Índice general

Introducción

Recientemente ha habido un gran interés en el estudio de la dinámica discreta proveniente de aplicaciones monótonas sobre espacios de Banach fuertemente ordenados, ver por ejemplo [DH], [HL], [PT1], [PT2], [Tal], [Te], [S1], y [EY].

Aunque un gran número de modelos matemáticos de competencia de dos especies son expresados en términos de aplicaciones monótonas, todavía la teoría de los sistemas dinámicos discretos monótonos no ha sido sistemáticamente empleada en el estudio de estos modelos. Una razón para esto es indudablemente el hecho de que estos modelos originan mapas que son monótonos sólo para un parte del espacio de parámetros o del espacio donde actúan. Esto está en severo contraste con el caso de los modelos de competencia entre especies provenientes de las ecuaciones diferenciales, los cuales originan, casi que invariablemente, sistemas dinámicos continuos monótonos en todo el espacio. Además, las aplicaciones de primer retorno de Poincaré asociadas a ecuaciones diferenciales ordinarias con variación de tiempo periódico, son mucho más simples que las aplicaciones típicamente usadas en modelos discretos de la Biología.

Como una ilustración, el conocido modelo de Lotka-Volterra de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ver [S1], genera un sistema dinámico continuo y monótono en el primer cuadrante del plano real; pero la contraparte discreta

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \exp[r(1-u_n-b\nu_n)] \\ \nu_{n+1} &= \nu_n \exp[s(1-cu_n-\nu_n)] \end{aligned} \tag{1}$$

genera un sistema dinámico discreto monótono sólo cuando la rata intrínseca de crecimiento de cada población no es muy grande. En oposición al anterior modelo, el siguiente debido a Jones y Perry,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha u_n + (1-\alpha)\frac{cu_n}{(a+cu_n+\nu_n)} \\ \nu_{n+1} &= \beta \nu_n + (1-\beta)\frac{d\nu_n}{(b+u_n+d\nu_n)} \end{aligned} \tag{2}$$

el cual modela la competencia de dos especies de nemátodos[1] sobre un planta en cosecha. Este sistema dinámico discreto es monótono sobre el primer cuadrante para todos los valores paramétricos que son relevantes biológicamente.

Pese a la limitada aplicabilidad de los sistemas dinámicos discretos a las ecuaciones en diferencia provenientes de la Biología, luce importante desde el punto de vista teórico llamar la atención a los científicos del área. En la clase de todos los sistemas dinámicos discretos, son conocidos muy pocos que conducen a una dinámica relativamente simple. Lo cual de por si despierta mucho interés para los matemáticos.

[1] Gusanos nematelmintos cuyo aparato digestivo consiste en un tubo recto que se extiende a lo largo del cuerpo, entre la boca y el ano.

Capítulo 1

1.1. Transformaciones competitivas y cooperativas planares

Aunque se estudiarán principalmente transformaciones en el plano, será conveniente tratar las siguientes definiciones en un contexto más general.

Cada uno de los subconjuntos no vacíos B de $\mathbb{R}^m$ genera un orden parcial $\leq_B$ en $\mathbb{R}^m$ dado por $x \leq_B y \Leftrightarrow y - x \in B$

Además, diremos que $x <_B y \Leftrightarrow y - x \in B - \{0\}$, donde $0 = (0, 0, \cdots, 0) \in B$ y que $x \ll_B y \Leftrightarrow y - x \in Int(B)$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^m$ con $x <_B y$, denotamos por $[x, y]_B$ al conjunto $[x, y]_B = \{z \in \mathbb{R}^m : x \leq_B z \leq_B y\}$; el cual se denomina intervalo ordenado según B.

Definición 1.1.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$. Diremos que x e y están relacionados por medio de $\leq_B$, si se cumple que: $x \leq_B y$ o $y \leq_B x$; es decir son comparables por el orden parcial $\leq_B$.*

Definición 1.1.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ y $P : A \to \mathbb{R}^m$ una transformación continua. Diremos que P preserva B-orden si se cumple: $x \leq_B y \Rightarrow P(x) \leq_B P(y) \quad, \forall x, y \in A$. Además,* *diremos que preserva estrictamente B-orden, si* $x <_B y \Rightarrow P(x) <_B P(y), \quad , \forall x, y \in A$ *y que preserva fuertemente B-orden, si* $x <_B y \Rightarrow P(x) \ll_B P(y), \quad \forall x, y \in A.$

Definición 1.1.3 *Sean A un subespacio de $\mathbb{R}^m$ y $P : A \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Diremos que P es A-positivo si $P(A) \subset A$ y P es A-fuertemente positivo si $P(A - \{0\}) \subset Int(A)$.*

Ahora, para nuestro propósito sólo estudiaremos transformaciones definidas en el plano $\mathbb{R}^m$. En este caso, consideremos dos órdenes parciales:

(i) El orden generado por el primer cuadrante, que lo denotaremos por $(\leq_{K_1})$, donde

$$K_1 = \{(u, \nu) : u \geq 0 \; y \; \nu \geq 0\}.$$

(ii) El orden generado por el cuarto cuadrante, denotado por $(\leq_K)$, donde

$$K = \{(u, \nu) : u \geq 0 \; y \; \nu \leq 0\}$$

Definición 1.1.4 *Sea $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una tansformación continua. Diremos que P es cooperativo si preserva K_1-orden, y P es competitivo si preserva K-orden. Similarmente, diremos que P es estrictamente cooperativo o competitivo (Resp. fuertemente) si preserva estrictamente K_1-orden ó K-orden (Resp. preserva fuertemente K_1-orden ó K-orden).*

Definición 1.1.5 *Sea P una transformación lineal. Diremos que P es positivo (Resp. fuertemente positivo) si todas sus entradas son no-negativas (Resp. positivas), y P es K-positivo (Resp. K-fuertemente positivo) si las entradas diagonales son no-negativas (Resp. positivas) y sus entradas fuera de la diagonal son no-positivas (Resp. negativas).*

Observación 1.1.1 *Relación entre transformaciones competitivas y cooperativas. Sea $P : A \subset \mathbb{R}^2$ una transformación cualquiera, y consideremos la transformación lineal $Q : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $Q(u, \nu) = (u, -\nu)$.*

La transformación Q es un isomorfismo entre los espacios parcialmente ordenados $(\mathbb{R}^2, \leq_{K_1})$ y $(\mathbb{R}^2, \leq_K)$ en el siguiente sentido:

$$x \leq_{K_1} y \;\Leftrightarrow\; Q(x) \leq_K Q(y) \tag{1.1}$$

y

$$x \leq_K y \;\Leftrightarrow\; Q(x) \leq_{K_1} Q(y) \tag{1.2}$$

Ahora, supongamos que P es una transformación competitiva sobre A.
Sean $x = (u_1, \nu_1); y = (u_2, \nu_2) \in A$ tales que: $(u_1, \nu_1) \leq_K (u_2, \nu_2)$. Entonces, por definición 1.1.4, tenemos que:

$$P(u_1, \nu_1) \;\leq_K\; P(u_2, \nu_2) \tag{1.3}$$

con estas hipótesis, veamos que QPQ es cooperativo sobre QA. Para esto, supongamos que $x \leq_{K_1} y$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(u_1, \nu_1) \leq_{K_1} (u_2, \nu_2) &\Leftrightarrow Q(u_1, \nu_1) \leq_K Q(u_2, \nu_2). && \text{(por (1.1)).}\\
&\Leftrightarrow PQ(u_1, \nu_1) \leq_K PQ(u_2, \nu_2). && \text{(por (1.3)).}\\
&\Leftrightarrow QPQ(u_1, \nu_1) \leq_{K_1} QPQ(u_2, \nu_2). && \text{(por (1.2)).}
\end{aligned}$$

similarmente, se tiene que si QPQ es cooperativo, entonces P es competitivo. Por esa razón, nos limitaremos a estudiar solamente las transformacioes competitivas, debido a sus múltiples aplicaciones.

Definición 1.1.6 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ no vacío y $P : A \to \mathbb{R}^2$ una transformación cualquiera. Diremos que P es C^1 si para cada $a \in A$, existe un conjunto abierto U en $\mathbb{R}^2$ y una función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continuamente diferenciable tal que: $F(\omega) = P(\omega), \quad \forall \omega \in U \cap A :$*

Definición 1.1.7 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ no vacío.*

(i) Definiremos como trayectoria monótona creciente en A a la imagen de una función continua $\phi : [0, 1] \longrightarrow A$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\phi(0) = x; \phi(1) = y \quad y \quad s \leq t \Rightarrow \phi(s) \leq_K \phi(t).$$

(ii) Definiremos como trayectoria monótona decreciente en A, a la imagen de una función continua $\phi : [0,1] \longrightarrow A$ satisfaciendo:

$$\phi(0) = x; \phi(1) = y \quad y \quad s \leq t \Rightarrow \phi(t) \leq_K \phi(s).$$

Definición 1.1.8 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ no vacío.*

(i) A es $\leq_K$-convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in A$ que están relacionados con respecto a $\leq_K$, el segmento de recta que los une está contenido en A.

(ii) A es $\leq_K$-poligonalmente convexo si para cada $x, y \in A$ con $x \leq_K y$, existe una trayectoria poligonal monótona uniendo a x con y en A, cuya cantidad finita de segmentos son paralelos a los ejes coordenados.

Observación 1.1.2 *Dado $u \in \mathbb{R}$, denotaremos por A_u a las fibras verticales; es decir, $A_u = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (u, \nu)\}$ y A_ν a las fibras horizontales; es decir, $A_\nu = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (u, \nu)\}$.*

Ejemplo 1.1.1 *$\mathbb{R}^2$ es $\leq_K$-poligonalmente convexo.*
En efecto, sean $x = (u_1, \nu_1), y = (u_2, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \leq_K y$. Luego existe $z \in A_{u_1} \cap A_{\nu_2}$ tal que $x \leq_K z \leq_K y$ y la unión de los segmentos de recta que une a los puntos x con z y z con y es una poligonal monótona uniendo ax con y.

Proposición 1.1.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ y $P : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación continua, con $P = (P_1, P_2)$.*

(i) Si A es $\leq_K$-poligonalmente convexo, P_1 es no decreciente (Resp. P_2 es no-creciente) sobre cualquier fibra horizontal y no-creciente (P_2 no-decreciente) sobre cualquier fibra vertical, entonces P es una transformación competitiva.
Además, si $P_i (i = 1, 2)$ no es constante sobre cualquier segmento no-trivial de una fibra vertical u horizontal de A, entonces P es estrictamente competitivo.

(ii) Si A es $\leq_K$-convexo, P es C^1 sobre A y $DP(x)$ es K-positiva, para todo $x \in A$, entonces P es una transformación competitiva. Además, si A es $\leq_K$-poligonalmente

convexo y la primera columna de DP no se anula sobre cualquier segmento no-trivial de cada fibra horizontal de A y la segunda columna no se anula sobre cualquier fibra vertical de A, entonces P es estrictamente competitivo.

(iii) Si A es $\leq_K$-convexo, P es C^1 sobre A y $DP(x)$ es K-fuertemente positiva, $x \in A$, entonces P es fuertemente competitivo.

Demostración:

(i) Sea $x = (u_1, \nu_1), y = (u_2, \nu_2) \in A$ tales que $x \leq_K y$. Como A es $\leq_K$-poligonalmente convexo, existe $z = (u_1, \nu_2) \in A$ tal que $z \in A_{u_1} \cap A_{\nu_2}$ y $x \leq_K z \leq_K y$. Como $x, z \in A_{u_1}$ y $x \leq_K z (z \leq x)$, entonces:

$$P_1(x) \leq P_1(z) \tag{1.4}$$

y

$$P_2(z) \leq P_2(x) \tag{1.5}$$

Por otro lado, como $z, y \in A_{\nu_2}$ y $z \leq_K y (z \leq y)$ sigue que:

$$P_1(z) \leq P_1(y) \tag{1.6}$$

y

$$P_2(y) \leq P_2(z) \tag{1.7}$$

De estas desigualdades tenemos $P_1(y) - P_1(x) \geq 0$ y $P_2(y) - P_2(x) \leq 0$, esto equivale a $P(y) - P(x) \in K$; es decir, $P(x) \leq_K P(y)$. Por lo tanto, P es una transformación competitiva.

Por otra parte, si $P_i (i = 1, 2)$ no es constante sobre cualquier segmento no-trivial de una fibra vertical u horizontal, entonces las desigualdades anteriores son estrictas. En consecuencia, P será estrictamente competitivo.

(ii) Sea $(u_o, \nu_o) \in A$ cualquiera. Como $DP(u_o, \nu_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial u}(u_o, \nu_o) & \frac{\partial P_1}{\partial \nu}(u_o, \nu_o) \\ \frac{\partial P_2}{\partial u}(u_o, \nu_o) & \frac{\partial P_2}{\partial \nu}(u_o, \nu_o) \end{bmatrix}$ es K-positiva, se tiene que:

$$\frac{\partial P_1}{\partial u}(u_o, \nu_o); \frac{\partial P_2}{\partial \nu}(u_o, \nu_o) \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P_1}{\partial \nu}(u_o, \nu_o); \frac{\partial P_2}{\partial u}(u_o, \nu_o) \leq 0.$$

Ahora, por definición de derivada parcial, se tiene que

$$\frac{\partial P_1}{\partial u}(u_o,\nu_o)=\lim_{h\to 0}\frac{P_1(u_o,+h,\nu_o)-P_1(u_o,\nu_o)}{h}\geq 0. \tag{1.8}$$

y

$$\frac{\partial P_2}{\partial u}(u_o,\nu_o)=\lim_{h\to 0}\frac{P_2(u_o,+h,\nu_o)-P_2(u_o,\nu_o)}{h}\leq 0 \tag{1.9}$$

Observe que (u_o,ν_o); $(u_o+h,\nu_o)\in A_{\nu_o}$ para h pequeño. Además si $h>0$ (suficientemente pequeño), se tiene: $(u_o,\nu_o)\leq_K (u_o+h,\nu_o)$. Entonces, de (1.8) y (1.9) tenemos:

$$P_1(u_o,\nu_o)\leq P_1(u_o+h,\nu_o) \quad \text{y} \quad P_2(u_o+h,\nu_o)\leq P_2(u_o,\nu_o)$$

Si $h<0$ (suficientemente pequeño), se tiene $(u_o+h,\nu_o)\leq_K (u_o,\nu_o)$, por lo que:

$$P_1(u_o+h,\nu_o)\leq P_1(u_o,\nu_o) \quad \text{y} \quad P_2(u_o,\nu_o)\leq P_2(u_o+h,\nu_o).$$

En conclusión, para h suficientemente pequeño, P_1 es no-decreciente sobre cualquier fibra horizontal y P_2 es no-creciente sobre cualquier fibra horizontal. Por otro lado, haciendo uso de:

$$\frac{\partial P_2}{\partial \nu}=\lim_{h\to 0}\frac{P_2(u_o,\nu_o+h)-P_2(u_o,\nu_o)}{h}\geq\ 0 \tag{1.10}$$

y

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu}=\lim_{h\to 0}\frac{P_1(u_o,\nu_o+h)-P_2(u_o,\nu_o)}{h}\leq 0. \tag{1.11}$$

sigue en forma análoga que:

$$P_2(u_o,\nu_o)\leq P_2(u_o,\nu_o+h) \quad \text{y} \quad P_1(u_o,\nu_o+h)\leq P_1(u_o,\nu_o).$$

En conclusión, P_1 es no-creciente y P_2 no-decreciente sobre cualquier fibra vertical. Así, por la parte (i), P es una transformación competitiva.
Finalmente, si $\frac{\partial P_i}{\partial u}(u_o,\nu_0)\neq 0 (i=1,2)$, entonces P_i es no constante sobre cualquier segmento no-trivial de una fibra vertical u horizontal. Nuevamente, por la parte (i), P es estrictamente competitivo. ■

Definición 1.1.9 *Sea X un espacio de Banach y $P : X \longrightarrow X$ una transformación. Se dice que P es puntualmente disipativa si existe un conjunto acotado B con la siguiente propiedad: Para todo $x \in X$, existe $n_o \in \mathbb{Z}^+$ que dependen de x tal que $P^n(x) \in B, \quad \forall n \geq n_o$*

Definición 1.1.10 *Una sucesión del plano $\{x_n = (u_n, \nu_n)\}_{n\geq 0}$ se dice eventualmente monótona si existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que:*

$$(u_n \leq u_{n+1} \quad o \quad u_{n+1} \leq u_n) \quad y \quad (\nu_n \leq \nu_{n+1} \quad o \quad \nu_{n+1} \leq \nu_n) \quad , \quad \forall n \geq N.$$

Definición 1.1.11 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que A contiene intervalos ordenados si: $x, y \in A$ con $x << y$ entonces $[x, y] \subset A$.*

Definición 1.1.12 *Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una órbita completa de P si $x_{n+1} = P(x_n), \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Además, se dice que esta órbita une a u_1 con u_2 si $x_n \longrightarrow u_1$, cuando $n \to -\infty$ y $x_n \longrightarrow u_2$, cuando $n \longrightarrow +\infty$.*

Definición 1.1.13 *Sea X un espacio métrico ordenado.*

a) Un punto $x \in X$ se dice cuasi convergente si

$$\omega(x) \subset Fix(P).$$

El conjunto de puntos cuasiconvegentes es denotado por Q.

b) Un punto $x \in X$ se dice convergente si $\omega(x)$ está formado por un único punto fijo. El conjunto de puntos convergente es denotado por C.

