Dedicatoria:

Dedico este Trabajo de Grado a JESUCRISTO,
guía espiritual que me ha ayudado a enfrentar
la guerra a la que me llevó la necesidad.

Agradecimientos

- Agradezco a mi madre el hecho de soportarme y aún así, tener fé en mí.
- Al Dr. Rafael Torrealba por enseñarme a descubrir la topología en Dimensiones bajas.
- A la UCLA, por que fue en sus aulas donde me formé y en sus instalaciones luché por la Maestría.
- A mi familia porque con su apoyo y muchas veces su crítica, me inspiraron a superarme y entender que esta pelea apenas comienza.
- A la UPEL, Universidad que me ha enseñado lo que significa ser MAESTRO.
- Al Dr. Jesús Muciño, investigador de la UNAM, que vio en mi un "futuro investigador" y desde México está pendiente de "como andan las cosas".
- Al Sacerdote Angel García, ese "Dios cree en tí" cambió mi vida.
- A Israel Milla, mi primo, quien fue mi primer maestro de matemática.

A todos, Gracias

Resumen

Variedades de Seifert

Cristian Rojas

En este trabajo se presenta la definición de Variedades de Seifert y algunos ejemplos. Haciendo uso de la técnica de cirugía se muestra como clasificar este tipo de 3-variedades, y además se consiguen invariantes topológicos a partir de una clase especial de Variedades de Seifert llamada Mosaicos.

Palabras y frases claves: Variedades de Seifert, invariantes topológicos.

Introducción

El problema de las 3-variedades es principalmente el de su clasificación. En 1917 el matemático alemán Herbert Seifert introdujo un tipo de Variedades Topológicas que hoy llevan su nombre. Estas son 3-variedades fibradas, cuyas fibras con círculos, aunque realmente más que fibraciones son realmente "fibraciones" que en entornos tubulares de las fibras excepcionales no existe la trivialización local.

Estos son importantes de estudiar ya que en estos ambientes topológicos se pueden contar las topologías (cuestión de altísima importancia en Teoría de Membranas); es decir, se puede dar una lista sin repeticiones de todas las Seifert, salvo homeomorfismo.

En el capítulo 1 se hace una revisión de a Topología para 3-variedades, en el capítulo 2 se presenta la definición de Variedad de Seifert en el sentido clásico y ejemplos, en el capítulo 3 se presenta un ejemplo importante de Variedad de Seifert con torsión y sin fibras excepcionales.

En los capítulos 4 y 5 se define la cirugía y se presenta un ejemplo de Variedad de Seifert llamada Variedad de Mosaicos Euclideanos, a ésta se le aplica cirugía y se consiguen algunos invariantes topológicos de esta 3-variedad. El desarrollo de la aplicación de la cirugía a la Variedad de Mosaicos se presenta de forma más detallada que en las referencias originales [5], constituyendo un aporte de este Trabajo de Grado.

Hay muchas limitaciones, vale mencionar solo se aplica la cirugía en el contexto de los mosaicos, además, no resulta trivial el desa-rrollo de este material, ya que no es de fácil acceso y la contribución principal es que el trabajo se ha hecho lo más autocontenido posible, dando un precedente en la UCLA, de estudios en topología en dimensión 3.

Capítulo 1

Elementos básicos de topología

Acá se presentan definiciones y algunos teoremas básicos de topología de variedades en dimensión baja, en particular, dimensión 3, fundamentales para comprender los temas tratados en nuestro trabajo. Este capítulo es una revisión de la topología básica necesaria para comprender el tema de las tres variedades. La definiciones y resultados fueron tomadas de [4], [7], [8] y [9], resaltando entre estas referencias los libros de James Munkres "Topología" y Silvia de Neymet "Introducción a los grupos topológicos"

1.1. Conceptos Básicos:

1) Sea G un grupo multiplicativo con elemento identidad e. Se dice que G actúa o bien opera (por la izquierda) en un conjunto X cuando existe una función $\theta : G \times X \longrightarrow X$, llamada acción de G en X que satisface:

   (A_1) $\theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$

   (A_2) $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$ para todo $h, g \in G$ para todo $x \in X$

En la práctica, $\theta(g,x)$ se escribe simplemente gx; así tenemos

$$ex = x \quad h(gx) = (hg)x$$

Se dice que G actúa por la derecha en X cuando existe una función $(x,g) \mapsto xg$ tal que para toda $x \in X$ y toda $h, g \in G$ $xe = x$ y $(xg)h = x(gh)$.

