$, de aquí se tiene $s_1 \leq t - r$ y $t - r \leq s_2$ y como consecuencia $s = sup(S_1) \leq t - r$ y $t - r \leq inf(S_2) = s$, luego $t - r = s$ y como consecuencia $t = r + s$. Supongamos que $\frac{c}{d} \mapsto s$. Como $d > 0$ y $\nu(-c) = \nu(c)$, entonces existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{-c}{d} \mapsto w$. Probemos que $w = -s$. Sean $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $s_1 d \leq -c \leq s_2 d$, de aquí obtenemos lo siguiente $(-s_2)d \leq c \leq (-s_1)d$ y esto implica por la definición de s que $-s_2 \leq s \leq -s_1$, así tenemos que $t_1 \leq -s \leq t_2$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo que $t_1 d \leq -c \leq s_2 d$ y por definición de w (unicidad) tenemos que $w = -s$. También tenemos que $\frac{b-c}{d} = \frac{b+(-c)}{d} \mapsto r + (-s) = r - s$.

(3) Sea $a \neq 0$. Como $\nu(c) \geq \nu(d)$, entonces por Observación 3.2, $\nu(aba^*) \geq \nu(cdc^*)$ además como $d > 0$, entonces $ada^* > 0$ (ya que P es $*$-conjugado), por tanto existe un $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{aca^*}{ada^*} \mapsto u$. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $r_1 d \leq c \leq r_2 d$, por ser P $*$-conjugado tenemos que $r_1 ada^* \leq aca^* \leq r_2 ada^*$. Ahora bién por definición

de u tenemos que $r_1 \leq u \leq r_2$. De esta forma hemos probado que $r_1 \leq u \leq r_2$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo $r_1 d \leq c \leq r_2 d$ y por unicidad de r concluimos que $r = u$.

(4) Como $\nu(c) \leq \nu(d) \leq \nu(e)$, entonces $\nu(c) \leq \nu(e)$ y además $e > 0$, así existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{c}{e} \mapsto v$. Como $r \geq 0$ y $s \geq 0$ (ver Observación 3.3 (3) y por (1)). Consideremos los siguientes casos, primero supongamos que $r = 0$ ó $s = 0$, en cualquiera de estos dos casos tenemos que $\nu(c) > \nu(e)$ y por tanto $v = 0$, así que $\frac{c}{e} \mapsto = 0 = rs$. Ahora supongamos que $r > 0$ y $s > 0$. De aquí que, $\nu(c) = \nu(d) = \nu(e)$, como consecuencia $v > 0$. Sea $R_1^+ = \{r_1 \in R_1 \mid r_1 > 0\}$, similarmente definimos R_2^+, S_1^+ y S_2^+. Sean $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$r_1 d \leq c \leq r_2 d \quad y \quad s_1 e \leq d \leq s_2 e$$

De aquí tenemos que $s_1 r_1 e \leq r_1 d$ y $r_2 d \leq s_2 r_2$ y así, $s_1 r_1 e \leq c \leq s_2 r_2 e$ por definición de v tenemos que $s_1 r_1 \leq v \leq s_2 r_2$, luego $s_1 \leq \frac{v}{r_1}$ y por definición de supremo tenemos que $s = sup(S_1) = sup(S_1^+) \leq \frac{v}{r_1}$, de ésto también tenemos que $r_1 \leq \frac{v}{s}$, nuevamente por definición de supremo, $r = sup(R_1) = sup(R_1^+) \leq \frac{v}{s}$, por tanto $rs \leq v$. En forma similar se obtiene que $v \leq rs$. Por tanto $v = rs$.

(5) Supongamos que $d > 0$, $\nu(c) \geq \nu(d)$. Replazando c por $-c$ podemos suponer que $c \geq 0$. Si $\nu(c) > \nu(d)$ entonces $nc \leq d$ para todo entero $n \geq 1$. Luego por el producto de Jordan tenemos que

$$(d - nc)d + d(d - nc) \geq 0 \quad y \quad (d - nc)c + c(d - nc) \geq 0$$

así, $2d^2 \geq n(cd + dc) \geq 2n^2 c^2$. De aquí tenemos que $\dfrac{2}{n} d^2 \geq (cd + dc) \geq 0$ y $\dfrac{1}{n^2} d^2 \geq c^2 \geq 0$, para todo entero $n \geq 0$ por tanto

$$\frac{cd + dc}{d} \mapsto 0 \quad y \quad \frac{c^2}{d^2} \mapsto 0.$$

También, puesto que $nc \leq d$ y $n^2 c^2 \leq d^2$, aplicando nuevamente el producto de Jordan,

$$(d^2 - n^2 c^2)d + d(d^2 - n^2 c^2) \geq 0 \quad y \quad (d - nc)c^2 + c^2(d - nc) \geq 0.$$

Así, $2n^3c^3 \leq n^2(cd^2 + dc^2) \leq 2d^3$. Luego, $0 \leq c^3 \leq \dfrac{1}{n^3}d^3$, esto implica que

$$\frac{c^3}{d^3} \mapsto 0.$$

Supongamos ahora que $\nu(c) = \nu(d)$. Si $r_1 d < c < r_2 d$ donde $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$, entonces por el producto de Jordan

$$(c - r_1 d)c + c(c - r_1 d) \geq 0 \quad y \quad (c - r_1 d)d + d(c - r_1 d) \geq 0.$$

Así, $2r_1^2 d \leq r_1(cd+dc) \leq 2c^2$. Similarmente tenemos que $(r_2 d - c)c + c(r_2 d - c) \geq 0$ y $(r_2 d - c)d + d(r_2 d - c) \geq 0$, de aquí se tiene que $2c^2 \leq r_2(cd + dc) \leq 2r_2^2 d^2$, luego $2r_1 d^2 \leq cd + dc \leq 2r_2$ y $r_1^2 d^2 \leq c^2 \leq r_2^2 d^2$. Sean $\frac{cd+dc}{d^2} \mapsto u$ y $\frac{c^2}{d^2} \mapsto w$, por definición de u y v obtenemos, $2r_1 \leq u \leq 2r_2$ y $r_1^2 \leq w \leq r_2^2$, luego $r_1 \leq \frac{u}{2} \leq r_2$ y $r_1 \leq \sqrt{w} \leq r_2$. Por definición de supremo e infimo,

$$r = sup(R_1) = sup(R_1^+) \leq \frac{u}{2} \leq inf(R_2^+) = inf(R_2) = r$$

y

$$r = sup(R_1) = sup(R_1^+) \leq \sqrt{w} \leq inf(R_2^+) = inf(R_2) = r.$$

Por tanto $u = 2r$ y $w = r^2$. También, puesto que $r_1 d \leq c$ y $r_1^2 d^2 \leq c^2$ se tiene que $(c^2 - r_1^2 d^2)d + d(c^2 - r_1^2 d^2) \geq 0$ y $(c - r_1 d)c^2 + c^2(c - r_1 d) \geq 0$, de esta forma tenemos que $2r_1^3 d^3 \leq r_1(c^2 d + dc^2) \leq 2c^3$. Similarmente, puesto que $c \leq r_2 d$ y $c^2 \leq r_2^2 d^2$, obtenemos que $2c^3 \leq r_2(c^2 d + dc^2) \leq 2r_2^3 d^3$. Usando lo anterior se puede comprobar que $\frac{c^3}{d^3} \mapsto r^3$. ■

Consideremos la siguiente observacion que sera de utilidad para la demostración del Lema 3.2.

Observación 3.3. *Supongamos que p es simétrico y positivo, q es semisimétrico, $\nu(p) = \nu(q)$, y $\frac{-q^2}{p^2} \mapsto r$. Entonces*

(1) $\frac{p}{p} \mapsto 1$.

(2) $q \neq 0$

(3) $r > 0$

(4) $\frac{p^2}{-q^2} \mapsto \frac{1}{r}$

Demostración:

(1) Supongamos que $\frac{p}{p} \mapsto s$. Como $1p \leq p \leq 1p$, entonces por definición de s tenemos que $1 \leq s \leq 1$, luego por la unicidad de s, se tiene que $s = 1$.

(2) Si $q = 0$, entonces $\nu(q) = \nu(0) = \infty$. Como $\nu(p) \in \Gamma$, entonces $\nu(q) = \infty > \nu(p)$, esto contradice la hipótesis. Por tanto $q \neq 0$.

(3) Como $\nu(p) = \nu(q)$, entonces $\nu(p^2) = \nu(p) + \nu(p) = \nu(q) + \nu(q) = \nu(q^2) = \nu(-q^2)$, de aquí que $p^2 \sim -q^2$ y como $p^2, -q^2 \in P$ (por Obs. 2.1) entonces existe un $n \geq 1$ tal que $np^2 \geq -q^2$ y $n(-q^2) \geq p^2$, por tanto $\frac{1}{n}p^2 \leq -q^2 \leq np^2$, para algún $n \geq 1$. Por la definición de r, se tiene que $0 < \frac{1}{n} \leq r \leq n$, así $r > 0$.

(4) $-q^2 \in P^{\times}$, porque $q \neq 0$, además $\nu(p^2) = \nu(-q^2)$, luego existe $t \in R$ tal que $\frac{p^2}{-q^2} \mapsto t$ por Lema 3.1 (4), se tiene que $\frac{p^2}{p^2} \mapsto rt$. También sabemos por (1) que $\frac{p^2}{p^2} \mapsto 1$, así por la unicidad de tr obtenemos que $tr = 1$, luego $t = \frac{1}{r}$ y por tanto $\frac{p^2}{-q^2} \mapsto \frac{1}{r}$.

Lemma 3.2. [[*10*], *Lema 3.5*] *Supongamos que p es simétrico y positivo, q es semi, $\nu(p) = \nu(q)$, y $\frac{-q^2}{p^2} \mapsto r$. Entonces*

(6) $\frac{-pq^2p}{p^4} \mapsto r$ y $\frac{-qp^2q}{p^4} \mapsto r$.

(7) $\frac{-qpq}{p^3} \mapsto r$.

(8) $\frac{pq-qp}{p^2} \mapsto 0$ y $\frac{-(pq-qp)^2}{p^4} \mapsto 4r$.

(9) Si p_1 es un elemento simétrico y positivo, $\nu(p_1) = \nu(p)$, $\frac{p}{p_1} \mapsto s$ y $\frac{-q^2}{p_1^2} \mapsto t^2$, entonces $\frac{p^2+q^2}{p_1^2} \mapsto s^2 - t^2$ y $\frac{-(pq+qp)^2}{p_1^4} \mapsto 4s^2t^2$.

Demostración:

(6) Por el Lema 3.1 (3), $\frac{-pq^2p}{p^4} \mapsto r$ y por Observación 3.3 (4) tenemos que, $\frac{p^2}{-q^2} \mapsto \frac{1}{r}$, así por Lema 3.1 (3) , $\frac{-qp^2q}{q^4} \mapsto \frac{1}{r}$. También, por Lema 3.1 (5) $\frac{q^4}{p^4} \mapsto r^2$, luego por Lema 3.1 (4), $\frac{-qp^2q}{p^4} \mapsto \frac{1}{r}r^2 = r$.

