

oin412

ra1619

amina429

*Universidad Centro Occidental*  
*"Lisandro Alvarado"*  
*Decanato de Ciencias y Tecnología*  
*Coordinación de Postgrado*

# **SOLUCIONES NUMERICAS A LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES**

*Realizado por Lic: José Vicente Puertas*  
*Trabajo Especial de Grado para optar por el Título*  
*Magister Scientiarum, Mención Física Matemática*

Tutor:  
Dr Rafael S. Torrealba S.

# Índice

<b>1. Introducción:</b>	<b>5</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>5</b>
2.1. Objetivos Generales . . . . .	5
2.2. Objetivos Específicos: . . . . .	6
<b>3. Justificación e Importancia</b>	<b>6</b>
<b>4. Tensor de Esfuerzos.</b>	<b>9</b>
<b>5. Presión de un Fluido en Movimiento:</b>	<b>12</b>
<b>6. Derivada Material.</b>	<b>14</b>
<b>7. Ecuación de Continuidad.</b>	<b>15</b>
<b>8. Principio Variacional Lagrangiano</b>	<b>17</b>
<b>9. Ecuaciones de Movimiento o Ecuación de Euler para un Fluido:</b>	<b>21</b>
<b>10.Fluido Newtoniano y Tensor de Viscosidad:</b>	<b>23</b>
<b>11.Ecuaciones de Navier Stokes.</b>	<b>25</b>
<b>12.Deformación Termocapilar en una lámina líquida</b>	<b>26</b>
<b>13.Caso Estacionario Unidimensional.</b>	<b>29</b>
<b>14. Condiciones de Borde:</b>	<b>30</b>
<b>15.Solución al Flujo Estacionario Termocapilar.</b>	<b>33</b>
<b>16.Solución Cuasi-estacionaria</b>	<b>35</b>
<b>17.Caso Dinámico en una Dimensión.</b>	<b>37</b>
<b>18.Caso Dinámico en Dos Dimensiones</b>	<b>41</b>

<b>19.Caso Dinámico Tridimensional con Simetría Axial.</b>	<b>44</b>
<b>20. Formulacion Variacional de Elementos Finitos</b>	<b>46</b>
<b>21. Método de Rayleigh-Ritz</b>	<b>47</b>
<b>22.Métodos de Residuos Ponderados</b>	<b>50</b>
<b>23. Funciones de Forma</b>	<b>53</b>
<b>24.Aproximación por Elementos Finitos.</b>	<b>55</b>
<b>25.Elemento Finito Triangular.</b>	<b>56</b>
<b>26.Campos de Interpolación para Triángulos.</b>	<b>58</b>
<b>27.Planteamiento del Problema en MatLab</b>	<b>59</b>
<b>28.Resultados Numéricos y Análisis.</b>	<b>66</b>
28.1. Caso Dinámico Unidimensional: condiciones Neumann-Dirichlet	66
28.2. Caso Unidimensional: condiciones Neumann- Neumann . . . . .	67
28.3. Caso Bidimensional: Condiciones Mixtas para u y Neumann para v . . . . .	69
28.4. Segundo Caso Bidimensional: Condiciones mixtas para u y mixtas para v . . . . .	75
<b>29.Bibliografía</b>	<b>79</b>
<b>30.Ecuación de N-S en coordenadas cilíndricas</b>	<b>81</b>
<b>31.Ecuación de N-S en coordenadas rectangulares:</b>	<b>82</b>
<b>32.Viscosidad:</b>	<b>83</b>
<b>33.Diferencias entre el enfoque Lagrangiano y el Euleriano</b>	<b>83</b>
<b>34.Relación entre la Descripción Lagrangeana y Euleriana de     Dinámica de Fluidos</b>	<b>84</b>
<b>35.Teorema del Transporte de Reynolds</b>	<b>86</b>

## 1. Introducción:

En una lámina termocapilar viscosa sometida a calentamiento se produce una corriente convectiva, la cual a su vez produce la deformación de la superficie de la lámina viscoelástica, formando un espejo térmico. Este fenómeno fué descubierto y estudiado por Germán Da Costa [1], posteriormente se realizaron estudios experimentales de su dinámica [2] y actualmente la investigación de estos fenómenos continua con los trabajos de lentes térmicas tanto en el laboratorio de óptica cuántica de la USB como en el IVIC [3].

En el curso de estos experimentos se constató que el rayo láser (con el cual se iluminaba la muestra estudiada) parecía provocar deformaciones en la misma. El efecto observado era el de la formación de una depresión en la zona del líquido iluminada, lo cual da lugar a los espejos térmicos.

Se han desarrollado diversos modelos matemáticos que permiten la descripción aproximada del fenómeno, sin embargo estos modelos son sobresimplificados y en una sola dimensión espacial [4], [1], esto no se corresponde con la realidad, por lo tanto se propone realizar un estudio matemático mas profundo y la construcción de modelos dinámicos en 2 y 3 dimensiones espaciales. Es de esperar que las ecuaciones que arroje este modelo sean extremadamente no lineales, para obtener soluciones se puede proceder a linealizar las ecuaciones y obtener resultados mediante métodos numéricos en ecuaciones en derivadas parciales, nuestro modelo intenta ser lo más realista posible y se basará en la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el uso del método de las elementos finitos [5]. La formación y evolución de estos espejos térmicos ha sido observado experimentalmente [2], [3] y se conocen soluciones clásicas en estado estacionarios [1] las cuales pueden servir de guía y validación de los resultados a obtener mediante la simulación numérica.

## 2. Objetivos

### 2.1. Objetivos Generales

- Estudiar las ecuaciones de una lámina líquida termoelástica, calentado por una fuente estacionaria, mediante las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Es un objetivo del trabajo la completa identificación de los términos de la ecuación con las aproximaciones físicas correspondientes.
- Estudiar las condiciones de frontera que adquiere el fluido viscoelastico

al ser sometido al calentamiento. Se propone abordar el problema completo en

3 dimensiones espaciales tanto con condiciones de Dirichlet como con condiciones de Neumann y mixtas.

-Integración de las ecuaciones de Navier Stokes para el caso planteado, con condiciones de borde adecuadas basado en el método de Elementos Finitos.

Para integrar las ecuaciones de Navier Stokes con las condiciones de borde e hipótesis asumidas se propone el uso del programa PDEtools de MatLab el cual permite la elaboración de applets que realizan la integración numérica de ecuaciones parabólicas con coeficientes y condiciones de borde proporcionados a partir del modelo matemático del proceso físico, estos resultados pueden ser comparados con los resultados experimentales [2] [3].

## **2.2. Objetivos Específicos:**

- Estudiar y plantear las ecuaciones de continuidad, condiciones de borde y relación con la ecuación de la superficie deformada.

- Plantear el modelo físico microscópico del fluido, formulado desde el punto de vista lagrangiano [6]

- Estudiar teóricamente las ecuaciones de Navier-Stokes, que modelan los fluidos Newtonianos, adecuandola a las condiciones de borde y de la ecuación de la superficie deformada.

- Utilizando aproximaciones adecuadas, plantear y resolver el modelo linealizado del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (i.e.Partir de las ecuaciones de N-S para obtener la ecuación de Calor).

-Implementación de un programa en Matlab que utiliza las librerías de integración por elementos finitos para resolver las ecuaciones del flujo termoelástico.

- Implementación de una interface que permita introducir las condiciones de borde del problema planteado.

- Realizar el análisis para casos aproximados y soluciones exactas .

- Interpretar los resultados obtenidos.

## **3. Justificación e Importancia**

En diversas áreas de la ciencia, la ingeniería y la industria es de suma importancia el estudio de los fluidos, ya que estos determinan el comportamiento

de muchos fenómenos físicos e industriales Desde hace mucho tiempo es de gran interés el desarrollo de nuevas técnicas extractivas y de mejoramiento de los petróleos pesados, debido a la riqueza de los yacimientos existentes en Venezuela. Para ello es necesario estudiar de forma teórica-experimental los fenómenos que tienen lugar en un crudo pesado. Una de las áreas fundamentales de investigación es el estudio de las superficies de los fluidos [7]., ya que en ella se producen la mayoría de las interacciones. En este trabajo el crudo forma una película delgada que es calentado por un rayo láser dando lugar a un flujo termoconvectivo; donde el láser cumple con la finalidad de calentar la muestra del material y se refleja en la deformación de la superficie formando un patrón de anillos de Newton, que constituyen un holograma de la superficie permitiendo así un análisis cuantitativo de la misma. La siguiente figura ilustra el montaje experimental propuesto en las referencias [1] y [2] con la finalidad de estudiar la deformación termocapilar de la superficie mediante interferometría de la luz, reflejada por la superficie, procedente del Láser que ocasiona el calentamiento.

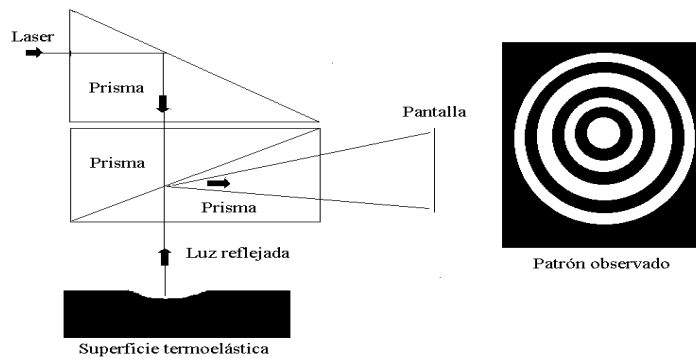


Figura 1: Montaje Experimental

El estudio de este fenómeno puede aplicarse al diseño de equipos de medición que permitan determinar parámetros de importancia en la explotación de crudo mediante la interpretación de los patrones holográficos observados para distintas muestras. Desde el punto de vista matemático este sistema termoconvectivo es descrito por ecuaciones diferenciales no lineales y es de gran interés su correcto planteamiento y resolución. Hoy en día los métodos

numéricos son cada vez más importantes para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales, la implementación de programas y/o interfaces gráficas que permitan resolver este tipo de ecuaciones es de gran utilidad para una variedad de problemas conexos con el estudiado, ya que de ahí se elaboran nuevas subrutinas y/o programas que permitan la resolución de nuevos problemas. En la industria este tipo de soluciones numéricas son de gran importancia para muchos procesos químicos y físicos que involucran fluidos y deformaciones de su superficie de interacción, ya que la mayoría de los sistemas reales no pueden ser resueltos de forma analítica cerrada lo que hace imprescindible el uso de métodos numéricos avanzados.

Elementos de Dinámica de fluidos:

Un fluido [7] es un material formado por átomos o moléculas que no están fuertemente ligadas entre sí, de forma tal que es susceptible a grandes deformaciones. En un sólido en cambio, las moléculas están fuertemente ligadas de forma que solamente admiten deformaciones pequeñas. De hecho los fluidos adaptan su forma al recipiente que los contiene y cuando se les somete a fuerzas externas se desplazan con velocidades diferentes en cada punto, alejando o acercando las moléculas con distintas velocidades, a diferencia de los sólidos que se desplazan y rotan "rígidamente" manteniendo invariable las distancias relativas de sus moléculas. Si las moléculas de un fluido están tan débilmente ligadas que se pueden considerar independientes entonces hablamos de un gas, si existen interacciones entre las moléculas pero lo suficientemente débiles para permitir que sean separadas por efecto de fuerzas externas aún las más débiles como la gravedad, entonces hablamos de un líquido.

En particular [4] estamos interesados en los líquidos viscosos que son aquellos que se desplazan de forma laminar, pero transmitiendo entre las distintas capas de fluido, esfuerzos tangenciales al moverse entre sí. Para ello estudiaremos el comportamiento de un elemento de fluido, suponiendo que el comportamiento microscópico es el mismo que si fuese perfectamente continuo y que sus propiedades físicas como densidad, presión y velocidad dentro de un pequeño elemento de volumen son funciones continuas de la posición. Esta hipótesis se conoce como "Hipótesis del Continuo" y es consistente con observaciones experimentales. Cuando nos referimos a un elemento de volumen, asumimos que este volumen es muy pequeño comparado con las dimensiones del cuerpo pero lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas y la capacidad de poderse medir cantidades estadísticas intensivas como temperatura, presión y densidad.

Existen dos descripciones fundamentales en la dinámica de los fluidos: La



descripción "Euleriana" que consiste en considerar el campo de velocidades constituido por la función vectorial  $U(x,t)$  que es velocidad del fluido en cada punto  $x$  al tiempo  $t$  y la descripción "Lagrangiana", que consiste en considerar la posición y velocidad  $(X_i(t), U_i(t))$  de cada partícula en función del tiempo en lugar de la velocidad del fluido en un punto determinado del espacio. Aún y cuando la descripción Lagrangiana es la aplicada en mecánica clásica tradicional, el gigantesco número de variables involucradas (Número de Avogadro) hace que en la práctica se use la descripción Euleriana, y que el formalismo Lagrangiano sea utilizado únicamente con fines académicos.

Existen dos tipos de fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido. Se llaman fuerzas externas o volumétricas aquellas ejercidas por elementos externos a todo el fluido, son fuerzas de largo alcance y actúan sobre todo el material; entre ellas mencionaremos la más importante en nuestro caso la fuerza de gravedad aunque pueden existir otras como la fuerza electromagnética, cuando el fluido porta carga eléctrica y la fuerza centrífuga cuando el movimiento es con respecto a un sistema de referencia acelerado. Se denominan fuerzas internas o superficiales sobre un fluido, a aquellas que actúan por la interacción de elementos vecinos, son fuerzas de corto alcance y son ejercidas sobre una delgada superficie adyacente a la frontera del elemento de volumen. Se llama esfuerzo superficial a la suma de todas las fuerzas internas en dicho elemento de volumen. Entre las fuerzas internas consideraremos las fuerzas debido a la presión y a la viscosidad, también se tiene en cuenta la presión hidrodinámica o presión en un punto del fluido en movimiento.

## 4. Tensor de Esfuerzos.

La representación matemática de la densidad de fuerzas superficiales está dada en términos de un tensor de esfuerzos, un tensor de segundo rango conocido como tensor de esfuerzos. También llamado esfuerzo superficial.

Consideremos un elemento de volumen con frontera  $S$  y sea  $\delta S$  un elemento de superficie y " $n$ " la normal exterior unitario en dicho elemento. Sea  $\bar{t}$  la densidad de fuerza superficial neta sobre  $\delta S$ . Donde  $\bar{t}$  no es necesariamente colineal a  $n$ . Sea  $\delta S$  un elemento de superficie cuya normal va en dirección  $j$ , llamaremos  $T_{ij}$  a la componente  $i$  del esfuerzo  $\bar{t}$  sobre dicho elemento de superficie.

La matriz  $T$  formada por los elementos  $T_{ij}$  se define como tensor de esfuerzos. Para obtener el esfuerzo superficial en todo punto y en todo tiempo

tomamos un elemento de volumen en forma de tetraedro con vértice en  $x$  cuyos lados miden  $L$  (ver figura 1.1). La cara principal la denotamos  $\delta S$  mientras que las caras laterales las denotamos como I, II y III . Llamemos a  $\bar{x}$  a todo punto que se encuentre en la superficie del tetraedro, es decir en cualquiera de sus caras

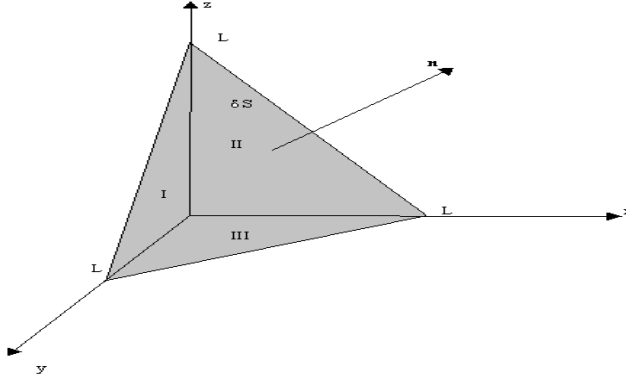


Figura 2: Superficie para hallar el Tensor de Esfuerzos

Luego la componente  $i$  del esfuerzo  $\bar{t}$  sobre la cara principal es  $t_i$  . Por lo tanto la componente  $i$  de la fuerza sobre la cara  $\delta S$  es  $t_i \delta S$  y  $n$  es el vector normal unitario sobre la cara principal.

$$n = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3$$

observamos que  $-T_{ij}$  es la componente  $i$  de  $\bar{t}$  sobre la cara I , cuya normal es  $-\hat{e}_1$  , el área de la cara I es  $n_1 \delta S$  (por proyección) por lo que la componente  $i$  de la fuerza sobre la cara es  $-T_{i1} n_1 \delta S$  similarmente las componentes  $i$  de de la fuerza sobre las caras II y III son  $-T_{i2} n_2 \delta S$  y  $-T_{i3} n_3 \delta S$  respectivamente.

Sumando estas contribuciones en la dirección  $i$  obtenemos que la componente  $i$  de la fuerza total sobre el elemento de volumen es :

$$(t_i - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j) \delta S , \text{ con } i=1,2,3.$$

Sea  $f_e$  la densidad de fuerzas externas al elemento de volumen,  $\rho$  la densidad de masa,  $\delta V$  el volumen del tetraedro y  $U$  la velocidad promedio del mismo. Supongamos que  $\frac{d}{dt}(\rho U)$  <sup>(1)</sup> está acotada por una constante  $M$ ; esta hipótesis se cumple si suponemos que la densidad de masa, así como  $U$  y  $\frac{dU}{dt}$ , son finitas al tiempo  $t$  y a tiempos posteriores finitos acotados en la región del espacio que ocupa el tetraedro.