Cada acción por la derecha, determina una por la izquierda definiendo:

$$g \cdot x = xg^{-1}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} ex &= xe = x \\ h \cdot (g \cdot x) &= (xg^{-1})h^{-1} = x(g^{-1}h^{-1}) \\ &= x(hg)^{-1} = (hg) \cdot x \end{aligned}$$

Nótese que si se define $g * x = xg$, en general no se obtiene una acción por la izquierda a menos que G sea conmutativo.

La acción θ de G en X induce para cada $g \in G$ la transformación

$$\theta_g : X \longrightarrow X \quad , \quad \theta_g(x) = \theta(g,x)$$

que llamaremos transición.

Las propiedades (A_1) y (A_2) implican que θ es biyectiva; en efecto, θe es la función idéntica 1_x y $\theta_{hg} = \theta_h \theta_g$ por consiguiente $(\theta)_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$.

Sea $Biy(X)$ el grupo de las permutaciones de X, es decir, el grupo de todas las funciones biyectivas $X \longrightarrow X$ con la operación composición.

La correspondencia $g \mapsto \theta_g$ define un homeomorfismo:

$$\Theta : G \longrightarrow Biy(X) \quad ; \quad \Theta(g) = \theta_g$$

que llamaremos el homeomorfismo inducido por Θ. Por eso se usa el término de grupos de transformaciones para referirse a la terna (G, x, θ) donde Θ es una acción del grupo G en el conjunto X.

Por otra parte, dados un grupo G, un conjunto no-vacío X y una familia de biyecciones $\{\phi_g : X \longrightarrow X : g \in G\}$ con índices en el grupo, la función $(g, x) \longrightarrow \phi_g(x)$ es una acción de G en X si y sólo si $\phi_e = 1_x$ y $\phi_{hg} = \phi_h \phi_g$ para todo h y g en G.

Emplearemos para un grupo de transformaciones (G, X, Θ) las notaciones y los términos siguientes, para $H \subseteq G, x \in X$ y $A \subseteq X$.

$H < G$ significa: H es un subgrupo de G.
$HA = \{ha : h \in H \quad \text{y} \quad a \in \mathcal{A}\}$

A es un conjunto invariante en X, respecto a la acción dada de G en X si $GA = A$. En general usaremos el término conjunto invariante.

$$G_x = \{gx : g \in G\} \quad \text{la órbita de} \quad x$$

El conjunto de órbitas se denota X/G. La proyección orbital se define como $\Pi : X \to X/G$ donde $\pi(x) = GX \in X/G$.

$G_A = \{g \in G : gA = A\}$ es el estabilizador de A.

$G_x = \{g \in G / gx = x\}$ es el grupo de isotropía de x.

x es un punto fijo o estacionario si $G_x = G$.

X^G es el conjunto de puntos fijos.

Se dice que una acción de G en X es:

- Trivial si $G_x = G$ para todo $x \in X$
- Trivial si $G_x = G = \{e\}$ para todo $x \in X$
- Efectiva $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$
- Transitiva si tiene una sola órbita

2) **Espacio de Órbitas:**

A una acción $\theta : G \times X \longrightarrow X$ de un grupo G en un espacio topológico X se le pedirá que, además de satisfacer (A_1) y (A_2), cumpla la siguiente condición:

$$(A_3) \quad \theta_g : X \longrightarrow X \quad \text{es continua para todo} \quad g \in G$$

La terna (G, X, θ) es ahora un grupo de transformaciones continuas. Sea $Homeo(X)$ el grupo de todos los homeomorfismos de X sobre si mismo. Como cada transición θ_g es en realidad un homeomorfismo, podemos considerar el homeomorfismo inducido por θ como

$$\Theta : G \longrightarrow Homeo(X)$$

Así gE es abierto o cerrado, si y solo si E es abierto o cerrado respectivamente.