Capítulo 2

2.1. Transformaciones competitivas con dinámica complicada

2.1.1. Teorema de Terescak

En trabajos realizados en años anteriores se ha demostrado que en tiempo continuo, la órbita genérica de los sistemas dinámicos fuertemente monótonos converge a un equilibrio. En este capítulo estudiaremos, mediante un ejemplo, el análogo en tiempo discreto de estos resultados, conocido como el Teorema de Terescak.

Teorema 2.1.1 *(Terescak-1996).*
Sea X un espacio de Banach fuertemente ordenado y $P : X \longrightarrow X$ una trasformación C^1 puntualmente disipativa, y completamente continua, cuya derivada es fuertemente positiva en cada punto $x \in X$. Entonces, existen $q \in \mathbb{Z}^+$ y un subconjunto abierto U de X tal que para todo $x \in U$, $\omega(x)$ es una órbita periódica, cuyo período es menor o igual a q.

Ahora, estudiaremos un ejemplo para mostrar que existen transformaciones en el plano, satisfaciendo las hipótesis del teorema, que presentan una dinámica complicada, al menos en un subconjunto pequeño del plano.

Consideremos la transformación continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual genera el sistema dinámico unidimensional, dado por: $u_{n+1} = h(u_n), n \geq 0.$

Supongamos que h puede ser expresada como la diferencia de dos funciones no decrecientes f y g; es decir, $h = f - g$.

Ahora, consideremos el sistema dinámico bidemensional, dado por:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) - g(\nu_n) \\ \nu_{n+1} = f(\nu_n) - g(u_n) \end{cases}, n \geq 0; \tag{2.1}$$

el cual es generado por la transformación planar:

$$P(u, \nu) = (f(u) - g(\nu), f(\nu) - g(u)) = (P_1(u, \nu), P_2(u, \nu))$$

Como f y g son no-decrecientes, afirmamos que P es una transformación competitiva que deja invariante la diagonal principal $\triangle = \{(u, \nu) : u = \nu\}$. En efecto, veamos que se cumple la parte (i) de la proposición 1.1.1

Veamos que P_1 es no-decreciente sobre cada A_ν.

Sean $\nu_1 \in \mathbb{R}$ (fijo) y $(u_1, \nu_1), (u_2, \nu_1) \in A_{\nu_1}$ tales que $(u_1, \nu_1) \leq_K (u_2, \nu_1)$. Luego, se tiene que: $u_2 \geq u_1$ y $\nu_1 \leq \nu_1$. Como f y g son no-decrecientes, se tiene que:

$$f(u_2) \geq f(u_1) \quad y \quad g(\nu_1) \leq g(\nu_1).$$

Así

$$f(u_1) - f(u_2) \leq 0 \quad y \quad g(\nu_1) - g(\nu_1) \geq 0.$$

por lo tanto;

$$f(u_1) - f(u_2) \leq g(\nu_1) - g(\nu_1) \Leftrightarrow f(u_1) - g(\nu_1) \leq f(u_2) - g(\nu_1).$$

Luego;

$$P_1(u_1, \nu_1) \leq P_1(u_2, \nu_1).$$

En consecuencia, P_1 es no-decreciente sobre A_{ν_1} , $\forall \nu_1 \in \mathbb{R}$.

Veamos que P_2 es no-creciente sobre cada A_ν.

Sean $\nu_1 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ y consideremos $(u_1,\nu_1),(u_2,\nu_1) \in A_{\nu_1}$ tales que $(u_1,\nu_1) \leq_K (u_2,\nu_1)$. Entonces, $(u_1,\nu_1) \leq (u_2,\nu_1)$. Luego se tiene que: $u_2 \geq u_1 \quad y \quad \nu_1 \leq \nu_1$. Como f y g son no-decrecientes, tenemos que: $g(u_2) \geq g(u_1) \quad y \quad f(\nu_1) \leq f(\nu_1)$. Así, $g(u_1) - g(u_2) \leq 0 \quad y \quad 0 \leq f(\nu_1) - f(\nu_1)$.

Por lo tanto;

$$\begin{aligned} g(u_1) - g(u_2) &\leq f(\nu_1) - f(\nu_1) \\ \Leftrightarrow f(\nu_1) - g(u_2) &\leq f(\nu_1) - g(u_1) \\ \Leftrightarrow P_2(u_1,\nu_1) &\leq P_2(u_1,\nu_1) \end{aligned}$$

Así; P_2 es no-creciente sobre cada A_ν.

Veamos que P_1 es no creciente sobre cada A_u :

Sean $u_1 \in \mathbb{R}$ (fijo), $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ y consideremos $(u_1,\nu_1),(u_1,\nu_2) \in A_{u_1}$ tales que $(u_1,\nu_1) \leq_K (u_1,\nu_2)$.

Entonces, $(u_1,\nu_2) \leq (u_1,\nu_1)$. Luego, se tiene que: $u_1 \geq u_1 \quad y \quad \nu_2 \leq \nu_1$.

Como f y g son no-decrecientes, se tiene que: $f(u_1) \geq f(u_1) \quad y \quad g(\nu_2) \leq g(\nu_1)$. Entonces; $f(u_1) - f(u_1) \leq 0 \quad y \quad g(\nu_1) - g(\nu_2) \geq 0$.

Así

$$f(u_1) - f(u_1) \leq g(\nu_1) - g(\nu_2)$$

$$\Rightarrow f(u_1) - g(\nu_1) \leq f(u_1) - g(\nu_2) \Rightarrow P_1(u_1,\nu_1) \leq P_1(u_1,\nu_2).$$

Así; P_1 es no-creciente sobre cada A_{u_1}.

Veamos que P_2 es no-decreciente y sobre cada A_u :

Sean $u_1 \in \mathbb{R}$ (Fijo), $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ y consideremos $(u_1, \nu_1), (u_1, \nu_2) \in A_{u_1}$ tales que $(u_1, \nu_1) \leq_K (u_1, \nu_2)$.

Entonces, $(u_1, \nu_2) \leq (u_1, \nu_1)$.

Luego, se tiene que: $u_1 \geq u_1$ y $\nu_2 \leq \nu_1$

Luego f y g son no-decrecientes, se tiene que: $g(u_1) \geq g(u_1)$ y $f(\nu_2) \leq f(\nu_1)$.

Así:

$$f(\nu_2) - f(\nu_1) \leq g(u_1) - g(u_1)$$

$$\Rightarrow f(\nu_2) - (u_1) \leq f(\nu_1) - g(u_1) \Rightarrow P_2(u_2, \nu_2) \leq P_2(u_1, \nu_1).$$

Luego, P_2 es no-decreciente sobre cada A_u.

En conclusión, por la parte (i) de la proposición 1.1.1, se tiene que P es una transformación competitiva.

Además, si consideramos la diagonal $\triangle$ se tiene que:

$$P(u, \nu) = P(u, u) = (f(u) - g(u), f(u) - g(u)) = (u, u) \tag{2.2}$$

Es decir, P deja invariante la diagonal principal.

Ahora, supongamos que h es impar y puede ser expresada como la diferencia de dos funciones no-decrientes $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$, donde:

$$\widetilde{f}(u) = \frac{f(u) - f(-u)}{2} \quad y \quad \widetilde{g}(\nu) = \frac{g(\nu) - g(-\nu)}{2}$$

Como f y g son impares, entonces $f(-u) = -f(u) \quad y \quad g(-\nu) = -g(\nu)$.

Así; $\widetilde{f}(u) = f(u) \quad y \quad \widetilde{g}(\nu) = g(\nu) \quad y \quad h = \widetilde{f} - \widetilde{g}$.

En este caso, la antidiagonal $\Gamma = \{u, \nu) : \nu = -u\}$ es invariante por (2.1) y la dinámica sobre Γ está dada por el sistema unidimensional $u_{n+1} = f(u_n) + g(u_n)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} P(u,\nu) = P(u,-u) &= (f(u) - g(-u), f(-u) - g(u)) \\ &= (f(u) + g(u), -f(u) - g(u)) \\ &= (f(u) + g(u), -[f(u) + g(u)]) = (u, -u). \end{aligned}$$

Ahora, estudiemos un ejemplo concreto, donde verificaremos las hipótesis del Teorema de Terescak.

Consideremos la transformación de Ricker unidimensional, dada por: $h(u) = u.e^{r(1-u)}, r > 0$.

Esta función alcanza su valor máximo en $a = r^{-1}$ y lo denotaremos por $b = h(a)$.

En efecto; $h'(u) = e^{r(1-u)}.[1 - r.u.]$

Note que:

$$\begin{aligned} h'(u) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - r.u \geq 0 \Leftrightarrow u \leq r^{-1} \\ h'(u) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - r.u \leq 0 \Leftrightarrow u \geq r^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, definamos las siguientes funciones:

$$f_o(u) = \begin{cases} -b \quad si \quad u < -a \\ h(u)\; si \quad -a \leq u \leq a \\ b \quad si \quad u > a \end{cases}$$

$$g_o(u) = \begin{cases} -h(u) - b \ \ si & u < -a \\ 0 \qquad\qquad si & -a \leq u \leq a \\ -h(u) + b \ \ si & u > a \end{cases}$$

Claramente, $h = f_o - g_o$.

Ahora, veamos que f_o y g_o son funciones impares no-decrecientes y continuamente diferenciable. Como h es de clase C^∞, entonces f_o y g_o son continuamente diferenciable.

Además, es obvio que f_o es no-decreciente para $u < -r^{-1}$, por ser constante.

Para $-\frac{1}{r} \leq u \leq \frac{1}{r}$, se tiene que:

$$-1 \leq ru \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -ru \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - ru \leq 2$$
$$\Rightarrow 0 \leq e^{r(1-u)}[1 - ru] = h'(u) = f_o'(u).$$

Así, f_o es no-decreciente en todo $\mathbb{R}$.

Además, g_o es no-decreciente para $u \in [-r^{-1}, r^{-1}]$, por ser constante.

Para $u > \frac{1}{r} \quad y \quad u < \frac{-1}{r}$, se tiene que:

- $u > \frac{1}{r} \Rightarrow r.u > 1 \Rightarrow 1 - r.u < 0 \Rightarrow h'(u) < 0$
  $\Rightarrow -g_o'(u) < 0 \Rightarrow g_o'(u) > 0$

- $u < \frac{-1}{r} \Rightarrow -u > \frac{1}{r} \Rightarrow g_o'(-u) > 0$

Ahora, para tener funciones cuya derivada sea positiva en todas partes, definamos las siguientes funciones: $f_\varepsilon(u) = f_o(u) + \varepsilon.tan^{-1}(u) \quad y \quad g_\varepsilon(u) = g_o(u) + \varepsilon.tan^{-1}(u)$, donde $\varepsilon > 0$. Ahora, consideremos el sistema dado por:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f_\varepsilon(u_n) - g_\varepsilon(\nu_n) \\ \nu_{n+1} = f_\varepsilon(\nu_n) - g_\varepsilon(u_n) \end{cases} \quad ; n \geq 0.$$

el cual es generado por la transformación planar:

$$P(u,\nu) = (f_\varepsilon(u) - g_\varepsilon(\nu)\ ,\ f_\varepsilon(\nu) - g_\varepsilon(u)) \tag{2.3}$$

Como f_o y g_o son funciones no-decrecientes y $f'_\varepsilon = f'_o(u) + \frac{\varepsilon}{1+u^2}$ y $g'_\varepsilon(u) = g'_o(u) + \frac{\varepsilon}{1+u^2}$ entonces f_ε y g_ε también son funciones no-decrecientes. Luego, por un análisis similar, se tiene que la transformación planar P, definida en (2.3) es competitiva.

Además, afirmamos que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que DP es K-fuertemente positiva en cada punto.

En efecto;

$$P_1(u,\nu) = f_\varepsilon(u) - g_\varepsilon(\nu)\ ,\ P_2(u,\nu) = f_\varepsilon(\nu) - g_\varepsilon(u)$$

$$DP(u_o\nu_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial u}(u_o,\nu_o) & \frac{\partial P_1}{\partial \nu}(u_o,\nu_o) \\ \\ \frac{\partial P_2}{\partial u}(u_o,\nu_o) & \frac{\partial P_2}{\partial \nu}(u_o,\nu_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o(u_o) + \frac{\varepsilon}{1+u_o^2} & -g'_o(\nu_o) - \frac{\varepsilon}{1+\nu_o^2} \\ \\ -g'_o(u_o) - \frac{\varepsilon}{1+u_o^2} & f'_o(\nu_o) + \frac{\varepsilon}{1+\nu_o^2} \end{bmatrix}$$

Como f_o y g_o son no-decrecientes y para $\varepsilon > 0$, se tiene que las entradas de la diagonal principal son positivas y las entradas fuera de la diagonal son negativas.

Además, como el valor máximo de h es $b = h(r^{-1})$, entonces las funciones f_ε y g_ε están acotadas, más aún: $|f_\varepsilon(u)|, |g_\varepsilon(u)| \leq b + 0(\varepsilon)$.

Por lo tanto, P es una transformación puntualmente disipativa. Así, las hipótesis del Teorema de Terescak se satisfacen.

Capítulo 3

3.1. Transformaciones competitivas preservando y revirtiendo orientación

3.1.1. Tricotomía del intervalo ordenado

En este capítulo identificaremos algunas aplicaciones competitivas con dinámica simple.

También incluiremos adaptaciones finito-dimensionales de algunos resultados fundamentales de aplicaciones que preservan estrictamente orden.

Lema 3.1.1 *Sea $P : A \to A$ una transformación continua y competitiva sobre un subconjunto $A \in \mathbb{R}^2$. Si $x, y \in A$ satisfacen $P(x) \ll P(y)$, entonces $x \ll y \quad$ ó $\quad y \ll x$.*

Demostración: Supongamos que ni,$x \ll y$ ni, $y \ll x$. Entonces, x e y deben ser comparables respecto a $\leq_K$, es decir, $x \leq_K y$ ó $y \leq_K x$. Si $x \leq_K y$ entonces, como P es competitiva, se tiene que $P(x) \leq_K P(y)$.

Sean $P(x) = (a, b)$ y $P(y) = (c, d)$.

Entonces, $(a, b) \leq_K (c, d) \Leftrightarrow (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b) \in K$. Así; $d \leq b.(1)$.

Pero, por hipótesis $P(x) << P(y)$.

Es decir, $P(y) - P(x) = (c-a, d-b) \in Int(K_1)$.
Así; $d > b$ (2). Luego, de (1) y (2) se obtiene la contradicción. Análogamente se obtiene una contradicción si $y \leq_K x$. ■

Ahora, fijemos las siguientes condiciones adicionales al lema anterior sobre P :

$$(+) \quad \text{si} \quad x, y \in A \quad \text{y} \quad P(x) << P(y) \quad \text{entonces} \quad x \leq y.$$

$$(-) \quad \text{si} \quad x, y \in A \quad \text{y} \quad P(x) << P(y) \quad \text{entonces} \quad y \leq x.$$

El siguiente teorema es una adaptación al tiempo discreto, de un resultado que fue probado por deMottoni y Schiaffino para la Transformación de Poincaré de un sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra periódico y competitivo.

Teorema 3.1.1 *a) Si P es una transformación competitiva que satisface (+), entonces $\{P^n(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona, $\forall x \in A$.*
Además, si la órbita de x tiene clausura compacta en A, entonces ésta converge a un punto fijo de P.

b) Si P es una transformación competitiva que satisface (-), entonces $\{P^{2n}(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona. Además, si la órbita de x tiene clausura compacta, entonces $\omega(x)$ es una órbita 2-periódica ó es un punto fijo.

Demostración:

a) Supongamos que (+) se cumple. La conclusión del teorema es obvia si $P^{n_0}(x) \leq_K P^{n_0+1}(x)$ ó $P^{n_0+1}(x) \leq P^{n_0}(x)$, para algún $n_o \geq 1$.
En efecto, supongamos que $\exists n_o \geq 1$ tal que $P^{n_0}(x) \leq_K P^{n_0+1}(x)$.
Como P es una transformación competitiva, se tiene que:

$$P^{n_0+1}(x) \leq_K P^{n_0+2}(x) \leq_K P^{n_0+3}(x) \leq_K \cdots$$

Es decir, $P^n(x) \leq_K P^{n_0+1}(x), \quad \forall n \geq n_o$

Sea $P^n(x) = x_n = (u_n, \nu_n)$.