(7) Por (6) tenemos que $\frac{-pq^2p}{p^4} \mapsto r$. Luego por Lema 3.1 (3), $\frac{-qpq^2pq}{-qp^4q} \mapsto r$. También $\frac{q^4}{p^4} \mapsto r^2$ y usando el Lema 3.1 (3), $\frac{-q^6}{-qp^4q} \mapsto r^2$. Además $\frac{q^2}{p^2} \mapsto r$, así que por Lema 3.1 (5), $\frac{-q^6}{p^6} \mapsto r^3$. Luego, usando la parte (4) del Lema 3.1, $\frac{qpq^2pq}{p^6} \mapsto (r)(\frac{1}{r^2})(r^3) = r^2$. Por Observación 3.3 (3) $r > 0$, por tanto $r^2 > 0$ (esto es $r \neq 0$), luego por Lema 3.1 (1), tenemos que $\nu(qpq^2pq) = \nu(p^6)$. De esta igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
\nu(qpq^2pq) = \nu(p^6) &\Rightarrow \nu(q) + \nu(p) + 2\nu(q) + \nu(p) + \nu(q) = 6\nu(p) \\
&\Rightarrow \nu(q) + \nu(p) + 2\nu(p) + \nu(p) + \nu(q) = 6\nu(p) \quad (\nu(p) = \nu(q)) \\
&\Rightarrow \nu(q) + \nu(p) + \nu(q) = 3\nu(p) \quad (\Gamma \text{ es semigrupo cancelativo}) \\
&\Rightarrow \nu(qpq) = \nu(p^3) \\
&\Rightarrow \nu(-qpq) = \nu(p^3)
\end{aligned}$$

Sea $\frac{-qpq}{p^3} \mapsto u$. Como $\nu(-qpq) = \nu(p^3)$, entonces por Observación 3.3 (3), tenemos que $u > 0$. Además, por Lema 3.1 (5), se tiene que $\frac{qpq^2pq}{p^6} = \frac{(-qpq)^2}{(p^3)^2} \mapsto u^2$, pero como también $\frac{qpq^2pq}{p^6} = \frac{(-qpq)^2}{(p^3)^2} \mapsto r^2$, entonces $r^2 = u^2$ (por unicidad de r^2), ya que que $r > 0$ y $u > 0$, entonces $r = u$. Por tanto $\frac{-qpq}{p^3} \mapsto r$

(8) Por (7) tenemos que $\frac{-qpq}{p^3} \mapsto r$. Si $r_1p^3 \leq -qpq \leq r_2p^3$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, entonces: $-qpq - r_1p^3$, $r_2p^3 + qpq \in P$ y por el producto de Jordan también tenemos que

$(-qpq-r_1p^3)p+p(-qpq-r_1p^3) \in P$ y $(-qpq-r_2p^3)p+p(-qpq-r_2p^3) \in P$. De aquí tenemos que $-(pq)^2-(qp)^2-2r_1p^4 \geq 0$ y $(pq)^2+(qp)^2+2r_2p^4 \geq 0$. Por tanto, $2r_1p^4 \leq -(pq)^2-(qp)^2 \leq 2r_2p^4$ (I). Supongamos que $\frac{-(pq)^2-(qp)^2}{p^4} \mapsto u$, por definición de u y (I) tenemos que $2r_1 \leq u \leq 2r_2$, o lo que es lo mismo, $r_1 \leq \frac{u}{2} \leq r_2$. Luego, $2r_1 \leq u \leq 2r_2$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo $r_1p^3 \leq -qpq \leq r_2p^3$, pero por la unicidad de r se tiene que $r = \frac{u}{2}$, por tanto $u = 2r$ y esto implica que $\frac{-(pq)^2-(qp)^2}{p^4} \mapsto 2r$. Por (6) tenemos que $\frac{-pq^2p}{p^4} \mapsto r$ y $\frac{-qp^2q}{p^4} \mapsto r$. Puesto que $(pq-qp)^2 = (pq)^2+(qp)^2-pq^2p-qp^2q$, entonces por Lema 3.1 (2) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{(pq-qp)^2}{p^4} = \frac{(pq)^2+(qp)^2-pq^2p-qp^2q}{p^4} \mapsto -2r+r+r=0$$

Si $\frac{pq-qp}{p^2} \mapsto v$, entonces por Lema 3.1 (5) $\frac{(pq-qp)^2}{p^4} \mapsto v^2$, por unicidada de v^2, $v^2=0$, así $v=0$, por tanto $\frac{pq-qp}{p^2} \mapsto 0$. Como

$$-(pq-qp)^2 = -(pq)^2-(qp)^2-pq^2p-qp^2q$$

entonces

$$\frac{-(pq+qp)^2}{p^4} = \frac{-(pq)^2-(qp)^2-pq^2p-qp^2q}{p^4} \mapsto 2r+r+r=4r.$$

(9) Por hipótesis, $\frac{p}{p_1} \mapsto s$, entonces por Lema 3.1 (5), $\frac{p^2}{p_1^2} \mapsto s^2$. Por Lema 3.1 (2), $\frac{p^2-q^2}{p_1} \mapsto s^2-t^2$. Por Obs. 3.3 (4), $\frac{p_1}{p} \mapsto \frac{1}{s}$ y por Lema 3.1 (5), $\frac{p_1^2}{p^2} \mapsto \frac{1}{s^2}$, nuevamente usando el Lema 3.1 parte (4), $\frac{q^2}{p^2} \mapsto t^2\frac{1}{s^2} = \frac{t^2}{s^2}$, pero $\frac{-q^2}{p^2} \mapsto r$ y por unicidad se tiene $r = \frac{t^2}{s^2}$. Por (8), $\frac{-(pq-qp)^2}{p^4} \mapsto 4r = 4\frac{t^2}{s^2}$. Aplicando dos veces el Lema 3.1 (5), $\frac{p^4}{p_1^4} \mapsto s^4$. Luego, por Lema 3.1 (4), $\frac{-(pq+qp)^2}{p_1^4} \mapsto 4\frac{t^2}{s^2}s^4 = 4s^2t^2$. ■

Comsideremos el siguiente teorema, esto es válido cuando ν es una valuación, pero aquí también probaremos que se cumple.

Teorema 3.3. *Sean $a, b \in R^\times$ y $\nu(a) \neq \nu(b)$, entonces* $\nu(a+b) = \text{mín}\{\nu(a), \nu(b)\}$.

Demostración: Como $\nu(a+b) \geq \text{mín}\{\nu(a), \nu(b)\}$, sólo falta probar la otra desigualdad. Supongamos sin perdida de generalidad que $\nu(a) > \nu(b)$. Así, tenemos lo siguiente, $\text{mín}\{\nu(a), \nu(b)\} = \nu(b)$.

$$\begin{aligned}
\nu(b) &= \nu(b+a-a) \\
&\geq \text{mín}\{\nu(b+a), \nu(-a)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(b+a), \nu(a)\} \\
&= \nu(b+a)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se debe a que si $\text{mín}\{\nu(b+a), \nu(a)\} = \nu(a)$, entonces $\nu(b) \geq \nu(a)$ esto es una contradicción. Por tanto, $\text{mín}\{\nu(a), \nu(b)\} = \nu(b+a)$. ■

Prueba del Teorema 3.2.

(1) Sea $a = p+q$, donde p es simétrico y q es antisimétrico. Si $\nu(p) \neq \nu(q)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\nu(a) &= \nu(p+q) \\
&= \text{mín}\{\nu(p), \nu(q)\} && \text{(por Teorema 3.3)} \\
&= \text{mín}\{\nu(p), \nu(-q)\} && \text{(pues, } \nu(q) = \nu(-q)) \\
&= \nu(p-q) && \text{(por Teorema 3.3)} \\
&= \nu(a^*) && \text{(porque, } a^* = (p+q)^* = p-q)
\end{aligned}$$

Supongamos, ahora que $\nu(p) = \nu(q)$. Replazando a por $-a$, si es necesario, podemos suponer que p es positivo. Supongamos que $\frac{-q^2}{p^2} \mapsto r$. Como $\frac{p^2}{p^2} \mapsto 1$ por Obs. 3.3 (1), entonces por Lema 3.1 (2), $\frac{p^2-q^2}{p^2} \mapsto 1+r$ y por el Lema 3.2 (8), $\frac{pq-qp}{p^2} \mapsto 0$. Como

$$(p+q)(p-q) = p^2 - q^2 - (pq - qp)$$

y

$$(p-q)(p+q) = p^2 - q^2 + (pq - qp)$$

entonces por Lema 3.1 (2) se tiene que :

$$\frac{(p+q)(p-q)}{p^2} = \frac{p^2 - q^2 - (pq - qp)}{p^2} \mapsto 1 + r - 0 = 1 + r$$

y

$$\frac{(p-q)(p+q)}{p^2} = \frac{p^2 - q^2 + (pq - qp)}{p^2} \mapsto 1 + r + 0 = 1 + r$$

Como por Obs. 3.3 (3) $r > 0$, entonces $1 + r > 0$, y por Lema 3.1 (1)se tiene, $\nu(p^2) = \nu(-q^2) = \nu(q^2)$, $\nu((p+q)(p-q)) = \nu(p^2)$ y $\nu((p-q)(p+q)) = \nu(p^2)$, además por Obs. 3.2, tenemos que $\nu(p^2) = \nu(pp) = \nu(pq)$. Por propiedad de ν tenemos, $\nu(p+q) \geq \text{mín}\{\nu(p), \nu(q)\} = \{\nu(q), \nu(q)\} = \nu(q)$, entonces si suponemos que $\nu(p+q) > \nu(q)$, se tiene nuevamente por la Observación 3.2 que:

$$\nu(p^2) = \nu((p-q)(p+q)) > \nu((p-q)q) = \nu(pq - q^2) \geq \text{mín}\{\nu(pq), \nu(q^2)\} = \nu(p^2)$$

Esto es una contradicción, por tanto $\nu(p+q) = \nu(q) = \nu(p)$. En forma similar se demuestra que $\nu(p-q) = \nu(p)$. Por tanto,

$$\nu(a) = \nu(p+q) = \nu(p-q) = \nu(a^*).$$

(5) Replazando a y b por $-a$ y $-b$ respectivamente, si fuera necesario, podemos suponer que a y b son positivos. Puesto que $(ab-ba)^2 = (ab)^2 + (ba)^2 + ab^2a + ba^2b$ y $(ab)^2 + (ba)^2 = (aba)b + b(aba) \geq 0$ (ya que $aba = aba^* \in P$ y usando el producto de Jordan), vemos que

$$(ab+ba)(ab+ba)^* = (ab+ba)^2 \geq ab^2a + ba^2a \geq ab^2a = (ab)(ab)^*$$

De aquí tenemos que $\nu(ab) \geq \nu(ab+ba)$, también tenemos que

$$\nu(ab+ba) \geq \text{mín}\{\nu(ab), \nu(ba)\} = \nu(ab) \ \ (yaque, \ \nu(ab) = \nu(ba)).$$

De esta forma hemos probado que $\nu(ab+ba) = \nu(ab) = \nu(ba)$. Descomponiendo ab como $ab = p + q$, donde $p = \frac{1}{2}(ab+ba)$ y $q = \frac{1}{2}(ab-ba)$. Deseamos probar que $\nu(q) > \nu(p)$. Supongamos que esto no ocurre, entonces $\nu(p) \geq \nu(q)$. Si $\nu(p) > \nu(q)$, entonces

$$\nu(ab) = \nu(ab + ba) = \nu(p) > \nu(q) = \nu(ab - ba) \geq \text{mín}\{\nu(ab), \nu(ba)\} = \nu(ab)$$

pero esto es una contradicción. Ahora, supongamos que $\nu(p) = \nu(q)$. Para cada $k \geq 0$, descompongamos $(ab)^{2^k}$, como $(ab)^{2^k} = p_k + q_k$, donde

$$p_k = \frac{1}{2}((ab)^{2^k} + (ba)^{2^k}) \quad y \quad q_k = \frac{1}{2}((ab)^{2^k} - (ba^{2k}))$$