Aplicando la Segunda Ley de Newton al elemento de volumen tenemos:

$$\left| \left( t_i - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j \right) \delta S + f_e \delta V \right| = \left| \frac{d}{dt}(\rho U) \delta V \right| \leq M \cdot \delta V$$

El volumen del tetraedro es  $\delta V = \frac{1}{6} L^3$ . El área de la cara principal es  $\delta S = \frac{\sqrt{3}}{2} L^2$  mientras que cada cara (I, II y III) tiene un área igual a  $n_i \delta S = \frac{L^2}{2}$ , vemos que  $n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\forall i$ . Así, simplificando tenemos:

$$\left| \left( t_i - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + f_e \frac{1}{6} L \right| \leq \frac{M}{6} L$$

Tomando límite cuando  $L \rightarrow 0$  en la expresión anterior

$$- \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{6} M L \leq \lim_{L \rightarrow 0} \left[ \left( t_i - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + f_e \frac{1}{6} L \right] \leq \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{6} M L$$

Por lo tanto tenemos:

$$t_i - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j = 0, \quad (1)$$

en el punto  $x$  y para todo tiempo  $t$ ,  $\bar{t}$  evaluado en  $\bar{x}$  tiende a  $\bar{t}$  evaluado en  $x$  ya que suponemos que  $\bar{t}$  es una función continua de la posición. Es decir para todo punto en el fluido y para todo tiempo se obtiene que el esfuerzo superficial viene dado por:

$$\bar{t} = T \cdot n \quad (2)$$

El tensor de esfuerzos es simétrico, de hecho se puede probar [7] que

---

<sup>1</sup>Flujo: Cantidad de fluido que atraviesa  $\delta V$  en un tiempo  $\Delta t$

$$\widehat{e}_1 \int_{V(t)} (T_{23} - T_{32}) dx^3 + \widehat{e}_2 \int_{V(t)} (T_{31} - T_{13}) dx^3 + \widehat{e}_3 \int_{V(t)} (T_{12} - T_{21}) dx^3 = 0$$

esto implica que

$$\int_{V(t)} (T_{ij} - T_{ji}) dx^3 = 0 \quad (3)$$

$\forall i \neq j$ . La ecuación se cumple para todo elemento de volumen  $V(t) \subset \Omega \subset \mathfrak{R}^3$  en todo tiempo  $t$ . Como  $T$  es continuo esto es posible si y solo si  $T_{ij} = T_{ji}$  para todo  $x$  y  $t$ .

## 5. Presión de un Fluido en Movimiento:

La presión de un fluido en movimiento en el punto  $x$  y a un tiempo  $t$  se define como:

$$P(x) = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x-y|=r} \bar{t} \cdot \vec{n} dS_y \quad (4)$$

Es decir,  $P$  es el límite cuando  $r \rightarrow 0$  del promedio de la componente normal de la densidad superficial de fuerzas  $\bar{t}$ , en dirección opuesta a la normal exterior sobre la esfera de radio  $r$  y centro en  $x$

Luego por la definición anterior y la ecuación (tensor) 2 podemos escribir  $P$  en función del tensor de esfuerzos  $T$ . Haciendo el cambio de variable  $y = x + r\eta$ , tenemos que  $dS_y = r^2 dS_\eta$   $|\eta| = 1$  y  $\eta$  es normal a la esfera unitaria, vemos que

$$\eta = \frac{-(x-y)}{r} = \frac{-(x-y)}{|x-y|} = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Así escribimos

$$P(x) = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \eta \cdot T(x+r\eta) \eta dS_\eta$$

Como ahora el dominio de integración no depende de  $r$  y es acotado y dada la hipótesis de que  $T$  es continuo es posible incluir el límite dentro de la integral. Luego Como  $\eta$  no depende de  $r$  y por la continuidad de  $T$  nos queda

$$P(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \eta \cdot T(x) \eta dS_\eta \quad (5)$$

Un resultado importante es el siguiente:

$$P = -\frac{1}{3} \sum_i T_{ii}.$$

En efecto, llamemos B a la esfera unitaria con centro en x, cuya normal unitaria es  $\eta$ .

De esta manera

$$P(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \eta^T T(x) \eta dS_\eta.$$

Como T es real y simétrica, y x está fijo, entonces existe una matriz M, tal que

$$M^T T M = A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ : & \lambda_2 & : \\ 0 & .. & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_i = \lambda_i(x)$ . La existencia de M está asegurada por ser  $\eta^T T \eta$  una forma hermitiana (cite :Cou/Hil, pags.13-14) [6].

Sea  $\xi = M^T \eta$ , la rotación de  $\eta$  dada por M.  $\xi$  es unitario ya que  $\eta$  y M son unitarios. De esta forma

$$\eta^T T \eta = \eta^T (M A(x) M^T) \eta = (M^T \eta)^T A(x) (M^T \eta) = \xi^T A(x) \xi.$$

El jacobiano de la transformación  $\xi = M^T \eta$  es

$$J = \det(M^T) = 1,$$

por lo que la presión se puede escribir como

$$P(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \xi^T A(x) \xi dS_\xi;$$

ahora  $\xi$  es la normal unitaria. Pasando a coordenadas esféricas escribimos  $\xi_1 = \cos \theta \sin \phi$ ,  $\xi_2 = \sin \theta \sin \phi$ ,  $\xi_3 = \cos \phi$ , por lo que

$$\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} (\lambda_1(x)\xi_1^2 + \lambda_2(x)\xi_2^2 + \lambda_3(x)\xi_3^2) dS_\xi \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\lambda_1(x) \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \lambda_2(x) \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \lambda_3(x) \cos^2 \phi) \sin \phi d\theta d\phi \\
&= -\frac{1}{3}(\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x))
\end{aligned}$$

es decir,

$$P = -\frac{1}{3} \sum_i T_{ii}. \quad (6)$$

## 6. Derivada Material.

Primero consideremos[8] la presión atmosférica  $P$ , considerada en general como una función de la posición y el tiempo, expresada como  $P=P(x,y,z,t)$ . Para evaluar el cambio en la presión atmosférica, se puede escribir la diferencial de  $P$  en coordenadas cartesianas como:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

en donde  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  son desplazamiento arbitrarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Si se dividen todos los términos entre  $dt$  se obtiene la razón del cambio de la presión como:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Consideremos tres ejemplos para la evaluación de  $\frac{dP}{dt}$

En primer lugar : El instrumento para medir la presión está localizado en una estación climatologica que naturalmente está fija en la superficie terrestre; en este caso los coeficientes  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  y  $\frac{dz}{dt}$  son cero y para un punto fijo la derivada total  $\frac{dP}{dt}$  es igual a la derivada local en el tiempo  $\frac{\partial P}{\partial t}$ .

Un segundo caso es aquel en el que el instrumento para la medición de la presión se encuentre en una aeronave que puede volar en cualquier dirección elegida, además de elevarse o descender conforme quiera el piloto. En tal caso las derivadas  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  y  $\frac{dz}{dt}$  son las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la velocidad

del avión, respectivamente, se escogen arbitrariamente estas componentes y sólo tienen relación casual con las corrientes de aires.

Una tercera situación es aquella en que el instrumento de medición de la presión está en un globo que se mueve o es "llevado" con el aire en que está suspendido el globo. Aquí las derivadas  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  y  $\frac{dz}{dt}$  son las componentes de la velocidad del propio medio,  $v_x, v_y$  y  $v_z$  respectivamente. Esta tercera situación corresponde a la definición de la "Derivada Material" y se pueden agrupar los términos de la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Por lo tanto se ve que la derivada material es la derivada que sigue el flujo del fluido. Se puede aplicar el operador  $\frac{D}{Dt}$  a cantidades escalares como vectoriales y se puede interpretar como la razón de tiempo de cambio de una variable dada evaluada a lo largo de la trayectoria del elemento de fluido en el campo de flujo. [8]

## 7. Ecuación de Continuidad.

A partir de la ley de conservación de la masa tenemos la ecuación de continuidad.

Sea  $V_c$  un elemento fijo de volumen en el espacio que ocupa nuestro fluido.  $V_c \subset R^3$  es un dominio acotado, abierto con frontera regular  $\partial V_c = S$ , donde el teorema de la divergencia es aplicable ver figura 1.2

La masa contenida en  $V_c$  al tiempo  $t$  es  $\int_{V_c} \rho dv$ . Por la ley de conservación de la masa ante la ausencia de fuentes y sumideros en  $V_c$ . La derivada de la masa contenida en  $V_c$  con respecto al tiempo es igual a la masa que entra o sale por  $S$  en la unidad de tiempo. Si "n" es la normal exterior a  $S$ , la masa que fluye a través de un elemento de superficie  $dS$  en la unidad de tiempo es  $\rho U \cdot n dS$  donde  $\rho$  es la densidad de masa, luego se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{V_c} \rho dx^3 \right) = - \int_S \rho U \cdot n dS$$

Como  $V_c$  no depende del tiempo, nos queda

$$\int_{V_c} \rho_t dx^3 = - \int_S \rho U \cdot n dS$$

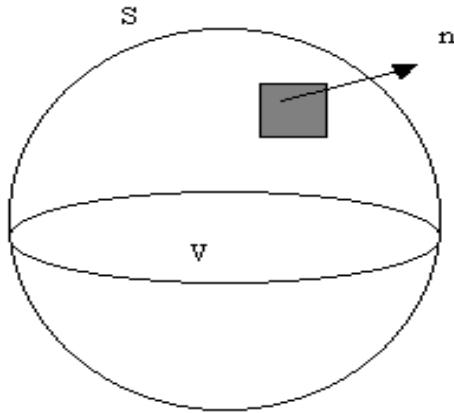


Figura 1

Figura 3: dibujol

por el teorema de la divergencia se tiene la Ecuación de Continuidad de forma integral:

$$\int_{V_c} [\rho_t + \text{div}(\rho U)] dx^3 = 0 \quad (7)$$

Como  $V_c$  es arbitrario, luego el integrando es continuo para cualquier punto  $X$  del espacio; esto es válido si y solo si

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho U) = 0 \quad (8)$$

Que es la ecuación de continuidad de forma diferencial.

Usando la identidad  $\text{div}(\rho U) = \rho \text{div}(U) + U \cdot \text{grad } \rho$  y la Derivada material  $\frac{d}{dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + U \cdot \text{grad } \rho$

Para un fluido Incompresible tendremos:

$$\text{div}(\rho U) = 0 \quad (9)$$

Principio Variacional y Ecuación de Navier Stokes.



## 8. Principio Variacional Lagrangiano

En hidrodinámica nosotros estamos interesados con el movimiento de líquidos y gases. Los fenómenos considerados son macroscópicos y la naturaleza atómica o molecular del fluido no es considerada. El fluido es considerado como un medio continuo. Esto implica que un elemento de volumen pequeño es también supuesto a ser así como uno tan grande el cual contendrá una gran cantidad de moléculas.

De las dos representaciones normalmente usadas en el estudio de la Hidrodinámica, la forma Lagrangiana es la más relacionada a la mecánica clásica, pero, la forma Euleriana es la más conocida [6].

En la descripción Lagrangiana, una partícula de fluido en particular es seleccionada y su movimiento se muestra en el tiempo. Dada su posición inicial (en  $t = 0$ ) " $a$ " y su posición en un tiempo después " $x$ ". Entonces nosotros consideramos " $x(a, t)$ " como un CAMPO de la posición inicial " $a$ " y el tiempo " $t$ ". Claramente " $x(a, 0) = a$ ". Las densidades lagrangianas serán funcionales de " $x(a, t)$ " y sus derivadas, luego la acción estará integrada en " $a$ " y el tiempo " $t$ ".

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_0 (x_i, \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t) da^3 \right] dt \quad (10)$$

En la descripción Euleriana, una componente del movimiento del fluido es descrita por cinco cantidades: las tres componentes de la velocidad del fluido " $U(x, t)$ " y dos cantidades termodinámicas: la Entropía " $s(x, t)$ " y la Densidad " $\rho(x, t)$ "<sup>2</sup>. Las demás cantidades termodinámicas pueden ser determinadas por la ecuación de estado y otras relaciones de termodinámica, en cada caso para el par de variables de estado escogidas. Esta es una teoría de campo, en la cual, los observables son dados como una función del vector posición " $x$ " y el tiempo " $t$ ". La función " $U(x, t)$ ", da la velocidad del fluido en un punto  $x$  en un tiempo  $t$ , se refiere a puntos fijos en el espacio y no ha partículas definidas del fluido. La aceleración de una particular partícula de fluido es dada por la derivada total. En este caso la acción se escribe:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_E (U_i, s, \rho; a, t) da^3 \right] dt \quad (11)$$

---

<sup>2</sup>Otras posibilidades para ese par son la Presión " $P(x, t)$ " y la Temperatura " $T(x, t)$ ", o la Presión " $P(x, t)$ " y la Densidad " $\rho(x, t)$ "

En las aproximaciones continuas válidas para Hidrodinámicas no turbulentas,  $x(a, t)$  es un campo vectorial diferenciable en todos sus argumentos. La velocidad de una partícula de fluido esta dado por :

$$U = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a \quad (12)$$

y la aceleración por:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_a \quad (13)$$

Para un fluido debemos incluir dos principios de conservación[7]:

1. Conservación de la Masa: Consideremos la masa contenida en un pequeño volumen del fluido " $dx^3$ " alrededor de una partícula de fluido en la posición " $x(a, t)$ ". Esto define la densidad  $\rho(x, t)$ , ya que esta masa estuvo contenida inicialmente en un volumen similar de coordenada " $a$ " por lo tanto tenemos

$$\rho(x, t)dx^3 = \rho(a, 0)da^3$$

Definiendo el Jacobiano de la transformación que lleva  $a \rightarrow x(a, t)$  al tiempo " $t$ ".  $J_{ij} = \frac{\partial(x_i)}{\partial(a_j)}$

Tendremos:

$$\rho(x, t).J = \rho(a, 0) = \rho_0 \quad (14)$$

Si calculamos la rata de incremento de la densidad en un elemento de volumen " $V(t)$ " al tiempo " $t$ " de forma arbitraria y frontera " $S(t)$ " obtendremos las ecuaciones de continuidad integral y diferencial 7, 8 y la condición de incompresibilidad 9, que puede reescribirse " $J = 1$ ".

2. Conservación de la Entropía: En fluidos reales la disipación de la energía ocurre como una consecuencia de la viscosidad, conducción térmica, etc. Pero nosotros estamos estudiando un fluido ideal. Luego sea " $s(x, t)$ " la entropía por unidad de masa del fluido en el punto " $x$ ", podemos derivar la conservación de la entropía considerando la entropía contenida en un pequeño elemento de volumen " $dx^3$ " localizado en la posición " $x(a, t)$ " y por conservación de la entropía obtenemos:  $\rho(x, t).s(x, t).J = \rho(a, 0).s(a, 0)$

que utilizando 14 se reescribe como

$$s(x, t) = s(a, 0) = s_0 \quad (15)$$

que en función de las variables Eulerianas  $(U, \rho, s)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \text{div} (\rho s U) = 0 \quad (16)$$

Consideremos un Fluido, en el cual usamos las variables Lagrangeanas, el principio de Hamilton es:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \bar{V}) dt = 0 \quad (17)$$

donde  $K$  es la energía cinética y  $\bar{V}$  es la energía potencial.

Una generalización de esta ecuación para un sistema continuo termodinámico, se redefine a  $\bar{V}$  como la suma de la energía interna y la energía potencial externa. Asumiendo que las fuerzas externas son derivables de un potencial. La descripción lagrangeana de un fluido consiste en dar la posición y velocidad al tiempo  $t$  de cada una de las partículas del fluido considerado en lugar de especificar la velocidad del flujo en un punto determinado.

La energía cinética y potencial de un fluido son:

$$K = \int \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 dx^3 = \int \frac{1}{2} \rho_0(a) \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 da^3$$

$$\bar{V} = \int \rho (e + \phi) dx^3 = \int \rho_0(a) (e + \phi) da^3$$

donde las fuerzas externas por unidad de volumen son derivables a partir del potencial  $\phi$ :

$$f = -\nabla \phi$$

Hay que tener en cuenta que la densidad  $\rho_0(a)$  no es constante, ya que es la distribución inicial de densidades y " $x(a, t)$ " es un campo vectorial que dependiera de la posición inicial " $a$ ", además es muy corriente que la energía interna y el potencial vengan expresadas en función de variables termodinámicas (Eulerianas) en lugar de las variables Lagrangeanas y las coordenadas de integración.

$$e(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t) = e(\rho, s)$$

$$\phi = \phi(x_i; Y)$$

donde " $e = e(\rho, s)$ " representa las energías internas del fluido, tales como las energías químicas o de cambio de fase, y depende solamente de la densidad (i.e del número de partículas de cierto tipo o potencial químico) y de la entropía " $s$ " (lo cuál incluye los Calores Latentes de cambio de fase) y donde " $s(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t)$ " es la entropía, " $\rho = \rho(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t)$ " es la densidad y " $Y$ " es una variable externa del cual puedan depender energías gravitacionales, eléctricas etc. La principal complicación es que hay que expresar las variables termodinámicas en función de las variables Lagrangeanas.

Tendremos que la acción para un fluido se puede obtener de la densidad Lagrangiana para un fluido

$\rho_0(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t; Y) = \frac{1}{2}\rho_0(a)(\frac{\partial x_i}{\partial t})^2 + \rho_0(a)(e(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t) + \phi(x_i; Y))$  que nos permitirá obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

El problema variacional no es completo si no consideramos los principios de conservación de la masa 14 y conservación de la entropía 15 , para ello tenemos que modificar el principio variacional haciendo uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange [9]

$$\delta \int \left[ \int (x_i, \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \frac{\partial x_i}{\partial t}) da^3 \right] dt = \delta \int \left[ \int (\rho_0(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial t}) + \alpha(\rho J - \rho_0) + \beta(s - s_0)) da^3 \right] dt = 0 \quad (18)$$

donde " $\alpha$ " y " $\beta$ " son los multiplicadores de Lagrange de los vínculos  $(\rho J - \rho_0) = 0$  y  $(s - s_0) = 0$  . Justamente a través de los vínculos se obtienen las dependencias de las variables termodinámicas con las variables Lagrangianas:

$$\begin{aligned} \rho(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t) &= J^{-1} \cdot \rho_0 \\ s(x_i, J_{ij}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t) &= s_0 \end{aligned}$$

y por lo tanto su dependencia se remite a la dependencia de sus condiciones iniciales.

Utilizando las conocidas relaciones termodinámicas: [10] para la presión y la Temperatura

$$\begin{aligned} P &= P(\rho, s) = \rho^2 \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \\ T &= T(\rho, s) = \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \end{aligned}$$

realizando variaciones con respecto a "  $\rho$  " y "  $s$  " en 18 podemos resolver los multiplicadores de los vínculos:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(a, J; \rho_0, s_0) = \frac{1}{\rho} P \\ \beta &= \beta(\alpha, J, \rho_0, s_0) = \rho_0 \cdot T\end{aligned}$$

Entonces el vínculo asociado a la densidad 14 tiene su multiplicador de Lagrange relacionado con la Presión, mientras que el vínculo asociado a la entropía 15 tiene su multiplicador asociado a la temperatura.