Entonces, para $n \geq n_o$; tenemos:

$$x_n \leq_K x_{n+1} \Leftrightarrow (u_{n+1}, \nu_{n+1}) - (u_n, \nu_n) \in K$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} - u_n \geq o \\ \nu_{n+1} - \nu_n \leq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq u_{n+1}, \quad \forall n \geq n_o \\ \nu_{n+1} \leq \nu_n \end{cases}$$

Así $\{P^n(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona.

Ahora, supongamos que este no es el caso que se cumple. Es decir; se cumple que:

$$(\triangle)\; P^n(x) \ll P^{n+1}(x) \quad \text{ó} \quad P^{n+1}(x) \ll P^n(x), \quad \forall n \geq 1.$$

Afirmamos que $(\triangle)$ se cumple $\forall n$.

En efecto, asumamos $x \ll P(x)$. Si la afirmación es falsa entonces existe $n \geq 1$ tal que:

$$x \ll P(x) \ll ... \ll P^{n-1}(x) \ll P^n(x). \tag{3.1}$$

Pero,

$$P^{n+1}(x) \ll P^n(x).$$

Luego, por (+), se tiene que

$$P^n(x) \ll P^{n-1}(x). \tag{3.2}$$

Así; de (3.1) y (3.2) se obtiene la contradicción y por lo tanto, $P^n(x) \ll P^{n+1}(x)$ o $P^{n+1}(x) \ll P^n(x)\, \forall n,$ y por un razonamiento similar al caso anterior $\{P^n(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona.

Ahora, dado que $\{P^n(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona y ésta contenida en un compacto, entonces esta sucesión converge, digamos a un punto $z \in A$, es decir:

$$P^n(x) \longrightarrow z, \;\; n \to +\infty$$

Como P es continua, entonces $P^{n+1}(x) \to P(z), n \to +\infty$.

Así, $P(z) = z$ y en consecuencia la órbita de x converge a un punto fijo de P.

b) En primer lugar, probemos que si P es competitivo y (-) se cumple, entonces P^2 es competitivo y (+) se cumple.
En efecto, sean $x, y, \in A$ con $x \leq_K y$.
Dado que P es competitivo, entonces, preserva K-orden; es decir, $P(x) \leq_K P(y)$.
Ahora, como $P : A \to A,\ P(x),\ P(y) \in A$.
Nuevamente por ser P competitivo, tenemos: $P^2(x) \leq_K P^2(y)$.
Así, $x \leq_K y \Rightarrow P^2(x) \leq_K P^2(y)$; es decir, P^2 preserva K-orden y en consecuencia P^2 es competitivo.

Ahora, supongamos que (-) se cumple y es decir:

$$P(x) << P(y) \Rightarrow y \leq x.$$

Luego, no se puede cumplir que $y \ll x$. Así, por el Lema 3.1.1 tenemos que $x \ll y$, como $\ll$ es una relación de orden más fuerte que $\leq$, se tiene que $x \ll y \Rightarrow x \leq y$. Por lo tanto, tendríamos $P(x) \ll P(y) \Rightarrow x \leq y$ y en consecuencia P satisface (+).

Ahora, por la afirmación anterior y la parte (a) del Teorema 3.1.1, se tiene que $\{P^{2n}(x)\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona, $\forall x \in A$.
Además, si $\mathcal{O}(x)$ (ahora por P^2) tiene clausura compacta, nuevamente por la parte (a), tenemos que: $P^{2n}(x) \longrightarrow z, n \to +\infty$ y $P^2(z) = z$.
Ahora, sea $y \in \omega(x)$ con $P(y) \neq y$. Entonces, $P^n(x) \to y \quad , n \to +\infty$.

Si n es par, entonces $y = z$ y si n es impar, entonces $y = P(z)$. Luego, $\omega(x)$ está formado por una órbita 2- periódica. ■

Observación 3.1.1 *Con respecto a la parte (b) del Teorema 3.1.1, si (-) se cumple, pueden existir órbitas que no convergen a puntos fijos.*

En efecto, consideremos la transformación $P : I \to I$, donde $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y P está definida por $P(u, \nu) = (-\nu, -u)$.
En primer lugar, notemos que I es $\leq_K$-convexo:
En efecto, sean $x = (a, b); y = (c, d) \in I$ tales que $x \leq_K y$, donde $-1 \leq a, b, c, d \leq 1$.
Entonces, se tiene que $c \geq a \quad$ y $\quad d \leq b$.

Si consideramos el segmento de recta que une a x con y, se tiene que este segmento permanece en I.
Ahora, por la definición de P, tenemos: $P_1(u, \nu) = -\nu \quad$ y $\quad P_2(u, \nu) = -u$.

Así, sea $(u_o, \nu_o) \in I$. como $DP(u_o, \nu_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial u}(u_o, \nu_o) & \frac{\partial P_1}{\partial \nu}(u_o, \nu_o) \\ \\ \frac{\partial P_2}{\partial u}(u_o, \nu_o) & \frac{\partial P_1}{\partial \nu}(u_o, \nu_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Entonces, $DP(u_o, \nu_o)$ es K-positiva.

Ahora, por la proposición 1.1.1, se tiene que P es competitivo. En segundo lugar, P satisface la condición (-):
En efecto, sean $x = (a, b)$, $y = (c, d) \in I$ tales que $P(x) << P(y)$. Pero, $P(x) = (-b, -a)$ y $\quad P(y) = (-d, -c)$.
Entonces;

$$\begin{aligned} P(x) \ll P(y) &\Leftrightarrow (-b, -a) \ll (-d, -c) \Leftrightarrow (-d, -c) - (-b, -a) \in Int(K_1) \\ &\Leftrightarrow (b - d, a - c) \in Int(K_1), \end{aligned}$$

Así, $P(x) \ll P(y) \Leftrightarrow b > d \quad$ y $\quad a > c$.
Esto implica que $y \leq x$, pues si suponemos que $x < y$, entonces $y - x \in K_1 - \{(0, 0)\}$ y en consecuencia tendríamos los siguientes casos:

- $c - a > 0 \quad$ y $\quad d - b > 0 \;\Rightarrow\; c > a \quad$ y $\quad d > b$ $(\rightarrow\leftarrow)$.
- $c - a \geq 0 \quad$ y $\quad d - b > 0 \;\Rightarrow\; c \geq a \quad$ y $\quad d > b$ $(\rightarrow\leftarrow)$.
- $c - a > 0 \quad$ y $\quad d - b \geq 0 \;\Rightarrow\; c > a \quad$ y $\quad d \geq b$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

En cualquiera de los casos, obtenemos una contradicción.

En resumen, tenemos que P es competitivo y satisface (-).
Ahora, podemos observar que los puntos fijos de P están ubicados sobre la recta $\nu = -u$ y el resto de los puntos de I son de período 2.
En efecto, observe que $P(u,\nu) = (u,\nu) \;\Leftrightarrow\; (-\nu,-u) = (u,\nu)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\nu = u \\ \\ -u = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \nu = -u. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Curva de} \\ \text{Puntos Fijos} \end{array} \right)$$

$P^2(u,\nu) = P(P(u,\nu)) = P(-\nu,-u) = (-(-u) - (-\nu)) = (u,\nu).$

Ahora, introduciremos ciertas hipótesis sobre P con la finalidad que las condiciones (+) y (-) sean fácilmente verificadas.
(H+) sea $P : A \to A$ una transformación C^1 tales que:

a) A es $\leq_K$-convexo y contiene intervalos ordenados.

b) det $DP(x) > 0$, $\quad \forall x \in A.$

c) $DP(x)$ es K-positiva en A.

d) P es inyectiva.

(H-) Sea $P : A \to A$ una transformación C^1 tal que:

a) A es $\leq_K$-convexo y contiene intervalos ordenados.

b) det $DP(x) < 0$, $\quad \forall x \in A.$

c) $DP(x)$ es K-positiva en A.

d) P es inyectiva.

Lema 3.1.2 *Sea $P : A \to A$ una tranformación en el plano. Si P satisface satisface $(H+)$, entonces P es competitiva y satisface la condición (+). Si P satisface (H-), entonces P es competitiva y satisface la condición (-).*

Demostración: Supongamos que P satisface (H+). Entonces, A es $\leq_K$-convexo y $DP(x)$ es K-positiva, $\forall x \in A.$ Luego, por la proposición 1.1.1, se tiene que P es competitivo.

Además, supongamos que $P(x) \ll P(y)$ y probemos que $x \ll y$. Procedamos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $y \ll x.$
Sean a y b las esquinas noroeste y sureste repectivamente del rectángulo $[y, x] \subset A,$ tal que $a \ll_K b$ y $[y, x] = [a, b]_K.$

Ahora, dado que P es competitivo sobre A, se tiene que $P([y, x]) \subset [P(a), P(b)]_K.$ En efecto, sea $z \in [y, x]$. Entonces, $z \in [a, b]_K$, es decir $a \leq_K z \leq_K b.$ Como P es competitivo, este preserva K-orden, es decir, $P(a) \leq_K P(z) \leq_K P(b).$
Así, $P(z) \in [Pa, Pb]_K$ y en consecuencia $P[y, x] \subset [Pa, Pb]_K$. Además, $P(x) << P(y)$ implica que $P(a) \ll_K P(b)$. En efecto: es obvio que $x \in [y, x] = [a, b]_K$. Entonces, $a \leq_K x \leq_K b.$ Luego por la competitividad de P, tenemos: $P(a) \leq_K P(x) \leq_K P(b).$
Como $P(x) \ll P(y)$, entonces $P(a) \ll_K P(y),$ pues en caso contrario si suponemos que $P(y) \leq_K P(a)$ tendríamos una contradicción, por lo siguiente:
Sea $P(a) = (x_1, y_1); P(x) = (x_2, y_2); P(y) = (x_3, y_3)$. Como $P(a) \leq_K P(x)$, entonces $x_2 \geq x_1$ y $y_2 \leq y_1$. Además, $P(x) \ll P(y)$, entonces $x_3 > x_2$ y $y_3 > y_2$. Luego, si suponemos que $P(y)_{\leq_K} P(a)$, entonces $x_1 \geq x_3$ y $y_1 \leq y_3$. Así, tendríamos que $x_2 \geq x_3$ y $x_3 > x_2 (\rightarrow\leftarrow)$: por lo tanto; se cumple que:

$$P(a) \ll_K P(y). \tag{3.3}$$

Análogamente, como $y \in [x, y] = [a, b]_K$ y por ser P competitivo, tenemos:

$$P(y) \leq_K P(b). \tag{3.4}$$

Luego, de (3.3) y (3.4) tendríamos que:

$$P(a) <<_K P(b)$$

Consideremos la curva de Jordan orientada formada por la frontera de $[y, x]$, comenzando en a y va horizontalmente a x, luego baja verticalmente a b, regresa horizontalmente a y y sube verticalmente hasta a. Como P es inyectiva sobre A, entonces la imagen de esta curva es también una curva de Jordan orientada. La monotonía de P implica que la curva curva imagen está contenida en $[P(a), P(b)]_K$, comenzando en $P(a)$ y moviéndose monótonamente (con respecto a $\leq_K$) hasta $P(x)$ y luego horizontalmente a $P(b)$ y monótonamente hasta $P(y)$ y luego hacia $P(a)$. Pero $(H+)(b)$ implica que P preserva localmente orientación. Así, en la primera mitad de la curva imagen (desde $P(a)$ hacia $P(x)$ y luego hasta $P(b)$), la curva debe hacer un retorno en $P(b)$, y después continuando sobre $P(x)$ y hacia $P(a)$.

Así, la curva imagen se intersecta consigo misma $(\rightarrow\leftarrow)$. ■

Corolario 3.1.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, no vacío. Si $P : A \to A$ es una transformación que satisface $(H+)$, entonces $\{P^n x\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona $\forall x \in A$ y si una órbita tiene clausura compacta, entonces ésta converge a un punto fijo de P.*
Si P satisface (H-), entonces $\{P^{2n} x\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona y si una órbita tiene clausura compacta, entonces su omega límite es un punto fijo o una óbita 2-periódica.

Demostración: Si P satisface (H+), entonces por el Lema 3.1.2, P es competitivo y satisface (+), luego, por teorema (3.1.1-a), se tiene que $\{P^n x\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona y converge a un punto fijo de P.
Ahora, si P satisface (H-), entonces, nuevamente por el Lema 3.1.2, P satisface (-). Luego, por el Teorema (3.1.1-b), se tiene que $\{P^{2n} x\}_{n\geq 0}$ es eventualmente monótona y el conjunto omega límite es un punto fijo o una órbita 2-periódica. ■.

A continuación enunciaremos dos resultados fundamentales para la demostración del siguiente teorema:

Proposición 3.1.1 *Sea X un espacio métrico ordenado y P una transformación que preserva fuertemente orden sobre X. Sea $x_o \in X$ tal que puede ser aproximado desde* *arriba y desde abajo en X. Entonces, existen sucesiones x_n y z_n en X , satisfaciendo*

$$x_n \rightarrow x_o \ , \ z_n \rightarrow x_o \ , \ x_n < x_{n+1} < x_o < z_{n+1} < z_n \ , \ n \geq 1$$

y una de las siguientes condiciones:

a) *Existe $u_o \in Fix(P)$tal que; para $n \geq 1$:*

$$\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < \omega(x_o) = u_o < \omega(z_{n+1}) < \omega(z_n)$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} dist(\omega(x_n), u_o) = \lim_{n\to+\infty} (\omega(z_n), u_o) = 0$$

b) *Existen $u_o, \nu_o \in Fix(P)$ tal que, para $n \geq 1$ se cumple sólo una de las siguientes:*

   i) $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < \omega(x_o) = u_o < \nu_o = \omega(z_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} dist(\omega(x_n), u_o) = 0$ *y cuando $\nu \in Fix(P)$ tal que $\nu > u_o$ entonces $\nu \geq \nu_o$.*

   ii) $\omega(x_n) = u_o < \nu_o = \omega(x_o) < \omega(z_{n+1} < \omega(z_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} dist(\omega(z_n), \nu_o) = 0$ *y cuando $u \in Fix(P)$ tal que $u < \nu_o$ entonces $u \leq u_o$.*

c) *Existen $u_o, \nu_o \in Fix(P)$ tales que, para $n \geq 1$:*

$$\omega(x_n) = u_o < \omega(x_o) < \nu_o = \omega(z_n)$$

Proposición 3.1.2 *Sea P una trasformación que preserva fuertemente orden sobre $X = [u, \nu]$, donde $u < \nu$ y $u, \nu \in Fix(P)$. Además, suponga que u y ν son asintóticamente estable en X y que $\overline{P^n[u, \nu]}$ es compacta para cada $n > 0$. Entonces, existe $\omega \in [u, \nu] \cap Fix(P)$ tal que $\omega \neq u, \nu$.*

Teorema 3.1.2 *(Tricotomía del Intervalo Ordenado).*
Sean $u_1 < u_2$ puntos fijos de una transformación continua $P : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow A$ que preserva estrictamente orden y sea $I = [u_1, u_2] \subset A$. Entonces, se cumple, al menos, una de las siguientes condiciones:

a) *P tiene un punto fijo en I distinto de u_1 y u_2.*

b) Existe una órbita completa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de P en I, uniendo a u_1 con u_2 y satisfaciendo $x_n < x_{n+1}$.

c) Existe una órbita completa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de P en I uniendo a u_2 con u_1 y satisfaciendo $x_n > x_{n+1}$.