(así, $p_0 = p$ y $q_0 = q$). Es importante destacar que $p_k = (rbr^*)b + b(rbr^*)$, donde $r = ab...ba$, de esta forma cada p_k es positivo, también notamos que q_k es antisimétrico ya que todo elemento de R se puede escribir en forma única como suma de un elemento simétrico con un elemento antisimétrico. Por otra parte, como $(p_k^2 + q_k^2) + (p_k q_k + q_k p_k) = (p_k + q_k)^2 = ((ab)^{2^k})^2 = (ab)^{2^{k+1}} = p_{k+1} + q_{k+1}$, vemos que $(p_k^2 + q_k^2)^* = p_k^2 + q_k^2$ y $(p_k q_k + q_k p_k)^* = -p_k q_k - q_k p_k = -(p_k q_k + q_k p_k)$, luego $p_k^2 + q_k^2$ es simétrico y $p_k q_k + q_k p_k$ es antisimétrico, por unicidad de la suma directa tenemos que

$$p_{k+1} = p_k^2 + q_k^2 \quad y \quad q_{k+1} = p_k q_k + q_k p_k$$

Por Observación 3.3 (1), $\frac{p_0}{p} = \frac{p}{p} \mapsto 1$. Supongamos ahora que $\frac{-q^2}{p^2} \mapsto w$. Por Observación 3.3 (3), tenemos que $w > 0$. El punto $(1, \sqrt{w})$ en $\mathbb{R}^2$, se puede escribir en coordenadas polar como $(1, \sqrt{w}) = (rcos(\alpha), r\,\text{sen}(\alpha))$, de aquí que $1 = rcos(\alpha)$ y $w = r^2 sen^2(\alpha)$ con $r = \sqrt{1 + w^2} > 0$ y podemos considerar a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, ya que $(1, w)$ está en el primer cuadrante, luego $sen(\alpha) > 0$ y

$$\frac{p_0}{p} \mapsto rcos(\alpha) \quad y \quad \frac{-q_0^2}{p^2} \mapsto r^2 sen^2(\alpha)$$

Por Lema 3.2 (9),

$$\frac{p_1}{p^2} = \frac{p_0 + q_0}{p^2} \mapsto r^2(cos(\alpha) - sen(\alpha)) = r^2 cos(2\alpha)$$

y

$$\frac{-q_1^2}{p^4} = \frac{-(p_0q_0 + q_0p_0)^2}{p^4} \mapsto 4r^4 sen^2(\alpha)cos^2(\alpha) = r^4 sen^2(2\alpha),$$

por inducción tenemos que,

$$\frac{p_k}{p^{2^k}} \mapsto r^{2^k} cos(2^k\alpha)$$

y

$$\frac{-q_k^2}{p^{2^{k+1}}} \mapsto r^{2^{k+1}} sen^2(2^k\alpha)$$

para todo $k \geq 0$. Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sea $m \geq 1$ el menor entero positivo tal que $\frac{\pi}{2} < 2^m\alpha$, entonces $2^{m-1}\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, luego $2^m\alpha \leq \pi$ y por tanto $\frac{\pi}{2} < 2^k\alpha \leq \pi$, como consecuencia $cos(2^m\alpha) < 0$. Puesto que p_k y p^{2^k} son positivos, esto es una contradicción. Por tanto, $\nu(q) > \nu(p)$ y por Observación 3.2, tenemos que $\nu(2q) > \nu(2p)$, luego $\nu(ab - ba) > \nu(ab + ba) = \nu(ab)$ ■

Proposición 3.8. *Sea R un $*$-anillo con $*$-orden P. Si $a, b \in S(R)^\times$, entonces $ab + ba \neq 0$.*

Demostración: Sean $0 \neq a, b \in S(R)$. Supongamos que $ab + ba = 0$. Tenemos dos posibilidades para a una es que $a \in P$ y la otra es que $-a \in P$. Supongamos que $a \in P$, entonces:

$$\begin{aligned} ab + ba = 0 &\Rightarrow -ba = ab \\ &\Rightarrow -b^2a = bab = bab^* \in P \qquad \text{(Definición 2.2 (3))} \end{aligned}$$

Como todo elemento de P es simétrico tenemos que:

$$\begin{aligned} (-b^2a)^* = -b^2a &\Rightarrow -ab^2 = -b^2a \\ &\Rightarrow b^2a = b^2a \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}
a, -b^2a \in P &\Rightarrow a(-b^2a) + (-b^2a)a \in P && \text{(Definición 2.2 (6))}\\
&\Rightarrow -ab^2a - ab^2a \in P && \text{(por (I))}\\
&\Rightarrow -2ab^2a \in P\\
&\Rightarrow a(2b^2)a \in -P && \text{(II)}
\end{aligned}$$

Como $2b^2 = bb^* + bb^* \in P$, entonces por Definición 2.2 (3) tenemos que $a(2b^2)a = a(2b^2)a^* \in P$ (III). De (II) y (III) tenemos que $a(2b^2)a \in P \cap -P = \{0\}$ y por ser R un dominio se tiene que $a = 0$ ó $b = 0$, pero esto es una contradicción. Si $x = -a \in P$, entonces $xb + bx = (-a)b + b(-a) = 0$ y procediendo como el caso anterior obtenemos que $-a = x = 0$ ó $b = 0$, de aquí que $a = 0$ ó $b = 0$, pero esto es nuevamente una contradicción. Por tanto $ab + ba \neq 0$. ■

Lemma 3.3. [[4], *Lema 1.6*] *Sea R un $*$-anillo con $*$-orden P y sea ν la $*$-valuación natural asociada a P. Si $0 \neq a, b \in S(R)$, entonces $\nu(ab + ba) = \nu(ab) = \nu(ba) = \nu(a) + \nu(b)$.*

Demostración: Por la Proposición precedente tenemos que $ab + ba \neq 0$ por tanto $\nu(ab+ba) \neq \infty$ y tiene sentido las igualdades $\nu(ab+ba) = \nu(ab) = \nu(ba) = \nu(a)+\nu(b)$. Sabemos que $\nu(ab + ba) \geq \text{mín}(\nu(ab), \nu(ba)) = \nu(ab)$ (1). Sólo falta probar la otra desigualdad. Como $\nu(x) = \nu(-x)$ para todo $x \in R$, entonces podemos suponer que $a, b \in P$. Esta consideración la hacemos para usar el hecho de que todo elemento de P $*$-conjugado está en P y que el producto de Jordan de dos elementos de P está en P. Puesto que

$$(ab + ba)^2 = (ab)^2 + (ba)^2 + ab^2a + ba^2b \;\; y \;\; (ab)^2 + (ba)^2 = (aba)b + b(aba) \geq 0,$$

entonces $(ab+ba)^2 \geq ab^2a+ba^2b$. Como $(ab+ba)^2$ y ab^2a+ba^2b son elementos positivos, $\nu(ab^2a + ba^2b) \geq \nu((ab + ba)^2) = 2\nu(ab + ba)$. Por otra parte, $ab^2a + ba^2b \geq ab^2a$ y como $ab^2a + ba^2b, ab^2a \in P$ se tiene que $2\nu(ab) = \nu(ab^2a) \geq \nu(ab^2a + ba^2b)$. Por tanto $\nu(ab) \geq \nu(ab + ba)$ (2). De (1) y (2) tenemos las igualdades:

$$\nu(ab + ba) = \nu(ab) = \nu(ba) = \nu(a) + \nu(b) \quad \blacksquare$$

Lemma 3.4. [[*4*], *Lema 1.7*] *Sea R un $*$-anillo con $*$-orden P y sea ν la $*$-valuación natural asociada a P. Si $a \in P$ y $b \in S(R)$ con $\nu(b) > \nu(a)$, entonces $a \pm b \in P$.*

Demostración: Como $b \in S(R) = P \cup -P$, entonces tenemos dos posibilidades la primera es que $b \in P$, en este caso tenemos que $a + b \in P$, además como $a, b \in S(R)$ y $S(R)$ es un grupo totalmente ordenado se tiene que $a > b$ ó $b > a$ ó $a = b$. Si $a = b$, entonces $\nu(a) = \nu(b)$, que es una contradicción. Si ocurre que $b > a$, entonces $\nu(a) \geq \nu(b)$ (por ser $a, b \in P$), que nuevamente es una contradicción. Por tanto solamente ocurre que $a > b$ de aquí que $a - b \in P$. Así hemos probado que $a \pm b \in P$. Con respecto a la otra posibilidad tenemos que $-b \in P$, entonces $a - b = a + (-b) \in P$. Ya que $a, -b \in S(R)$ nuevamente tenemos las tres siguientes posibilidades $a > -b$ ó $-b > a$ ó $a = -b$. Los casos $-b > a$ y $a = -b$ son contradictorios. Por lo tanto tenemos que $a > -b$, y de esto se deduce que $a + b = a - (-b) \in P$. Demanera que, nuevamente obtenemos $a \pm b \in P$. $\blacksquare$

Prueba del Teorema 3.1 Definamos:

$$Q = \{p + k \mid p \in P^\times,\ k^* = -k,\ \nu(k) > \nu(s)\} \cup \{0\}$$

donde ν es la $*$-valuación asociada a P. Chequearemos las seis condiciones de la Definición 3.1. Sean $s_i + k_i \in Q$, donde $0 \neq s_i \in P$ y $k_i^* = -k_i$ para $i = 1, 2$.

(1) **Clausura bajo la adición.** Puesto que $0 < s_1 < s_1 + s_2$ entonces, $s_1^2 = s_1 s_1^* < (s_1 + s_2)(s_1 + s_2)^* = (s_1 + s_2)^2$ (por Prop. 3.7 (2)), esto implica que $\nu(s_1) \geq \nu(s_1 + s_2)$ por definición de $\leq$ en Γ. Similarmente $\nu(s_2) \geq \nu(s_1 + s_2)$, así que $\nu(s_1 + s_2) \leq \text{mín}\{\nu(s_1), \nu(s_2)\}$. Por el Teorema 3.2, ν es una valuación

ordinaria dándonos que $\nu(s_1+s_2) \geq \text{mín}\{s_1, s_2\}$, así tenemos la siguiente igualdad $\nu(s_1 + s_2) = \text{mín}\{\nu(s_1), \nu(s_2)\}$. Entonces,

$$\nu(k_1 + k_2) \geq \text{mín}\{\nu(k_1), \nu(k_2)\} > \text{mín}\{\nu(s_1), \nu(s_2)\} = \nu(s_1 + s_2).$$

Por tanto $(s_1 + s_2) + (k_1 + k_2) \in Q$.

(2) **Cerradura bajo la multiplicación.** Sean s_i, k_i como arriba, el producto

$$(s_1 + k_1)(s_2 + k_2) = s_1s_2 + s_1k_2 + k_1s_2 + k_1k_2$$

lo podemos escribir como $(s_1 + k_1)(s_2 + k_2) = s + k$ donde

$$s = (s_1s_2 + s_2s_1 + k_1k_2 + k_2k_1 + k_1s_2 - s_2k_1 + s_1k_2 - k_2s_1)/2$$

y

$$k = (s_1s_2 - s_2s_1 + k_1k_2 - k_2k_1 + k_1s_2 + s_2k_1 + s_1k_2 + k_2s_1)/2$$

evidentemente $s^* = s$ y $k^* = -k$. Por el Lema 3.3, $\nu(s_1s_2+s_2s_1) = \nu(s_1)+\nu(s_2)$. Por otra parte, si $s_3 = k_1k_2 + k_2k_1 + k_1s_2 - s_2k_1 + s_1k_2 - k_2s_1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\nu(s_3) &\geq \text{mín}\{\nu(k_1k_2), \nu(k_2k_1), \nu(k_1s_2), \nu(s_2k_1), \nu(s_1k_2), \nu(k_2s_1)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(k_1k_2), \nu(k_1s_2), \nu(k_2s_1)\} && \text{(ya que } \nu(ab) = \nu(ba)) \\
&= \text{mín}\{\nu(k_1) + \nu(k_2), \nu(k_1) + \nu(s_2), \nu(k_2) + \nu(s_1)\} \\
&> \text{mín}\{\nu(s_1) + \nu(s_2), \nu(s_1) + \nu(s_2), \nu(s_2) + \nu(s_1)\} && \text{(por hipótesis)} \\
&= \nu(s_1) + \nu(s_2) \\
&= \nu(s_1s_2 + s_2s_1) && \text{(ya que } \nu(s_1s_2 + s_2s_1) = \nu(s_1) + \nu(s_2))
\end{aligned}$$