El resto de las ecuaciones de movimiento puede obtenerse de la variación con respecto a "  $x_i$  ", es conocido que para una densidad Lagrangiana la ecuación de Euler Lagrange es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_t x_i)} \right) + \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial}{\partial(J_{ij})} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

que se simplifica a :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a_j} (\rho \alpha J_{ij}) + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

esta es la ecuación de Euler que es una ecuación fundamental para los fluidos, esta formulación variacional es equivalente a las leyes de Newton teniendo en cuenta todos los vínculos y la derivada material, a continuación se presenta una deducción de la ecuación de Euler para un Fluido.

## 9. Ecuaciones de Movimiento o Ecuación de Euler para un Fluido:

Vamos a aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de fluido que ocupa un volumen  $V(t)$  al tiempo  $t$ , para obtener las ecuaciones de movimiento.

Supongamos:

- La única fuerza volumétrica que actúa sobre cada elemento de fluido ; es la fuerza de gravedad .
- $\rho U$  es la densidad de momento lineal
- $\bar{t}$  es la densidad de fuerzas superficiales

-  $\rho g$  es la densidad de fuerza debida a la gravedad

Luego al aplicar la ley de Newton

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho U dx^3 = \int_{S(t)} \bar{t} dS + \int_{V(t)} \rho g dx^3$$

donde  $S(t) = \partial V(t)$  es la superficie frontera del volumen  $V(t)$  al tiempo  $t$  y supongamos que es regular escribiendo la ecuación anterior por componentes;

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho U_i dx^3 = \int_{S(t)} t_i dS + \int_{V(t)} \rho g_i dx^3$$

con  $i = 1, 2, 3$ .

Para el caso de gravedad  $g_1 = g_2 = 0$  y  $g_3 = -g$

Por la ecuación 1 y por el teorema de la divergencia escribimos

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} t_i dS &= \int_{S(t)} \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j dS = \int_{S(t)} \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix} \cdot n dS \\ &= \int_{V(t)} \operatorname{div} \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix} dx^3 = \int_{V(t)} \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dx^3 \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de movimiento y aplicando el teorema del transporte (64) a la primera integral de la ecuación anterior

$$\int_{V(t)} \rho \frac{dU_i}{dt} dx^3 = \int_{V(t)} \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dx^3 + \int_{V(t)} \rho g_i dx^3$$

luego

$$\int_{V(t)} \left( \rho \frac{dU_i}{dt} - \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right) dx^3 = 0 \quad (21)$$

$\forall i = 1, 2, 3$ ,  $\forall V(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . La ecuación anterior se cumple para todo elemento de volumen en todo tiempo  $t$ . Dada la hipótesis de que el integrando es continuo, esto es posible si y solo si

$$\rho \frac{dU_i}{dt} - \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i = 0 \quad (22)$$

$\forall x \in \Omega, \forall t$  y con  $i = 1, 2, 3$ .

Las ecuaciones anteriores representan las ecuaciones de Euler [6] del movimiento del fluido.

## 10. Fluido Newtoniano y Tensor de Viscosidad:

La resistencia causada por un fluido al movimiento relativo de sus partes se llama viscosidad dinámica o absoluta. Esta es la relación de su esfuerzo cortante a la razón de cambio en la deformación transversal de un fluido. El coeficiente de viscosidad dinámica o absoluta  $\nu$  es la resistencia causada por una lámina del fluido al movimiento paralelo a esa lámina u otra lámina del fluido a una distancia unitaria de ella, con una velocidad relativa unitaria.

Hasta el momento, la definición de tensor de esfuerzos se aplica a cualquier medio continuo. Para el caso de un fluido viscoso, debemos considerar algunas hipótesis de origen físico, las cuales mencionamos a continuación :

Un material se denomina isotrópico, si sus propiedades mecánicas pueden ser descritas sin referencia a una dirección particular ,es decir, si no existe una dirección preferencial de movimiento.

Un tensor que tiene las mismas componentes con respecto a cada base ortogonal se conoce como tensor isotrópico .

Definiremos como fluido viscoso newtoniano aquel fluido que cumple las siguientes propiedades:

1). Un medio continuo isotrópico, ya que sus propiedades físicas no muestran preferencia por la dirección del movimiento

2).El tensor de esfuerzos  $T$  es continuo en la posición y en el tiempo. Esta condición es una extensión de la hipótesis del continuo a la densidad superficial de fuerzas.

Las condiciones anteriores, junto con la hipótesis del continuo constituyen las características físicas fundamentales de un fluido viscoso newtoniano, a partir de las cuales es posible encontrar las ecuaciones de movimiento.

Una contribución importante a la componente normal de la densidad superficial de fuerzas internas  $t_n = n^T T n$  se debe a la presión, definida por la ecuación (Pt) (6). En base a esta observación podemos escribir el tensor de esfuerzos como la suma de dos tensores, a saber:

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + (T_{ij} - P\delta_{ij}) = -P\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

Al tensor  $\sigma_{ij}$  se le define como tensor de viscosidad y representa la contribución de las fuerzas de viscosidad, a la densidad superficial de fuerzas internas en cada elemento de fluido. Además este tensor debe ser proporcional al gradiente de velocidades formada por los elementos

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (23)$$

que se conoce como tensor de deformación. Por otro lado debido a la proporcionalidad entre cada elemento del tensor de viscosidad y el gradiente de velocidades, cada  $\sigma_{ij}$  es una función lineal de los elementos de  $e_{ij}$ . Esa relación se expresa en términos de un tensor isotrópico de rango cuatro

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} H_{ijkl} e_{kl}$$

donde

$$H_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

con  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  como constantes. Luego la relación entre el tensor de viscosidad y el de deformación se puede expresar como

$$\sigma_{ij} = \alpha\delta_{ij} \sum_k e_{kk} + (\beta + \gamma)e_{ij}.$$

Por la definición de  $e_{ij}$  notamos que  $\sum_k e_{kk} = \text{div}U$ , y si definimos  $\nu = (\beta + \gamma)/2$  obtenemos

$$\sigma_{ij} = \alpha.\text{div}U\delta_{ij} + 2\nu e_{ij}.$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos se escribe como

$$T_{ij} = (-P + \alpha.\text{div}U)\delta_{ij} + 2\nu.e_{ij}.$$

Por la ecuación de deformación (23) al sustituir la anterior nos queda



$$\begin{aligned}
-P &= \frac{1}{3} \sum_i T_{ii} = \frac{1}{3} \sum_i ((-P + \alpha \cdot \text{div}U) \delta_{ii} + 2\nu e_{ii}) \\
&= \frac{1}{3} (-P + \alpha \cdot \text{div}U) \sum_i \delta_{ii} + \frac{2}{3} \nu \sum_i e_{ii} \\
&= -P + (\alpha + \frac{2}{3} \nu) \text{div}U
\end{aligned}$$

lo cual implica que  $\alpha = \frac{2}{3} \nu$ , ya que  $\text{div}U$  es distinta de cero. De este modo el tensor de viscosidad tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \nu \cdot \text{div}U \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \nu \cdot e_{ij}(U). \quad (24)$$

Donde  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática, y su valor depende de las propiedades del material. Por lo tanto el tensor de esfuerzos queda determinado por la expresión

$$T_{ij} = -(P + \frac{2}{3} \nu \cdot \text{div}U) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \nu \cdot e_{ij}(U) \quad (25)$$

Para el caso estático tenemos  $T_{ij} = -P \delta_{ij}$ , ahora podemos escribir el tensor de esfuerzos como

$$\begin{pmatrix}
-P + 2\nu(\frac{1}{3}\text{div}U + U_{1,x}) & \nu(U_{1,y} + U_{2,x}) & \nu(U_{1,z} + U_{3,x}) \\
\nu(U_{1,y} + U_{2,x}) & -P + 2\nu(\frac{1}{3}\text{div}U + U_{2,y}) & \nu(U_{3,y} + U_{2,z}) \\
\nu(U_{1,z} + U_{3,x}) & \nu(U_{3,y} + U_{2,z}) & -P + 2\nu(\frac{1}{3}\text{div}U + U_{3,z})
\end{pmatrix}$$

## 11. Ecuaciones de Navier Stokes.

Sustituyendo la ecuación (tensor de esfuerzo 25) en la ecuación (du) (22) para obtener

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dU_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -(P + \frac{2}{3} \nu \text{div}U) \delta_{ij} + 2\nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho g_i \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div}U) + \sum_j \nu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \rho g_i
\end{aligned}$$

denotando  $\sum_j \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\text{div}U)$  y  $\sum_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j^2} = \nabla^2 U_i = \Delta U_i$ , nos queda

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\text{div}U) + \nu \Delta U_i + \rho g_i. \quad (26)$$

Escrita en forma vectorial nos queda

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{3} \nu \text{grad } (\text{div}U) + \nu \Delta U + \rho g.$$

Usando la derivada material obtenemos

$$\rho(U_t + (U.\text{grad})U) = -\text{grad } P + \frac{1}{3} \nu \text{grad } (\text{div}U) + \nu \Delta U + \rho g.$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las ecuaciones de "NAVIER-STOKES", las cuales son válidas para todo tipo de fluido para cualquier clase de comportamiento de esfuerzo-razón de deformación. Para el caso de un fluido newtoniano (uno con viscosidad constante) en flujo laminar. Si el fluido es además incompresible es decir si la densidad de masa es constante, por la ecuación de continuidad tenemos que  $\text{div}U = 0$  y las ecuaciones se reducen a

$$\rho(U_t + (U.\text{grad})U) = -\text{grad } P + \nu \Delta U + \rho g.$$

Escritas en componentes nos queda:

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta U_i + \rho g_i$$

Donde  $1 \leq j \leq 3$ , e  $i$  fijo.

La Ecuación de Navier Stokes en una Lámina Termocapilar.

## 12. Deformación Termocapilar en una lámina líquida

El problema ha estudiar consiste en una lámina líquida delgada de un fluido viscoso sometido a calentamiento mediante un LASER. Debido a que la intensidad del LASER es gaussiana [14] se produce un calentamiento en el material, que es un buen conductor del calor y cuya distribución de

temperatura es conocida en término de funciones especiales [12]. Este calentamiento produce varios fenómenos reportados como tales : variación de densidad, variación de viscosidad y flujo convectivo, [1]. De todos estos fenómenos el más importante para este trabajo es la deformación de la superficie debido al flujo convectivo producido por el calentamiento, en particular para las intensidades reportadas en las referencias [1] [2] las variaciones de temperatura son muy pequeñas y la reflexión del mismo haz LASER sobre la superficie permite el estudio interferométrico de la deformación que produce el flujo convectivo. Este fenómeno llamado deformación termocapilar es uno de los más complicados en la mecánica de fluidos, el calentamiento además del flujo produce una disminución de la tensión superficial, ya que colleva a la deformación de la superficie del líquido formando un "cráter" que ha sido estudiado. (El flujo no tangente del material es lo que causa la deformación o cráter debido a la "pérdida" de materia en el borde superior, esta pérdida no es tal ya que en realidad lo que ocurre es el desplazamiento del material que migra del centro hacia sus bordes laterales donde se "acumula"). [13].

El fenómeno de la deformación termocapilar se describe matemáticamente por las ecuaciones de Navier Stokes, donde la tensión superficial se incluye como una fuerza externa que varía con la temperatura, que actúa como un término forzante conocido. Una solución "clásica" debida a Landau en 1960 [4] es prácticamente la única solución reportada en la literatura. Esta solución que corresponde al régimen estacionario fue comprobada experimentalmente trabajos realizados durante la década de los 80 [1], sin embargo nada se conoce del régimen dinámico. Para el régimen transitorio se ha comprobado que las predicciones teóricas del modelo cuasiestático ( la solución de Landau donde se toma en cuenta la dependencia temporal de la temperatura  $T(x,t)$ ) funcionan solo para líquidos de alta viscosidad ( $\nu \sim 1000$  poise), mientras que para líquidos menos viscosos ( $\nu \sim 50$  poise) la diferencia de la velocidad de deformación se aparta de la predicción cuasiestacionaria teórica por un factor de 1000 para el régimen transitorio ( $t \sim 0$ ).

El estudio dinámico teórico de la deformación termocapilar es un problema que se ha resistido durante más de 40 años a una descripción teórica matemática, en particular las ecuaciones de Navier Stokes en términos vectoriales son no lineales, y al acoplarse complican más la descripción matemática del problema. Adicional a las ecuaciones de N-S está la superficie que impone una condición de borde móvil cuya dinámica depende de la ecuación de continuidad.

El propósito fundamental de este trabajo es estudiar el comportamien-

to dinámico de la deformación termocapilar descrito por las ecuaciones de Navier Stokes. Este estudio se llevará a cabo mediante tres modelos fundamentales:

- El modelo dinámico unidimensional.
- El modelo dinámico bidimensional.
- El modelo tridimensional con simetría axial.

En cada caso se lleva a cabo un correcto planteamiento de las condiciones de borde.

La integración completa de la ecuación de Navier Stokes con la condición de incompresibilidad (Ec. de continuidad) se conoce solamente en el caso cuasiestático unidimensional [4]. En este caso la ecuación se reduce a una ecuación ordinaria con condiciones iniciales y se obtiene una solución que establece la dinámica del movimiento de la superficie que se deforma. Todos los modelos dinámicos asociados a este problema se corresponden a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (N-S y continuidad) donde la frontera MOVIL, que es la superficie del fluido es desconocida. Esto constituye la mayor dificultad para la resolución de los modelos pues no se cuenta con suficientes herramientas matemáticas que conduzcan a soluciones exactas, y los programas comerciales de métodos numéricos de aproximación no incorporan problemas con fronteras móviles ó dinámicas. En este trabajo se revisa la solución para el caso estacionario y se realiza un estudio que permite establecer las condiciones de borde correctas para cada uno de los modelos planteados. Se presenta una NUEVA solución teórica para el caso unidimensional dinámico y se resuelve mediante ELEMENTOS FINITOS el problema Bidimensional dinámico pero con frontera fija. Finalmente se plantean las ecuaciones del modelo Tridimensional y se explican los problemas que impiden su solución con el paquete de Elementos finitos PDETOOL de MATLAB del se dispone por los momentos en la UCLA.

A continuación se presenta una ilustración del flujo convectivo originado por la deformación termocapilar en una lámina líquida sometida a calentamiento focalizado ó gaussiano.

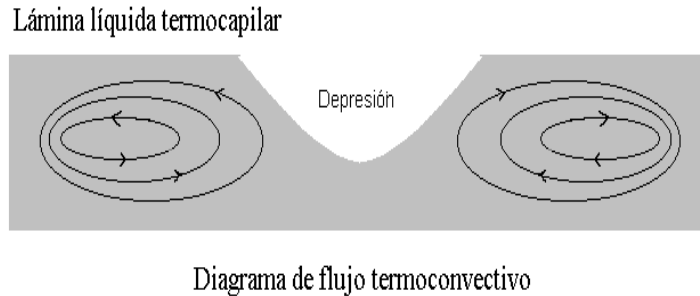


Figura 4: lámina

### 13. Caso Estacionario Unidimensional.

Estudiaremos el caso en el cual la velocidad del fluido no varía con el tiempo y la tensión superficial es una función de la temperatura.

1) Regimen Estacionario

Esto implica que :

- El término  $\frac{\partial U}{\partial t}$  en la ecuación de Navier Stokes se desprecia
- La densidad y los parámetros no dependen del tiempo.

Para esto se hacen las siguientes consideraciones :

2) Flujo con simetría axial. Esto implica que  $U_2 = 0$ .

3) La componente horizontal de la velocidad es mayor que la vertical, por lo tanto  $U_1 \gg U_3$  es decir que la componente vertical de la velocidad la podemos considerar  $U_3 = \epsilon \rightarrow 0$ .

4) Incompresible ó Newtoniano

$$\nabla \cdot U = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0$$

luego

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{\partial U_3}{\partial z}$$

Tomando la ecuación de Navier Stokes donde solamente la componente horizontal  $U_1$  es apreciable, para  $i = 1$  en coordenadas cartesianas nos queda:

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1\frac{\partial U_1}{\partial x} + U_3\frac{\partial U_1}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P(x, z)}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right)$$

Sustituyendo la relación de incompresibilidad

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - U_1\frac{\partial U_3}{\partial z} + U_3\frac{\partial U_1}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P(x, z)}{\partial x} + \nu\left(-\frac{\partial(\frac{\partial}{\partial z}U_3)}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right)$$

Tanto  $U_3$  como sus derivadas  $\frac{\partial}{\partial r}U_3$  y  $\frac{\partial}{\partial z}U_3$  tienden a cero, en particular  $U_3 \sim \epsilon$  y  $\frac{\partial}{\partial r}U_3 \sim \epsilon$  mientras que  $\frac{\partial}{\partial z}U_3 \sim \epsilon^2$  ya que debido a la forma alargada horizontalmente de la circulación de velocidades  $U_3$  depende fundamentalmente de la variable horizontal  $U_3(x, z) \sim U_3(x)$

Sustituyendo las consideraciones anteriores tenemos a orden cero en  $\epsilon$

$$\rho, 0(\epsilon) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 0(\epsilon^2)\right)$$

La ecuación de Navier Stokes se reduce cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} = \frac{\partial P(x, z)}{\partial x} \quad \text{en } \Omega \quad (27)$$

donde que  $U_1 = u(x, z)$  y  $\nu$  es la viscosidad del fluido.

## 14. Condiciones de Borde:

El análisis de las condiciones de borde es fundamental para la resolución de cualquier ecuación diferencial, en este caso debido a que en el sistema parte del reposo y de una configuración trivial consistente en un cilindro líquido de radio "a", fondo plano en  $z = 0$  y la superficie superior descrita por la función  $z_s = Z_s(r, t)$ . Esta superficie se mueve, sin embargo su dinámica solo puede ser integrada de forma cerrada para el caso estacionario

unidimensional.

El cilindro antes descrito esta compuesto por tres fronteras en las que hay que imponer condiciones:

- 1) La superficie superior o tapa del cilindro:  $(r, z_s) \quad \forall \theta$ ,
- 2) El borde lateral del cilindro  $r = R$ ,
- 3) El fondo del cilindro  $z = 0$ .