Demostración: Supongamos que (a) no se cumple, es decir,

$$I \cap F\mathrm{ix}(P) = \{u_1, u_2\}$$

Entonces, $Q = C$, ya que si $x \in C$, tendríamos que $\omega(x) = \{u_1\}$ ó $\omega(x) = \{u_2\}$. En ambos casos, se tiene que $\omega(x) \subset F\mathrm{ix}(P)$ y en consecuencia $x \in Q$.
Ahora, veamos que $I = C$:
En efecto, si $x_o \in I - C$, entonces $x_o \neq u_1, u_2$. Así, x_o puede ser aproximado desde arriba por una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de P uniendo a x_o con u_2, y puede ser aproximado desde abajo por una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de P uniendo a u_1 con x_o; es decir:

$$z_n \to x_o,\ n \to -\infty \quad \text{y} \quad z_n \to u_2,\ n \to +\infty \quad ; \quad x_o < z_{n+1} < z_n \quad , \quad \forall n \geq 1.$$

$$x_n \to u_1,\ n \to -\infty \quad \text{y} \quad x_n \to x_o,\ n \to +\infty \quad , \quad x_n < x_{n+1} < x_o \quad , \quad \forall n \geq 1.$$

Como $x_o \notin Q = C$, entonces por la parte (c) de la proposición 3.1.1, se tiene que:

$$\omega(x_n) = u_1 < \omega(x_o) < u_2 = \omega(z_n),\ \forall n \geq 1.$$

Ahora, veamos que u_1 y u_2 son asintóticamente estables:
En efecto, como $u_1 < \omega(x_o)$, entonces existen vecindades W de $\omega(x_o)$ y $\mathcal{O}$ de u_1 y $n_o \geq 0$ tal que $P^n(\mathcal{O}) \leq P^n(W),\ \forall n \geq n_o$.
Luego, existe $n_1 > 0$ tal que $P^n(x_o) \in W,\ \forall n \geq n_1$.
Por la continuidad de P, existe n tal que $P^{n_1}(x_n) \in W$. Así, $P^n(\mathcal{O}) \leq P^{n+n_1}(x_n), \forall n \geq n_o$.
Ahora, escojamos una vecindad U de x_o, tal que $P^{n_1}(U) \subset W$ y sea $x \in U$ con $x < x_o$. Entonces, existen vecindades V de $x(V \subset U)$ $\mathcal{N}$ de x_o y $n_2 \geq 0$ tal que: $P^n(V) \leq P^n(\mathcal{N}),\ \forall n \geq n_2$.

Ahora, escojamos $N > 0$ tal que $x_N \in \mathcal{N}$. Entonces, $P^n(V) \leq P^n(X_N),\ \forall n \geq n_2$.
Como $V \subset U$, entonces $P^{n_1}(V) \subset P^{n_1}(U)$ y $P^{n_1}(U) \subset W$, entonces:

$$u_1 = P^n(u_1) \in P^n(\mathcal{O}) \leq P^n(P^{n_1}(V)),\ \forall n \geq n_o.$$
$$u_1 \leq P^n(V) \leq P^n\mathcal{N},\ \forall n \geq n_o$$

Ahora, sea $y \in V = V(x)$., entonces

$$\begin{aligned}\|P^n(x) - P^n(y)\| &\leq \|P^n(x) - u_1\| + \|P^n(y) - u_1\| \\ &\leq 2k.\|P^n(n_\eta) - u_1\| \longrightarrow 0, n \to +\infty.\end{aligned}$$

Así, u_1 es asintóticamente estable, similarmente se verifica que u_2 es asintóticamente estable.
Luego, por la proposición (3.1.2), existe $\omega \in F\text{ix}(P)$ y $\omega \neq u_1, u_2.(\to\leftarrow)$.
Ahora, supongamos que existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de P uniendo a u_1 con u_2 y a u_2 con u_1, respectivamente, es decir:

$$x_n \to u_1,\ n \to -\infty \quad \text{y} \quad x_n \to u_2,\ n \to +\infty$$

$$y_n \to u_2,\ n \to -\infty \quad \text{y} \quad y_n \to u_1,\ n \to +\infty$$

Como P preserva estrictamente orden, existen vecindades $\overline{U}, \overline{V}$ de u_1 y u_2 respectivamente tales que:

$$P^n(\overline{U}) \leq P^n(x) = x_n \quad \text{y} \quad P^n(V) \longrightarrow P^n(y) = y_n,\ \forall n \geq n_o$$

Así $P^n(\overline{U} \cap I) \to u_1$ y $P^n(\overline{V} \cap I) \longrightarrow u_2,\ n \to +\infty$.
Esto implica que u_1 y u_2 son asintóticamente estables. Luego, por la proposición (3.1.2), existe $\omega \in F\text{ix}(P)$ y $\omega \neq u_1, u_2(\to\leftarrow)$. ■

Observación 3.1.2 *Si $u_1 \ll u_2$ y además si $u \in I\backslash\{u_1, u_2, e\}$ con $P(u) = u$, satisfacen $u_1 \ll u \ll u_2$, entonces exactamente una de las tres alternativas del Teorema (3.1.2) se cumple. (e es un punto extremo de I y repulsor).*

Demostración:

Veamos que si $u_1 \ll u_2$ entonces (b-) y (c-) no se pueden cumplir simultáneamente. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que si se cumplen, y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ órbitas de P en I uniendo a u_1 con u_2 y a u_2 con u_1, respectivamente.
Así,

$$x_n \longrightarrow u_1, n \to -\infty \quad \text{y} \quad x_n \longrightarrow u_2, \ \ n \to +\infty.$$

$$y_n \longrightarrow u_2, n \to -\infty \quad \text{y} \quad y_n \longrightarrow u_1, \ \ n \to +\infty.$$

Entonces, $\exists n_o, m_o \in \mathbb{Z}$ tales que: $u_1 \ll y_{n_o} \quad \text{y} \quad x_{m_o} \ll y_{n_o}$.
Como P preserva estrictamente orden, se tiene que:

$$x_{m_o+\ell} = P^{\ell}(x_{m_o}) < P^{\ell}(y_{n_o}) = y_{n_{o+\ell}} \ \ , \ \ \forall \ell \geq 0.$$

Luego, haciendo $\ell \to +\infty$, se tiene que: $u_2 \leq u_1 (\longrightarrow\longleftarrow)$.

Ahora, veamos que (a-) y (b-) no se pueden cumplir simultáneamente.
En efecto, supongamos que si se cumplen y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una órbita de P en I uniendo a u_1 con u_2. $(x_n \to u_1, \ n \to -\infty \quad \text{y} \quad x_n \to u_2, \ n \to +\infty)$.
Dado que P tiene un punto fijo $u \in [[u_1, u_2]]$ y además $\exists n_o \in \mathbb{Z}$ tal que $x_{n_o} << u$, entonces por la monotonía estricta de P, se tiene que: $P^{\ell}(x_{n_o}) < P^{\ell}(u) = u \quad , \forall \ell \geq 0$.
Así, $x_{n_{o+\ell}} < u, \quad \forall \ell \geq 0$.
Haciendo $\ell \to +\infty$, se tiene que: $u_2 \leq u (\to\leftarrow)$. Ahora veamos que (a-) y (c-) no se pueden cumplir simultáneamente.
En efecto, supongamos que si cumplen, y sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una órbita de P que une a u_2 con u_1.
Como P tiene un punto fijo $u \in [[u_1, u_2]]$ y $\exists n_o \in \mathbb{Z}$ tal que $u \ll y_{n_o}$, entonces por la monótonía estricta de P, se tiene que: $u = P^{\ell}(u) < P^{\ell}(y_{n_o}) = y_{n_{o+\ell}} \quad , \forall \ell \geq 0$.
Haciendo $\ell \to +\infty$, se tiene: $u \leq u_1 (\to\leftarrow)$. ■

Ahora, enfocaremos nuestro estudio en la dinámica de competición entre dos especies. Para esto consideremos

$$J = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

donde $0 < a, b \leq \infty$ y sea $P : J \longrightarrow J$ continua.

Consideremos las siguientes hipótesis sobre P, las cuales juegan un rol importante en nuestro propósito.

(H_1) P es estrictamente competitivo sobre J y fuertemente competitivo en el interior de J.

(H_2) 0 es un punto fijo de P repulsor.

(H_3) $P([0,a] \times \{0\}) \subset [0,a] \times \{0\}$. Existe $\widehat{u} \in (0,a]$ tal que

$$P(\widehat{u},0) = (\widehat{u},0) \quad \text{y} \quad P^n(u,0) \to (\widehat{u},0) \quad ; \forall u \in (0,a].$$

Condiciones simétricas se satisfacen sobre $\{0\} \times [0,b]$ en donde el punto fijo atractor es $(0,\widehat{\nu})$.

(H_4) P transforma $(0,a] \times (0,b]$ dentro de si mismo.

Sea $I = [0,\widehat{u}] \times [0,\widehat{\nu}]$ y denotemos los puntos fijos de P sobre la frontera de J de la siguiente manera:

$$E_0 = (0,0) \qquad E_1 = (\widehat{u},0) \qquad E_2 = (0,\widehat{\nu}).$$

Note que (H_1) implica que $P(I) \subset I$ y además $I = [E_2, E_1]_K$

Teorema 3.1.3 *Supongamos que (H_1) hasta (H_4) se cumple. Entonces, el conjunto omega límite de cuaquier órbita está contenida en I y exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:*

(a-) Existe un punto fijo E_* de P en I.

(b-) $P^n(x) \longrightarrow E_1, \;\; n \to +\infty \quad \forall x = (u,\nu) \in I \quad$ con $\quad u > 0.$

(c-) $P^n(x) \to E_2, \;\; n \to +\infty \quad \forall x = (u,\nu) \in I \quad$ con $\quad \nu > 0.$

Finalmente, si (b-) o (c-) se cumple y $x \in J - I$ con $x \gg 0$, entonces

$$P^n(x) \longrightarrow E_1 \quad \text{ó} \quad P^n(x) \longrightarrow E_2, \;\; n \longrightarrow +\infty$$

Demostración: En primer lugar notemos que I atrae todas las órbitas. En efecto, sean

$$x = (x_1, x_2), \quad u = (x_1, 0) \quad y \quad \nu = (0, x_2).$$

Note que $\nu <_K x <_K u$. Luego, por la monotonía de P, se tiene que:

$$P^n(\nu) <_K P^n(x) <_K P^n(u) \quad , \forall n \geq 1.$$

Pero, (H_3) implica que: $P^n(\nu) \longrightarrow E_2$ y $P^n(u) \longrightarrow E_1, \quad n \longrightarrow +\infty$. Así, $P^n(x) \in I$ y en consecuencia $\omega(x) \subset I$.

Ahora, supongamos que $x \in \omega(z)$; con $z = (z_1, z_2)$. Luego, $P^n(x) \longrightarrow z, \quad n \longrightarrow +\infty$.

Además, supongamos que $z_i > 0, \; i = 1, 2$. Como $\omega(x) \subset I$, entonces $z \in I$; es decir, $E_2 \leq_K z \leq_K E_1$.
Luego, por la monotonía de P, $E_2 \ll_K P^2(z) \ll_K E_1$. Pero, $P^2(z) \in \omega(x) \subset I$. Así, existe $m \geq 1$, tal que: $E_2 \ll_K P^m(x) \ll_K E_1$.

Ahora supongamos que la órbita de x conecta a E_2 con E_1. Fijemos $m \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x_m = P^n(x) \ll_K P^n(x) \ll_K E_1.$$

Luego, $\forall \ell \geq 0 : x_{m+\ell} \ll_K P^{n+\ell}(x) \ll_K E_1$. Haciendo $\ell \to +\infty$, se tiene que: $P^n(x) \to E_1, \; n \to +\infty$.

Análogamente, $P^n(x) \to E_2$ si la órbita de x conecta a E_1 con E_2.
Así, $z \in \omega(x) \Rightarrow \exists! \; i/z_i = 0$. Como $\omega(x)$ es invariantemente conexo, entonces $z_1 = 0$ ó $z_2 = 0$.

Luego, $\omega(x) = E_1$ ó $w(x) = E_2$ ∎

Ahora enunciaremos dos resultados que nos facilitarán la prueba del siguiente teorema.

Corolario 3.1.2 *Suponga que (H_1) hasta (H_4) se cumplen. Entonces P tiene un punto fijo positivo si se cumple una de las siguientes proposiciones:*

i) E_1 *y* E_2 *son relativamente estables a* I.

ii) E_1 *y* E_2 *son relativamente inestables a* I.

Lema 3.1.3 *Sea E un subconjunto compacto de Y. Entonces, E contiene un elemento maximal (minimal).*

Teorema 3.1.4 *Suponga que (H_1) hasta (H_4) se cumplen y además supongamos que E_1 y E_2 son puntos fijos aislados de P y relativamente inestables a I.*
Entonces, existen puntos fijos positivos E_* y E^* (no necesariamente distintos) tales que

$$E_2 \ll_K E^* \leq_K E_* \ll_K E_1 \quad y \quad P^n(x) \longrightarrow [E^*, E_*]_K \quad , \forall x \in I, \quad x \gg 0.$$

Demostración:
Como E_1 y E_2 son relativamente inestables, por corolario 3.1.2, existe un punto fijo positivo x_* de P, el cual debe satisfacer $E_2 \ll_K \; x_* \; \ll_K \; E_1$.

Consideremos el conjunto W definido de la siguiente manera: $W = \{\overline{x} : P(\overline{x}) = \overline{x} \quad \text{y} \quad x_* \leq_K \overline{x} \ll_K \; E_1\}$.

Ahora, usando la compacidad del conjunto de puntos fijos, y por el Lema 3.1.2, se tiene que W tiene un elemento maximal, que llamaremos E_*. Obviamente, el intervalo ordenado $[E_*, E_1]_K$ no contiene puntos fijos de P, aparte de E_* y E_1, pues de lo contrario E_* no sería el elemento maximal de P.
Luego, por la tricotomía del Intervalo Ordenado, existe una órbita completa monótona $\{x_n\}$, la cual conecta E_* con E_1 ó E_1 con E_*.

Supongamos que $\{x_n\}$ conecta a E_1 con E_*. Si $E_* = (x_1, x_2)$ es un punto fijo de P distinto de E_1 y E_2, entonces $0 < x_i < 1$, para algún $i = 1, 2$. Además, $E_2 \ll_K \; E_* \; \ll_K \; E_1$. Luego por observación 3.1.2, se cumple exactamente una de las alternativas de la Tricotomía del Intervalo Ordenado. Supongamos que se cumple, Teorema (3.1.2-c). Fijemos $n \geq 1$ arbitrario. Si $x_n = (x_1, x_2) = E_*$, entonces $x_n \ll 0$.

Como $x_n = P(x_{n+1})$ y dado que $E_* <_K x_{n+1} <_K E_1$, entonces, por la monotonía de P, se tiene que: $E_* \ll_K x_n \ll_K E_1$,
Así $E_* \ll_K x_{n+1} \ll_K x_n \ll_K E_1 \quad, \forall n \geq 1$. Si $x = (u, \nu)$ satisface $E_* <_K x \leq_K E_1$ y $u > 0$, entonces $E_* <_K P^2(x) <_K E_1$. Así, podemos escojer x_n tal que $E_* <_K x_n \ll_K P^2(x) = x_2$.

Luego, $\forall m \geq 0: \quad E_* <_K x_{n+m} \ll_K P^{m+2}(x)$. Haciendo $m \to +\infty, \quad P^n(x) \to E_*$.

La misma conclusión se obtiene si $u = 0$.
Alálogamente, se prueba que si E_2 es un punto fijo aislado, existe un punto fijo positivo de P E^* que cumple: $E_2 \ll_K E^* \ll_K E_1$ y $P^n(x) \to E^*$. En conclusión, tenemos: $E_2 \ll_K E^* \leq_K E_* \ll_K E_1$ y $P^n(x) \to [E^*, E_*]_K$ ■

Proposición 3.1.3 *Asuma que $I \subset Int(J)$. Si además de las hipótesis del teorema 3.1.4, P es C^1 sobre J y E_1, E_2 son hiperbólicos, entonces:*

$$P^n(x) \to [E^*, E_*]_K \quad, \forall x \in J : x \gg 0.$$

Demostración:
De acuerdo a las hipótesis, E_1 y E_2 son puntos fijos sillas cuyas variedades estables son los ejes que los contiene.
Sea $x \in J - I$ con $x \gg 0$. Luego, por teorema 3.1.3, $\omega(x) \neq \phi$ y $\omega(x) \subset I$. Pero, por teorema 3.1.4, es suficiente mostrar que la órbita de x contiene un punto $P^n x \in I$ con $P^n x \gg 0$.
Por (H_4), se tiene que $P^n x \gg 0$. Así, solamente mostraremos que el conjunto omega límite contiene puntos distintos de E_1 y E_2. En efecto, como $\omega(x)$ es invariantemente conexo, se tiene que: $\omega(x) \neq E_1, E_2$. Como $x \gg o$, entonces $x \notin W^s(E_1)$. Así, $\omega(x) \neq E_1$. Análogamente, $\omega(x) \neq E_2$. Por lo tanto, existe $q \neq E_1, E_2$ tal que $q \in \omega(x)$. ■

Capítulo 4

4.1. Aplicaciones

En este capítulo se emplearán algunos de los resultados de los capítulos anteriores a dos modelos de crecimiento de poblaciones, especialmente a los del tipo Lotka-Volterra.

En primer lugar consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n.e^{r(1-u_n-b\nu_n)} \\ \nu_{n+1} &= \nu_n.e^{s(1-cu_n-\nu_n)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sea $P:\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ la transformación definida por:

$$P(u,\nu) = (u.e^{r(1-u-b\nu)}, \nu.e^{s(1-cu-\nu)}) \tag{4.2}$$

Vemos que P preserva estrictamente orden (con respecto a $\leq_K$) sobre $J = [0, r^{-1}] \times [0, s^{-1}]$.