Luego, $\nu(s_3) > \nu(s_1s_2 + s_2s_1)$ y por tanto:

$$\begin{aligned}
\nu(s) &= \nu(2s) \\
&= \nu(s_1s_2 + s_2s_1 + s_3) \\
&= \text{mín}\{\nu(s_1s_2 + s_2s_1), \nu(s_3)\} && \text{(Por Teorema 3.3)} \\
&= \nu(s_1s_2 + s_2s_1)
\end{aligned}$$

Como $s_1s_2 + s_2s_1 \in P$ y $\nu(s_3) > \nu(s_1s_2 + s_2s_1)$, entonces por Lema 3.4 se tiene que $s \in P$.

$$\begin{aligned}
\nu(k) &\geq \text{mín}\{\nu(s_1s_2 - s_2s_1), \nu(k_1k_2), \nu(k_2k_1), \nu(k_1s_2), \nu(s_2k_1), \nu(s_1k_2), \nu(k_2s_1)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(s_1s_2 - s_2s_1), \nu(k_1k_2), \nu(k_1s_2), \nu(k_2s_1)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(s_1s_2 - s_2s_1), \nu(k_1) + \nu(k_2), \nu(k_1) + \nu(s_2), \nu(k_2) + \nu(s_1)\} \\
&\geq \text{mín}\{\nu(s_1s_2 - s_2s_1), \nu(s_1) + \nu(s_2), \nu(s_1) + \nu(s_2), \nu(s_2) + \nu(s_1)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(s_1s_2 - s_2s_1), \nu(s_1s_2)\} && \text{(porque } \nu(s_1s_2) = \nu(s_1) + \nu(s_2)) \\
&> \nu(s_1) + \nu(s_2) && \text{(por Teorema 3.2(5))} \\
&= \nu(s_1s_2 + s_2s_1) \\
&= \nu(s) && \text{(porque } \nu(s) = \nu(s_1) + \nu(s_2))
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\nu(k) > \nu(s)$ y $s \in P$, como consecuencia, tenemos que $(s_1 + k_1)(s_2 + k_2) = k + s \in Q$.

(3) **Ceradura bajo la involución.** Como $(s_1 + k_1)^* = s_1 - k_1 = s_1 + (-k_1)$ y $\nu(-k_1) = \nu(k_1) > \nu(s_1)$ entonces $(s_1 + k_1)^* \in Q$. Por lo tanto, $Q^* = Q$.

(4) **Cerradura bajo la $*$-conjugación.** Sea $r \in R$. Si $r = 0$, se tiene lo siguiente, $r(s_1 + k_1)r^* = 0 \in Q$. Por tanto, podemos suponer que r es no nulo. Luego, $r(s_1+k_1)r^* = rs_1r^* + rk_1r^* = u+v$, donde $u = rs_1r^*$ y $v = rk_1r^*$ evidentemente tenemos que $u^* = u$ y $v^* = -v$. Por otra parte como $\nu(k_1) > \nu(s_1)$, entonces $\nu(rk_1r^*) > \nu(rs_1r^*)$ (por Obs. 3.2 y usando el hecho de que $\nu(ab) = \nu(ba)$). Por tanto $r(s_1 + k_1)r^* = u + v \in Q$.

(5) Veamos que $Q \cap S(R) = P$. En efecto, si $s + k \in Q \cap S(R)$, entonces $s - k = (s + k)^* = s + k$, esto implica que $2k = 0$ y por ser R un dominio $k = 0$. Como $s + k \in Q$, entonces $s = 0$ ó $s \in P$, en los dos casos se tiene que $s + k \in P$. Luego tenemos que $Q \cap S(R) \subseteq P$, para la otra inclusión sea $s \in P$, si $s = 0$, entonces $s = 0 \in Q \cap S(R)$, ahora bien si $s \neq 0$, entonces podemos

escribir $s = s + k$, donde $k = 0$ es antisimétrico. Como $\nu(k) = \nu(0) = \infty > \nu(s)$, entonces $s = s + k \in Q \cap S(R)$. Así, $P \subseteq Q \cap S(R)$ y así $Q \cap S(R) = P$.

Por tanto hemos probado que Q es una extensión debil de P. ■

Marshall [[10], Theorem 2.2] mostró que todo $*$-orden P se extiende a un $*$-orden extendido débilmente cuya intersección con los elementos simétricos es de nuevo P. Probaremos que este $*$-orden débil también da un $*$-orden extendido.

Teorema 3.4. [[4], *Teorema 1.8*] *Sea P un $*$-orden en un $*$-anillo R donde 2 es una unidad. Existe un $*$-orden extendido Q con $Q \cap S(R) = P$.*

Demostración: Siguiendo la prueba de Marsall [[9], Theorem 2.2], podemos considerar que $P \cap -P = \{0\}$ y que R es un dominio. Marshal probó que

$$Q = \{p + q \mid p \in P,\ q^* = -q,\ \nu(q) > \nu(p)\}$$

es un $*$-orden extendido débilmente con $Q \cap S(R) = P$. Luego sólo falta probar que Q satisface la condición (6) de la Definición 3.1. Sabemos que el ideal generado por $Q \cap -Q$ es igual al ideal generado por $P \cap -P$ (por la Proposición 3.4). Luego, si $P \cap -P = \{0\}$, entonces ideal generado por $Q \cap -Q$ es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \{a \in R \mid aa^* \in P \cap -P\} \\ &= \{a \in R \mid aa^* \in \{0\}\} && \text{(ya que } P \cap -P = \{0\}) \\ &= \{a \in R \mid aa^* = 0\} \\ &= \{0\} && \text{(ya que R es un dominio)} \end{aligned}$$

Hemos probado de esta forma que el ideal generado por $Q \cap -Q$ es el ideal nulo.

Sean $rxr^* \in Q$ con $r \neq 0$, esto es r no es un elemento del ideal generado por $Q \cap -Q$. Podemos escribir $x = s + j$, donde $s^* = s$ y $j^* = -j$ (usando $s = (x + x^*)/2$,

$j = (x - x^*)/2)$. Entonces $rxr^* = p + q$ donde $p = rsr^*$ es simétrico y $q = rjr^*$ es un elemento semisimétrico. Por hipótesis tenemos que $p + q = rxr^* \in Q$, luego por la definición de Q se tiene lo siguiente, $p \in P$ y además que $\nu(q) > \nu(p)$, usando el hecho que ν es $*$-invariante se obtiene que $2\nu(r) + \nu(j) > 2\nu(r) + \nu(s)$, por tanto $\nu(j) > \nu(s)$. También tenemos por la Proposición 3.6 que $s \in P$, así $x = s + j \in Q$. ■

En el caso cuando el $*$-anillo bajo consideración es un anillo de división D ($*$-campo), Craven [[3], Teorema 2.3] ha probado una completa descripción de todos los $*$-ordenes extendidos conteniendo un $*$-orden P de D. En este caso el conjunto Γ_ν es un grupo. El conjunto Γ_ν^+ definido en Craven [[3], Sección 2] podría ser correctamente definido como

$$\Gamma_\nu^+ = \{\nu(k) \in \Gamma_\nu \mid k \in D^\times, \nu(k) > 0,\ k^* = -k\} \cup \{\infty\}$$

Teorema 3.5. [[3], Teorema 2,2] *Sea D un $*$-campo con un $*$-orden P y sea ν la valuación orden asociada con el grupo valuado Γ_ν. Existe una correspondencia uno a uno entre los $*$-ordenes Q conteniendo a P y los subconjuntos convexos $A \subset \Gamma_\nu^+$ conteniendo a $\{\nu(s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} - 1) \mid s_1, s_2 \in D^\times\}$ definido por*

$$Q_A = \{s + k \mid s \in P,\ k^* = -k,\ \nu(k) - \nu(s) \in A\} \quad y \quad A_Q = \{\nu(k) \mid 1 + k \in Q\}$$

En la definición de Q_A pensamos de $k = 0$ como $\nu(k) - \nu(s) = \infty$ puesto que esto ocurre para $s_1 = s_2 = 1$. Veremos en el Teorema 4.2 que este resultado generaliza a los dominios de Ore y los $*$-orden con soporte $\{0\}$.

Capítulo 4

Dominio de Ore

4.1. $*$-dominios de Ore derecho y $*$-dominios

Sea R un dominio de Ore derecho (Definición 1.12) con campo de fracciones D. Supondremos en esta sección que 2 es una unidad en R; esta condición es necesaria para el teorema 4.2.

Si D tiene una involución $*$, esta restricta a R da también una involución. Recíprocamente sabemos que si R tiene una involución esta se extiende a una involución en D.

Lemma 4.1. [[4], *Lema 2.1*] *Sea R $*$-anillo satisfaciendo la condición de Ore derecha. Entonces R también satisface la condición de Ore izquierda.*

Demostración: Recordemos que la condición de Ore izquierda dice que dados $x, y \in R^{\times}$ existen $u, x_1, y_1 \in R^{\times}$ tales que $uy_1x = ux_1y$. Así, sean $x, y \neq 0$. Haciendo $a = x^*$ y $b = y^*$ tenemos que $a, b \neq 0$. Como R satisface la condición de Ore derecha

(Definición 1.8) existen $t, a_1, b_1 \in R^{\times}$ tales que $ab_1t = ba_1t$, es decir, $x^*b_1t = y^*a_1t$, aplicando involución a esta igualdad tenemos que $t^*b_1^*x = t^*a_1^*y$. Tomando $u = t^*$, $x_1 = a_1^*$ y $y_1 = b_1^*$, tenemos que $u, x_1, y_1 \in R^{\times}$ son tales que $uy_1x = ux_1y$. Por tanto hemos probado que R cumple con la condición de Ore izquierda. ■

Lemma 4.2. [[4], *Lema 2.2*] *Sea R un dominio de Ore con una involución $*$ y campo de fracciones D. Entonces la involución se extiende únicamente a D.*

Demostración: Si $*$ se extiende a D, ésta debe ser definida por $(ab^{-1})^* = (b^*)^{-1}a^*$. Debemos chequear que esta igualdad está bien definida. Supongamos que $ab^{-1} = cd^{-1}$. Entonces existen $u, v \in R$ tales que $au = cv$ y $bu = dv$. Aplicando involución tenemos que, $u^*a^* = v^*c^*$ y $u^*b^* = v^*d^*$. Puesto que R es un dominio Ore izquierdo por Lema 4.1, y usado el análogo a la Definición 1.8 tenemos que el campo de fracciones izquierdo existe y por tanto $(b^*)^{-1}a^* = (d^*)^{-1}c^*$. ■

Teorema 4.1. [[4], *Teorema 2.3*] *Sea Q un $*$-orden extendido con soporte $\{0\}$ en un $*$-dominio de Ore R con campo de fracciones D. Definamos a*

$$Q_D = \{ab^{-1} \mid ab^* \in Q\}.$$

Entonces Q_D es un $*$-orden extendido en D y $Q_D \cap R = Q$.

Demostración: Antes de comenzar la prueba recordemos que R es un dominio y que $\mathfrak{p} = \{0\}$, este hecho nos permitirá garantizar que las condicciones de la Proposición 3.5 se cumple.