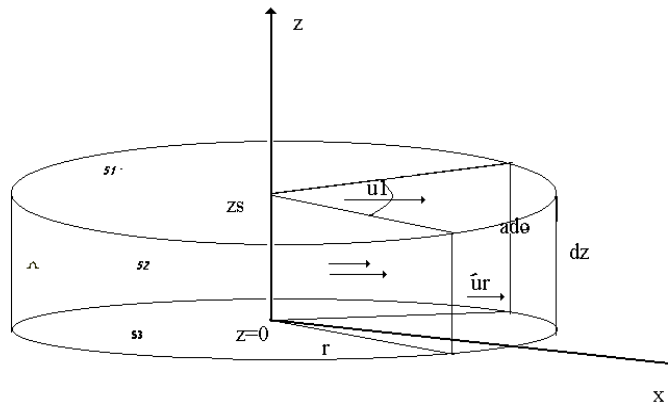


Figura 5: Modelo1

- a) La fuerza debido a la viscosidad en cualquier elemento de volumen adyacente a la superficie del líquido debe ser igual a la fuerza capilar debido a la tensión superficial:

$$\nu \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{z_s} = \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

Donde  $z_s$  es la altura de la superficie libre y  $\alpha$  es la tensión superficial (y por lo tanto está definida en la superficie), que está relacionada a su vez con la temperatura por :

$$\alpha(T) = \alpha_0 + c(T(r, t) - T_0)$$

La tensión superficial varia debido a la variación de la temperatura, así que la condición de termocapilaridad es

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = c \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{z=z_s} \quad (28)$$

donde  $c$  es el coeficiente de termocapilaridad ( $[c] = \frac{\text{Joule}}{\text{°C} \cdot \text{m}^3}$ ) por lo tanto en la tapa o superficie superior de la gota debe cumplirse:

$$\left( \nu \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right)_{z_s} = c \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{z=z_s} \quad (\text{fuerza termocapilar})$$

- b) Por otro lado la ecuación de continuidad ?? conjuntamente con la consideración (3) y teorema de la divergencia expresa que :

$$\int_{V_c} \text{div}(U) dV = \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Es decir no salida de fluido en la frontera. Teniendo en cuenta que  $U_\theta \equiv 0$  y que la velocidad vertical del fluido tanto en la tapa  $S_1$  como en el fondo  $S_3$  debe ser nula (ver item (c) más adelante)  $(U_z)_{z=0} = (U_z)_{z=z_s} = 0$ . Se obtiene:

$$\int_{S_2} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{z_s} \int_0^{2\pi} U_r R d\theta dz = 2\pi R \int_0^{z_s} U_r \cdot dz = 0$$

Si escogemos el plano XZ que muestra la figura (modelo 1) podemos escribir la condición de incompresibilidad

$$\int_0^{z_s} u(x, z) dz = 0 \quad (29)$$

- c) El fluido en el fondo de la muestra no desliza, es decir:

$$U_r(z=0) = U_\theta(z=0) = U_z(z=0) = 0$$

en todos los casos, en particular para los casos bidimensional (sobre el plano XZ) y unidimensional ( $U_z = 0 \forall (x, z)$ ) se tiene que



$$U_1(x, 0) = u(x, 0) = 0 \quad (30)$$

En resumen el problema a resolver viene dado por:

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} = \frac{\partial P(x, z)}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = c \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{z=z_s}$$

$$\int_0^{z_s} u(x, z) dz = 0$$

$$U_1(x, 0) = u(x, 0) = 0$$

## 15. Solución al Flujo Estacionario Termocapilar.

A continuación resolveremos el problema del flujo estacionario termocapilar en una lámina líquida delgada calentada con un LASER de intensidad gaussiana, partiendo de la ecuación (??) .

Para determinar el valor de la presión en función de la posición, en el caso de un fluido incompresible ( densidad constante) consideraremos la expresión para la presión estática dada por [17]:

$$P = P_0 + \rho g(z_s - z). \quad (31)$$

Donde  $P_0$  es la presión en la superficie libre (presión atmosférica), consistente con la definición de presión para un fluido en movimiento en la que se desprecian el término de Bernoulli  $P_B = \frac{1}{2}\rho g \cdot (V)^2$  cuando la velocidad es pequeña. Derivando ?? con respecto a la componente x se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{dz_s(x)}{dx} \quad (32)$$

Sustituyendo la expresión (??) en la ecuación (27) tenemos que:

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} = \rho g \frac{1}{\nu(x, z)} \frac{dz_s(x)}{dx} \quad (33)$$

Integramos (33) entre los límites  $(z, z_s)$  tenemos :

$$-\frac{\partial u(x, z_s)}{\partial z} + \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = -\rho g \frac{dz_s(x)}{dx} \int_z^{z_s} \frac{1}{\nu(x, z')} dz'$$

y usando la condición (a) (28) :

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = \frac{c}{\nu(x, z_s)} \frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} - \rho g \frac{dz_s(x)}{dx} \int_z^{z_s} \frac{1}{\nu(x, z')} dz'$$

integrando de nuevo entre los límites  $(0, z)$  nos queda:

$$u(x, z) - u(x, 0) = \frac{c}{\nu(x, z_s)} \frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} z + \rho g \frac{dz_s}{dx} \int_0^z \left( \int_{z_s}^{z''} \frac{1}{\nu(x, z')} dz' \right) dz''$$

usamos ahora la condición (c) 30 tenemos e integrando de nuevo entre los límites  $(0, z_s)$  nos queda :

$$\int_0^{z_s} u(x, z) dz = \int_0^{z_s} \left( \frac{c}{\nu(x, z_s)} \frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} z + \rho g \frac{dz_s}{dx} \int_0^z \left( \int_{z_s}^{z''} \frac{1}{\nu(x, z')} dz' \right) dz'' \right) dz$$

usando la condición (b) 29 tenemos:

$$\frac{c}{\nu(x, z_s)} \frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} \left( \frac{z_s^2(x)}{2} \right) + \rho g \frac{dz_s}{dx} \int_0^{z_s} \left( \int_0^z \left( \int_{z_s}^{z''} \frac{1}{\nu(x, z')} dz' \right) dz'' \right) dz = 0$$

Supongamos que cuando la deformación de la superficie  $(z_s - z_0)$  es pequeña, es decir mucho menor que la altura original de la muestra  $(z_0)$  podemos hacer la aproximación:

$$\frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} \simeq \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x}$$

Por lo tanto la ecuación anterior nos queda :

$$\frac{dz_s(x)}{dx} = B(x, z_s) \cdot z_s^2(x)$$

Ahora es físicamente aceptable que la viscosidad  $\nu = \nu_o$  es una constante debido a que, al ser la lámina líquida delgada y muy buena conductora del calor se tiene un calentamiento uniforme y sabemos que  $\nu(T) \cong \nu_o$  para cambios pequeños de temperatura, con lo cual:

$$B(x, z_s) = \frac{3c}{2\rho g} \cdot \frac{1}{z_s^3} \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x}$$

por lo tanto

$$\frac{dz_s(x)}{dx} = \frac{3c}{2\rho g} \cdot \frac{1}{z_s^3} \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x}$$

separando variables e integrando, entre los límites  $(z_0, z_s)$  y  $(x_0, x)$  respectivamente nos queda :

$$\int_{z_0}^{z_s} z_r dz_r(x) = \int_{x_0}^x \frac{3c}{2\rho g} \cdot \left( \frac{\partial T(t, z_0)}{\partial t} \right) dt$$

lo cual nos da

$$z_s(x) = \left( \frac{3c}{\rho g} (T(x, z_0) - T(x_0, z_0)) + z_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

que representa la superficie libre del fluido.

## 16. Solución Cuasi-estacionaria

La distribución de temperaturas dentro de la lámina líquida calentada con un laser como se explicó (ver montaje) ha sido resuelta para el caso de lámina delgada y utilizada en numerosas referencias [1] y comprobada experimentalmente [3], [2]. Para obtener la distribución de temperatura en respuesta al calentamiento producido por un laser de intensidad Gaussiano:

$$I(x) = H_o \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

se debe resolver la ecuación del calor, para la lámina líquida, dada por:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + K \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{K}{k \cdot z_0} I(x)$$

considerando para la condición inicial y de condiciones de borde sin pérdida:

$$T(x, t_0) = T_0$$

$$T(x \rightarrow \infty) = T_0 \quad (35)$$

Se obtiene la siguiente distribución de temperatura [3] :

$$T(x, t) = \frac{H_0 a^2}{4kz_0} \left( -E_i \left[ \frac{-(\frac{x}{a})^2}{1 + \frac{4Kt}{a^2}} \right] + E_i \left[ -(\frac{x}{a})^2 \right] \right) \quad (36)$$

donde:  $H(x) = H_0 \exp(-(\frac{x}{a})^2)$  es la potencia por unidad de área en el rayo láser

$Pot = H_0 \pi a^2$  es la potencia total, y "a" el radio del rayo en el punto de inflexión,  $k$  es la conductividad térmica,  $K = \frac{k}{c}$  es la difusividad térmica,  $c$  es el coeficiente de termocapilaridad el cual está relacionado con el calor específico  $c = \rho.C_e$  y  $E_i$  es la función Exponencial Integral.

Teniendo en consideración que los tiempos experimentales de calentamiento son del orden de los milisegundos [2] mientras que los tiempos de los tiempos de desplazamiento de la superficie  $z_s$  son del orden de 1/10 a 1/100 de segundo, podemos considerar una solución cuasiestacionaria, en la cual tomamos la solución estacionaria obtenida anteriormente y sustituimos la temperatura en función del tiempo antes explicada.

Bajo las consideraciones anteriores la velocidad vendría dada por:

$$u_e(x, z; t) = \frac{c}{\nu} \frac{\partial T(x, z_s)}{\partial x} z + \frac{3c}{2} \frac{1}{z_s \nu} \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x} \left( \frac{z^2}{2} - z z_0 \right)$$

aproximando  $z_0 = z_s$  se tiene finalmente la ecuación para la componente horizontal del flujo convectivo de velocidades:

$$u_e(x, z; t) = \left( \frac{1}{2} \frac{c}{\nu} \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x} \right) \left( \frac{3z}{2z_0} - 1 \right) z$$

en donde la dependencia temporal se incorpora mediante la ecuación de calentamiento 36

$$u_e(x, z; t) = \frac{1}{2} \frac{c}{\nu} \frac{H_0 a^2 k}{4kz_0} \left( \frac{-2}{x} \exp \left( \frac{-x^2}{1 + \frac{4Kt}{a^2}} \right) + \frac{1}{x} \exp \left( -(\frac{x}{a})^2 \right) \right) \left( \frac{3z}{2z_0} - 1 \right) z \quad (37)$$

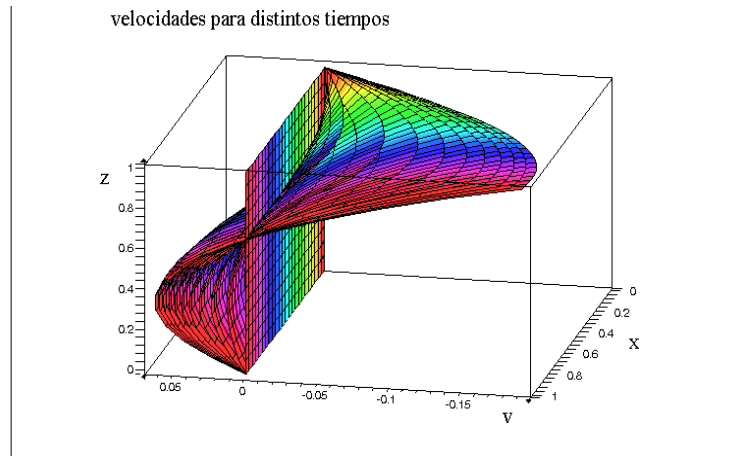


Figura 6: Resultados estacionarios

Dichas soluciones pueden apreciarse en las siguientes gráficas

en la gráfica anterior que las velocidades cambian de signo en un punto específico, este resultado se debe a la diferencia de signo en la ecuación resultante  $u_e(x, z; t)$ . Por lo tanto este comportamiento se corresponde con los resultados obtenidos en experimentos [2] ya que nos indica de forma local y temporal (para un corto período de tiempo) que las partículas se mueven en dirección negativa en el borde de la lámina termocapilar cada vez con mayor velocidad, además se tiene que en el fondo no hay movimiento del fluido ya que las velocidades son cero en este borde lo cual nos indica coherentes resultados

Dinámica en una Lámina Líquida Termocapilar.

## 17. Caso Dinámico en una Dimensión.

En este caso consideramos que la velocidad varia con el tiempo, es decir  $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$  manteniendo las condiciones del CASO I (el estacionario unidimensional) a excepción de la condición 1). Se tiene:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

usando la condición de incompresible

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} - 0(\epsilon) &= 0\end{aligned}$$

ya que la componente de la velocidad en la dirección vertical la aproximaremos a cero

$$U_2 = v \approx \epsilon \rightarrow 0$$

En definitiva nos queda que  $u = u(z, t)$  no depende de la componente  $x$ , y la ecuación de la velocidad del flujo horizontal es

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

donde  $\mu = \frac{\nu}{\rho}$  es el coeficiente de viscosidad cinemática y  $k^2 = \frac{\nu}{\rho}$ . Utilizaremos la aproximación (32)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{dz_s(x)}{dx}$$

donde utilizaremos la solución cuasiestática 37

$$\rho g \frac{dz_s(x)}{dx} = f(\alpha, t)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro; la cual en general puede escribirse de la forma

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = f(\alpha, t)$$

por lo cual reducimos el problema a una EDP con condiciones de frontera de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} f(\alpha, t) \quad (38)$$

$$u(z, 0) = \varphi(z) \quad 0 < z < z_s, \quad 0 < z < L$$

$$u(0, t) = V_1(t)$$

$$u(L, t) = V_2(t) \quad ; \quad t \geq 0 \quad (39)$$

El cual representa la ecuación de calor no homogénea con condiciones de borde. Este problema se puede hacer por pasos:

1<sup>ro</sup> Buscamos una función  $W(y,t)$  (no necesariamente solución de (problema 2) (38) que satisfaga (condiciones) (39). Consideremos la ecuación de una recta en el plano  $(y,w)$  que pase por los puntos  $(0, V_1(t))$  y  $(L, V_2(t))$ .

$$W(z, t) = V_1(t) + \left(\frac{z}{L}\right) [V_2(t) - V_1(t)]$$

2<sup>do</sup> La función  $U=u-W$  satisface condiciones homogéneas, es decir satisface el siguiente problema :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + g(\alpha, t) \\ U(z, 0) &= \Psi(z) \quad 0 < z < z_s, \quad 0 < z < L \\ U(L, t) &= U(0, t) = 0; \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$g(\alpha, t) = \frac{1}{\rho} f(\alpha, t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} u - k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \quad ; \quad \Psi(z) = \varphi(z) - u(z, 0).$$

3<sup>ro</sup> La solución  $U$  de las ecuaciones anteriores es la superposición de las soluciones que corresponden, respectivamente a  $g(\alpha, t) \equiv 0$  y a  $\Psi(z) \equiv 0$ . Es decir  $U = U^1 + U^2$ , donde estas funciones son las soluciones respectivamente de los problemas siguientes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 U^1}{\partial z^2} & (40) \\ U^1(z, 0) &= \varphi(z) \quad 0 < z < z_s, \quad 0 < z < L \\ U^1(0, t) &= U^1(L, t) = 0; \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 U^2}{\partial z^2} + g(z, t) & (41) \\ U^2(z, 0) &= 0 \quad 0 < y < z_s, \quad 0 < z < L \\ U^2(0, t) &= U^2(L, t) = 0; \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

El primer problema lo resolvemos a continuación : Supongamos que  $\Psi \in C^1[0, L]$  y sastiface la condición  $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$ .

Ahora consideramos que  $U^1(z, t) = Y(z)T(t)$  luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U^1 &= Y(z)T_t(t) \\ \frac{\partial}{\partial z}U^1 &= Y_z T \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}U^1 &= Y_{zz}T\end{aligned}$$

sustituyendo en (P1) (40) nos queda

$$YT_t = k^2 Y_{zz}T$$

Queremos soluciones no triviales, supongamos  $Y(z_0) \neq 0$  para algún  $z_0$ . Luego para todo t se tiene :

$$\begin{aligned}\frac{YT_t}{YT} &= k^2 \frac{Y_{zz}T}{YT} \rightarrow \frac{T_t}{T} = k^2 \frac{Y_{zz}}{Y} \\ &\rightarrow \frac{T_t}{T} = -\lambda \quad \wedge \quad k^2 \frac{Y_{zz}}{Y} = -\lambda\end{aligned}$$

La solución nos queda :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= V_1(t) + \left(\frac{z}{L}\right)[V_2(t) - V_1(t)] \\ &+ \int_0^L G(z, \xi, t) [\varphi(\xi) - V_1(t) + (V_2(t) - V_1(t))] d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^L G(z, \xi, t-r) \cdot \left\{ f(\xi, r) - V_1'(t) - \left(\frac{\xi}{L}\right)(V_2'(t) - V_1'(t)) \right\} d\xi dt.\end{aligned}$$

Si utilizamos los desarrollos en serie de  $f(\alpha, t)$  según el sistema  $\left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right\}$

Oservación :

$$G(z, \xi, t) = \left(\frac{2}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{L}\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi k}{L}\right)^2 t\right)$$



es la función de Green de la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \\ u(z, 0) &= \varphi(z) \quad 0 < z < z_s \quad 0 < z < L \\ u(L, t) &= u(0, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

luego nos queda :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= V_1(t) + \left(\frac{z}{L}\right) [V_2(t) - V_1(t)] \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ c_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi k}{L}\right)^2 t\right) + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{n\pi k}{L}\right)^2 (t-r)\right) f_n(r) dr \right\} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \end{aligned}$$

donde  $c_n$  son los coeficientes de fourier de  $\Psi(z)$  y  $f_n(t)$  son los de  $f(\alpha, t)$ .