En efecto, sea $P_1(u,\nu) = u.e^{r(1-u-b\nu)}$ y $P_2(u,\nu) = \nu.e^{s(1-cu-\nu)}$.

Entonces;

$$\frac{\partial P_1}{\partial u} = e^{r(1-u-b\nu)} + u.e^{r(1-u-b\nu)}.(-r) \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial u} = (1-ru).e^{r(1-u-b\nu)}$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu} = u.e^{r(1-u-b\nu)}.(-br) \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial \nu} = -br.u.e^{r(1-u-b\nu)}$$
$$\frac{\partial P_2}{\partial u} = \nu.e^{s(1-cu-\nu)}.(-cs) \Rightarrow \frac{\partial P_2}{\partial \nu} = -cs.\nu.e^{s(1-cu-\nu)}$$
$$\frac{\partial P_2}{\partial \nu} = e^{s(1-cu-\nu)} + \nu.e^{s(1-cu-\nu)}.(-s) \Rightarrow \frac{\partial P_2}{\partial \nu} = (1-s\nu)e^{s(1-cu-\nu)}$$

Así

$$DP(u,\nu) = \begin{bmatrix} (1-ru).e^{r(1-u-b\nu)} & -br.u.e^{r(1-u-b\nu)} \\ & \\ -cs.\nu.e^{s(1-cu-\nu)} & (1-s\nu).e^{s(1-cu-\nu)} \end{bmatrix}$$

Ahora, tomemos $(u,\nu) \in J$ cualquiera. Entonces, $0 \leq u \leq r^{-1}$ y $0 \leq \nu \leq s^{-1}$. Luego; $1 - ru \geq 0$ y $1 - s\nu \geq 0$. Así, las entradas de la diagonal principal son no-negativas y las entradas fuera de la diagonal son no-positivas. Por lo tanto, $DP(u,\nu)$ es K-positiva, $\quad \forall (u,\nu) \in J$.
Además, claramente P es C^1, pues P_1 y P_2 lo son, y J es $\leq_K$-poligonalmente convexo, ya que cualquier par de puntos en J, comparables (con respecto a $\leq_K$), va a existir una trayectoria poligonal monótona que los une.

Ahora, fijemos $\nu_o \in (0, s^{-1}]$ y sea $u \in [0, r^{-1}]$ cualquiera y consideremos la fibra horizontal no-trivial A_{ν_0}.

Entonces, $\forall (u,\nu) \in A_{\nu_0}$, se tiene que la primera columna de DP no se anula, pues de lo contrario se tendría que (u,ν) está sobre la fibra horizontal trivial $(\rightarrow\leftarrow)$.
Ahora, fijemos $u_o \in (0, r^{-1}]$ y sea $\nu \in [0, s^{-1}]$ cualquiera y consideremos la fibra vertical no-trivial A_{u_o}. Entonces, $\forall (u,\nu) \in A_{u_o}$, la segunda columna de DP no se anula. Luego, por la proposición 1.1.1 (parte (ii)), se tiene que P es estrictamente competitivo, es decir, P preserva estrictamente K-orden sobre J.

Además, P preserva fuertemente orden sobre $Int(J)$.

En efecto, note que $\forall(u,\nu)\in Int(J)$, se tiene que $DP(u,\nu)$ es K-fuertemente positiva, pues las entradas fuera de la diagonal principal son negativas. Luego, por la proposición 1.1.1 (parte (iii)), se tiene que P es fuertemente competitivo, es decir, P preserva fuertemente K-orden sobre $Int(J)$.

Ahora, de aquí en adelante, asumamos que $0<r,s\leq 1$ y $b,c>0$. Los puntos fijos de P sobre la frontera de $\mathbb{R}^2_+$ son $E_o=(0,0)$, $E_1=(1,0)$ y $E_2=(0,1)$. Además, existe un punto fijo positivo $E^*\in Int(J)$. En efecto, supongamos que $u,\nu>0$.

$$P(u^*,\nu^*)=(u^*,\nu^*)\Leftrightarrow(P_1(u^*,\nu^*),P_2(u^*,\nu^*))=(u^*,\nu^*)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P_1(u^*,\nu^*)=u^*\\ P_2(u^*,\nu^*)=\nu^*\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}u^*.e^{r(1-u^*-b\nu^*)}=u^*\\ \nu^*.e^{s(1-cu^*-\nu^*)}=\nu^*\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}e^{r(1-u^*-b\nu^*)}=1\\ e^{s(1-cu^*-\nu^*)}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r(1-u^*-b\nu^*)=0\\ s(1-cu^*-\nu^*)=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}1-u^*-b\nu^*=0\\ 1-cu^*-\nu^*=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}u^*=1-b\nu^*\\ \nu^*=1-cu^*\end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}u^*=1-b.(1-cu^*)&\Rightarrow u^*=1-b+bcu^* \quad\Rightarrow u^*-bcu^*=1-b\\ &\Rightarrow u^*(1-bc)=1-b \quad\Rightarrow u^*(1-b)/(1-bc)\\ \nu^*=1-c.(1-b\nu^*)&\Rightarrow \nu^*-cb\nu^*=1-c \quad\Rightarrow \nu^*(1-bc)=1-c\Rightarrow \nu^*=(1-c)/(1-bc)\end{aligned}$$

Así, los puntos fijos de P son:

$$E_o=(0,0)\qquad E_1=(1,0)\qquad E_2=(0,1)\qquad E^*=(u^*,\nu^*)=\left(\frac{1-b}{1-bc},\frac{1-c}{1-bc}\right)$$

Proposición 4.1.1 *Sea $P:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}^2_+$ la transformación definida en (4.2) y asumamos $0<r,s\leq 1$.*

(a) Si $b<1<c$, entonces E_1 atrae todos los puntos que no están sobre el eje ν.

(b) Si $c<1<b$, entonces E_2 atrae todos los puntos que no están sobre el eje u.

(c) Si $b, c < 1$, entonces E^* atrae todos los puntos en el interior de $\mathbb{R}^2_+$.

Demostración: Para los casos (a) y (c) nos basaremos en el Teorema 3.1.3. Veamos que (H_1) hasta (H_4) se cumplen. En efecto, ya vimos que (H_1) se verifica. Ahora,

$$DP(E_o) = \begin{bmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^s \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $DP(E_o)$ son e^r y e^s. Como $0 < r, s \leq 1$, entonces $1 < e^r, e^s$. Así, $|e^r|, |e^s| > 1$. Luego, E_o es un repulsor.

Por lo tanto, también se verifica (H_2). Ahora vemos que $P\big([0, r^{-1}] \times \{0\}\big) \subset [0, r^{-1}] \times \{0\}$. Sea $(u, \nu) \in [0, r^{-1}] \times \{0\}$, es decir, $(u, \nu) = (u, 0), u \in [0, r^{-1}]$.
Luego, $P(u, 0) = (ue^{r(1-u)}, 0)$. Debemos ver que $(ue^{r(1-u)}, 0) \in [0, r^{-1}] \times \{0\}$.

Consideremos la función $f(u) = ue^{r(1-u)}$.

$$f'(u) = (1 - ru).e^{r(1-u)} = 0 \Leftrightarrow u = r^{-1}$$
$$f''(u) = (-2r + r^2.u).e^{r(1-u)} \Rightarrow f''(r^{-1}) = -r.e^{r(1-u)} < 0, \text{ pues } r > 0.$$

Así, la función $f(u) = ue^{r(1-u)}$ tiene un máximo en r^{-1}. Luego, $0 \leq ue^{r(1-u)} \leq r^{-1}$. Por lo tanto; $P([0, r^{-1}] \times \{0\}) \subset [0, r^{-1}] \times \{0\}$.
Además, existe $1 \in (0, r^{-1}]$ tal que $P(1, 0) = (1, 0)$. Ahora, veamos que: $\forall u \in (0, r^{-1}]$: $P^n(u, 0) \to E_1, n \to +\infty$.

$$P(u, 0) = (ue^{r(1-u)}, 0) \ ; \ P^n(u, 0) = (P_1^n(u, 0) \ ; \ P_2^n(u, 0)) \ ; \ P_2^n(u, 0) = 0, \ \forall n \geq 0.$$

Así,
$$P^n(u, 0) \to E_1 \ \Leftrightarrow \ P_1^n(u, 0) = f^n(u) \to 1, n \to \infty.$$

Claramente 1 es punto fijo de f. Además, $f'(1) = 1 - r$. Como $0 < r \leq 1$, entonces $0 \leq 1 - r < 1$, es decir, $|1 - r| = |f'(1)| < 1$. Así, 1 es un punto fijo atractor de f, es decir, $f^n(u) = P_1^n(u, 0) \to 1, n \to +\infty$. Por lo tanto; $P^n(u, 0) \to E_1, n \to +\infty$.

Análogamente se verifica que $P(\{0\} \times [0, s^{-1}]) \subset \{0\} \times [0, s^{-1}]$ y además existe $1 \in (0, s^{-1}]$ con $P(0,1) = (0,1)$ tal que: $P^n(0,\nu) \to E_2;\ \forall \nu \in (0, s^{-1}]$. Así, hemos verificado (H_3).

Ahora;

$$DP(E_1) = \begin{bmatrix} 1-r & -br \\ 0 & e^{s(1-c)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad DP(E_2) = \begin{bmatrix} e^{r(1-b)} & 0 \\ -cs & 1-s \end{bmatrix}$$

Observemos que los autovalores de $DP(E_1)$ son $1-r$ y $e^{s(1-c)}$ y de $DP(E_2)$ son $e^{r(1-b)}$ y $1-s$.

a) Supongamos que $b < 1 < c$. Entonces, $c > 1 \Rightarrow 1-c < 0 \Rightarrow s(1-c) < 0 \Rightarrow e^{(1-c)} < 1$. Además, $0 < r \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -r < 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1-r < 1$. Por otro lado, $b < 1 \Rightarrow 1-b > 0 \Rightarrow r(1-b) > 0 \Rightarrow e^{r(1-b)} > 1$, y como $0 < s \leq 1$, entonces $0 \leq 1-s < 1$.
   Así; E_1 es atractor y E_2 es un punto fijo silla.
   Además, en este caso, tenemos $1-b > 0$ y $1-c > 0$. En consecuencia, no existen puntos fijos positivos. Luego, por la parte (b) del teorema 3.1.3, se tiene que $P^n(x) \to E_1\ ,\ \forall x = (u,\nu) \in I$ con $u > 0$, es decir, E_1 atrae todos los puntos que no están sobre el eje ν.

b) Supongamos que $c < 1 < b$.
   En este caso, con un argumento similar al caso anterior, tendríamos que E_1 es un punto silla y E_2 es atractor. Además, como $1-b < 0$ y $1-c > 0$, entonces no existen puntos fijos positivos. Luego, por la parte (c) del teorema 3.1.3, se tiene que $P^n(x) \to E_2\ ,\ \forall x = (u,\nu)$ con $\nu < 0$, es decir, E_2 trae todos los puntos que no están sobre el eje u.

c) Supongamos que $b, c < 1$.
   En este caso, se tiene que E_1 y E_2 son puntos fijos hiperbólicos y además $1-b, 1-c > 0$ implica que existe un punto fijo positivo E^*. Luego, por teoremas

y por la proposición 3.1.3, se tiene que:

$$P^n(x) \to E^* \ , \ x \gg 0.$$

Asi, E^* atrae todos los puntos en el $Int(\mathbb{R}^2_+)$. ■

Lema 4.1.1 *Si* $r, s < 1$ *y* $b, c > 1$*, entonces* $A = DP(E^*)$ *satisface* $0 < det(A) < 1$ *y* $\left|traza(A)\right| > 1+det(A)$*. Consecuentemente, sus autovalores satisfacen* $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$*. Hay vectores* $\nu_1 \gg 0$ *y* $\nu_2 \gg_K 0$ *tal que* $L(\nu_i) = \lambda_i.\nu_i$*.*

Demostración: Como $1 - u^* - b\nu^* = 1 - cu^* - \nu^* = 0$, entonces:

$$A = DP(E^*) = \begin{bmatrix} 1 - r.u^* & -rbu^* \\ -sc\nu^* & 1 - s\nu^* \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
&\det(A) = (1 - r.u^*)(1 - s\nu^*) - r.s.b.c.u^*.\nu^* \\
\Rightarrow &\det(A) = 1 - s\nu^* - ru^* + rsu^*.\nu^* - rsbcu^*\nu^* \\
&\qquad = 1 - s\left(\frac{c-1}{bc-1}\right) - r.\left(\frac{b-1}{bc-1}\right) - \frac{bc}{bc-1}.rs\frac{(c-1).(b-1)}{bc-1} \\
&\qquad < 1 - s\left(\frac{c-1}{bc-1}\right) - r.\left(\frac{b-1}{bc-1}\right) - \frac{bc}{bc-1}.rs\frac{(c-1).(b-1)}{bc-1}\left(\text{ya que } bc > bc-1\right) \\
&\qquad = 1 - \left[s.\left(\frac{c-1}{bc-1}\right) + r.\left(\frac{b-1}{bc-1}\right) + rs.\frac{(c-1)(b-1)}{bc-1}\right]
\end{aligned}$$

Como $0 < r, s < 1$ y $b, c > 1$ entonces $b - 1 > 0$, $c - 1 > 0$ y $bc - 1 > 0$.
Así;

$$-\left[s.\left(\frac{c-1}{bc-1}\right) + r.\left(\frac{b-1}{bc-1}\right) + rs.\frac{(c-1)(b-1)}{bc-1}\right] < 0$$

Luego;

$$1 - \left[s.\left(\frac{c-1}{bc-1}\right) + r.\left(\frac{b-1}{bc-1}\right) + rs.\frac{(c-1)(b-1)}{bc-1}\right] < 1$$

Por lo tanto, $0 < \det(A) < 1$.
Ahora,

$$Traza(A) = (1 - r.u^*) + (1 - s\nu^*) = 2 - ru^* - s\nu^*$$

Como $b, c > 1$, entonces $b.c > 1$. Entonces, $rsu^*\nu^* < -rsbcu^*.\nu^*$.

$$\Rightarrow rsu^*.\nu^* - rsbcu^*\nu^* < 0$$

$$\Rightarrow 2 - ru^* - s\nu^* > 2 - s\nu^* - ru^* + rsu^*.\nu^* - rsbcu^*.\nu^*$$

$$\Rightarrow 2 - ru^* - s\nu^* > 1 + (1 - s\nu^* - ru^* + rsu^*.\nu^* - rsbcu^*.\nu^*)$$

$$\Rightarrow Traza(A) > 1 + \det(A)$$

Por lo tanto,

$$\left|Traza(A)\right| > 1 + \det(A)$$

Ahora, hallemos los autovalores de A:

$$B = A - \lambda.I = \begin{bmatrix} (1 - ru^*) - \lambda & -rbu^* \\ -sc\nu^* & (1 - s\nu^*) - \lambda \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(B) = 0 &\Leftrightarrow [(1 - ru^*) - \lambda].[(1 - s\nu^*) - \lambda] - rbscu^*\nu^* = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - ru^*)(1 - s\nu^*) - rbscu^*\nu^* - (1 - ru^*)\lambda - (1 - s\nu^*)\lambda + \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - (s\nu^* + ru^* + rs(bc - 1)u^*\nu^*) - \lambda.[1 - ru^* + 1 - s\nu^*] + \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - Traza(A).\lambda + \det(A) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que las raíces del polinomio característico (λ_1, λ_2) satisfacen lo siguiente:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = Traza(A) \quad \text{y} \quad \lambda_1.\lambda_2 = \det(A).$$

Como

$$0 < \det(A) < 1 \quad \text{y} \quad Traza(A) > 1 + \det(A),$$

se tiene que:

$$0 < \lambda_1.\lambda_2 < 1 \quad \text{y} \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 1.$$

Pero, $0 < \lambda_1.\lambda_2 < 1$ implica tres posibilidades:

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1 \qquad \text{ó} \qquad -1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0 \qquad \text{ó} \qquad 0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2.$$

Supongamos que $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0$. Si $-1 < \lambda_2 < 0$, entonces $0 < -\lambda_2 < 1$, y en consecuencia $1 < 1 - \lambda_2 < \lambda_1$. Así, se tendría que $\lambda_1 > 0(\rightarrow\leftarrow)$.
Supongamos que $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$. Si $\lambda_2 < \lambda_1$ entonces $\lambda_1 \ngtr 1 - \lambda_2$. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ entonces $\lambda_2 \ngtr 1 - \lambda_1$.
En conclusión, tendríamos que los autovalores de A satisfacen $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$.