Primero debemos chequear que Q_D está bien definida. Asumamos que $ab^{-1} = cd^{-1}$ con $ab^* \in Q$. Debemos mostrar que $cd^* \in Q$. Por la igualdad de las fracciones tenemos que existen $u, v \in R^{\times}$ tales que $au = cv$ y $bu = dv$. Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned}
ab^*, uu^* \in Q &\Rightarrow auu^*b^* && \text{(por Proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (au)(bu)^* \in Q\\
&\Rightarrow (cv)(dv)^* \in Q && \text{(porque } au = cv \text{ y } bu = dv\text{)}\\
&\Rightarrow (c(vv^*))d^* \in Q\\
&\Rightarrow d^*(c(vv^*)) \in Q && \text{(por la proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (d^*c)(vv^*) \in Q\\
&\Rightarrow d^*c \in Q && \text{(porque } vv^* \in P \setminus -P \text{ y por la Prop. 3.5)}\\
&\Rightarrow cd^* \in Q && \text{(por la Proposición 3.5)}
\end{aligned}$$

Clausura bajo la adición. Supongamos que $ab^{-1}, cd^{-1} \in Q_D$, entonces $ab^*, cd^* \in Q$. La suma $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad_1 + cb_1)(bd_1)^{-1}$, donde $bd_1 = db_1$ y $b_1, d_1 \in R^{\times}$. Como $ab^*, cd^*, d_1d_1^*, b_1b_1^* \in Q$, entonces por la Proposición 3.5 tenemos $a(d_1d_1^*)b^*$ y $c(b_1b_1^*)d^*$ están en Q como consecuencia,

$$\begin{aligned}
(ad_1 + cb_1)(bd_1)^* &= (ad_1)(bd_1)^* + (cb_1)(bd_1)^*\\
&= a(d_1d_1^*)b^* + (cb_1)(db_1)^* && \text{(ya que } bd_1 = db_1\text{)}\\
&= a(d_1d_1^*)b^* + c(b_1b_1^*)d^* \in Q
\end{aligned}$$

Por tanto $ab^{-1} + cd^{-1} \in Q$.

Clausura bajo la multiplicación. De nuevo sean $ab^{-1}, cd^{-1} \in Q_D$, entonces $ab^*, cd^* \in Q$. El producto $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac_1)(db_1)^{-1}$, donde $bc_1 = cb_1$, $b_1, c_1 \in R^{\times}$.

Luego:

$$
\begin{aligned}
ab^*, cd^* \in Q &\Rightarrow (ab^*)(cd^*) \in Q && \text{(porque } Q \text{ es un cerrado bajo la multiplicación)}\\
&\Rightarrow (ab^*c)(b_1b_1^*)d^* \in Q && \text{(por la Proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (ab^*)(cb_1)(db_1)^* \in Q &&\\
&\Rightarrow (ab^*)(bc_1)(db_1)^* \in Q && \text{(porque, } bc_1 = cb_1\text{)}\\
&\Rightarrow (ab^*b)(c_1(db_1)^*) \in Q &&\\
&\Rightarrow ((c_1(db_1)^*)a)(b^*b) \in Q && \text{(por la Proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (c_1(db_1)^*)a \in Q && \text{(porque } b^*b \in P \setminus -P \text{ y por la Proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (ac_1)(db_1)^* \in Q && \text{(por la proposición 3.5)}\\
&\Rightarrow (ac_1)(db_1)^{-1} \in Q_D &&\\
&\Rightarrow (ab^{-1})(cd^{-1}) \in Q_D &&
\end{aligned}
$$

Clausura bajo la $*$-conjugación. Sean $ab^{-1} \in Q_D$ y $cd^{-1} \in D$ queremos probar que $c(d^{-1}(ab^{-1})(d^{-1})^*c^* = (cd^{-1})(ab^{-1})(cd^{-1})^* \in Q_D$. Vemos que la $*$-conjugación por cd^{-1} es la misma que $*$-conjugar primero por d^{-1} y luego $*$-conjugar por c. Para simplificar trabajemos por casos. Primero supongamos que $c \in R$ y $ab^{-1} \in Q_D$. Entonces $c(ab^{-1})c^* = (ca)(b^{-1}c^*) = (ca)(c_1b_1^{-1})$, donde $c^*b_1 = bc_1$ para algún $b_1, c_1 \in R^\times$. Esta última ecuación da $bc_1b_1^* = c^*b_1b_1^*$. Como Q es $*$-conjugado y $ab^* \in Q$ (ya que $ab^{-1} \in Q_D$), entonces $c(ab^*)c^* \in Q$, así $cab^*bc_1b_1^* = (cab^*c^*)(b_1b_1^*) \in Q$ (porque Q es cerrado bajo la multiplicación y $b_1b_1^* \in Q$), como $b_1b_1^* \in P\setminus -P$ ($b_1b_1^* \neq 0$), entonces aplicando la Proposición 3.5, $cac_1b_1^* \in Q$ y de aquí que $c(ab^{-1})c^* = cac_1b_1^{-1} \in Q_D$. Ahora trabajemos con $d^{-1}(ab^{-1})(d^{-1})^*$ donde $d \in R^\times$, obtenemos:

$$d^{-1}(ab^{-1})(d^{-1})^* = (d^{-1}a)(d^*b)^{-1} = (a_1d_1^{-1})(d^*b)^{-1} = a_1(d^*bd_1)^{-1}$$

donde $ad_1 = da_1$ y $a_1, d_1 \in R^\times$. Ahora $d^*(ab^*)d \in Q$ y podemos multiplicar por la norma $a_1a_1^*$ para obtener $Q \ni a_1a_1^*dabd = a_1(d_1^*a^*)ab^*d = a_1d_1^*(a^*a)b^*d$, y como $aa^* \in P\setminus -P$ y por la Proposición 3.5 se tiene $a_1(d^*bd_1)^* = a_1d_1^*b^*d \in Q$, así

$$d^{-1}(ab^{-1})(d^{-1})^* = a_1(d^*bd_1)^{-1} \in Q_D.$$

Por tanto si $cd^{-1} \in D$ tenemos que $c^{-1}ab^{-1}(c^{-1})^* \in Q_D$ y también se tiene que

$$(cd^{-1})(ab^{-1})(cd^{-1})^* = c(d^{-1}(ab)(d^{-1})^*)c^* \in Q_D$$

Por tanto Q_D es $*$-conjugada.

Clausura bajo la involución. Asumamos que $ab^{-1} \in Q_D$. Entonces $ab^* \in Q$, como Q es cerado vajo la involución tenemos que $ba^* = (ab^*)^* \in Q$ y así $ba^{-1} \in Q_D$. Luego, $(ab^{-1})^* = (ab^{-1})^*(ba^{-1})(ab^{-1}) \in Q_D$ ya que $ba^{-1} \in Q_D$ y Q_D es cerrada baja la $*$-conjugación. Por tanto $Q_D^* = Q_D$.

$S(D) \subseteq Q_D \cup -Q_D$.

Asumamos que $ab^{-1} \in S(D)$. Entonces $b^*a = b^*(ab^{-1})b \in S(D) \cap R = S(R)$. Como $S(R) \subseteq Q \cup -Q$, entonces tenemos dos posibilidades $b^*a \in Q$ (esto implica que $bb^*(ab^*) = b(b^*a)b^* \in Q$ y por la Proposición 3.5 tenemos que $ab^* \in Q$, así $ab^{-1} \in Q_D$) ó $b^*a \in -Q$ (esto implica que $bb^*(-ab^*) = b(-b^*a)b^* \in Q$ y por la Proposición 3.5 tenemos que $-ab^* \in Q$, así $ab^{-1} \in -Q_D$). En cualquiera de los dos casos tenemos que $ab^{-1} \in Q_D \cup -Q_D$. Por tanto $S(D) \subseteq Q_D \cup -Q_D$.

$Q_D \cap R = Q$.

Asumamos que $ab^{-1} \in Q_D \cap R$. Entonces también tenemos que $ab^{-1}bb^* = ab^* \in Q$. Como $ab^{-1} \in R$ y $bb^* \in P \setminus -P$, entonces aplicando la Proposición 3.5 tenemos que $ab^{-1} \in Q$. De aquí que $Q_D \cap R \subseteq Q$. Por otra parte si $a \in Q$ entonces $a(1)^* = a \in Q$, así que $a = a(1)^{-1} \in Q_D \cap R$ y como consecuencia $Q \subseteq Q_D \cap R$. Por tanto, $Q_D \cap R = Q$.

$Q_D \cap -Q_D = \{0\}$.

Si $ab^{-1} \in Q_D \cap -Q_D$, entonces $ab^{-1} \in Q_D$ y $-ab^{-1} \in Q_D$, esto implica que $ab^* \in Q$ y $-ab^* \in Q$, de aquí que $ab^* \in Q \cap -Q = \{0\}$ como R es un dominio tenemos que $a = 0$ ó $b = 0$, pero $b \neq 0$, como consecuencia $a = 0$, y así $0 = ab^{-1}$, por tanto $Q_D \cap -Q_D = \{0\}$.

Sea $P = Q_D \cap S(D)$. Veamos que P es un $*$-orden.

(1) Como $(1)(1)^* = 1 \in Q$, entonces $1 \in Q_D \cap S(D)$. Si $-1 \in P$, entonces $-1 \in Q_D$. Por tanto $-1 = (-1)(1)^* \in Q$ esto es una contradicción, porque Q es un $*$-orden extendido. Por tanto $-1 \in P$

(2) Como Q_D y $S(D)$ son cerrados bajo la adición entoces $P = Q_D \cap S(D)$ también es cerrado bajo la adición.

(3) Como Q_D y $S(D)$ son $*$-conjugados entonces $P = Q_D \cap S(D)$ también es $*$-conjugado.

(4) Probemos que $P \cup -P = S(D)$.

$$\begin{aligned} P \cup -P &= (Q_D \cap S(D)) \cup -(Q_D \cap S(D)) \\ &= (Q_D \cap S(D)) \cup (-Q_D \cap S(D)) \\ &= (Q_D \cup -Q_D) \cap S(D) \\ &= S(D) && \text{(porque } S(D) \subset Q_D \cup -Q_D) \end{aligned}$$

(5) $P \cap -P = \{0\}$. Enefecto:

$$\begin{aligned} P \cap -P &= (Q_D \cap S(D)) \cap -(Q_D \cap S(D)) \\ &= (Q_D \cap S(D)) \cap (-Q_D \cap S(D)) \\ &= (Q_D \cap -Q_D) \cap S(D) \\ &= \{0\} \cap S(D) && \text{(porque } Q_D \cap -Q_D = \{0\}) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Sean $ab^{-1}, cd^{-1} \in S(D)$ si $ab^{-1}(cd^{-1})ab^{-1} \in P \cap -P = \{0\}$, entonces $(ab^{-1})(cd^{-1})(ab^{-1}) = \{0\}$, pero como D es en particular un dominio tenemos $ab^{-1} = 0$ ó $cd^{-1} = 0$, de aquí que $ab^{-1} \in \{0\} = P \cap -P$ ó $cd^{-1} \in \{0\} = P \cap -P$.

(6) Si $ab^{-1}, cd^{-1} \in P$, entonces $ab^{-1}, cd^{-1} \in Q_D$ y $cd^{-1}, ab^{-1} \in S(D)$. Como $(ab^{-1})(cd^{-1}) + (cd^{-1})(ab^{-1}) \in S(D)$ ya que el producto de Jordan de elementos simétricos es simétrico. También se tiene que Q_D es cerrado bajo la multiplicación y la adición, de aquí que $(ab^{-1})(cd^{-1}) + (cd^{-1})(ab^{-1}) \in Q_D$, por tanto $(ab^{-1})(cd^{-1}) + (cd^{-1})(ab^{-1}) \in P$. ■

Observación 4.1. [[4], *Nota 2.4*] *Conservando la notación de arriba, tenemos que*

$$Q_D = \{ab^{-1} \in D \mid b^*a \in Q\}.$$

En efecto, como Q_D es cerrado bajo la $*$-conjugación, tenemos que $ab^{-1} \in Q_D$, si y sólo si $b^*a = b^*ab^{-1}b \in Q_D \cap R = Q$.