En este trabajo reportamos una SOLUCIÓN ANALÍTICA NUEVA al problema de la deformación termocapilar, que durante decadas ha sido estudiada en base a la vieja solución estacionaria clásica de Landau [4] y las aproximaciones cuasiestacionarias [1] como la explicada en la sección anterior. Consideramos que es de gran interés comparar esta solución con los casos conocidos, pero esto excede los objetivos planteados en este trabajo de grado. Esta solución analítica cerrada es de gran dificultad tanto para graficar como obtener valores numéricos, lo que hace difícil su comparación con las soluciones numéricas que obtuvimos mediante el uso de las herramientas MatLab y Maple y que son reportadas en el capítulo siguiente. La principal dificultad reside en que no tenemos una forma clara de estimar la importancia de cada uno de los coeficientes " $c_n$ " y " $f_n$ ", razón por la cual dejamos esta solución original para ser evaluada en trabajos posteriores.

## 18. Caso Dinámico en Dos Dimensiones

Ahora consideremos que la componente de la velocidad vertical no es cero; sin embargo es menor que la componente horizontal, es decir es de orden  $\varepsilon$ . Conservaremos en la ecuación para la componente " $U$ " (horizontal) los términos de orden cero en  $\varepsilon$  y en la ecuación para la componente " $V$ " (vertical) aproximaremos hasta los términos de primer orden en  $\varepsilon$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu [\nabla^2 u]$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu [\nabla^2 v] - \rho g$$

Utilizando la presión hidrostática (31) que:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

y usando la condición de incompresibilidad que matemáticamente constituye una condición de integrabilidad del sistema se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

Considerando de nuevo que la componente horizontal de la velocidad es mucho mayor que la vertical,  $u \gg v$  por lo tanto la componente vertical de la velocidad es tan pequeña, que la podemos considerar  $v \sim \epsilon$ . Por otro lado se tiene que  $\frac{\partial v}{\partial z} \sim \epsilon^2$  y  $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \epsilon^2$ , luego  $v \frac{\partial v}{\partial z} \sim \epsilon^3$

Sustituyendo las consideraciones anteriores tenemos que:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - u,0(\epsilon^2) + 0(\epsilon) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu [\nabla^2 u] \quad (42)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 0(\epsilon^3) \right] = \nu [\nabla^2 v]$$

integrando con respecto a  $z$  y derivando con respecto a  $x$  podemos hacer uso de la identidad  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  para obtener el término  $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \int \left( \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dz \quad (43)$$

Para obtener una ecuación no lineal, pero que estemos en condiciones de resolver mediante los métodos numéricos disponibles, procederemos perturbativamente a sustituir los términos  $\frac{\partial P}{\partial x}$  y  $u \frac{\partial v}{\partial x}$  usando la solución de orden cero estacionaria, con lo cual obtenemos un sistema cuasi-lineal de ecuaciones parabólicas no homogéneas, donde el término no homogéneo depende de la solución conocida para el caso estacionario.

En efecto la ecuación para el caso estacionario es [1]:

$$\nabla^2 u_e = \frac{\partial P_e(x; t)}{\partial x}$$

Integrando con respecto a  $z$  y sustituyendo en la ecuacion

$$\int (\nabla^2 u_e) dz = \frac{\partial P_e}{\partial x} z$$

se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx -\frac{\partial P_e}{\partial x} z + \frac{\partial u_e}{\partial z}$$

que al sustituir en la segunda ecuación de 42 y considerando los términos de orden cero en la primera ecuación y de primer orden en la segunda queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} [\nabla^2 u] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_e}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} [\nabla^2 v] &= u_e \left( \frac{\partial P_e}{\partial x} z - \frac{\partial u_e}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

recordando las ecuaciones (32) y 34 obtenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{3c}{2} \cdot \frac{1}{z_s} \frac{\partial T(x, z_0)}{\partial x}$$

aproximando  $z_s \approx z_0$  se obtiene

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = \frac{3c}{8} H_0 a^2 k \left( \frac{-2}{x} \exp \left( \frac{-x^2}{1 + \frac{4Kt}{a^2}} \right) + \frac{1}{x} \exp \left( -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right) \right)$$

La otra aproximación del término no homogéneo es utilizar la solución cuasiestacionaria 37

$$u_e = \frac{1}{2} \frac{c}{\nu} \frac{H_0 a^2 k}{4kz_0} \left( \frac{-2}{x} \exp \left( \frac{-x^2}{1 + \frac{4Kt}{a^2}} \right) + \frac{1}{x} \exp \left( -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right) \right) \left( \frac{3z}{2z_0} - 1 \right) z$$

Finalmente el sistema de ecuaciones parabólicas que vamos a resolver numéricamente con la ayuda de matLab es

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} [\nabla^2 u] &= -\frac{1}{\rho} \frac{3c}{8} H_0 a^2 k \left( \frac{-2}{x} \exp\left(\frac{-x^2}{1 + \frac{4Kt}{a^2}}\right) + \frac{1}{x} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} [\nabla^2 v] &= u_e \left( \frac{\partial P_e}{\partial x} z - \frac{\partial u_e}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

## 19. Caso Dinámico Tridimensional con Simetría Axial.

Este caso se hara bajo las mismas condiciones de borde empleadas en los casos I y II pero usando la hipótesis de que la densidad del fluido no depende del tiempo (fluido continuo). En este caso tenemos :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\neq 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

hacemos uso de las coordenadas cilíndricas teniendo en cuenta que las componentes de las velocidades vienen dadas por u, v y w en las coordenadas r,  $\theta$  y z respectivamente. Luego usando las ecuaciones de N-S en dichas coordenadas se tiene:

Componente r:

$$\begin{aligned}&\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{V^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} u \right] + \rho g_r\end{aligned}$$

Componente  $\theta$  :

$$U_\theta = V = 0$$

Es decir no hay rotación en torno al eje de simetría z.

Componente z :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

Las siguientes condiciones son usadas para simplificar el problema :

1) La velocidad no depende de la componente  $\theta$  (simetría axial). Luego:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} u \right]$$

$$\rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (44)$$

haciendo uso de la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \quad (45)$$

por la condición de incompresibilidad  $div(U) = 0$  se tiene que

$$\frac{1}{r} u + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (46)$$

2)  $w=0$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), luego la ecuación para la componente radial del flujo convectivo queda. Como:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} u \right]$$

Para el caso en que la velocidad vertical es pequeña, la ecuación de incompresibilidad 46 nos indica que:

$$\frac{1}{r} u + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (47)$$

derivando esta ecuación (47) con respecto a  $r$  se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

que al sustituir en la primera ecuación de (??) se tiene:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

despejando obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{u}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \frac{u^2}{\rho r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (49)$$

La ecuación para la componente radial de la velocidad escrita de la forma (49) contiene un término no lineal cuadrático que la hace altamente no lineal, de forma tal que el MatLab no puede ser usado para resolverla (debe ser a lo más cuasilineal). Por otro lado la ecuación para la velocidad radial de la forma (48) es exactamente igual a la ecuación para la componente horizontal  $U_1 = u$  del caso de dos dimensiones estudiado en la sección anterior, donde se aproximó  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0(\epsilon^2) \rightarrow 0$ . De hecho la ecuación (44), corresponde exactamente a la ecuación para la componente vertical del sistema (42). Esto justifica que se pueda estudiar un problema con simetría axial en base a sus ecuaciones cartesianas tal como en la solución estacionaria de Landau [4], [1]

Elementos Finitos:

## 20. Formulacion Variacional de Elementos Finitos

La formulación de elementos finitos puede deducirse para ciertos problemas [5], como por ejemplo el análisis de estructuras, como una extensión de los métodos matriciales utilizados para calcular estructuras de vigas y reticulados. Sin embargo, dicha deducción encuentra serias limitaciones cuando se quiere extender la formulación a problemas no estructurales. Por ello se mostrarán en este capítulo algunos conceptos básicos de la formulación variacional del método de elementos finitos que pueden aplicarse a una gran variedad de problemas. En primer lugar describiremos algunos conceptos sobre métodos aproximados de solución para ecuaciones diferenciales, en particular veremos el método de Rayleigh-Ritz y el método de residuos ponderados.

Luego veremos la utilización de estos métodos con elementos finitos y se describirá la implementación matricial y los elementos más utilizados.

Describiremos los métodos más usuales empleados para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en dos y tres dimensiones, sobre los que se basan la mayoría de implementaciones de elementos finitos. En general los métodos empleados son de dos tipos, por un lado están los métodos basados en principios variacionales, generalmente asociados a la minimización de algún funcional, y por otro lado tenemos los métodos del tipo de residuos ponderados que se aplican directamente sobre la ecuación diferencial y sus condiciones de contorno, no precisando de ningún funcional asociado. El método a utilizar en nuestro caso viene dado por un principio variacional Lagrangiano [6] donde la acción a minimizar viene dada por:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_0^1 \left( x_i, \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \frac{\partial x_i}{\partial t}; a, t \right) da^3 \right] dt$$

ver la ecuación (10).

## 21. Método de Rayleigh-Ritz

Con este método es posible obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales mediante principios variacionales. La idea básica consiste en aproximar a las soluciones  $u, v$  que hacen estacionario un funcional mediante una suma ponderada de funciones

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m a_i N_i(x, y), \quad \tilde{v} = \sum_{i=m+1}^n a_i N_i(x, y) \quad (50)$$

donde  $a_i$  son constantes a determinar llamadas coordenadas generalizadas. Las funciones  $N_i(x, y)$  son llamadas funciones de prueba y pueden ser elegidas arbitrariamente, pero deben ser admisibles, esto es, deben satisfacer las condiciones esenciales de contorno y las condiciones de compatibilidad. En general, se utilizan polinomios, aunque pueden utilizarse funciones trigonométricas u otro tipo de funciones. Este método fue utilizado por primera vez por Lord Rayleigh en 1870 usando un campo de aproximación con una única función de prueba. Posteriormente, en 1909, Ritz generalizó el método construyendo un campo de aproximación con varias funciones.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución es equivalente a hacer estacionaria la primera variación de un funcional asociado  $\Pi$  que es función de  $u$ ,  $v$  y sus primeras derivadas:

$$\Pi = \int_{\Omega} F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, ) dx dy$$

Las derivadas de las funciones de aproximación  $u$  son

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x}, \quad \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \sum_{i=m+1}^n a_i \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y}$$

y en forma análoga para la aproximación de  $v$ . Si sustituimos las funciones de aproximación  $u$ ,  $v$  y sus derivadas en el funcional  $\Pi$  este se transformará en una función de las coordenadas generalizadas  $a_i$ , cuyos valores por ahora desconocemos, esto es

$$\Pi = \Pi(a_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Luego deseamos conocer cuales son los mejores valores de las constantes  $a_i$ , tal que reemplazados en las ecuaciones (1) nos brinden la mejor aproximación a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales asociado al funcional  $\Pi$ . Para ello aplicamos la condición de estacionaridad a este funcional, que sabemos que debe ser satisfecha por la solución exacta, resultando

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta a_i = 0$$

Como esta ecuación debe ser válida para variaciones arbitrarias de los  $a_i$ , luego deben cumplirse las siguientes "n" ecuaciones algebraicas:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si ahora consideramos el caso particular, pero muy común en problemas físicos, donde el funcional  $\Pi$  es una función cuadrática de las funciones  $u$ ,  $v$  y sus primeras derivadas, entonces al substituir las aproximaciones dadas por la ecuac. (1) este funcional será una función cuadrática de las coordenadas generalizadas  $a_i$ . Por lo tanto, las derivadas de este funcional serán funciones lineales en las coordenadas generalizadas  $a_i$  que se pueden expresar como:



$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = (k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \dots + k_{1n}a_n - f_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En forma matricial este sistema de ecuaciones se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Bmatrix}$$

y en forma abreviada usando notación matricial

$$K.a = f$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos dá los valores de las constantes  $a_i$ . Para un número grande de ecuaciones la solución a mano de este sistema es prácticamente imposible y debe ser resuelto por computadora.

Notemos que las segundas derivadas del funcional  $\Pi$  respecto de las constantes  $a_i$  valen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i \partial a_j} = k_{ij}$$

y dado que  $\Pi$  es una función continua en las coordenadas generalizadas  $a_i$ , por ser un polinomio de segundo grado en estas coordenadas, entonces deben ser iguales las segundas derivadas cruzadas

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_j \partial a_i} \quad \Rightarrow \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Por lo tanto la matriz  $K$  es simétrica. Esto tiene implicaciones desde el punto de vista computacional, ya que para almacenar esta matriz solo precisamos guardar la mitad de sus coeficientes. Una vez conocidas las constantes  $a_i$  reemplazándolas en las ecuaciones (1) tenemos las aproximaciones buscadas a la solución del problema variacional y equivalentemente al sistema de ecuaciones diferenciales asociado.

## 22. Métodos de Residuos Ponderados

Con estos métodos es posible obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales que no tienen un funcional asociado. Consideremos una ecuación diferencial definida sobre un dominio  $\Omega$  como

$$A(u) - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (51)$$

y estando sujeta a condiciones naturales de contorno sobre la parte  $\Gamma_N$  de su frontera de la forma

$$M(u) - g = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \quad (52)$$

siendo  $A(u)$ ,  $M(u)$  operadores diferenciales.

Algunos ejemplos de los operadores diferenciales  $A(u)$  son:

$$\begin{aligned} A(u) &= -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) + cu \\ A(u) &= \frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\ A(u) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Si reemplazamos la solución exacta  $u$  por una solución aproximada  $\tilde{u}$  en la primera ecuación diferencial anterior y en sus condiciones naturales de contorno, estas no serán satisfechas exactamente, generando un residuo  $R_\Omega$  en el dominio y un residuo  $R_\Gamma$  en el contorno, esto es

$$R_\Omega(\tilde{u}) = A(\tilde{u}) - f \neq 0 \quad \text{en } \Omega \quad (53)$$

$$R_\Gamma(\tilde{u}) = M(\tilde{u}) - g \neq 0 \quad \text{en } \Gamma_N \quad (54)$$

La idea básica de los métodos de residuos ponderados es imponer la condición

$$\int_{\Omega} W \cdot R_\Omega(u) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \overline{W} R_\Gamma(u) d\Gamma = 0 \quad (55)$$

para cualquier par de funciones arbitrarias  $W$  y  $\overline{W}$ , que sean integrables y no idénticamente nulas. Se puede demostrar que si esto se cumple entonces

la función  $u$  debe ser la solución exacta de la ecuación diferencial y de sus condiciones de contorno naturales.

A partir de esta idea es posible generar soluciones aproximadas de la forma

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m a_i N_i(x, y), \quad (56)$$

donde las funciones de prueba  $N_i(x, y)$  satisfacen las condiciones esenciales de contorno y las "n" constantes  $a_i$  son coeficientes a determinar imponiendo las n condiciones

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \overline{W}_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (57)$$

donde las funciones  $W_i$  y  $\overline{W}_i$ , son llamadas funciones de ponderación.

Dependiendo del tipo de funciones de ponderación empleadas tenemos diferentes métodos de aproximación:

- a) Método de Colocación por puntos: En este método se impone que el residuo sea nulo en n puntos  $(x_i, y_i)$  del dominio y de la parte del contorno donde se hayan impuesto condiciones naturales de contorno.

$$R_{\Omega}(\tilde{u}, x_i, y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (58)$$

$$R_{\Gamma}(\tilde{u}, x_i, y_i) = 0 \quad i = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (59)$$

Esto es equivalente a adoptar a las funciones de ponderación como las funciones delta de Dirac  $\delta(x - x_i, y - y_i)$  que se definen como:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \delta(x - x_i, y - y_i) d\Omega = f(x_i, y_i) \quad (60)$$

- b) Método de Colocación por subdominios: En este método se impone que el residuo sea nulo en n subregiones  $\Omega_i$  del dominio y  $\Gamma_i$  de la parte del contorno donde se hayan impuesto condiciones naturales de contorno.

$$\int_{\Omega_i} R_{\Omega}(\tilde{u}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\int_{\Gamma_i} R_{\Gamma}(\tilde{u}) = 0 \quad i = p + 1, p + 2, \dots, n$$

En este caso las funciones de ponderación valen 1 en cada subdominio y 0 en el resto.

- c) Método de los cuadrados mínimos: en este método las constantes  $a_i$  se determinan de la

condición de hacer mínimo un funcional I

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

siendo el funcional I definido como

$$I = \int_{\Omega} (R_{\Omega}(\tilde{u}))^2 d\Omega + \int_{\Gamma_N} (R_{\Gamma}(\tilde{u}))^2 d\Gamma$$

En este caso las funciones de ponderación son iguales a sus respectivos residuos.

- d) Método de Galerkin: En este método se adoptan las funciones de ponderación iguales a

las funciones de prueba resultando

$$\int_{\Omega} N_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Nótese que en todas estos métodos las funciones de prueba  $N_i$  deben tener derivadas definidas hasta el máximo orden que aparece en el residuo, esto es, del mismo orden que la ecuación diferencial.

## 23. Funciones de Forma

Describiremos los conceptos de funciones de forma y su continuidad para elementos finitos. Hasta ahora expresamos a las soluciones aproximadas como:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x, y), \quad (61)$$

donde hemos asumido implícitamente que las funciones de prueba  $N_i$  estaban definidas por una expresión simple válida en todo el dominio  $\Omega$ . Esto puede ser posible en el caso de dominios con geometría sencilla como rectángulos, círculos, elipses, pero no en el caso de geometrías más complejas. Una forma alternativa de definir las funciones de prueba consiste en subdividir el dominio  $\Omega$  en una serie de subdominios ó elementos  $\Omega^e$  que no se superpongan, y luego las aproximaciones  $\tilde{u}$  se construyen por trozos usando definiciones simples de las funciones de prueba sobre estos subdominios. Si los subdominios son de forma relativamente simple y la definición de las funciones de prueba sobre estos subdominios puede ser hecha de manera repetitiva, es posible aproximar dominios complejos de forma bastante directa. Esta es la idea básica del método de elementos finitos el cual puede interpretarse como un método de aproximación donde las funciones de prueba se definen en forma local en cada elemento y son llamadas funciones de forma, estas funciones de forma se combinan para dar lugar a una aproximación por trozos. Considere, por ejemplo, un dominio unidimensional, esto es una recta de longitud  $L$ , sobre la cual queremos aproximar una función arbitraria  $u(x)$  mediante una aproximación lineal por trozos. Para ello subdividimos esta recta en  $m$  elementos de recta vinculados por sus extremos. Nótese que hemos asociado los valores de las coordenadas generalizadas  $a_i$  a los valores de la aproximación en los extremos de los elementos. Estos puntos de cada elemento que tienen asociados valores de las coordenadas generalizadas son llamados nodos del elemento.