Calculemos el vector propio (ν_1) asociado al autovalor λ_1. Para esto cambiemos la notación usada para más facilidad.

$$A = DP(E^*) = \begin{bmatrix} 1 - r.u^* & -rbu^* \\ -sc\nu^* & 1 - s\nu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matríz A están dados por:

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)}}{2}$$

Ahora:

$$A - \lambda_1.I = \begin{bmatrix} \frac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2} & b \\ c & -\frac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2} \end{bmatrix}$$

Así, sea $\nu_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Entonces, $(A - \lambda_1.I).\nu_1 = 0$ equivale a decir:

$$\begin{aligned} \tfrac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}.x_1 + b.x_2 = 0 \\ c.x_1 - \tfrac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}.x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Luego,

$$x_1 = \frac{a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)}}{2c}.x_2$$

Tomemos $x_1 = 1$. Así,

$$\nu_1 = col\left[\quad \frac{a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)}}{2c} \quad 1 \right]$$

Claramente, el vector ν_1 satisface (4.3):
En efecto:

- $\frac{(a-d)^2-(a+d)^2+4.\det(A)}{4c}+b=\frac{4.\det(A)-4ad}{4c}+b=\frac{\det(A)-ad}{c}+b$
  $=\frac{ad-bc-ad}{c}+b=\frac{-bc}{c}+b=0.$

- $\frac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}-\frac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}=0$

Ahora, sabemos que $\det(A)>0$.

Luego,

$$-4.\det(A)<0 \Rightarrow d^2-2ad+a^2-4.\det(A)<d^2-2ad+a^2$$

$$\Rightarrow (a+d)^2-4.\det(A)<(d-a)^2\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}<d-a$$
$$\Rightarrow a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}<0.$$

Además, $c<0$, pués $c=-sc.\nu^*$. Así, $x_1>0$. Luego, $\nu_1\gg 0$.

Ahora, calculemos el vector propio (ν_2) asociado al autovalor λ_2:

$$A-\lambda_2.I=\begin{bmatrix}\frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2} & b\\ c & -\frac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}\end{bmatrix}$$

Sea $\nu_2=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$. Entonces, $(A-\lambda_2.I).\nu_2=0$, equivale a:

$$\begin{cases}\frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}.y_1+b.y_2=0\\ c.y_1-\frac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2}.y_2=0\end{cases}$$

Luego,

$$y_1=\frac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2c}.y_2$$

Tomemos

$$y_2=-1.\text{ Así, }\ \nu_2=col\left[\quad\frac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4.\det(A)}}{2c}\quad -1\right].$$

Como $\det(A) > 0$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&-4\det(A) < 0 \Rightarrow d^2 - 2ad + a^2 - 4.\det(A) < d^2 - 2ad + a^2 \\
&\Rightarrow (a+d)^2 - 4.\det(A) < (d-a)^2 = (a-d)^2 \Rightarrow \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)} < a - d. \\
&\Rightarrow d - a + \sqrt{(a+d)^2 - 4.\det(A)} < 0
\end{aligned}
$$

Así $\lambda_1 > 0$ y en consecuencia se tendría que $\nu_2 \gg_k 0$. ■

Proposición 4.1.2 *Si $r, s < 1$ y $b, c > 1$, entonces existe una curva Γ, C^1, la cual es linealmente ordenada por $\ll$ en J, contiene a E_o, E^* y al punto en el infinito, y particiona a $\mathbb{R}^2_+$ en dos subconjuntos relativamente abiertos B_1 y B_2, donde B_i es la cuenca de atracción de $E_i, i = 1, 2$, y $\Gamma - \{E_o\}$ es la variedad estable de E^*.*

Demostración: En primer lugar notamos que $\det DP(u,\nu) = 0$ sobre la curva convexa γ dada por $s\nu + ru + rs(bc-1)u\nu = 1$.

En efecto;

$$
\begin{aligned}
\det DP(u,\nu) = 0 &\Leftrightarrow (1-ru)e^{r(1-u-b\nu)}.(1-s\nu).e^{s(1-cu-\nu)} - cs\nu.e^{s(1-cu-\nu)}.e^{r(1-u-b\nu)}.bru = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-ru)(1-s\nu) = cs\nu bru \Leftrightarrow 1 - s\nu - ru + rsu\nu = cs\nu bru \\
&\Leftrightarrow s\nu + ru - rsu\nu + cs\nu bru = 1 \\
&\Leftrightarrow s\nu + ru + rs(bc-1)u\nu = 1.
\end{aligned}
$$

Así; $\gamma = \{(u,\nu) : s\nu + ru + rs(bc-1)u\nu = 1\}$ es la curva de puntos críticos.

Esta curva separa $\mathbb{R}^2_+$ en dos componentes conexas, una no-acotada, donde $\det DP(u,\nu) < 0$ y una acotada, conteniendo a E^* y donde $detDP(u,\nu) > 0$. Denotemos por Ω_b la componente acotada y Ω_u la componente no-acotada.
Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, consideremos los conjuntos
$B = \{(u,\nu) \in \mathbb{R}^2_+ : s\nu + ru + rs(bc-1)u\nu \leq 1 - \varepsilon\}$, y

$\Omega_b = \{(u,\nu) \in \mathbb{R}^2_+ : s\nu + ru + rs(bc-1)u\nu < 1\}$.

Como Ω_b es acotada y conexo, se tiene que B es compacto y conexo, y además $P^{-1}(0,0) = (0,0)$, en consecuecnia P es inyectiva sobre Ω_u.

Por otro lado, γ une a los puntos $(0, s^{-1})$ con $(r^{-1}, 0)$.

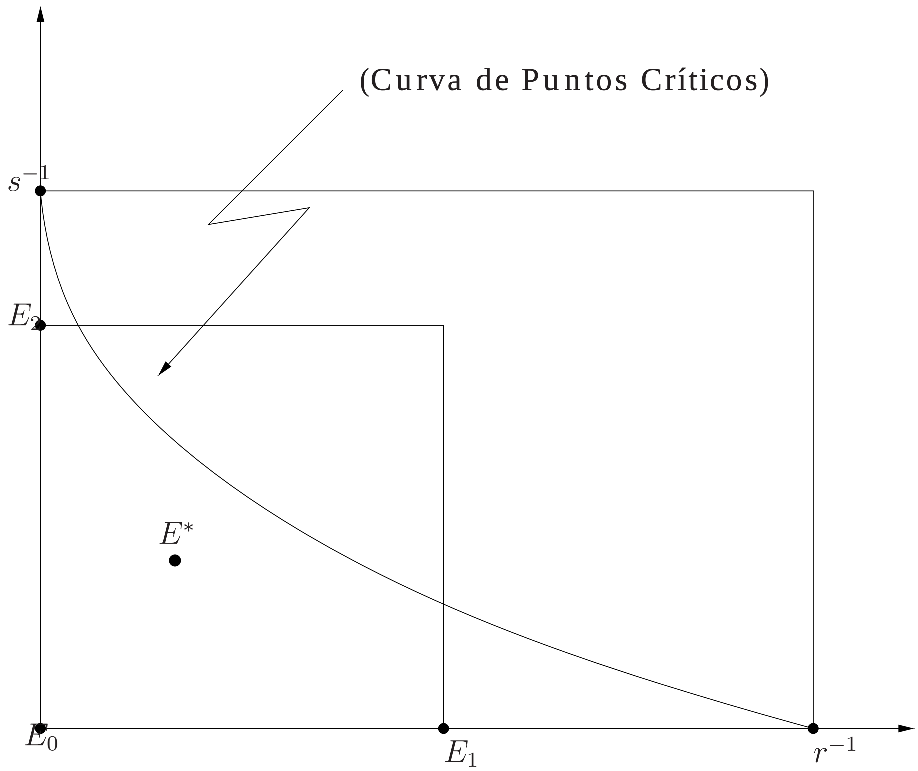

Figura 4.1:

Como γ es linealmente ordenada por $\ll_K$ y P preserva fuertemente orden, entonces $P(\gamma)$ es linealmente ordenada por $\ll_K$ y une a los puntos $(0, s^{-1}.e^{s-1})$ con $(r^{-1}.e^{r-1}, 0)$.

$$P(0, s^{-1}) = (0, s^{-1}.e^{s(1-s^{-1}}) = (0, s^{-1}.e^{s-1})$$

$$P(r^{-1}, 0) = (r^{-1}.e^{r(1-r-1)}, 0) = (r^{-1}.e^{r-1}, 0)$$

Luego, la curva de valores críticos $P(\gamma)$ junto con los segmentos de ejes coordenados que esta corta, forman la frontera de $P(\mathbb{R}^2_+)$.

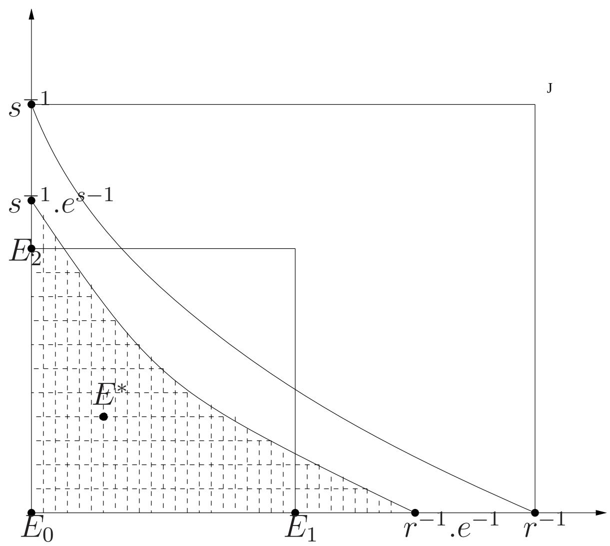

Figura 4.2:

Sea Λ la componente acotada de $\mathbb{R}^2_+ - P(\gamma)$. Entonces, $P(\Omega_b) = P(\Omega_u) = \Lambda$. Ahora, sea $I = [E_2, E_1]_K$ y note que este es positivamente invariante. Las líneas $u = u^*$ y $\nu = \nu^*$ particionan a I en cuatro rectángulos cerrados, I_o conteniendo a E_o, I_1 conteniendo a E_1, I_2 conteniendo a E_2 e I_3. Existe una vecindad, U de E^*, en el cual P restricto a un difeomorfismo, tiene una variedad estable local unidimensional, que es tangente a ν_1 en E^*. Así, $W^s_{Loc}(E^*) \subset I_o \cup I_3$. Además, P tiene una variedad inestable local unidimensional que es tangente a ν_2 en E^*. Así, $W^u_{loc}(E^*) \subset I_1 \cup I_2$.

Afirmamos que E^* no puede atraer un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2_+$.

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe una bola abierta B en $\mathbb{R}^2_+$ que es atraída por E^* y $\det DP(u, \nu) \neq 0$, $\forall (u, \nu) \in B$. Como P es continua, entonces $P(B)$ también es un conjunto abierto. Así, existen $x, y \in P(B)$ con $x \ll_K y$ tales que $P^n(x), P^n(y) \longrightarrow E^*, n \to +\infty$. Como P preserva fuertemente orden, entonces

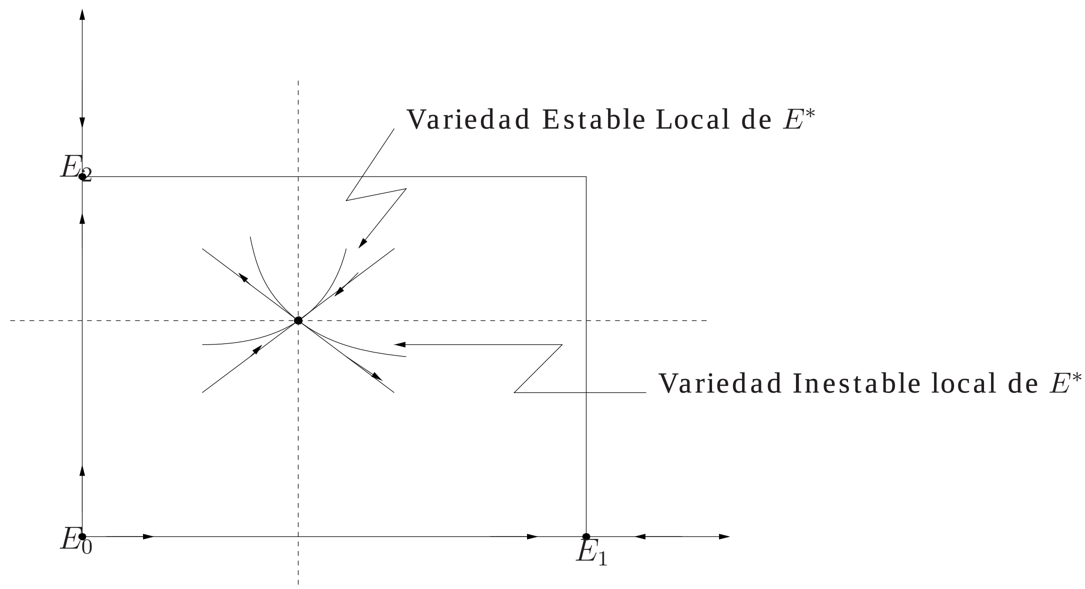

Figura 4.3:

$P^n(x) \ll_K P^n(y), \ \forall n \geq 0$. Así, $[P^n(x), P^n(y)]_K$ es atraída a E^* y para $n \geq 1$ suficientemente grande, se tiene que $[P^n(x), P^n(y)]_K \subset U$, lo cual implica una contadicción, pues $W^s_{Loc}(E^*)$ es unidimensional.

Como $I_o \subset \Omega_b$, entonces P es inyectiva sobre I_o y así $P : I_o \longrightarrow P(I_o)$ es un homeomorfismo. La frontera derecha de la curva $u = u^*$ de I_o es linealmente ordenada, uniendo E^* con el punto $P(u^*, 0)$ que está ubicado sobre el eje u, entre $(u^*, 0)$ y E_1, y además la curva imagen está contenida en I_1.

i) Sea $L_1 = \{(u^*, \nu) : 0 < \nu < \nu^*\}$. Sea $(u^*, \nu_1), (u^*, \nu_2) \in L_1$

$$(u^*, \nu_1) \leq_K (u^*, \nu_2) \Leftrightarrow (u^*, \nu_2) - (u^*, \nu_1) \in K \Rightarrow 0 \begin{cases} u^* - u^* \geq 0 \\ \nu_2 - \nu_1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \nu_2 \leq \nu_1$$

ii) $P(u^*, 0) = (u^*.e^{r(1-u^*)}, 0)$ está entre $(u^*, 0)$ y E_1 :

$$0 < u^* < 1 \Rightarrow -1 < -u^* < 0 \Rightarrow 0 < 1 - u^* < 1 \Rightarrow 0 < r(1 - u^*) < r$$

$$\Rightarrow 1 < e^{r(1-u^*)} < e^r \Rightarrow u^* < u^*.e^{r(1-u^*)} < u^*.e^r$$

Pero, $u^*.e^r < 1$ (pués $r > 0 \Rightarrow e^{-r} < 1$). Así; $u^* < u^* e^{r(1-u^*)} < 1$.

iii) $P(L_1) \subset I_1$:

$P(u^*, \nu_1) = (u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_1)}, \nu_1.e^{s(1-cu^*-\nu_1)})$

$P(u^*, \nu_2) = (u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_2)}, \nu_2.e^{s(1-cu^*-\nu_2)})$

Afirmamos que: $u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_1)} < u^*.e^{r(1-u^*)}$.

$$
\begin{aligned}
rb\nu_1 > 0 - rb\nu_1 < 0 \\
&\Rightarrow -b\nu_1 < 0 \\
&\Rightarrow e^{-rb\nu_1} < 1 \Rightarrow u^*.e^{r(1-u^*)}.e^{-rb\nu_1} < u^*.e^{r(1-u^*)} \\
&\Rightarrow u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_1)} < u^*.e^{r(1-u^*)} \\
\nu^* > \nu_1 &\Rightarrow \frac{1-c}{1-bc} > \nu_1 \Rightarrow \frac{b(1-c)}{1-bc} > b\nu_1 \Rightarrow \frac{b-bc}{1-bc} - b\nu_1 > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1-bc-1+b}{1-bc} - b\nu_1 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1-b}{1-bc} - b\nu_1 > 0 \Rightarrow 1 - u^* - b\nu_1 > 0 \\
&\Rightarrow r(1-u^*-b\nu_1) > 0 \Rightarrow e^{r(1-u^*-b\nu_1)} > 1 \Rightarrow u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_1)} > u^*
\end{aligned}
$$

Similarmente se tiene que $u^* < u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_2)} < u^*.e^{r(1-u^*)}$.
Ahora;

$$
\begin{aligned}
\nu_2 < \nu_1 &\Rightarrow b\nu_2 < b\nu_1 \Rightarrow -b\nu_1 < -b\nu_2 \Rightarrow -u^* - b\nu_1 < -u^* - b\nu_2 \\
&\Rightarrow 1 - u^* - b\nu_1 < 1 - u^* - b\nu_2 \Rightarrow r(1-u^*-b\nu_1) < r(1-u^*-b\nu_2) \\
&\Rightarrow e^{r(1-u^*-b\nu_1)} < e^{r(1-u^*-b\nu_2)} \Rightarrow u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_1)} < u^*.e^{r(1-u^*-b\nu_2)}
\end{aligned}
$$

Así, la imagen de la frontera derecha de I_o es una curva linealmente ordenada y está totalmente contenida en I_1. Similarmente, la imagen de la frontera superior de I_o está contenida en I_2.