Corolario 4.1. [[4], *Corolario 2.5*] *Sea P un $*$-orden con soporte $\{0\}$ en un $*$-dominio de Ore R con campo de fracciones D. Definamos*

$$P_D = \{ab^{-1} \in S(D) \mid b^*a \in P\}.$$

Entonces P_D es un $*$-orden en D y $P_D \cap R = P$. Más aun, este proceso da una correspondencia uno a uno entre los $*$-órdenes de R y los $*$-órdenes de D.

Demostración: Sea Q el $*$-orden extendido dado por el Teorema 3.4. Sea Q_D la extensión D definida en el Teorema 4.1. Afirmamos que

$$P_D = \{ab^{-1} \in S(D) \mid b^*a \in P\} = Q_D \cap S(D)$$

Es claro que $P_D \subseteq Q_D \cap S(D)$, porque si $ab^{-1} \in P_D$, entonces $ab^{-1} \in S(D)$ y $b^*a \in P$, por tanto $ab^{-1} \in S(D)$ y $b^*a \in Q$ (porque $P \subseteq Q$). Por la Observación 4.1 tenemos que $ab^{-1} \in S(D)$ y $ab^{-1} \in Q_D$, por tanto $ab^{-1} \in Q_D \cap S(D)$. Recíprocamente, si $ab^{-1} \in Q_D \cap S(D)$, entonces por ser Q_D y $S(D)$ $*$-conjugados tenemos que

$$b^*a = b^*ab^{-1}b \in Q_D \cap S(D) \cap R = (Q_D \cap R) \cap (S(D) \cap R) = Q \cap S(R) = P,$$

así $ab^{-1} \in P_D$.

Para mostrar que este proceso da una correspondencia uno a uno, necesitamos mostrar que para un $*$-orden dado P' en D con $P = P' \cap R$, tenemos que $P' = P_D$. Sea $ab^{-1} \in P'$, por la cerradura bajo la $*$-conjugación, $b^*a = b^*(ab^{-1}))b \in P' \cap R = P$, así $ab^{-1} \in P_D$. Recíprocamente, si $ab^{-1} \in P_D$, entonces $b^*a \in P \subseteq P'$ y la cerradura de P' bajo la $*$-conjugación nos da como resultado

$$ab^{-1} = ((b^*)^{-1}b^*)(ab^{-1}) = (b^*)^{-1}(b^*a)b^{-1} = (b^{-1})^*(b^*a)b^{-1} \in P'. \quad \blacksquare$$

Proposición 4.1. [[4], *Proposición 2.6*] *Sea R un $*$-dominio de Ore con campo de fracciones D. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los $*$-órdenes extendidos en R con soporte $\{0\}$ y los $*$-órdenes extendidos en D.*

Demostración: Dado un $*$-orden extendido Q en R, tomemos Q_D como en el Teorema 4.1. Entonces $Q_D \cap R = Q$ (ver prueba del Teorema 4.1). Recíprocamente, sean Q' un $*$-orden extendido en D y $Q = Q' \cap R$. Debemos mostrar que $Q' = Q_D$. Sea $ab^{-1} \in Q_D$, entonces $ab^* \in Q \subseteq Q'$. Como $ab^*, (b^*)^{-1}b^{-1} \in Q'$ y Q' es cerrado bajo la multiplicación tenemos que $ab^{-1} = ab^*(b^*)^{-1}b^{-1} = ab^*(b^{-1})^*b^{-1} \in Q'$. Recíprocamente, sea $ab^{-1} \in Q'$. Entonces por ser $bb^* \in Q'$ y Q' cerrada bajo la multiplicación se tiene que $ab^* = ab^{-1}bb^* \in Q' \cap R = Q$, de esta forma hemos probado que $ab^* \in Q$ y como consecuencia $ab^{-1} \in Q_D$. Por tanto $Q' = Q_D$ $\blacksquare$

Próximamente chequearemos que la valuación orden definida por Marshall [10] para $*$-orden en R se extiende a una valuación orden como la definida por Holland [6] para el $*$-orden asociado a D. Sea ν la valuasión asociada a un $*$-orden P en R y sea Γ_ν su semigrupo asociado. Puesto que Γ_ν es un semigrupo de cancelación, podemos formar el grupo de Grothendieck $\widetilde{\Gamma}_\nu$. La próxima proposición muestra que ν se extiende a una $*$-valuación en D asociada con el $*$-orden P_D teniendo grupo valuado $\widetilde{\Gamma}_\nu$.

Proposición 4.2. [[4], *Proposición 2.7*] *Sea ν la valuación asociada con el $*$-orden P en el dominio de Ore R. Sea D y P_D como arriba. Extendemos ν a D definiendo*

$\widetilde{\nu}(ab^{-1}) = \nu(a) - \nu(b)$ en $\widetilde{\Gamma}_{\nu}$. Esto da una valuación bien definida en D que es la valuación orden asociada para P_D.

Demostración: Para chequear que $\widetilde{\nu}$ está bien definida, necesitamos ver que si $ab^{-1} = cd^{-1}$, entonces $\nu(a) - \nu(b) = \nu(c) - \nu(c)$. Puesto que $ab^{-1} = cd^{-1}$, implica que existen b_1, d_1 tales que $ad_1 = cb_1$ y $db_1 = bd_1$. Entonces $\nu(a)+\nu(d_1) = \nu(c)+\nu(b_1)$ y $\nu(d) + \nu(b_1) = \nu(b) + \nu(d_1)$. Por tanto, $\widetilde{\nu}$ está bien definida. De estas dos últimas igualdades tenemos que $\nu(a)-\nu(b) = \nu(c)-\nu(d)$. Veamos que $\widetilde{\nu}$ cumple las otras condiciones. Sean $x, y \in D$, entonces existen $a, b, c, d \in R$ tales que $x = ab^{-1}$ y $y = cd^{-1}$. Luego, tenemos:

(1) Por definición de multiplicación en D, $xy = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac_1)(db_1)^{-1}$, donde $bc_1 = cb_1$. Así,

$$\begin{aligned} bc_1 = cb_1 &\Rightarrow \nu(bc_1) = \nu(cb_1) \\ &\Rightarrow \nu(b) + \nu(c_1) = \nu(c) + \nu(b_1) \\ &\Rightarrow \nu(c_1) - \nu(b_1) = \nu(c) - \nu(b) \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Ahora probemos que $\widetilde{\nu}(xy) = \widetilde{\nu}(x) + \widetilde{\nu}(y)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}(xy) &= \widetilde{\nu}((ab^{-1})(cd^{-1})) \\ &= \widetilde{\nu}((ac_1)(db_1)^{-1}) \\ &= \nu(ac_1) - \nu(db_1) \\ &= \nu(a) + \nu(c_1) - \nu(d) - \nu(b_1) \\ &= \nu(a) - \nu(d) + \nu(c_1) - \nu(b_1) \\ &= \nu(a) - \nu(d) + \nu(c) - \nu(b) \qquad \text{(por (I))} \\ &= (\nu(a) - \nu(b)) + (\nu(c) - \nu(d)) \\ &= \nu(ab^{-1}) + \nu(cd^{-1}) \\ &= \widetilde{\nu}(x) + \widetilde{\nu}(y) \end{aligned}$$

(2) Queremos probar que $\widetilde{\nu}(x+y) \geq \text{mín}\{\widetilde{\nu}(x), \widetilde{\nu}(y)\}$. En efecto por definición de adición en D tenemos que $x + y = ab^{-1} + cd^{-1} = (ad_1) + cb_1)(bd_1)^{-1}$, donde $bd_1 = db_1$. Luego,

$$\nu(bd_1) = \nu(db_1) \Rightarrow \nu(b) + \nu(d_1) = \nu(d) + \nu(b_1)$$

Esta igualdad nos permitirá desmostrar la desigualdad que deseamos.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}(x+y) &= \widetilde{\nu}(ab^{-1} + cd^{-1}) \\
&= \widetilde{\nu}((ad_1 + cb_1)(bd_1)^{-1}) \\
&= \nu(ad_1 + cb_1) - \nu(bd_1) \\
&= \nu(ad_1 + cb_1) - (\nu(b) + \nu(d_1)) \\
&\geq \text{mín}\{\nu(a) + \nu(d_1), \nu(c) + \nu(b_1)\} - (\nu(b) + \nu(d_1)) \\
&= \text{mín}\{\nu(a) + \nu(d_1) - (\nu(b) + \nu(d_1)), \nu(c) + \nu(b_1) - (\nu(b) + \nu(d_1))\} \\
&= \text{mín}\{\nu(a) + \nu(d_1) - (\nu(b) + \nu(d_1)), \nu(c) + \nu(b_1) - (\nu(d) + \nu(b_1))\} \\
&= \text{mín}\{\nu(a) - \nu(b), \nu(c) - \nu(d)\} \\
&= \text{mín}\{\nu(ab^{-1}), \nu(cd^{-1})\} \\
&= \text{mín}\{\widetilde{\nu}(x), \widetilde{\nu}(y)\}
\end{aligned}$$

Por tanto $\widetilde{\nu}$ es una valuación. Sólo falta probar que:

(3) $\widetilde{\nu}$ es una $*$-valuación. En efecto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}((ab^{-1})^*) &= \widetilde{\nu}((b^*)^{-1}a^*) \\
&= \widetilde{\nu}((b^*)^{-1}) + \widetilde{\nu}(a^*) \\
&= -\nu(b^*) + \nu(a^*) \\
&= \nu(a) - \nu(b) \\
&= \widetilde{\nu}(ab^{-1})
\end{aligned}$$

Por (3) tenemos lo siguiente,

$$\widetilde{\nu}(xy) = \widetilde{\nu}((xy)^*) = \widetilde{\nu}(y^*x^*) = \widetilde{\nu}(y^*) + \widetilde{\nu}(x^*) = \widetilde{\nu}(y) + \widetilde{\nu}(x) = \widetilde{\nu}(yx).$$

Por tanto, $\widetilde{\nu}(xy) = \widetilde{\nu}(yx)$.

Para la valuación orden, el anillo de valuación es:

$$A(P_D) = \{ab^{-1} \in D \mid nbb^* - aa^* \in P_D \text{ para algún entero positivo } n\}$$

En efecto, como $\widetilde{\nu}(ab^{-1}) \geqslant 0$ si y sólo si $\nu(a) - \nu(b) \geqslant 0$, que es equivalente a $\nu(a) \geqslant \nu(b)$ y por definición tenemos que $nbb^* \geqslant aa^*$ para algún entero positivo n. Por tanto $\widetilde{\nu}(ab^{-1}) \geqslant 0$ si y sólo si $nbb^* - aa^* \in P_D$ para algún entero positivo n. ■

Veamos otras propiedades de la valuación $\widetilde{\nu}$, en la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Sean $a, b, c \in R^\times$ entonces:*

(1) $\widetilde{\nu}(a^{-1}) = -\widetilde{\nu}(a)$

(2) $\widetilde{\nu}(ba^{-1}) = \widetilde{\nu}(a^{-1}b)$

(3) Si $x, y \in D^\times$, entonces $\widetilde{\nu}(xy - 1) = \widetilde{\nu}(yx - 1)$

(4) $\widetilde{\nu}([a^\alpha, b^\beta] - 1) = \nu(ab - ba) - \nu(a) - \nu(b), \quad$ donde $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

Demostración:

(1) Supongamos que a es un elemento no nulo de R. Entonces:

$$\nu(a^{-1}) = \nu(1a^{-1}) = \nu(1) - \nu(a) = 0 - \nu(a) = -\nu(a)$$

(2) Supongamos que $b^{-1}a \in D$. Entonces existen $b_1, a_1 \in R$ tales que $b^{-1}a = b_1 a_1^{-1}$, de aquí que $a = bb_1 a_1^{-1} = (bb_1)a_1^{-1}$. Luego,

$$\nu(a) = \widetilde{\nu}(a) = \widetilde{\nu}((bb_1)a_1^{-1}) = \nu(b) + \nu(b_1) - \nu(a_1),$$

esto implica que

$$\widetilde{\nu}(ab^{-1}) = \nu(a) - \nu(b) = \nu(b_1) - \nu(a_1) = \widetilde{\nu}(b_1 a_1^{-1}) = \widetilde{\nu}(b^{-1}a)$$