Si observamos la definición anterior de las funciones de aproximación es evidente que en un nodo  $i$  asociado a la coordenada generalizada  $a_i$  la función de prueba  $N_i$  debe valer 1 y el resto de las funciones de prueba  $N_j$  ( $j \neq i$ ) deben ser nulas en ese punto. Luego, una vez identificados los puntos nodales, es muy sencillo definir las funciones de prueba  $N_i$  ya que deben valer 1 en el punto nodal asociado y 0 en el resto de los puntos nodales.

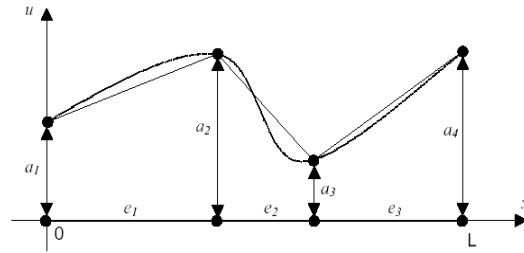


Figura 7:

También puede observarse que las únicas funciones de forma globales que son diferentes de cero en cada elemento son aquellas asociadas con los nodos de ese elemento. Luego, en cada elemento  $e$  con nodos  $i, j$  la aproximación puede ser expresada simplemente en función de dos funciones de forma lineales del elemento,  $N_i^e$  y  $N_j^e$  de los valores nodales  $a_i, a_j$  como

$$\tilde{u}^e = a_i N_i^e - a_j N_j^e$$

La aproximación global se genera a partir de la combinación de las funciones de forma locales en cada elemento. Por otro lado, observemos que si tenemos dos valores nodales por elemento podemos reproducir cualquier variación lineal sobre este elemento. En particular, si tenemos un valor constante de la aproximación  $\tilde{u}$  sobre el elemento  $e$  esto implica que los valores nodales deben ser iguales a este valor, esto es:

$$\tilde{u}^e = c = a_i N_i^e + a_j N_j^e = \tilde{u}^e = c(N_i^e + N_j^e) = cte$$

Luego, sobre cada elemento se debe verificar

$$(N_i^e + N_j^e) = 1$$

Esto es, la suma de las funciones de forma de cada elemento debe ser igual a uno. La extensión de estos conceptos a dos dimensiones es bastante direc-

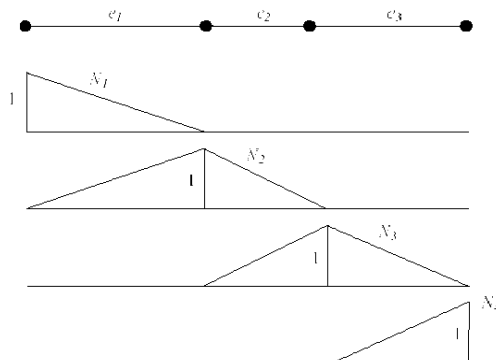


Figura 8:

ta. En este caso, la subdivisión del dominio se efectúa utilizando triángulos ó cuadriláteros.

En este caso los puntos nodales quedan asociados, en general, a los vértices de la malla y para el caso de aproximación lineal sobre cada triángulo las funciones de forma del elemento son planos.

## 24. Aproximación por Elementos Finitos.

El primer paso para obtener una aproximación por elementos finitos es realizar una discretización del dominio. Esto es, debemos generar una malla de elementos finitos que cubra todo el dominio. Además debemos numerar los nodos de la malla, que son aquellos puntos que tienen asociadas coordenadas generalizadas. Para el caso particular de análisis de tensiones las coordenadas generalizadas son los desplazamientos nodales. Así para el nodo  $i$  sus desplazamientos nodales serán  $u_i$  y  $v_i$ .

Consideremos una aproximación por elementos finitos de los desplazamientos  $\vec{U} = (u, v)$ , como:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x, y), \quad v = \sum_{i=1}^n v_i N_i(x, y)$$

donde  $u_i$ ,  $v_i$  son los desplazamientos nodales. Cada función de prueba  $N_i$  se

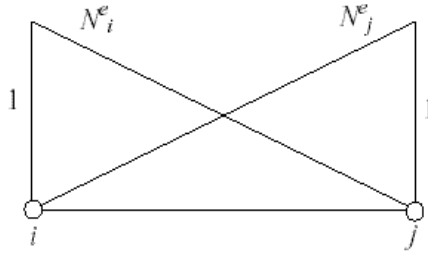


Figura 9:

compone de las funciones de forma asociadas al nodo  $i$  de todos los elementos que contienen ese nodo, esto es

$$N_i(x, y) = \sum_{e=1}^{nel} N_i^e(x, y)$$

donde  $nel$  es el número de elementos de la malla.

## 25. Elemento Finito Triangular.

Consideremos un triángulo de tres nodos. Los desplazamientos de un punto cualquiera del elemento se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales como:

$$\begin{aligned} u^e &= N_1^e u_1^e + N_2^e u_2^e + N_3^e u_3^e \\ v^e &= N_1^e v_1^e + N_2^e v_2^e + N_3^e v_3^e \end{aligned}$$

Los tres nodos del elemento definen una variación lineal del campo de desplazamientos que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} u^e &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v^e &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned}$$



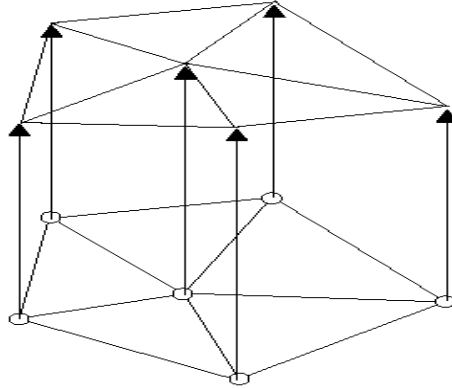


Figura 10:

Estos campos de desplazamientos deben coincidir en los nodos con las correspondientes incógnitas nodales

$$\begin{aligned} u_1^e &= a_1 + a_2x + a_3y \\ u_2^e &= a_1 + a_2x + a_3y \\ u_3^e &= a_1 + a_2x + a_3y \end{aligned}$$

donde  $x_i, y_i$  son las coordenadas del nodo  $i$ . Luego tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas,  $a_1, a_2, a_3$ . Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene la siguiente expresión para  $u$

$$u_1^e = \frac{1}{2A^e} [(a_1 + b_1x + c_1y)u_1^e + (a_2 + b_2x + c_2y)u_2^e + (a_3 + b_3x + c_3y)u_3^e]$$

donde  $A^e$  es el área del elemento definida como

$$A^e = \frac{1}{2} (c_3b_2 - c_2b_3)$$

Discretización del dominio

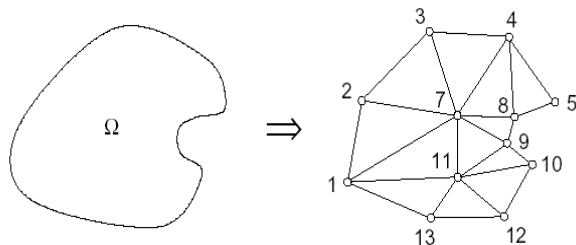


Figura 11:

## 26. Campos de Interpolación para Triángulos.

Los elementos triangulares permiten que se usen polinomios completos para definir las funciones de forma. Los coeficientes polinomiales que intervienen en un polinomio completo vienen dados por el triángulo de Pascal. Así, un polinomio de grado  $p$  debe incluir todos los coeficientes de las primeras  $(p+1)$  filas. El número  $n$  de términos de un polinomio completo de grado  $p$  es  $n = (p+1)(p+2)/2$ .

Una forma de generar funciones de forma consiste en utilizar un polinomio completo en coordenadas de área cuyas constantes deben ser determinadas. Así, por ejemplo, para un polinomio completo de segundo grado las funciones de forma serían

$$N_i(\xi_1, \xi_2) = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1\xi_2 + a_4\xi_1^2 + a_5\xi_2^2$$

Luego se definen tanto puntos nodales como constantes para determinar y se impone la condición de que cada función de forma valga uno en un nodo y cero en el resto, lo que genera suficientes ecuaciones para hallar las constantes. La ubicación de los puntos nodales no puede ser totalmente arbitraria, ya que en general las funciones de forma deben ser continuas entre elementos. Esto implica que debe ser impuesta la misma variación polinómica

Triángulo de Pascal	Grado del polinomio	Número de términos $n = (p+1)(p+2)/2$
1	0	1
x y	1	3
x <sup>2</sup> xy y <sup>2</sup>	2	6
x <sup>3</sup> x <sup>2</sup> y xy <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	3	10
x <sup>4</sup> x <sup>3</sup> y x <sup>2</sup> y <sup>2</sup> xy <sup>3</sup> y <sup>4</sup>	4	15

Figura 12:

sobre los lados de los elementos. Esto es, sabemos que un polinomio de grado  $p$  en una variable tiene  $p + 1$  coeficientes, luego si sobre el triángulo se define una función de forma polinómica completa de grado  $p$  entonces debemos tener exactamente  $p + 1$  nodos sobre cada lado. En la figura siguiente tenemos los puntos nodales correspondientes a funciones de forma polinómicas completas de primer, segundo y tercer grado.

Soluciones Numéricas a la Ecuación de N-S para una Lámina Termocapilar

## 27. Planteamiento del Problema en MatLab

La acción que minimiza el pdeTool de Matlab [18] para el caso parabólico, vectorial, cuasi-lineal, no homogéneo viene dado por :

$$I_{matlab} = \int dt \int da_{gral}^3$$

donde la densidad lagrangiana

$$a_{gral} = \frac{1}{2}d * (\pi \cdot \partial_t U) + \frac{1}{2} \left( c * \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U \right) - \frac{1}{2}a * U^2 + f \cdot U + \lambda \cdot (\pi - \partial_t U)$$

donde " $U = (u, v)$ " es el vector velocidad del flujo en dos dimensiones y donde:

Elemento triangular

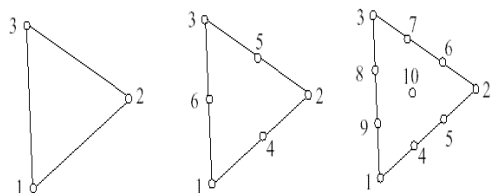


Figura 13:

$$\begin{aligned}
 c &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
 d &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \\
 a &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 f &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $c_{ij}$  y  $f_i$  pueden ser funciones lineales de  $x$ ,  $y$ .

El mallado es generado de forma automática por una subrutina registrada del paquete pdetool. Este programa genera un mallado triangular que puede ser refinado a voluntad del usuario y sus parámetros pueden ser modificados para obtener un mallado regular o irregular de acuerdo a las opciones deseadas.

El Pdetool es un programa que resuelve las ecuaciones diferenciales usando Elementos Finitos, lo que nos lleva a la resolución de  $N$  sistemas de ecuaciones lineales usando funciones de forma tipo Planos. Es decir, las funciones de forma " $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ " vienen determinadas por 3 coeficientes (por elemento) " $A, B, C$ " cuyos valores se determinan resolviendo las condiciones impuestas en cada uno de los 3 nodos por elementos, ya que el dominio

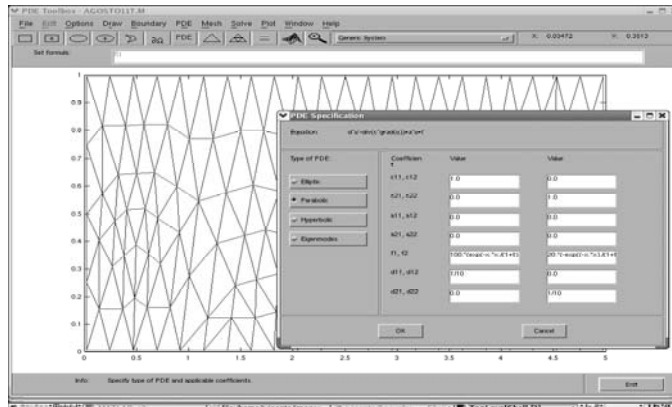


Figura 14:

discretizado mediante Elementos Triangulares, nos permite obtener el valor de cada uno de los coeficientes de cada elemento.

Para la representación gráfica de las soluciones se hizo uso de las opciones gráficas de Pdeplot que nos permiten seleccionar el tipo de gráfico ya sea en 2 o 3 dimensiones mostrando el mallado, sobre el dominio y el valor de la componente deseada de la velocidad ( $u$  la horizontal y  $v$  la vertical).

Estudiamos las soluciones numéricas fundamentalmente para dos casos:

- Caso Dinámico Unidimensional, el estudio teórico se encuentre en la sección (4.1) del capítulo 4.
- Caso Dinámico Bidimensional, su estudio teórico se realizó en la sección (4.2 y 4.3) del capítulo 4.

En el primer caso la ecuación es escalar, por lo tanto se hace uso de la opción *Generic Scalar* de Pdeplot ó (*Generic System*, considerando convenientemente los escalares) se usa en la cual todos los parámetros son escalares

y nuestra función solución es un campo escalar.

$$\begin{aligned}
 c &= c. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 d &= d. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 a &= a. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 f &= [f_1]
 \end{aligned}$$

Usamos la herramienta Pdetool del paquete Matlab para resolver la ecuación de Navier Stokes el caso dinámico en una dimensión, el estudio de esta ecuación fue realizado en la sección (4.1). El PDE Specification es un GUI (Graphic User Interface) o Interface Gráfica con el Usuario nos permite escoger el tipo de ecuación diferencial en derivadas parciales como también seleccionar los coeficientes de dicha ecuación. En nuestro caso la ecuación (38) es de tipo Parabólico donde la velocidad del flujo termocapilar es escrita en término de la ecuación modelo para el GUI como

$$d * u - \text{div}(c * \text{grad}(u)) + a * u = f$$

Esta ecuación modelo que es resuelta por el método de los elementos finitos por el Pdetool admite valores funcionales para los coeficientes, lo que la convierte en una herramienta muy versátil y poderosa para resolver de forma numérica las ecuaciones en derivadas parciales como las que obtenemos para el flujo termocapilar a partir de las ecuaciones de Navier Stokes. En nuestro caso el término no homogéneo debe corresponder al gradiente de temperatura de nuestro modelo por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\partial T}{\partial x} = \left( \frac{-2 \exp\left(\frac{-x^2}{1+0,25*t}\right)}{x} + \frac{\exp(-(x)^2)}{x} \right) \\
 a &= 0 \\
 c &= 1 \\
 d &= 1/100
 \end{aligned}$$

Tomaremos  $x$  y  $t$

0.001 para excluir el punto  $x=0$  ya que conduce a una división por cero que el programa no puede evaluar como límite, sin embargo podemos acercarnos a este punto tanto como permite la precisión numérica del programa..

Para el segundo caso, es decir el caso dinámico en dos dimensiones se tiene que hacer uso de toda la capacidad del Pdetool, para ello se utilizara la opción *Generic System*, en la cual todas las variables tienen el carácter vectorial explicado al comienzo de la sección. Esta opción consume mucho más tiempo de computación y memoria. Los parámetros y coeficientes utilizados se resumen en:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 2 * (-exp(-(x.*x)./(1+t)) + exp(-(x.*x)).*(2*y-1))./x \\ a_{21} &= 2 * (-exp(-(x.*x)./(1+t)) + exp(-(x.*x)).*(3*y-1))./x \\ a_{11} &= a_{22} = 0 \\ f_1 &= (-2 * (-exp(-(x.*x)./(1+t)) + exp(-(x.*x))))./x \\ f_2 &= 0 \end{aligned}$$

Existen diversas condiciones de borde que pueden imponerse en ambos casos. En todos los casos el Dominio escogido fue un rectángulo en el plano (x,y).

El programa pdetool contiene una subrutina con un menú GUI (Interface gráfica con el usuario) la cual nos permite escoger el tipo de condiciones de borde para el problema . En cada uno de los cuatro bordes del dominio, puede escogerse una condición inicial distinta de uno de los tipos:

Neumann: que corresponde a la derivada normal de cada una de las componentes es decir

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial\Omega} = 0, \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\partial\Omega} = 0,$$

y donde la frontera puede estar formada por uno o varios lados del polígono  $\Omega$

Dirichlet: que corresponde al valor de cada una de las componentes en la frontera es decir

$$[u]_{\partial\Omega} = 0, \quad [v]_{\partial\Omega} = 0,$$

y donde la frontera puede estar formada por uno o varios lados del polígono  $\Omega$

Mixtas

$u$  puede ser fijada tipo Dirichlet o Neumann

$v$  puede ser fijada tipo Dirichlet o Neumann

Por ejemplo se puede considerar el siguiente conjunto de condiciones de borde para un flujo bidimensional en la cara rectangular de la figura del cilindro (ver modelo1)

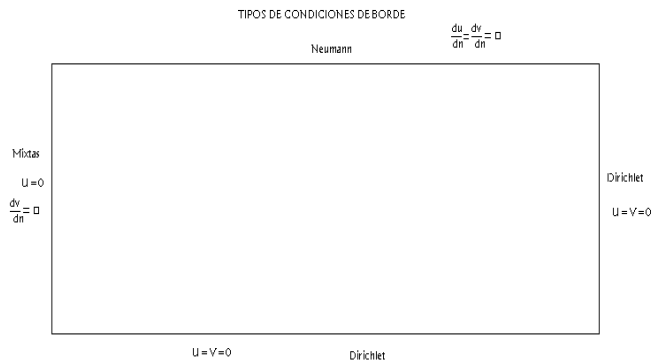


Figura 15: modelo1

En el borde descrito por  $r=0$  colocamos condición de Dirichlet para " $u$ " la componente horizontal de la velocidad (ya que este lado debe corresponder al conjunto de los puntos de retornos de las órbitas) y condición de Neumann para " $v$ " la componente vertical del flujo (es decir el flujo termocapilar puede deslizarse a lo largo de este borde de manera vertical). En el borde superior " $Z = z_s$ " colocaremos condiciones de Borde tipo Neumann tanto para " $u$ " como para " $v$ " de forma tal que el flujo se desliza a largo de la cara superior del fluido. Para el borde o lado inferior " $Z = 0$ " colocaremos condiciones de Dirichlet ya que en la aproximación laminar, la velocidad del fluido en contacto con el fondo (de vidrio) sobre el que se deposita la muestra



debe ser nulo " $u = v = 0$ ". finalmente consideraremos que el lado exterior " $r = a$ " está suficientemente alejado del calentamiento, de forma tal que la velocidad del fluido es nula " $u = v = 0$ " y por lo tanto tipo Dirichlet.