Ahora, afirmamos que $P(u, \nu) \gg_{K_1} (u, \nu), \quad \forall (u, \nu) \in I_o$, tal que $(u, \nu) \neq E^*$ y no está sobre los ejes coordenados:
Sea; $\quad (u, \nu) \in I_o \quad$ con $\quad 0 < u < u^* \quad$ y $\quad 0 < \nu < \nu^*$ Entonces,

$$
\begin{aligned}
(u, \nu) \ll_{K_1} P(u, \nu) &\Leftrightarrow (u.e^{r(1-u-b\nu)}, \nu.e^{s(1-cu-\nu)}) - (u, \nu) \in Int(K_1) \\
&\Leftrightarrow (u.e^{r(1-u-b\nu)} - u, \nu.e^{s(1-cu-\nu)} - \nu) \in Int(K_1)
\end{aligned}
$$

Debemos verificar lo siguiente:

$$u.e^{r(1-u-b\nu)} - u = u.\left[e^{r(1-u-b\nu)} - 1\right] > 0. \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < u < u^* \Rightarrow -u^* < -u < 0 \\ 0 < \nu < \nu^* \Rightarrow -b\nu^* < -b\nu < 0 \end{array}\right\} \rightarrow -u^* - b\nu^* < -u - b\nu < 0 \Rightarrow 1 - u^* - b\nu^* < 1 - u - b\nu < 1$$

$$r(1-u^*-b\nu^*) < r(1-u-b\nu) \Rightarrow e^{r(1-u^*-b\nu^*)} < e^{r(1-u-b\nu).}$$

Pero;

$$e^{r.\left[1-\frac{1-b}{1-bc}-b.\left(\frac{1-c}{1-bc}\right)\right]} = e^{r.\left[1-\frac{1-b}{1-bc}-\frac{b-bc}{1-bc}\right]} = e^{r.\left[1+\frac{b-1+bc-b}{1-cb}\right]} = e^{r.\left[1+\frac{bc-1}{1-bc}\right]} = e^{r \cdot 0} = 1$$

Así

$$e^{r(1-u-b\nu)} > 1 \Rightarrow e^{r(1-u-b\nu)} - 1 > 0 \Rightarrow u.\left[e^{r(1-u-b\nu)} - 1\right] > 0.$$

$$\nu.e^{s(1-cu-\nu)} - \nu = \nu.\left[e^{s(1-cu-\nu)} - 1\right] > 0 \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < u < u^* \Rightarrow -cu^* < -cu < 0 \\ 0 < \nu < \nu^* \Rightarrow -\nu^* < -\nu < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -cu^* - \nu^* < -cu - \nu < 0 \Rightarrow 1 - cu^* - \nu^* < -cu - \nu < 1$$

$$\Rightarrow s(1-cu^*-\nu^*) < s(1-cu-\nu) \Rightarrow e^{s(1-cu^*-\nu^*)} < e^{s(1-cu-\nu)}$$

Pero,

$$e^{s\left[1-c\left(\frac{1-b}{1-bc}\right)-\frac{1-c}{1-bc}\right]} = e^{s.\left[1-\frac{c-bc}{1-bc}-\frac{1-c}{1-bc}\right]} = e^{s\left[1-\frac{1-bc}{1-bc}\right]} = 1$$

Así,

$$e^{s(1-cu-\nu)} > 1 \Rightarrow e^{s(1-cu-\nu)} - 1 > 0 \Rightarrow \nu.e^{s(1-cu-\nu)} - \nu > 0.$$

En conclusión, se tiene que para tales puntos, su órbita permanece en I_o ó entra en I_1 y converge a E_1 ó entra en I_2 y converge a E_2.

Ahora, afirmamos que $P(x) \ll_{K_1} x$, $\quad \forall x \in I_3 \,/\, x \neq E^*$. En efecto, sea $x = (u, \nu) \in I_3$ con $\quad u^* < u < 1 \quad$ y $\quad \nu^* < \nu < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(u,\nu) \ll_{K_1} (u,\nu) &\Leftrightarrow (u,\nu) - (ue^{r(1-u-b\nu)}, \nu e^{s(1-cu-\nu)}) \in Int(K_1) \\ &\Leftrightarrow (u - ue^{r(1-u-b\nu)}, \nu - \nu e^{s(1-cu-\nu)}) \in Int(K_1) \end{aligned}$$

Debemos verificar lo siguiente:

$(*) \quad u - ue^{r(1-u-b\nu)} = u.\left[1 - e^{s(1-u-b\nu)}\right] > 0.$

$$\left.\begin{array}{l} u^* < u < 1 \Rightarrow -1 < -u < -u^* \\ \nu^* < \nu < 1 \Rightarrow -b < b\nu < -b\nu^* \end{array}\right\} \Rightarrow -1-b < -u-b\nu < -u^*-b\nu^* \Rightarrow -b < 1-u-b\nu < 1-u^*-b\nu^*$$

$\Rightarrow r(1-u-b\nu) < r(1-u^*-b\nu^*) \Rightarrow e^{r(1-u-b\nu)} < e^{r(1-u^*-b\nu^*)} = 1$
$\Rightarrow \quad 1 - e^{r(1-u-b\nu)} > 0 \Rightarrow u.\left[1 - e^{r(1-u-b\nu)}\right] > 0.$

$(**) \quad \nu - \nu e^{s(1-cu-\nu)} = \nu.\left[1 - e^{s(1-cu-\nu)}\right] > 0.$

$$\left.\begin{array}{l} u^* < u < 1 \Rightarrow -c < -cu < -cu^* \\ \nu^* < \nu < 1 \Rightarrow -1 < -\nu < -\nu^* \end{array}\right\} \Rightarrow -1-c < -cu-\nu < -cu^*-\nu^* \Rightarrow -c < 1-cu-\nu < 1-cu^*-\nu^*$$

$\Rightarrow s(1-cu-\nu) < s(1-cu^*-\nu^*) \Rightarrow e^{s(1-cu-\nu)} < e^{s(1-cu^*-\nu^*)} = 1$
$\Rightarrow \quad 1 - e^{s(1-cu-\nu)} > 0 \Rightarrow \nu.\left[1 - e^{s(1-cu-\nu)}\right] > 0.$

Así; la órbita de tales puntos permanece en I_3 y converge a E^* ó entra y permanece a uno de los otros rectángulos. En conclusión, cualquier órbita que se inicie en I converge a uno de puntos fijos de P.

Sea B_i la cuenca de atracción del punto fijo E_i en $\mathbb{R}^2_+, i = 1, 2$, es decir:

$$B_i(E_i) = \{x = (u, \nu) \in \mathbb{R}^2_+ : \omega(x) = E_i\}$$

Afirmamos que B_1 contiene el semieje positivo u y B_2 contiene el semieje positivo ν. En efecto, sea $x = (u, 0)$ con $0 < u < 1$. Entonces, $P(u, 0) = (ur^{(1-u)}, 0)$, donde $x \leq_K P(x)$.

Como P es competitivo, $x \leq_K P(x) \leq_K P^2(x) \leq_K ... \leq_K P^n(x) \leq_K ...$, y además E_1 es un punto fijo atractor, se tiene que: $P^n(x) \to E_1, n \to +\infty$.
Así, $\omega(x) = E_1, \ \forall x = (u, 0)$ con $0 < u < 1$. Ahora, supongamos que $1 < u < r^{-1}$. Entonces, $u.e^{r(1-u)} < u$ y así $P(x) \leq_K (x)$.

Luego, $E_1 \leq_K ... \leq_K P^n(x) \leq_K ... \leq_K P(x) \leq_K x$ y $P^n(x) \to E_1, n \to +\infty$.
Así, $\omega(x) = E_1 \ \forall x = (u, 0)$ con $1 < u < r^{-1}$.

Ahora, supongamos que $u > r^{-1}$. Entonces, $x = (u, 0) \in \Omega_u$. Pero, $P(\Omega_u) = \Lambda$. Así, $1 < ue^{r(1-u)} < r^{-1}$ ó $0 < ue^{r(1-u)} < 1$.

En cualquier caso, se tiene que $\omega(x) = E_1$.

En conclusión, B_1 contiene al semieje positivo u. Similarmente, se verifica que B_2 contiene al semieje positivo ν.

Sea $x \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $x \notin I$. Entonces, $P(x) = (u, \nu) \in J$.

Como $(0, \nu) \leq_K (u, \nu) \leq_K (u, 0)$ y por la competitividad de P sobre J, se tiene que:

$$P^n(0, \nu) \leq_K P^n(u, \nu) \leq_K P^n(u, 0) \ , \quad \forall n \geq 0.$$

Además, $P^n(u, 0) \to E_1$ y $P^n(0, \nu) \to E_2, \ n \to \infty$. Así, $\omega(x) \subset I = [E_2, E_1]_K$.

Afirmamos que si $\omega(x)$ contiene un punto de B_1, entonces $\omega(x) = E_1$.

En efecto, sea $z \in B_1$ tal que $z \in \omega(x)$. Como $z \in B_1$, entonces $\omega(z) = E_1$.

Pero, $z \in \omega(x)$. Así $P^n(x) \to z, \ n \to \infty$. Luego, $P^{n+m}(x) \to P^m(z), \ \forall m \geq 0$.

Haciendo $m \to +\infty$, se tiene que $p^\ell(x) \to E_1, \ \forall \ell \geq 0$. Así, $\omega(x) = E_1$. Similarmente se prueba que si $\omega(x)$ contiene un punto de B_2, entonces $\omega(x) = E_2$. Ahora, si $z \in \omega(x)$ tal que $z \notin B_i, i = 1, 2$, entonces estos puntos son atraídos por E^*, es decir, $\omega(z) = E^*$.

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $\omega(z) \neq E^*$. Entonces, existe $q \neq E^*$ tal que $\omega(z) = q$. Luego existe un único $k \in \{1, 2\}$ tal que $q \in I_k$.

Si $q \in I_1$, entonces su órbita converge a E_1 y en consecuencia $z \in B_1(\rightarrow\leftarrow)$. Similarmente, si $q \in I_2$, entonces $z \in B_2(\rightarrow\leftarrow)$.

Así, hemos mostrado que cualquier órbita comenzando fuera de I es atraído a uno de los tres puntos fijos E^*, E_1 ó E_2.

Note que si $x \in B_1 \cap J(x \in B_2 \cap J)$ y $x \leq_K y(y \leq_K x)$ entonces $y \in B_1 \cap J$. En efecto, supongamos que $y \notin B_1 \cap J$. Entonces, $\omega(y) = E_2$, es decir, $P^n(y) \rightarrow E_2, n \rightarrow +\infty$. Como P es competitivo, $P^n(x) \leq_K P^n(y),\ \forall n \geq 0$.

Además, si $x \in B_1$ entonces $P^n(x) \rightarrow E_1,\ n \rightarrow +\infty$.

Entonces, $\exists m_o > 0/P^{m_o}(y) \leq_K P^{m_o}(x)(\rightarrow\leftarrow)$.

Ahora, veamos que $\partial B_1 = \partial B_2$. Sea $x \in \partial B_1$ y consideremos dos casos.

Caso 1: Supongamos que $x \notin \gamma$.

Como P es localmente un homeomorfismo, este preserva las propiedades topológicas, es decir, $z = P(x) \in \partial B_1$.

Escojamos y suficientemente cerca de z, tal que $y \ll_K z$.
Entonces, ningún punto del intervalo ordenado $[y, z]_K$ pertenece a B_1, pues de lo contrario, si existe $\omega \in [y, z]_K$ tal que $\omega \in B_1$, entonces $z \in Int(B_1)(\rightarrow\leftarrow)$. Además, como sabemos E^* no puede atraer conjuntos abiertos, así el intervalo ordenado debe contener puntos de B_2.

Como $y \ll_K z$ puede ser escogido arbitrariamente cerca de z, se tiene que z es un punto frontera de B_2. Así $x \in \partial B_2$

Caso 2: Supongamos que $x \in \gamma$. Entonces, podemos escoger y arbitrariamente cercano a x con $y \ll_K x$. Luego, por el mismo argumento del caso 1, se tiene que $x \in \partial B_2$.

Argumentos similares implica que todo punto frontera de B_2 es un punto frontera de B_1. Sea Γ la frontera común de B_1 y B_2, es decir, $\Gamma = \partial B_1 \cap \partial B_2$. Además, Γ contiene a los puntos fijos E_o y E^* y contiene a la variedad estable local de $E^*(W^s_{Loc}(E^*))$.

Los puntos de Γ, excepto E_o, son todos atraídos hacia E^*. Más aún, Γ, es la variedad estable de E^*, ya que si $P^n(x) \to E^*$ y B es una bola centrada en x, entonces B contiene puntos de B_1 ó B_2 ó de ambos, puesto que la cuenca de atracción de E^* tiene interior vacío. Así $\Gamma = \bigcap_{n \geq 0} P^{-n}(W^s_{Loc}(E^*))$.

Afirmamos que $\Gamma \cap J$ es linealmente ordenada con respecto a $\ll$, pues de lo contrario, existen $x, y \in \Gamma \cap J$, distinto de E_o, con $x \leq_K y$ y por la monotonía de P, $P^n(x) \ll_K P^n(y)$, $\forall n \geq 1$. En consecuencia, el intervalo ordenado $[P^n(x), P^n(y)]_K$ es atraído por $E^*(\rightarrow\leftarrow)$, ya que E^* no atrae conjuntos abiertos. Como $\Gamma \cap J$ es linealmente ordenada por $\ll$, se sigue que $\forall t \in (0, 1]$ la parte de la curva está contenida en J y corta a Γ en exactamente un punto.

Ahora, veamos que $\Gamma \cap J$ puede ser descrito por una curva continua Lipschitz. Para esto usaremos el cambio de coordenadas $\Psi = u + \nu$ y $\eta = u - \nu$. Afirmamos que $\Gamma \cap J$ es el gráfico de una función Lipschitz $\eta = F(\Psi)$ con $\Psi \in [0, \Psi_m]$ y $F(0) = 0$.

Consideremos un punto $(u_o, \nu_o) \in \Gamma$ perteneciendo al interior de J. Si $\Psi > \Psi_o = u_o + \nu_o$ está suficientemente cerca de Ψ_o, de tal manera que la región triangular está acotada por las rectas $\Psi = u + \nu$, $u = u_o$ y $\nu = \nu_o$ esté contenido en $Int(J)$, entonces existe un punto $(u, \nu) \in \Gamma$ sobre la recta $\Psi = u + \nu$ tal que $|\eta - \eta_o| \leq |\Psi - \Psi_o|$.

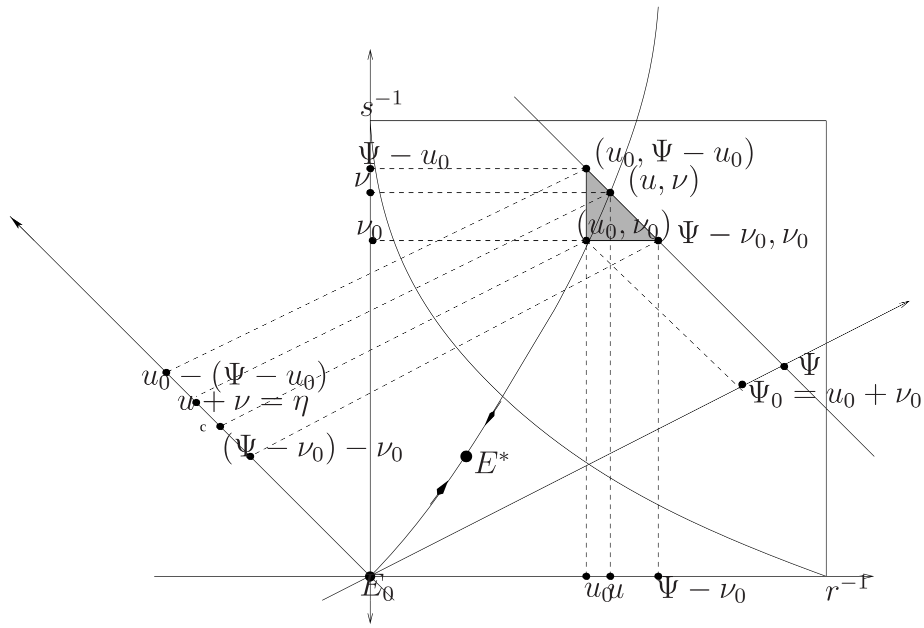

Figura 4.4:

En efecto, en primer lugar, como $\Gamma \cap J$ es linealmente ordenada por $\ll$, entonces $\forall (u,\nu) \in \Gamma$ con $\Psi = u+\nu : (u_o,\nu_o) \ll (u,\nu)$. En consecuencia, las esquinas del triángulo $(u_o, \Psi - u_o), (\Psi - \nu_o, \nu_o)$ no pueden estar sobre Γ. Además, como $(u_o, \Psi - u_o) \leq_K (u_o, \nu_o)$ entonces $(u_o, \Psi - u_o)$ no puede pertenecer a B_1. Así; $(u_o, \Psi - u_o) \in B_2$, ya que cualquier punto es atraído a uno de los tres puntos fijos.