(3) Sean $x, y \in D^{\times}$, entonces

$$\widetilde{\nu}(xy-1) = \widetilde{\nu}(y) + \widetilde{\nu}(xy-1) - \widetilde{\nu}(y) = \widetilde{\nu}(y(xy-1)y^{-1}) = \widetilde{\nu}(yx-1)$$

(4) Para $\alpha = \beta = 1$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}([a,b]-1) &= \widetilde{\nu}(aba^{-1}b^{-1}-1)\\
&= \widetilde{\nu}((ab-ba)(ba)^{-1})\\
&= \nu(ab-ba) - \nu(a) - \nu(b)
\end{aligned}$$

Para $\alpha = \beta = -1$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}([a^{-1},b^{-1}]-1) &= \widetilde{\nu}(a^{-1}b^{-1}ab-1)\\
&= \widetilde{\nu}((ba)^{-1}(ab-ba))\\
&= \nu((ab-ba)(ba)^{-1}) && \text{(por (2))}\\
&= \nu(ab-ba) - \nu(a) - \nu(b)
\end{aligned}$$

Para $\alpha = 1$ y $\beta = -1$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}([a,b^{-1}]-1) &= \widetilde{\nu}(ab^{-1}a^{-1}b-1)\\
&= \widetilde{\nu}(bab^{-1}a^{-1}-1) && \text{(por (3))}\\
&= \widetilde{\nu}((ba-ab)(ab)^{-1})\\
&= \nu(ba-ab) - \nu(a) - \nu(b)\\
&= \nu(-(ba-ab)) - \nu(a) - \nu(b)\\
&= \nu(ab-ba) - \nu(a) - \nu(b)
\end{aligned}$$

Para $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, se prueba en forma similar que el caso anterior. ■

Esta proposición será útil en la prueba del Lema 4.3.

Observación 4.2. [*4*] *Usaremos* ν *para denotar tanto la valuación en* R *como la valuación en su única extensión* D.

Estamos finalmente en una posición de dar una caracterización teórica de la valuación de toda extensiones de un $*$-orden. Definimos

$$\widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu} = \{\nu(k) - \nu(s) \in \widetilde{\Gamma}_{\nu} \mid k, s \in R^{\times},\ \nu(k) > \nu(s),\ k^{*} = -k,\ s^{*} = s\} \cup \{\infty\}.$$

La diferencia entre este y el $*$-campo priori al Teorema es principalmente una técnica.

Observación 4.3. *Si* $x \in \widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu} - \{\infty\}$, *entonces existen* $k \in SK(R)^{\times}$ *y* $s \in S(R)^{\times}$, *tales que* $\nu(x) = \nu(ks^{-1}) = \nu(k) - \nu(s) > 0$. *También si* $\nu(x) = \infty > \nu(1) = 0$. *Por tanto, todo elemento de* $x \in \widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu}$ *es positivo.*

Teorema 4.2. [[*4*],*Teorema 2.8*] *Sea* P *un* $*$-*orden con soporte {0 } en un* $*$-*dominio de Ore* R. *Supongamos que* 2 *es una unidad en* R. *Existe una correspondencia biyectiva entre los* $*$-*ordenes extendidos que intersectan a* $S(R)$ *en* P *y los subconjuntos convexos* A *de* $\widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu}$ *conteniendo a*

$$\{\nu(ab - ba) - \nu(a) - \nu(b) \mid a, b \in S(R)^{\times}\} \cup \{\infty\}$$

Nótese que esto es razonable: Si $a, b \in S(R)^{\times}$, entonces por el Teorema 3.2 (5) se tiene que $\nu(ab - ba) > \nu(ab)$ y por el Lema 3.3 tenemos que $\nu(ab) = \nu(ab + ba)$, haciendo $k = ab - ba$ y $s = ab + ba$ obtenemos que $s \in S(R)$ y $k \in SK(R)$, luego $\nu(ab - ba) - \nu(ab) = \nu(ab - ba) - \nu(ab + ba) \in \widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu}$, como consecuencia

$$\{\nu(ab - ba) - \nu(a) - \nu(b) \mid a, b \in S(R)^{\times}\} \cup \{\infty\} \subseteq \widetilde{\Gamma}^{+}_{\nu}.$$

Sea D el campo de fracciones de R. Sea A un subconjunto convexo de $\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ conteniendo a $\{\nu(ab-ba)-\nu(a)-\nu(b)\,|\,a,b\in S(R)^\times\}\cup\{\infty\}$. Como los inversos existen si a y b son no nulos, podemos escribir $\nu(ab-ba)-\nu(a)-\nu(b)=\nu(aba^{-1}b^{-1}-1)$. Tomando $a=b=1$, se obtiene que $\nu(0)=\infty\in A$. Si $\nu(x)\in A$ y $\nu(y)\geq\nu(x)$, entonces como $\nu(0)=\infty\in A$, tenemos que $\nu(0)\geq\nu(y)\geq\nu(x)$, por convexidad de A tenemos que $\nu(y)\in A$, así la convexidad de A implica que este tiene todos los elementos más grande que un elemento dado en el conjunto A. Antes de hacer la prueba de este Teorema, primero probemos los siguientes Lemas.

Lemma 4.3. [[4], *Lema 2.9*] *Sea A un subconjunto convexo de $\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ conteniendo a*

$$\{\nu(ab-ba)-\nu(a)-\nu(b)\mid a,b\in S(R)\}.$$

Entonces A contiene todos los elementos de la forma $\nu(xyx^{-1}y^{-1}-1)$ para $x,y\in S(D)^\times$.

Demostración:

(1) Sean $x,y\in S(R)^\times$. Por la Proposición 4.3 (4) tenemos que

$$\widetilde{\nu}([x^\alpha,y^\beta]-1)=\nu(xy-yx)-\nu(x)-\nu(y),$$

donde $\alpha,\beta\in\{-1,1\}$. Así el conjunto A contiene a $\nu([x,y]-1),\nu([x,y^{-1}]-1)$, $\nu([x^{-1},y]-1)$ y $\nu([x^{-1},y^{-1}]-1)$.

(2) Si A contiene a $\nu([a,b]-1)$ y $\nu([a,c]-1)$, entonces A contiene a $\nu([a,bc]-1)$. También tenemos que si $\nu([a,b]-1)$ y $\nu([c,b]-1)$, entonces A

contiene a $\nu([ac,b]-1)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\nu([a,bc]-1) &= \nu(abca^{-1}c^{-1}b^{-1}-1)\\
&= \nu(ab[c,a^{-1}]a^{-1}b^{-1}-1)\\
&= \nu(ab([c,a^{-1}]-b^{-1}a^{-1}ba)a^{-1}b^{-1})\\
&= \nu(ab([c,a^{-1}]-[b^{-1},a^{-1}])a^{-1}b^{-1})\\
&= \nu(a)+\nu(b)+\nu([c,a^{-1}]-[b^{-1},a^{-1}])-\nu(a)-\nu(b) \quad \text{(Prop. 4.3)}\\
&= \nu([c,a^{-1}]-1+1-[b^{-1},a^{-1}])\\
&\geq \text{mín}\{\nu([c,a^{-1}]-1),\ \nu(1-[b^{-1},a^{-1}])\}\\
&= \text{mín}\{\nu(ca-ac)-\nu(c)-\nu(a),\ \nu(ba-ab)-\nu(b)-\nu(a)\}
\end{aligned}$$

La prueba de la segunda afirmación es casi similar a la prueba de la primera afirmación, solamente difiere un poco en la ordenación de los elementos, para saldar esta dificultad utilizaremos la Proposión 4.3.

$$\begin{aligned}
\nu([ac,b]-1) &= \nu(acbc^{-1}a^{-1}b^{-1}-1)\\
&= \nu(b^{-1}acbc^{-1}a^{-1}-1) \qquad \text{(Prop. 4.3)}\\
&= \nu(b^{-1}a(cbc^{-1}b^{-1})ba^{-1}-1)\\
&= \nu(b^{-1}a[c,b]ba^{-1}-1)\\
&= \nu(b^{-1}a([c,b]-[a^{-1},b])ba^{-1})\\
&\geq \text{mín}\{\nu(cb-bc)-\nu(c)-\nu(b),\ \nu(ab-ba)-\nu(a)-\nu(b)\}
\end{aligned}$$

(3) En toda fracción $ab^{-1}\in S(D)$, podemos suponer que a y b son productos de dos elementos simétricos en $S(R)$. En efecto, trabajando en D, escribiremos $x=ab^{-1}$ y $y=cd^{-1}$ con $x,y\in S(D)$ y $a,b,c,d\in R^{\times}$, luego tenemos:

$$\begin{aligned}
[x,y] &= [ab^{-1},cd^{-1}]\\
&= ab^{-1}cd^{-1}ba^{-1}dc^{-1}\\
&= (ab^{-1}a^{-1}b)(b^{-1}acd^{-1}bdc^{-1}a^{-1})(acd^{-1}a^{-1}dc^{-1})\\
&= [a,b^{-1}][b^{-1},acd^{-1}][a,cd^{-1}]
\end{aligned}$$

Puesto que $ab^{-1} \in S(D)$, entonces $b^*a = b^*(ab^{-1})b \in S(D) \cap R = S(R)$, así tenemos que $a^*b = (b^*a)^* \in S(R)$. Luego, podemos escribir

$$ab^{-1} = (ab^*ba^*)(bb^*)[(bb^*)(ba^*bb^*)]^{-1}$$

(4) Si $\nu(s-1), \nu(t-1) \in A$, entonces $\nu(st-1) \in A$. Para ver esto, nótese que

$$\begin{aligned} \nu(st-1) &= \nu((s-1)(t-1) + (s-1) + (t-1)) \\ &\geq \text{mín}\{\nu((s-1)(t-1)), \nu(s-1), \nu(t-1)\} \\ &= \text{mín}\{\nu(s-1), \nu(t-1)\} \end{aligned}$$

Esta última igualdad se cumple ya que $\nu(s-1) > 0$ y $\nu(t-1) > 0$ (ver la Observación 4.3). Por tanto $\nu((s-1)(t-1)) = \nu(s-1) + \nu(t-1) > \nu(s-1)$ y $\nu((s-1)(t-1)) = \nu(s-1) + \nu(t-1) > \nu(t-1)$. Luego, por convexidad de A tenemos que $\nu(st-1) \in A$.

(5) $\nu([x,y]-1) \in A$. En efecto, como $[x,y] = [a,b^{-1}][b^{-1}, acd^{-1}][a, cd^{-1}]$, probemos primero que $\nu([a,b^{-1}]-1), \nu([b^{-1}, acd^{-1}]-1)$ y $\nu([a,cd^{-1}]-1)$ están en A. Sólamente probaremos que $\nu([a,b^{-1}]-1) \in A$ las otras dos afirmaciones se procede en forma análoga. Por (3) tenemos que $xy^{-1} = uv(rs)^{-1} = uvs^{-1}r^{-1}$ donde $u, v, r, s \in S(R)$. Por (1), se tiene que

$$\nu([u,s^{-1}]-1),\ \nu([u,r^{-1}]-1),\ \nu([v,s^{-1}]-1),\ \nu([v,r^{-1}]-1) \in A.$$

Por (2) tenemos que

$$\nu([u,s^{-1}r^{-1}]-1),\ \nu([v,s^{-1}r^{-1}]-1) \in A$$

y nuevamente por (2) concluimos que $\nu([uv, s^{-1}r^{-1}]-1) \in A$. Aplicando (2) de nuevo obtenemos lo siguiente

$$\nu([x,y]-1) = \nu([a,b^{-1}][b^{-1}, acd^{-1}][a, cd^{-1}]-1) \in A$$

y esto completa la demostración. ∎

Prueba del Teorema 4.2.