## 28. Resultados Numéricos y Análisis.

### 28.1. Caso Dinámico Unidimensional: condiciones Neumann-Dirichlet

Para este caso consideramos en el borde superior condición de Neumann y para el resto de los bordes Condiciones de Dirichlet

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, z)}{\partial n} &= 0 \\ u(0, z) &= u(10, z) = u(x, 0) = 0\end{aligned}$$

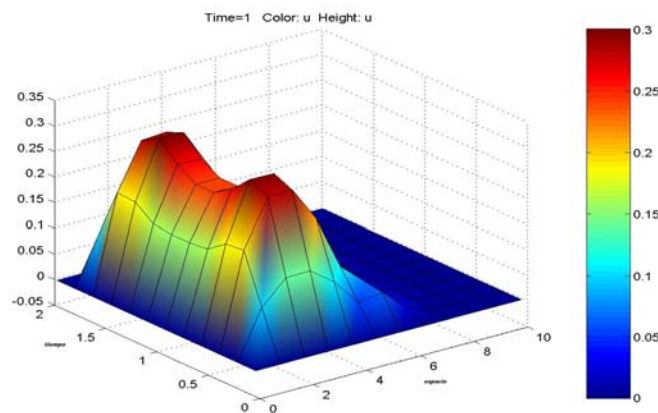


Figura 16:

Análisis: En la figura 16

Dado que las condiciones mixtas dadas al problema para el caso dinámico unidimensional, las cuales nos indican que en los bordes izquierdo, derecho e inferior la velocidad del fluido en dirección horizontal es cero (Dirichlet) es decir el fluido no traspasa el borde y en la parte superior las velocidades son tangenciales (Neumann) al borde dandonos un comportamiento razonable de la velocidad del fluido para variaciones temporales muy pequeñas, como también de tipo local los resultados obtenidos . Indicandonos la gráfica anterior que en la lámina termocapilar sucede un aumento considerable de la

velocidad del fluido en el borde superior de la lámina sufriendo luego una disminución de la velocidad alcanzando un mínimo aproximadamente en la mitad de dicha lámina para luego además de aumentar tender a una solución estacionaria como se espera en estos casos. Lo cual se puede interpretar como un pequeño hundimiento en la lámina.

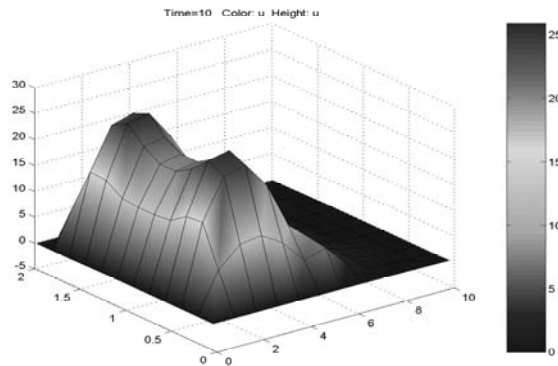


Figura 17: caso unidimensional para  $t=10$

Para la gráfica en la figura 17 se puede interpretar que el fluido se comporta muy similar al caso anterior teniendo que en el centro al comienzo hay un aumento de la velocidad para luego tener una disminución y posteriormente volver a aumentar hasta el valor máximo alcanzado en el principio mientras que en los extremos se mantiene constante.

## 28.2. Caso Unidimensional: condiciones Neumann- Neumann

Para este caso consideramos que en el borde izquierdo se tiene condición de Neumann al igual que el borde superior mientras que en el fondo y en el extremo derecho tenemos condición de Dirichlet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 2)}{\partial n} &= \frac{\partial u(0, z)}{\partial n} = 0 \\ u(10, z) &= u(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

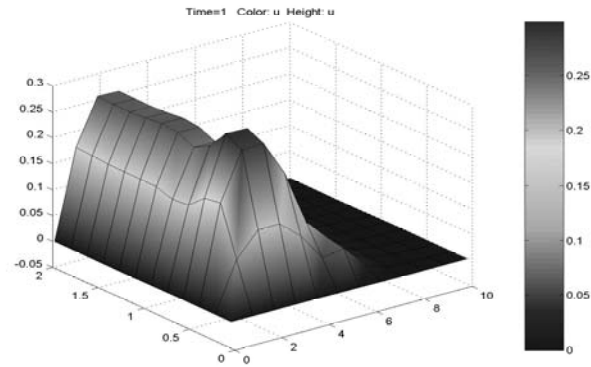


Figura 18: caso unidimensional para  $t=1$

Análisis:

Tenemos en la figura 18, que para este caso en el borde izquierdo la velocidad horizontal del fluido no es cero mientras que en el borde superior dicha velocidad es tangencial al borde (no traspasa el borde) y para los bordes derecho e inferior la velocidad del fluido es cero. Luego se observa que para valores intermedios la velocidad alcanza un máximo, mas en el centro alcanza un mínimo y vuelve a crecer pero no alcanzando el valor obtenido al principio es decir que su máximo es absoluto en este intervalo para luego tender a un valor constante mientras que en los bordes tenemos una tendencia a cero (una solución estacionaria)

Análisis:

Observamos en la figura 19 anterior que la velocidad aumenta en el centro mientras que en los extremos se mantiene constante con la variedad de que en el borde tiende a subir la velocidad pero aún así no supera el valor alcanzado en el centro; podemos interpretar que la montañita formada en el centro corresponde a que las partículas tienen mayor movilidad en esta zona.

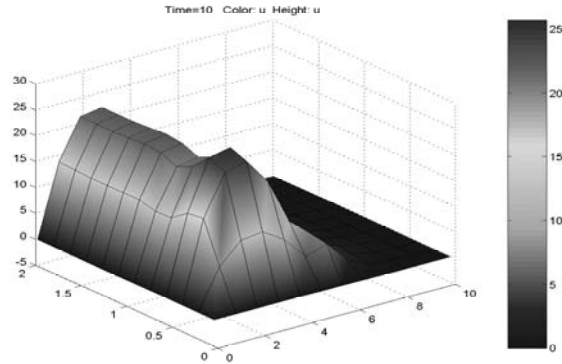


Figura 19:

### 28.3. Caso Bidimensional: Condiciones Mixtas para $u$ y Neumann para $v$

En el borde descrito por  $x=0$  colocamos condición de Dirichlet para " $u$ " la componente horizontal de la velocidad y condición de Neumann para " $v$ " la componente vertical de la velocidad (es decir el flujo termocapilar puede deslizarse a lo largo de este borde de manera vertical). En el borde superior " $Z = z_s$ " colocaremos condiciones de Borde tipo Neumann tanto para " $u$ " como para " $v$ " de forma tal que el flujo se desliza a lo largo de la cara superior del borde. Para el borde o lado inferior " $Z = 0$ " colocaremos condiciones de Dirichlet (es decir que el flujo no desliza en el fondo). Finalmente consideraremos que el lado exterior " $x = L$ " esta suficientemente alejado del calentamiento, de forma tal que la velocidad del fluido es nula " $u = v = 0$ " es decir que es de tipo Dirichlet.

A continuación se presentan los resultados correspondientes al caso bidimensional tanto para la componete horizontal como la vertical, con condiciones de borde mixtas y de Neumann :

$$\begin{aligned}u(0, z) &= 0 \\ \frac{\partial v(0, z)}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial u(x, 2)}{\partial n} &= \frac{\partial v(x, 2)}{\partial n} = 0 \\ u(x, 0) &= v(x, 0) = 0 \\ u(5, z) &= v(5, z) = 0\end{aligned}$$

## Componente horizontal de la velocidad en función del tiempo

$u(t)$

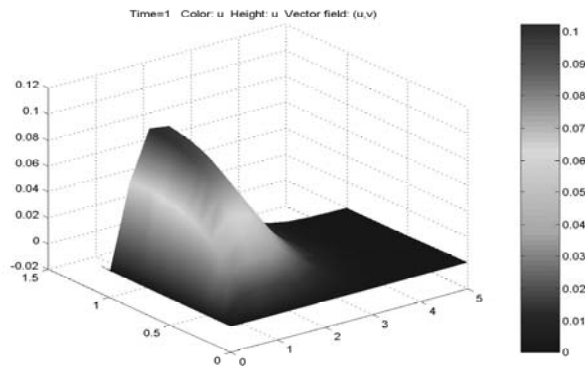


Figura 20:

Análisis:

Figura 20: Se observa un crecimiento rápido aunque con valores pequeños para la velocidad (positiva) en puntos cercanos al borde izquierdo para luego decaer con el mismo comportamiento hacia cero en el borde derecho lo cual se puede interpretar como un movimiento de las partículas del fluido en el centro, mientras que en los bordes correspondientes al fondo y extremo derecho no hay mucho movimiento de las partículas.

Figura 21: En este caso se observa también un aumento de la velocidad en el centro con valores positivos manteniéndose constante en los bordes, para un tiempo de  $t=4$ , además de que la solución según la tabla adicional a la derecha de la gráfica nos indica la aceptación de los resultados .

Figura 22: Se observa que el campo de velocidades indicado por las flechas representan las velocidades verticales las cuales se van haciendo cada vez más horizontales mientras que las velocidades horizontales son mayores en el centro es decir que en esta área las velocidades horizontales dominan a las velocidades verticales ó aportan mayor tendencia de la velocidad del fluido,

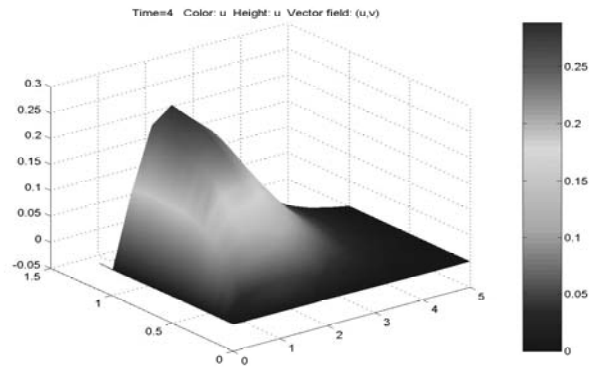


Figura 21:

mientras que en el borde izquierdo la velocidad vertical es mucho mayor que la horizontal dado que las flechas son mas inclinadas lo cual corresponde a la condición de frontera impuesta en este borde y además son resultados satisfactorios.

Figura 23: Para este caso no observamos las flechas o campo vectorial correspondiente a la velocidad vertical, pero tenemos para un tiempo de  $t=10$  el cual es el tiempo tope de nuestro programa, se observa que la velocidad en el centro sigue siendo positiva aunque con una mayor abertura lo cual podría interpretarse como un movimiento de mas partículas.



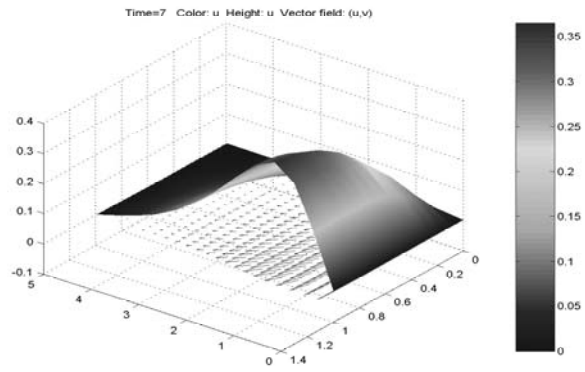


Figura 22:

Componente vertical de la velocidad en función del tiempo  $v(t)$

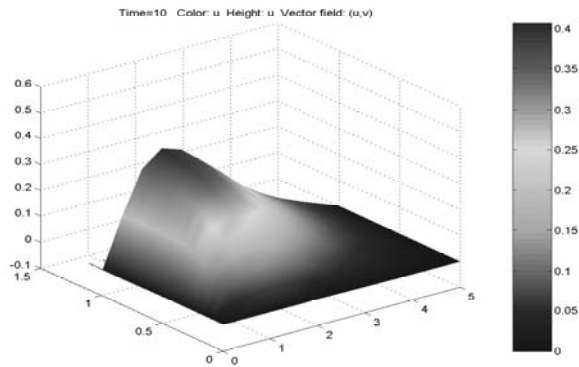


Figura 23:

Análisis:

Figura 24: Tenemos que la velocidad vertical en el borde izquierdo aumenta progresivamente aunque para valores pequeños hasta estabilizarse, mientras que en el borde derecho se mantiene estable. También se observa un campo vectorial donde las flechas en el centro indican una tendencia positiva, además de que apuntan de forma vertical lo podemos interpretar como que; la componente horizontal de la velocidad del fluido en este borde (izquierdo) es mucho mayor que la componente vertical de la velocidad del fluido. Teniendo de nuevo resultados coherentes con lo previsto del fenómeno estudiado.

Figura 25: En este caso se puede ver con mayor claridad el comportamiento de el campo vectorial con respecto a las velocidades horizontales mientras que la velocidades verticales son positivas en el centro y en los bordes referentes al lado inferior y al extremo derecho es cero.

Figura26: En este caso los vectores (flechas) se pueden observar mejor y los valores correspondientes a la velocidad vertical es positiva con valores mas altos y para el tiempo  $t=10$ .

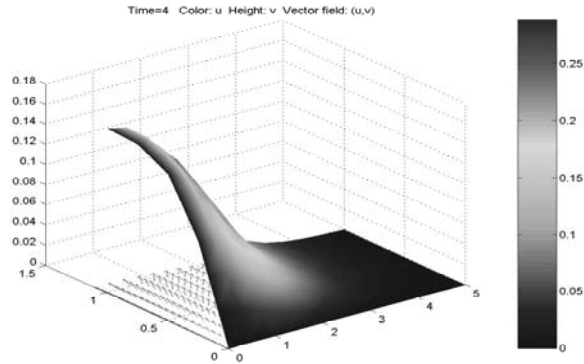


Figura 24:

## 28.4. Segundo Caso Bidimensional: Condiciones mixtas para $u$ y mixtas para $v$

En el borde descrito por  $x=0$  colocamos condición de Dirichlet para  $u$  la componente horizontal de la velocidad y condición de Neumann para  $v$  la componente vertical del flujo. En el borde superior  $Z = z_s$  colocaremos condiciones de Borde tipo Neumann tanto para  $u$  y tipo Dirichlet para  $v$  de forma tal que el flujo se desliza a largo de la cara superior del fluido (pero no traspasa el borde). Para el borde o lado inferior  $Z = 0$  colocaremos condiciones de Dirichlet ya que en la aproximación laminar, queremos que el fluido no deslice. Finalmente consideraremos que el lado exterior  $x = L$  está suficientemente alejado del calentamiento, de forma tal que la velocidad del fluido es nula  $u = v = 0$  y por lo tanto es de tipo Dirichlet.

A continuación se presentan las graficas tanto para  $u$  como para  $v$  para un determinado tiempo con condiciones mixtas, las cuales se pueden interpretar como:

- a Primero que la velocidad vertical en el borde izquierdo es distinta de cero es decir tangencial a la superficie en este borde y que la velocidad horizontal es igual a cero.
- b Segundo que la velocidad horizontal en el borde superior es tangencial a la superficie en este borde y que la velocidad vertical es cero en dicho

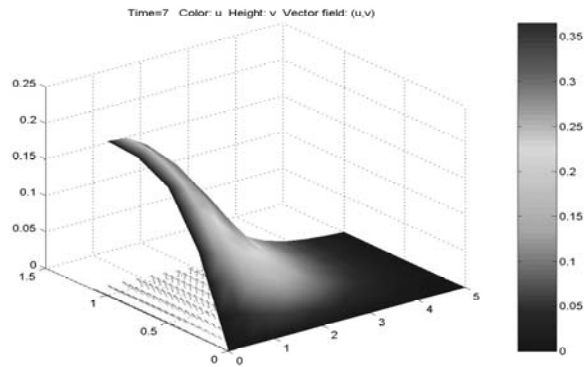


Figura 25:

borde.

Para  $u$  :

- c Tercero que el fluido no desliza en el fondo y que en el extremo derecho el calentamiento no se percibe

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x, 2)}{\partial n} &= 0 \\
 v(x, 2) &= 0 \\
 \frac{\partial v(0, z)}{\partial n} &= 0 \\
 u(0, z) &= 0 \\
 v(x, 2) &= 0 \\
 u(x, 0) &= v(x, 0) = 0 \\
 u(5, z) &= v(5, z) = 0
 \end{aligned}$$

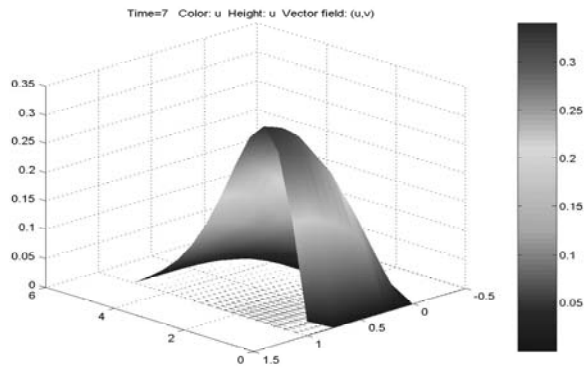


Figura 26:

### Componente horizontal de la velocidad para el segundo caso

Análisis:

Figura 27: En la gráfica ( aunque con dificultad se puede observar que el campo de velocidades en este caso representado por las flechas (velocidades verticales ) son casi horizontales es decir que en esta región el aporte de las velocidades del fluido viene dado por las componentes horizontales de la distribución de velocidades.

Observandose un aumento progresivo a medida que nos desplazamos en la lámina, lo cual lo hace de manera instantánea es decir en una porción de la lámina ó de una pequeña región considerada.

Figura 28: En la gráfica se puede observar que el campo de velocidades en este caso representado por las flechas (velocidades verticales ) son casi horizontales es decir que en esta región el aporte de las velocidades del fluido viene dado por las componentes horizontales de la distribución de velocidades y también podemos pensar que la componente horizontal domina a la componente vertical ya que en otros gráficos anteriores las flechas correspondientes a la componente horizontal apuntaban de forma vertical.