Similarmente, se verifica que $(\Psi - \nu_o, \nu_o) \in B_2$. Luego, debe existir un punto de Γ entre estas dos esquinas del triángulo sobre la recta $\Psi = u + \nu$. (Solamente puede existir un sólo punto, pues Γ es linealmente ordenada por $\ll$).

Así, si $\eta = u - \nu$ corresponde al único punto $(u, \nu) \in \Gamma$ sobre la recta $\Psi = u + \nu$, entonces η satisface: $(\Psi - \nu_o) - \nu_o < \eta < u_o - (\Psi - u_o)$
$\Rightarrow \Psi - u_o - u_o < -\eta < \nu_o - \Psi + \nu_o \Rightarrow \Psi - u_o - u_o + u_o - \nu_o < \eta_o - \eta < \nu_o - \Psi + \nu_o + u_o - \nu_o$
$\Psi - (u_o + \nu_o) < \eta_o - \eta < (u_o + \nu_o) - \Psi \Rightarrow \Psi - \Psi_o < \eta_o - \eta < \Psi_o - \Psi$
$\Rightarrow |\eta_o - \eta| < |\Psi_o - \Psi|| \Rightarrow |\eta - \eta_o| < |\Psi - \Psi_o| \Rightarrow |F(\Psi) - F(\Psi_o)| < |\Psi - \Psi_o|$.

Argumentos similares se aplican si $(u_o, \nu_o) = E_o$ y $(u_o, \nu_o) = (u_m, \nu_m)$, correspondiendo a $\eta_m = F(\Psi_m)$ donde (u_m, ν_m) pertenece en la frontera de J. Esto establece nuestra afirmación que Γ es descrita por la función $\eta = F(\Psi)$ donde F es Lipschitz con constante de Lipschitz igual a uno. ■

Como un ejemplo final, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \nu_n.e^{r(1-\nu_n)} \\ \nu_{n+1} = u_n.e^{-su_n} \end{cases} \tag{4.6}$$

Como antes, sea $P : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ la transformación definida por el lado derecho de (4.6).

$$P(u,\nu) = (\nu.e^{r(1-\nu)}, u.e^{-su})$$

Hallemos el Jacobiano de P :

$$DP(u,\nu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial u} & \frac{\partial P_1}{\partial \nu} \\ \\ \frac{\partial P_2}{\partial u} & \frac{\partial P_2}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{r(1-\nu)} - r.\nu.e^{r(1-\nu)} \\ e^{-su} - sue^{-su} & 0 \end{bmatrix}$$

$$DP(u,\nu) = \begin{bmatrix} 0 & (1-r\nu).e^{r(1-\nu)} \\ (1-su)e^{-su} & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que P es cooperativo sobre $J = [0, s^{-1}] \times [0, r^{-1}]$.
En efecto , sea $(u,\nu) \in J$.

$$0 \le u \le s^{-1} \Rightarrow 0 \le su \le 1 \Rightarrow -1 \le -su \le 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 1 - su \le 1 \\ 0 < e^{-su} \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le (1-su)e^{-su} \le 1.$$

$$\begin{aligned} 0 \le \nu \le r^{-1} &\Rightarrow -r^{-1} \le -\nu \le 0 \Rightarrow -1 \le -r\nu \le 0 \Rightarrow 0 \le 1 - r\nu \le 1 \\ &\Rightarrow (1-r\nu)e^{r(1-\nu)} \ge 0. \end{aligned}$$

Luego, todas las entradas de $DP(u,\nu)$ son no-negativas, es decir, $DP(u,\nu)$ es K-positiva. Así, P es cooperativo sobre J.

Además, $R = [0, r^{-1}.e^{r-1}] \times [0, s^{-1}.e^{-1}] \subset J$,
si $\quad r < 2 \quad$ y

$$r.e^{-1} < s < r.e^{(1-r)} \tag{4.7}$$

En efecto, sea $(u, \nu) \in R$. Entonces $0 \leq u \leq r^{-1}.e^{r-1}$ y $0 \leq \nu \leq s^{-1}.e^{-1}$ Pero, $s < r.e^{1-r} \Rightarrow s < .e^{-(r-1)} \Rightarrow r^{-1}.e^{r-1} < s^{-1}$.

Así; $0 \leq u < s^{-1}$. Por otro lado, $r.e^{-1} < s \Rightarrow s^{-1}.e^{-1} < r^{-1}$. Así; $0 \leq \nu < r^{-1}$.

Luego, $(u, \nu) \in Int(J)$. Por lo tanto, si (4.7) se cumple entonces toda órbita entra y permanece en el rectángulo R, donde (4.6) es cooperativo.

Por otro lado, observe que si $u = s^{-1}$ ó $\nu = r^{-1}$, entonces $\det DP(u, \nu) = 0$. Así; $\det DP(u, \nu) < 0\,,\ \forall (u, \nu) \in [0, s^{-1}] \times [0, r^{-1}]$ y en consecuencia $\det DP(u, \nu) < 0,\ \forall (u, \nu) \in R$. Como $P^{-1}(0,0) = (0,0)$, entonces P satisface las hipótesis $(H-)$ donde en este caso $A = R$. Así, el corolario 3.1.1, implica que el omega límite de cualquier órbita es una órbita 2-periódica.

Proposición 4.1.3 *Asumamos que se cumple (4.7). P tiene exactamente un punto fijo no trivial $E^* = (u^*, \nu^*)$ y $E \gg 0$. La órbita 2-periódica no trivial es $\mathcal{O}_2 = \{(u^*, 0), (0, \nu^*)\}$. El punto fijo trivial es un repulsor y E^* es asintóticamente estable. La órbita 2-periódica es una órbita silla cuya variedad estable consiste de los dos ejes coordenados, menos el origen.*

Demostración: En primer lugar, vemos que (u, ν) es un punto fijo no-trivial de P si y solo si $r = su + r\nu$ y $r - su = rue^{-su}$ con $0 < u < s^{-1}$.

En efecto, supongamos que $u \neq 0$ y $\nu \neq 0$.

$$P(u, \nu) = (u, \nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \nu.e^{r(1-\nu)} = u \Rightarrow \nu.e^{r(1-\nu)} = \nu e^{su} \\ u.e^{-su} = \nu \Rightarrow u = \nu e^{su} \end{cases} \Leftrightarrow e^{r(1-\nu)} = e^{su}$$

$$\Leftrightarrow e^{r(1-\nu)}.e^{-su} = 1 \Leftrightarrow r - r\nu - su = 0 \Leftrightarrow r = r\nu + su.$$

Luego, el Teorema de Valor Intermedio, implica la existencia de la raíz $u = s^{-1}$, puesto que, al sustituirla en la ecuación $r - su = rue^{-su}$ resulta que $r - 1 < 0 < r.s^{-1}.e^{-1}$.

Ademas el punto fijo $(0,0)$ es un repulsor.
En efecto,

$$DP(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & e^r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow DP(0,0) - \lambda.I = \begin{bmatrix} -\lambda & e^r \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Entonces, $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - e^r = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm e^{r/2}$.
Así, el Jacobino en $(0,0)$ tiene como autovalores a $\lambda_{\pm} = \pm e^{r/2}$. Como

$$0 < - \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1 < e^{1/2} \leq e^{1/2} & \Rightarrow \quad |\lambda_+| > 1 \\ -e^{1/2} \leq -e^{r/2} < -1 & |\lambda -| > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $(0,0)$ es un repulsor.

Ahora, E^* es un atractor:

En efecto,

$$DP(u^*,\nu^*) - \lambda.I = \begin{bmatrix} 0 & (1 - r\nu^*)e^{r(1-\nu)} \\ (1 - su^*)^{-su^*} & -\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = A$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\lambda & (1 - r\nu^*).e^{r(1-\nu^*)} \\ (1 - su^*)e^{-su^*} & -\lambda \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - (1 - su^*)(1 - r\nu^*)e^{-su}.e^{r(1-\nu^*)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (1 - su^*)(1 - r\nu^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\pm} = \pm[(1 - su^*)(1 - r\nu^*)]^{1/2} \end{aligned}$$

Como $b, c > 1$, entonces $\nu^*, u^* > 0$. Luego,

$$\left.\begin{array}{l}\nu^* > 0 \Rightarrow r\nu^* > 0 \Rightarrow 1 - r\nu^* < 1 \\ u^* > 0 \Rightarrow su^* > 0 \Rightarrow 1 - su^* < 1.\end{array}\right\} \Rightarrow 0 < (1 - su^*)(1 - ru^*) < 1.$$

Así; $|\lambda_{\pm}| < 1$ y en consecuencia E^* es un atractor.

Ahora, $P(u^*, 0) = (0, u^*.e^{-su^*}) = (0, \nu^*)$ y $P(0, \nu^*) = (\nu^*.e^{r(1-\nu^*)}, 0) = (u^*, 0)$.
Si $P^2(u, \nu) = (u, \nu)$ y $u, \nu > 0$ entonces $(u, \nu) = (u^*, \nu^*)$.

En efecto, $P^2(u, \nu) = P(\nu.e^{r(1-\nu)}, ue^{-su}) = (ue^{-su}.e^{r(1-ue^{-su})}, \nu e^{r(1-\nu)}.e^{-s\nu.e^{e(1-\nu)}})$

Luego

$$P^2(u, \nu) = (u, \nu) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u.e^{-su}.e^{r(1-ue^{su})} = u \\ \nu e^{r(1-\nu)}.e^{-s\nu.e^{r(1-\nu)}} = \nu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -su + r(1 - ue^{-su}) = 0 \\ r(1-\nu) - s\nu e^{r(1-\nu)} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = rue^{-su} + su \\ r = s\nu e^{r(1-\nu)} + r\nu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \nu e^{r(1-\nu)} \\ \nu = u.e^{-su} \end{array}\right. \Leftrightarrow (u, \nu) = (u^*, \nu^*)$$

Así; la órbita $\mathcal{O}_2\{(u^*, 0), (0, \nu^*)\}$ es la única órbita 2-periódica no-trivial.
Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_1}{\partial u^2}(u, \nu) &= [e^{-su} - sue^{-su}].e^{r(1-ue^{-su})} + ue^{-su}.e^{r(1-ue^{-su})}.r[-e^{-su+sue^{-su}}] \\ &= (1 - su)e^{-su}.e^{r(1-ue^{-su})} - ue^{-su}.e^{r(1-ue^{-su})}.r[e^{-su}.(1 - su)] \\ &= (1 - su)e^{-su}.e^{r(1-ue^{-su})}.[1 - ru.e^{-su}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_2}{\partial \nu^2}(u, \nu) &= [e^{r(1-\nu)} - r\nu.e^{r(1-\nu)}].e^{-s\nu.e^{r(1-\nu)}} + \nu.e^{-s\nu e^{r(1-\nu)}}.[-se^{r(1-\nu)} + s\nu r.e^{r(1-\nu)}] \\ &= (1 - r\nu)e^{r(1-\nu)}.e^{-s\nu.e^{r(1\nu)}} - \nu e^{r(1-\nu)}.e^{-s\nu e^{r(1-\nu)}}.[se^{r(1-\nu)}.(1 - s\nu)] \\ &= (1 - r\nu)e^{r(1-\nu)}.e^{-s\nu.e^{r(1-\nu)}}.[1 - s\nu e^{r(1-\nu)}]\end{aligned}$$

Así;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_1}{\partial u^2}(u^*,0) &= (1-su^*)e^{-su^*}.e^{r(1-u^*.e^{-su^*})}.[1-ru^*.e^{-su^*}] \\
&= (1-su^*)e^{-su^*+r-r\nu^*}.(1-r\nu^*) = (1-su^*)(1-r\nu^*) \\
\frac{\partial^2 P_2}{\partial \nu^2}(u^*,0) &= e^r
\end{aligned}$$

Luego,

$$DP^2(u^*,0) = diag[(1-su^*)(1-r\nu^*), e^r].$$

Así;

El Hessiano en $(u^*,0)$ tiene como autovalores a: $\lambda_1 = (1-su^*)(1-r\nu^*)$ y $\lambda_2 = e^r$ y además $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$. Por lo tanto, $(u^*,0)$ es un punto fijo silla de P^2, cuya variedad estable contiene una vecinda de $(u^*,0)$ sobre el semieje positivo u. Más aún, la variedad estable contiene a todo el semieje positivo u.

En efecto, la dinámica sobre el eje u está dada por $u_{n+1} = h(u_n)$ donde $h(u) = ue^{r(1-u)}$.

$$h'(u) = e^{r(1-u)} - ru.e^{r(1-u)} = e^{r(1-u)}.[1-ru]$$

$$\begin{aligned}
&h'(u) > 0 \Leftrightarrow 1-ru > 0 \Leftrightarrow 0 \leq u < r^{-1} \\
&h'(u) < 0 \Leftrightarrow u > r^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $0 < u^* < r^{-1}$ entonces $0 < h'(u^*) < 1$ y además $h'(0) = e^r > 1$.

Así; $(u^*,0)$ atrae todos los puntos $(u,0)$ con $u > 0$. ■

Proposición 4.1.4 *asumamos que (4.7) se cumple. Entonces, E^* atrae todos los puntos $x \in \mathbb{R}^2_+$, con $x \gg 0$.*

Demostración: Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}^2_+ : \omega(x) = \mathcal{O}_2 = \{(u^*,0),(0,\nu^*)\}$.

Obviamente el punto fijo $(0,0) \notin \omega(x)$, ya que es un repulsor, ni tampoco puede estar en $\mathcal{O}_2$, pues su conjunto atractor es su variedad estable, el cual consiste de los dos ejes coordenados, menos el origen.
Así, E^* es el único punto que satisface la proposición. $\blacksquare$

Bibliografía

(DH) E. Dancer and P. Hess. *Stabilty of Fixed Points for Order-Preserving discrete-time dynamical systems.* J. Reine Angew. Math. 419, 125-139 (1991).

(E) S. Elaydi. *An introduction to difference equations.* Springer-Verlag, New York, 2da. edn. (1999)

(EY) S. Elaydi and A. Yakubu. *Global stability of cycles: Lotka-Volterra Model with stocking. J. Difference.* Eqn and Appl. 8, 537-549 (2002).

(HL) P. Hess and A.C. Lazer. *On an abstract competition model and applications.* Nonlinear Anal. Theory merh. and Appl. 16, 917-940 (1991).

(PT1) P. Polacik and I. Terescák. *Convergence to cycles as a typical asymptotic behavior in smooth strongly monotene discrete-time dynamicals systems.* Arch. Rat. mech. Anal. 116, 339-360 (1991).

(PT2) P. Polacik and I. Terescák. *Exponential separations and invariant bundles for maps in ordered Banach spaces with applications in parabolic equations.* J. Dyn. and Diff. Eqn. 116, 339-360 (1991).

(S1) H.L. Smith. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the theory of competitive and cooperative systems.* Mathematical surveys and monographs, vol. 41. Amer. Math Soc. (1995).

(S2) H.L. Smith, S.B. *Hsu and P. Waltman Competitive exclusion and coexistence for competitive systems on ordered Banach spaces.* Transactions of the Amer. Math. Soc. 348, 4083-4094, (1996).

(S3) H.L. Smith *Planar competitive and cooperative difference equations.* J. Difference Eqn. and Appl. 3,335-357 (1998).

(Ta1) P. Takác. *Domains of attraction of generic w-limit sets for strongly monotone discrete-time semigroups.* J. Reine Angew. Math. 423, 101-173 (1992).

(Ta2) P. Takác. *Linearly stable subharmonic orbits in strongly monotone time-periodic dynamical systems.* Proc. Amer. Math. Soc. 115, 215-244 (1992).

(Te) I. Terescák. *Dynamics of C^1 smooth strongly monotone discrete-time dynamical systems.* Preprint.