Por el Teorema 4.3, el conjunto A da origen a un único $*$-orden extendido Q_A definido por:

$$Q_A = \{s + k \mid s \in P,\ k^* = -k, \nu(k) - \nu(s) \in A\}.$$

Por el Lema 4.3, A contiene todos los elementos de la forma $\nu(xyx^{-1}y^{-1} - 1)$ donde $x, y \in S(D)^\times$. Por el Teorema 3.5, para el $*$-orden P_D definido en el Corolario 4.1, el conjunto A corresponde únicamente a un $*$-orden Q_D de D, dado por:

$$Q_D = \{s + k \mid s \in P_D,\ k^* = -k, \nu(k) - \nu(s) \in A\}.$$

Veamos que $Q_A \subseteq Q_D \cap R$.

Si $k + s \in Q_A$, entonces por definición de Q_D tenemos que $s \in P$, $k^* = -k$ y $\nu(k) - \nu(s) \in A$, pero $P \subseteq P_D$, de aquí que $x \in Q_D$. Además $k + s \in R$ (porque $s, k \in R$), por tanto $x \in Q_D \cap R$.

Ahora veamos que $Q_D \cap R \subseteq Q_A$.

Sea $s + k \in Q_D \cap R$. Entonces $s \in P_D = Q_D \cap S(D)$, $k^* = -k$ (donde $k \in D$). Como $2s = (s + k) + (s + k)^* \in R$ y $\frac{1}{2} \in R$ tenemos que $s = (\frac{1}{2})(2s) \in R$, luego $k = (s + k) - s \in R$. Luego, $s, k \in R$. Como $s1^{-1} = s \in R \cap P_D$, por definición de P_D, tenemos siguiente $s = 1s = 1^*s \in P$. Por otra parte se tiene que $\nu(k) - \nu(s) \in A$, esto implica que $s + k \in Q_A$. Por tanto $Q_D \cap R = Q_A$. Luego,

$$Q_D \cap S(R) = Q_D \cap (R \cap S(R)) = (Q_D \cap R) \cap S(R) = Q_A \cap S(R) = P$$

La última igualdad ocurre por que Q_A es una $*$-extensión de P. $\blacksquare$

4.2. Dominios generales

Cuando R no es un dominio de Ore, es más difícil saber lo que ocurre. En verdad, hasta los momento no tenemos conocimiento de ejemplo de un dominio que no es de Ore con $*$-orden con soporte cero. La costrucción mostrada en la sección 2 para dar todas extensiones de un $*$-orden en un dominio Ore es mostrada en caso general que da una familia de extensiones.

Teorema 4.3. [[4], *Teorema 3.1*] *Sea R un $*$-dominio donde 2 es una unidad. Sea P un $*$-orden con soporte $\{0\}$. Sea A un subconjunto convexo de $\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ conteniendo al conjunto $\{\nu(ab-ba)-\nu(a)-\nu(b) \mid a,b \in S(R)\}$. Definamos*

$$Q = Q_A = \{s+k \mid s \in P^\times, k^* = -k, \nu(k)-\nu(s) \in A\} \cup \{0\}.$$

Entonces Q es un $*$-orden extendido que intersecta los elementos simétricos en P.

Demostración: Chequearemos las seis condiciones de la Definición 3.1.

(1) **Clausura bajo la adición.** Sean $s_i + k_i \in Q$, $i = 1,2$, donde $0 \neq s_i \in P$ y $k_i^* = -k_i$. Puesto que $0 < s_1 < s_1 + s_2$, entonces por Proposición 3.7 (2)

$$s_1^2 = s_1 s_1^* < (s_1+s_2)(s_1+s_2)^* = (s_1+s_2)^2$$

esto implica que $\nu(s_1) \geq \nu(s_1+s_2)$ por definición de ν. Similarmente se tiene $\nu(s_2) \geq \nu(s_1+s_2)$, así que $\nu(s_1+s_2) \leq \min\{\nu(s_1),\nu(s_2)\}$. Por el Teorema 3.2, ν es una valuación ordinaria dándonos que $\nu(s_1+s_2) \geq \min\{\nu(s_1),\nu(s_2)\}$, así tenemos que $\nu(s_1+s_2) = \min\{\nu(s_1),\nu(s_2)\}$. Nótese que

$$\nu(s_1+s_2) = \min\{\nu(s_1),\nu(s_2)\} \leq \nu(s_i) \qquad \textit{con } i = 1,2.$$

Si $\quad \nu(k_1+k_2) \geq \min\{\nu(k_1),\nu(k_2)\} = \nu(k_i),\quad$ entonces

$$\nu(k_1+k_2) - \nu(s_1+s_2) \geq \nu(k_i) - \nu(s_1+s_2) = \nu(k_i) - \nu(s_i) \in A.$$

Luego por convexidad de A tenemos que $\nu(k_1+k_2)-\nu(s_1+s_2)\in A$. Por tanto $(s_1+s_2)+(k_1+k_2)\in Q$.

(2) **Cerradura bajo la multiplicación.** Sean s_i, k_i como arriba, el producto

$$(s_1+k_1)(s_2+k_2)=s_1s_2+s_1k_2+k_1s_2+k_1k_2$$

lo podemos escribir como $(s_1+k_1)(s_2+k_2)=s+k$ donde

$$s=(s_1s_2+s_2s_1+k_1k_2+k_2k_1+k_1s_2-s_2k_1+s_1k_2-k_2s_1)/2$$

y

$$k=(s_1s_2-s_2s_1+k_1k_2-k_2k_1+k_1s_2+s_2k_1+s_1k_2+k_2s_1)/2$$

evidentemente $s^*=s$ y $k^*=-k$. Por el Lema 3.3,

$$\nu(s_1s_2+s_2s_1)=\nu(s_1)+\nu(s_2).$$

Como $A\subseteq\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ y $\nu(k_i)-\nu(s_i)\in A$ para $i=1,2$, entonces por definición de $\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ obtenemos $\nu(k_i)>\nu(s_i)$, para $i=1,2$. En la prueba del Teorema 3.1 (2), se probó que $s\in P$, $\nu(s)=\nu(s_1s_2+s_2s_1)$ (de aquí obtenemos lo siguiente $\nu(s)=\nu(s_1)+\nu(s_2)$), $\nu(k)>\nu(s)$ y por tanto $\nu(k)-\nu(s)\in\widetilde{\Gamma}_\nu^+$ y además, también se probó que

$$\nu(k)\geq \text{mín}\{\nu(s_1s_2-s_2s_1),\nu(s_i)+\nu(k_j)(i\neq j)\}.$$

Si $\nu(k)\geq\nu(s_i)+\nu(k_j)$, entonces

$$\nu(k)-\nu(s)\geq\nu(s_i)+\nu(k_j)-\nu(s)=\nu(k_j)-\nu(s_j)\in A$$

$(\nu(s)=\nu(s_1)+\nu(s_2)=\nu(s_i)+\nu(s_j)\ (i\neq j))$. Entonces por convexidad de A tenemos que $\nu(k)-\nu(s)\in A$, por tanto $s+k\in Q$. Por otra parte, si se cumple la desigualdad $\nu(k)\geq\nu(s_1s_2-s_2s_1)$, entonces por hipótesis se tiene,

$$\nu(k)-\nu(s)\geq\nu(s_1s_2-s_2s_1)-\nu(s_1)-\nu(s_2)\in A$$

y por convexidad de A se tiene que $\nu(s)-\nu(k)\in A$, por tanto $s+k\in Q$.

(3) **Ceradura bajo la involución.** Como $(s_1+k_1)^* = s_1 - k_1 = s_1 + (-k_1)$ y $\nu(-k_1) = \nu(k_1)$, entonces $\nu(-k_1) - \nu(s_1) = \nu(k_1) - \nu(s_1) \in A$, así $(s_1+k_1)^* \in Q$. Por tanto, $Q^* = Q$.

(4) **Cerradura bajo la $*$-conjugación.** Sea $r \in R$, entonces

$$r(s_1+k_1)r^* = rs_1r^* + rk_1r^* = u + v$$

donde $u = rs_1r^*$ y $v = rk_1r^*$ evidentemente tenemos que $u^* = u$ y $v^* = -v$. Si $r = 0$, entonces $r(s_1+k_1)r^* = 0 \in Q$. Supongamos ahora que $r \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\nu(u) - \nu(v) &= \nu(r) + \nu(k_1) + \nu(r^*) - \nu(r) - \nu(s_1) - \nu(r^*) \\ &= \nu(k_1) - \nu(s_1) \in A\end{aligned}$$

Por tanto $r(s_1+k_1)r^* = u + v \in Q$.

(5) Veamos que $Q \cap S(R) = P$.

En efecto, si $s + k \in Q \cap S(R)$, entonces $s - k = (s+k)^* = s + k$, esto implica que $2k = 0$ y por ser R un dominio $k = 0$. Como $s + k \in Q$, entonces $s + 0 = s \in P$. Luego tenemos que $Q \cap S(R) \subseteq P$, para la otra inclusión si $s \in P^\times$, entonces podemos escribir $s = s + k$, donde $k = 0$ es antisimétrico. Como $\nu(k) - \nu(s) = \nu(0) - \nu(s) = \infty \in A$, entonces $s = s + k \in Q \cap S(R)$. Así, $P \subseteq Q \cap S(R)$ por tanto $Q \cap S(R) = P$.

(6) De (1),(2),(3),(4) y (5) tenemos que Q es una extensión débil de P. Sea $rxr^* \in Q$ donde r no está en el ideal generado por $Q \cap -Q$. Como estamos suponiendo que el soporte es $\{0\}$, entonces el ideal generado por $Q \cap -Q$ es $\{0\}$ (ver prueba del Teorema 3.4), como consecuencia $r \neq 0$. Sea $x = s + k$, donde $s \in S(R)$ y $k^* = -k$. Luego, se tiene que $rsr^* + rkr^* = rxr^* \in Q$, así tenemos dos posibilidades, la primera de ella es que $rxr^* = 0$, pero como R es un dominio y $r \neq 0$, entonces $x = 0 \in Q$, la otra posibilidad es que $rxr^* \neq 0$ esto implica que $rsr^* \in P^\times$ y $\nu(k) - \nu(s) = \nu(rkr^*) - \nu(rsr^*) \in A$. Probemos que $s \in P^\times$.

Si $s \in -P$, entonces $rsr^* \in -P$ por tanto $rsr^* \in P \cap -P = \{0\}$ de aquí que $rsr^* = 0$ esto contradice el hecho de que $rsr^* \in P^\times$. Luego, $s \in P^\times$ y $\nu(k) - \nu(s) \in A$. Por tanto $x = s + k \in Q$. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] P.M Cohn. *Skew fields.* Encyclopedia of Mathematical Applications, Vol. 57, Cambridge Univ. Press, London (1995)

[2] T. Craven. *orderings, valuations and hermitian form over $*$-fields.* Proc. Symposia pure Math.58,No. 2, (1995) 149-160.

[3] T. Craven. *Extension of orderings on $*$-fields.* Proc. Amer. Math. Soc. 124, (1996) 369-375.

[4] T. Craven, T. Smith. *Ordering $*$-ring.* Journal of Algebra 238, (2001) 314-327.

[5] I.N. Herstein. *Rings with involution.* University of Chicago Press, (1976)

[6] S. Holland,Jr. *Strong orderings of $*$-field.* Journal of Algebra 101, (1986) 16-46.

[7] T.Y. Lam. *Ordering,valuations and quadratic forms.* Regional Conf. Series in Math. 52 AMS, (1983)

[8] T.Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings.* Springer-Verlan, New York, (1991)

[9] T.Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings.* Springer-Verlan, New York, (1999)

[10] M. Marshall. *$*$-ordering on a rings with involution.* Comm. Algebra 28, (2000) 1157-1173