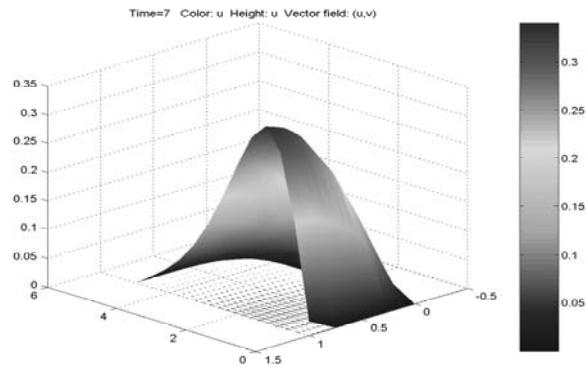


Figura 27:

**Para la componente vertical para el segundo caso:**

Análisis:

Figura 29: En este caso podemos interpretar que la punta que señala valores negativos de la velocidad vertical. Puede interpretarse, que en el borde izquierdo las partículas del fluido se están moviendo en sentido negativo (Hacia abajo) lo cual puede pensarse como un hundimiento en la lámina termocapilar de tipo local. Tenemos un aumento de velocidades verticales aunque, luego una disminución con la excepción del borde izquierdo. Aparte se observa aunque poco visible por cuestiones de espacio para el Scientific Work Place la dirección donde apuntan las flechas las cuales representan el campo de velocidades horizontales ( hay un crecimiento de estas velocidades en el centro) para luego tender a ser estables u horizontal.

Figura 30: En la gráfica ( se puede observar que el campo de velocidades en este caso representado por las flechas ( velocidades verticales ) son casi horizontales es decir que en esta región el aporte de las velocidades del fluido viene dado por las componentes horizontales de la distribución de velocidades como también se observa que los resultados obtenidos según la tabla adjunta son buenos o aceptables en el centro.

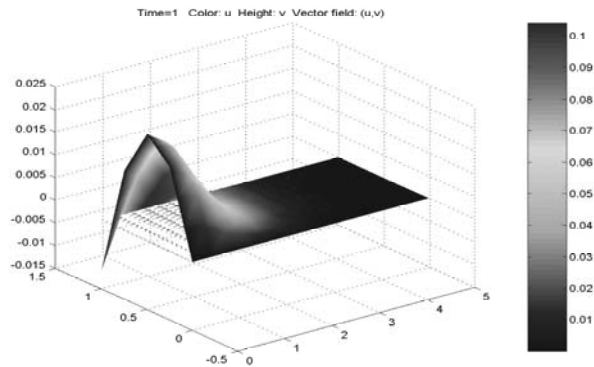


Figura 28:

## 29. Bibliografía

### Referencias

- [1] Simposia.Laseres y Aplicaciones. German Dacosta, Universidad Simón Bolívar. Decanato de Investigaciones
- [2] "Dinámica de una Lámina Líquida Termocapilar sometida a Radiación Láser en Régimen Transitorio ". Rafael Torrealba.Tesis de grado Universidad Simón Bolívar -1985
- [3] "Interferometría en Luz Blanca, Lentes Térmicas y Transformación por Wavelets: aplicaciones Prácticas", Rafael Escalona, Trabajo de Ascenso a la categoría de Profesor titular (julio 2003)
- [4] "Mechanics of Fluids", L.Landau y E. Lifschitz, Addison-Wesley, New York, 1959.
- [5] "Finite Element Analysis". George Buchanen. McGraw-Hill 1995.
- [6] Variational Principles in Dynamics and quantum Theory.Wolfgang Yourgrau, Stanley Maldestam. Dover Publications, Inc, New York

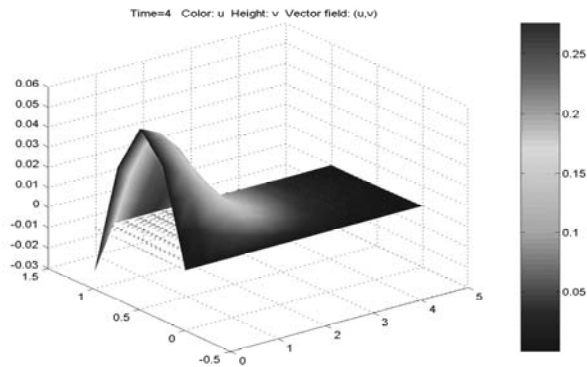


Figura 29:

- [7] Mecánica de Fluidos. Diego Alfonso Sámano.(Ecología y Energía, Mexico), mihirsén (Universidad de Notre Dame, EE.UU), Saralilia Moya (CENIDET, Mexico)
- [8] Transferencia de Calor aplicada a la Ingeniería. James R Welty. Editorial Limusa Mexico 1978
- [9] Classical Mechanics, Herbert Goldstein .Addison-Wesley ,Publishing Company, 1980.
- [10] Fundamentals of Statistical Physics and Thermal Physics. F.Reif. Mc Graw Hill. 1965
- [11] Curso Abreviado de Física Teórica, Mecánica y electrodinámica, L.Landau ,Editorial. MIR, Moscu, 1979.
- [12] "Physicochemical Hydrodynamics", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1962.
- [13] "Tesis de grado", Ruiz Edgar, Universidad Simón Bolívar
- [14] Fenómenos Termocapilares en Petróleos Pesados (Faja del Orinoco) Irradiado con Láser". Simposio del decanato de Investigación - 1980"
- [15] "Láser Handbook". North Holland, Asterdan (1972) pp. 1586-1587.



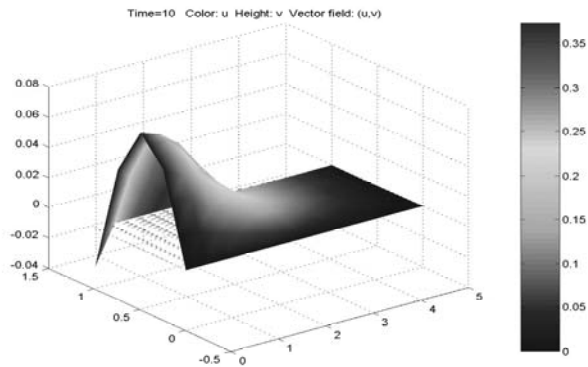


Figura 30:

- [16] On the Hamiltonian description of fluid Mechanics. I. Antoniou , GP.Pronko
- [17] "Física. volumen. II Campos y Ondas ". Fondo educativo Interamericano S.A.
- [18] Partial Differential Equation Toolbox.Mathwork.1995
- [19] Paper : Lagrangian Fluid Mechanics. S Manoff
- [20] Computational Techniques for Fluid Dynamics.C.A.J Fletcher. Springer - Verlag Berlin Heidelberg .New York 2000.

Apendice

## 30. Ecuación de N-S en coordenadas cilíndricas

Componente  $r$ :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] \\ = & -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} U_r \right] \end{aligned}$$

Componente  $\theta$  :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] \\ = & -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} - \frac{U_\theta}{r^2} \right] \end{aligned}$$

Componente  $z$  :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \\ = & -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] - \rho g \end{aligned}$$

### 31. Ecuación de N-S en coordenadas rectangulares:

Componente x:

$$\rho \left[ \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu [\nabla^2 U_1]$$

Componente y:

$$\rho \left[ \frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} + U_3 \frac{\partial U_2}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu [\nabla^2 U_2]$$

Componente z:

$$\rho \left[ \frac{\partial U_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_3}{\partial y} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu [\nabla^2 U_3] - \rho g$$

## 32. Viscosidad:

La resistencia causada por un fluido al movimiento relativo de sus partes se llama viscosidad dinámica o absoluta. Es relación de su esfuerzo cortante a la razón de cambio en la deformación cortante de un fluido. El coeficiente de viscosidad dinámica o absoluta  $\nu$  es la resistencia causada por una lámina del fluido al movimiento paralelo a esa lámina u otra lámina del fluido a una distancia unitaria de ella, con una velocidad relativa unitaria.

Las unidades del SI para la viscosidad dinámica son  $N\text{-s}/m^2$  y  $kg/m\text{-s}$ . La unidad cgs de la viscosidad dinámica es el poise (P) ( $dyn\text{-s}/m^2$  o  $g/cm\text{-s}$ ). La unidad del SI diez veces mayor que la unidad poise. El centipoise (cP) es 1/100 de poise. (Nótese que la viscosidad dinámica del agua a  $20,2^\circ C$  o  $68,4^\circ F$  es un centipoise). Las unidades BES de viscosidad dinámica son  $lbf\text{-s}/ft^2$  y  $slug/ft\text{-s}$ . Nótese que:

$$1slug/ft\text{-s} = 1lbf\text{-s}/ft^2 = 47,9kg/m\text{-s} = 47,9N\text{-s}/m^2$$

$$1P = 100cP = 0,1N\text{-s}/m^2.$$

La viscosidad cinemática  $\mu$  es la viscosidad dinámica dividida entre la densidad de masa  $\rho$

$$\mu = \frac{\nu}{\rho}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del fluido. La unidad en el SI de la viscosidad cinemática es  $m^2/s$ , en tanto que la unidad cgs de la viscosidad cinemática es el stoke (St) ( $cm^2/s$ ) y 1/100 stoke se llama centistoke (cSt). La unidad BES de viscosidad cinemática es  $ft^2/s$ . Al cambiar del stoke al poise, multiplique por la densidad de masa en  $g/cm^3$ . Adviértase que

$$\begin{aligned} 1m^2/s & \text{ (Unidad en el SI de viscosidad cinemática)} \\ & = 10,764 ft^2/s \text{ (Unidad BES de energía cinemática)} \\ 1St & = 100cSt = 0,0001m^2/s \end{aligned}$$

## 33. Diferencias entre el enfoque Lagrangiano y el Euleriano

Pueda que sirva para explicar los enfoques Lagrangiano y Euleriano el siguiente párrafo que, aunque falto de rigor físico-matemático, va al fondo de la cuestión. El comportamiento de las grandes multitudes se asimila bastante al de los fluidos en movimiento. Supongamos que elegimos una cierta región

del espacio en una ciudad, digamos una calle, y estudiamos el flujo de gente en ella.

El enfoque Lagrangiano del problema consistiría en identificar a un cierto individuo, por ejemplo aquel de la camisa amarilla tan resaltante, y seguirlo en su movimiento en la calle. Si podemos cuantificar las interacciones con las demás personas y con la calle misma, podremos escribir leyes matemáticas acerca de ciertas propiedades de interés (velocidad, temperatura, altura, dinero, etc...). Este estudio debería repetirse con todas las personas que pasan por la calle en el tiempo que dure el estudio.

El enfoque Euleriano se fijaría en un punto de la calle, digamos en la salida de esa tasca donde ponen tan buenos pasapalos. Se estudiaría a la persona que en cada instante de tiempo pasa por dicha posición. Si se pudiera relacionar las propiedades que tiene cada persona que ocupa la posición en un instante con la posición misma y el tiempo, se podrían sacar leyes matemáticas sobre las propiedades en esa posición a lo largo del tiempo. Este estudio se hará en todos los puntos de la calle.

En este caso cada uno de los enfoques tiene sus ventajas y sus inconvenientes. todo depende de lo que se desee conocer. Si lo que quiero es conocer la historia del señor de la camisa amarilla utilizaré un enfoque Lagrangiano, en cambio si lo que quiero saber es el dinero que tiene una persona en la entrada de una tasca utilizaré un enfoque Euleriano.

A continuación veremos un poco mas de rigor Físico-matemático de dichos enfoques:

## 34. Relación entre la Descripción Lagrangeana y Euleriana de Dinámica de Fluidos

Supongamos que el fluido está contenido para todo  $t$ , en un conjunto acotado y abierto  $\Omega \subset R^3$  del espacio físico con frontera  $\partial\Omega$ . Asumiremos también que el fluido es un medio continuo de partículas localizadas en puntos de  $\Omega$ .

- Desplazamiento: es una transformación  $g : \Omega \rightarrow \Omega$  tal que :

1.  $g$  es invertible y  $g(\Omega) = \Omega$

2.  $g, g^{-1} \in C^1(\Omega)$

Luego se tiene  $\forall A \subset \Omega, g(A) \subset \Omega$ .

Llamaremos  $S$  al conjunto de todos los desplazamientos en  $\Omega$ , como el mapeo  $I : \Omega \rightarrow \Omega$  donde  $I(x) = x \forall x \in \Omega$ , pertenece a  $S$ , es decir  $S \neq \emptyset$

- Traslación ó flujo es una función de  $t, t_0 \in R \rightarrow \varphi_{t_0,t} \in S$ , tal que  $\forall x \in \Omega$  :

i)  $\varphi_{t_0,t_1}(\varphi_{t_1,t_2}(x)) = \varphi_{t_0,t_2}(x)$

ii)  $\varphi_{t_0,t}(\varphi_{t,t_0}(x)) = \varphi_{t_0,t_0}(x) = x$

- iii)  $\varphi_{t_0,t}$  es continuamente diferenciable en  $t$  y  $t_0$ .

Aquí  $\varphi_{t_0,t}(x)$  denota la posición al tiempo  $t$  de una partícula del fluido que en el tiempo  $t_0$  estaba en  $x$  y además como  $\varphi_{t_0,t} \in S$  garantiza que dos partículas no pueden ocupar la misma posición al mismo tiempo. Si una partícula ocupa la posición  $a$  al tiempo  $t_0$ , al tiempo  $t$  ocupará la posición  $x = \varphi_{t_0,t}(a) = X(a,t)$ . A la variable  $a$  la denominaremos coordenada del espacio inicial. Consideremos un conjunto de partículas que ocupan un volumen  $V_0 \subset \Omega$  al tiempo  $t_0 = 0$ . Definimos

$$V(t) = \{ \varphi_{t_0,t}(x) / x \in V_0 \} \tag{62}$$

Dado que  $\varphi_{t_0,t} \in S$ ,  $\varphi_{t_0,t}(a) = X(a,t)$  es una función en  $C^1(\Omega \times R)$ , invertible en la variable  $a$ . Esta propiedad de invertibilidad nos permitirá relacionar nuestra variable del espacio inicial con la descripción euleriana de movimiento en términos de la distribución de velocidades. Luego tenemos: Dados  $t_0, t \in R$ , existe, para cada partícula del fluido una función  $\varphi_{t_0,t} \in S$

que satisface i), ii) y iii) y que describe el movimiento de dicha partícula. Es decir existe una función de translación faltante. Ahora sabemos que la posición de cada partícula es:

$$x = \varphi_{t_0,t}(a) = X(a,t)$$

Donde  $x_0 = a$  es la posición de la partícula en el tiempo  $t_0$ , por ser invertible la función podemos escribir

$$a = \varphi_{t_0,t}^{-1}(x) = a(x,t)$$

Por lo tanto la velocidad de la partícula es

$$\frac{dX(a,t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\varphi_{t_0,t}(a)] = \frac{dx}{dt} = X^U(a,t)$$

ya que  $\varphi_{t_0,t}(a) \in C^1(\Omega)$  y es continuamente diferenciable en  $t$  y  $t_0$ . Si  $\frac{dx}{dt}$  es una función de  $a$ , por invertibilidad tenemos

$$\frac{dx}{dt} = x^U(X_0(x,t), t) = U(x,t)$$

Es decir, podemos escribir  $\frac{dx}{dt}$  en función de  $x$  y de  $t$ , que es la distribución de velocidades según la descripción euleriana. Sea  $J(t) = \frac{D(X)}{D(X_0)}$  el jacobiano ?? de la transformación  $\varphi_{0,t}$  la relación de Euler establece que

$$\frac{dJ}{dt} = J(t) \cdot \text{div}_x U \quad (63)$$

Esta ecuación nos permite obtener la descripción Euleriana del movimiento a partir de las variables iniciales. Para obtener la descripción Euleriana completa es necesario expresar el par de variables termodinámicas o de estado en función del campo " $x_i(a,t)$ " coordenadas Lagrangianas, sus derivadas y las variables de integración " $a$ " y " $t$ ".

## 35. Teorema del Transporte de Reynolds

Consideremos un conjunto de partículas de un medio continuo que ocupa un volumen acotado  $V_0 \subset \Omega \subset R^3$  al tiempo  $t_0 = 0$ . Entonces, para cualquier función escalar o vectorial  $G(x,t) \in C^1(\Omega \times R^+)$ , se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x,t) dx^3 = \int_{V(t)} \left( \frac{dG}{dt} + G \text{div} U \right) dx^3 \quad (64)$$

Donde  $V(t)$  es el volumen ocupado por dichas partículas al tiempo  $t$  (definido en la ec. (volumen) 62 y  $U(x,t) = \frac{d}{dt} X(X_0(x,t))$ ) es la distribución de velocidades.

Prueba:

La transformación  $x = X(a,t)$  es invertible en  $a$ , por lo tanto podemos hacer un cambio de variable; la posición  $a$  en  $t = 0$  es fija. Así,  $V_0 = V(0) \subset \Omega \subset R^3$  es un conjunto que no depende de  $t$ .

Donde:  $J(t) = \frac{D(X)}{D(X_0)}$  es el jacobiano de la transformación y al hacer el cambio de variable tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, t) dx^3 = \frac{d}{dt} \int_{V(0)} (G(X(x_0, t), t) J) dx_0^3$$

Como  $V(0)$  no depende de  $t$  y es acotado

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, t) dx^3 = \int_{V(0)} \left( \frac{dG}{dt} J + G \frac{dJ}{dt} \right) dx_0^3$$

Por la ecuación dJ (63) tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, t) dx^3 = \int_{V(0)} \left( \frac{dG}{dt} J + G J \operatorname{div} U \right) dx_0^3$$

En general se tiene :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, t) dx^3 = \int_{V(t)} \left( \frac{dG}{dt} + G \operatorname{div} U \right) dx^3.$$

En particular si " $G = \rho(x, t)F(x, t)$ ", donde " $\rho$ " es la densidad y aplicando el teorema del transporte nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho F dx^3 &= \int_{V(t)} \left( \frac{d}{dt} (\rho F) + \rho F \operatorname{div} U \right) dx^3 \\ &= \int_{V(t)} \left( \rho \frac{dF}{dt} + \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} U \right] F \right) dx^3 \end{aligned}$$

Por la ecuación de continuidad, la cual es válida puntualmente y para todo tiempo  $t$ , tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho F dx^3 = \int_{V(t)} \rho \frac{dF}{dt} dx^3$$