Si la acción θ es efectiva, θ es inyectiva por lo que G es isomorfo a un grupo de homeomorfismos de X.
El espacio de órbitas o espacio orbital de un espacio X en donde actúa G es el conjunto de órbitas X/G provisto de la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi : X \longrightarrow X/G$

- ♦ Una función sobreyectiva, continua y abierta o cerrada es una identificación o función cociente si Y tiene la topología cociente respecto a p, a saber: U es un abierto de Y si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X. En tal caso p es continua y un conjunto C de Y es cerrado si y sólo si $p^{-1}(C)$ es cerrado en X.

- ♦ Toda función sobreyectiva, continua y abierta o cerrada es una identificación, pero no toda identificación es abierta o cerrada.

- ♦ La composición de identificaciones es una identificación, sin embargo el producto de dos identificaciones no es en general una identificación.

1.2. Propiedad universal del cociente:

Una función continua y sobreyectiva $p : X \longrightarrow Y$ es una identificación cuando satisface una función $f : Y \longrightarrow Z$ en un espacio Z es continua si y solo si la composición $fp : X \longrightarrow Z$ es continua.
En términos de diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "fp"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Un dominio fundamental respecto a la acción G en un espacio X, como un conjunto $D \subseteq X$ tal que $\pi/D : D \longrightarrow X/G$ es biyectiva.

Ejemplo 1 *: La acción de* $\mathbb{Z}_2$ *en la n-esfera unitaria*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

generada por la función antípoda $x \longrightarrow -x$ *es libre. El espacio de órbitas* $S^n/\mathbb{Z}_2$ *es el n-espacio proyectivo real* $\mathbb{P}^n$*, esto es, resulta de identificar en* S^n *los puntos diametralmente opuestos. En particular, para* $n = 1$*, considerando* S^1 *en el plano complejo* $\mathbb{C}$*, la función antípoda* $z \longrightarrow z$ *es ahora la rotación de* 180^0 *alrededor del origen y como ilustra la figura.*

Fig. 1.1

Ejemplo 2 *: Se consideran dos números complejos* w_1, w_2 *linealmente independientes sobre los reales. Se toma el grupo*

$$\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{nw_1 + mw_2/n, m \in \mathbb{Z}\}$$

bajo la operación de adición. Se define una relación de equivalencia en los números complejos: dos números z_1, z_2 *son equivalentes si y sólo si*

$$z_1 - z_2 = nw_1 + mw_2$$

para alguna pareja de enteros n, m.

Los clases de equivalencia se denotan como [ ]. El espacio cociente

$$\mathbb{C}/\Lambda = \{[z]\}$$

provisto de la topología cociente es lo que se conoce como un toro complejo.

Definición 1 *:*

i) *Un espacio topológico M, no-vacío es un espacio localmente euclidiano si para cada punto $p \in M$ existe una variedad abierta U de p, un entero $n > 0$ y un homeomorfismo $X : U \longrightarrow X(U)$ sobre un subconjunto abierto $X(U)$ de $\mathbb{R}^n$.*

ii) *Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico M no-vacío (no necesariamente conexo) que cumple*

a. *M es Haussdorff*

b. *M es 2do enumerable (la topología de M tiene una base enumerable).*

c. *M es localmente euclidiano de dimensión n en todos sus puntos.*

iii) *Una n-variedad topológica con borde es un espacio M^n métrico y separable en el que cada punto x tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq 0\}$.*

Definición 2 *:* *Un espacio fibrado consta de variedades topológicas E, B, F y de una función continua $\pi : E \longrightarrow B$. Además de eso posee una estructura de producto local definida por el cubrimiento $(u_i)_{i \in J}$ de B y por homeomorfismo $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F, i \in J$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "p"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

esto es $\pi = P_0\varphi_i$ donde p es proyección sobre el primer factor.

En particular π es una submersión sobre B y E es localmente homeomorfo al producto de un abierto en B por F.

El espacio E es llamado el espacio total, B, la base y F la fibra del fibrado. La aplicación π es llamada la proyección. Si $x \in B$ la subvariedad $F_x = \pi' F$ y es llamada la fibra de E sobre x.

En general, los fibrados son denotados por (E, π, B, F).

Definición 3 *: Si X, Y, son espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : A \longrightarrow Y$ es continua, el espacio de adjunción que resulta de pegar X a Y por medio de f es el espacio cociente $Y \cup_f X := (X \cup Y)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim y \rightarrow x \in A$ y $f(x) = y$.*

1.3. Homotopía

Definición 4 *: Si f y f' son funciones continuas del espacio X en el espacio Y, diremos que f es homotópica a f' si existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow Y$, tal que*

$$F(x,0) = f(x) \qquad \textit{para cada} \quad x \in X$$
$$F(x,1) = f'(x)$$

Aquí $I = [0,1]$. La función F es llamada una homotopía entre f y f'. Si f es homotópica a f', lo denotaremos por $f \simeq f'$.

Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, decimos que f es homotópicamente nula.

Podemos pensar una homotopía como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de x en y.

Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe una "deformación" continua de la aplicación f en la aplicación f' cuando t se mueve de 0 a 1.

Consideremos ahora el caso especial en el cual f es un camino en X.

Un camino en X desde x_0 a x_1, es una aplicación continua, tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$.

Definición 5 *: Dos caminos f y f' que aplican el intervalo I en X, se dice que son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1,y si existe una aplicación continua $F : I \times I \longrightarrow X$, tal que*

$$F(s,0) = F(s) \qquad y \qquad F(s,1) = f'(s)$$
$$F(0,t) = x_0 \qquad\qquad F(1,t) = x_1$$

Para todo $s,t \in I$. F recibe el nombre de homotopía de caminos entre f Y f'.

Definición 6 : *Si f es un camino en X de x_0 a x_1, y g es un camino en X de x_1, a x_2 definimos el producto de $f * g$ como el camino h, dado por las ecuaciones*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \textit{para} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \textit{para} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua por el lema del pegamento, es un camino en X de x_0 a x_2.

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación

$$[f]_*[g] = [f_*g]$$

para comprobar esta afirmación, sea F una homotopía de caminos entre f y f', y sea G una homotopía de caminos entre g y g'.
Definamos :

$$H(S,t) = \begin{cases} F(2S,t) & \text{para} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2S-1,t) & \text{para} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Dado que $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, para todo t, la aplicación H está bien definida; es continua por el lema del pegamento.
H es la homotopía de caminos requerida entre $f * g$ y $f' * g'$.

1.4. El grupo fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$, porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no siempre está definido. Pero si tomamos un punto x_0 de X que nos sirva como "punto base" y nos restringimos a caminos que comienzan y terminan en x_0. Eenconces el conjunto de sus clases de homotopía de caminos es un grupo con la operación $*$. Este será denominado grupo fundamental de X.

Definición 7 *: Sea X un espacio topológico y x_0 en punto de X. Un camino en X que comienza y termina en x_0 se llama lazo basado en x_0. El conjunto de clases de de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en x_0 con la operación $*$, se denomina grupo fundamental de x, relativo al punto base x_0. Se denota por $\pi_1(X, x_o)$.*

Definición 8 *: Sea $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua. Definimos:*

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

La aplicación h_* se denomina homeomorfismo inducido por h, relativo al punto base x_0.

1.5. Espacios de cubrimiento

Definición 9 *: Sea $P : E \longrightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto U de B se dice que está regularmente cubierto por p si la imagen inversa $P^{-1}(U)$ puede escribirse como unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que, para cada α, la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U. La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $P^{-1}(U)$ en rebanadas.*

Definición 10 *: Sea $P : E \longrightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si todo punto b de B tiene un entorno U que está regularmente cubierto por*

P, entonces se dice que P es una aplicación recubridora y E es un espacio recubridor de B.

1.6. Complejo simplicial euclidiano

Una función afin entre espacios vectoriales es una función $f : V \longrightarrow W$ de la forma $f(x) = a(x) + b$ donde a es una función lineal y $b \in W$.

Un subespacio afin de un espacio vectorial es el conjunto cero de alguna función a fin $\{x : a(x) + b = 0\}$. Su dimensión es la dimensión del núcleo de la parte lineal de la función afin.

El caso especial de un subespacio afin de V cuya dimensión es una vez menor que la dimensión de V es llamado el hiperplano afin en V.

Por álgebra lineal se muestra que si $n \geq k$ todo $k + 1-$puntos $v_0, ..., v_k$ en $\mathbb{R}^n$ son contenidos en algún k-dimensional subespacio afin (justamente se escoge una función lineal $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ cuyo núcleo contiene $\{v_1 - v_o, ..., v_k - v_o\}$ y $b = a(v_o)$).

Diremos que $(k + 1)-$puntos están en posición general si ellos no están contenidos en todo $(k - 1)-$dimensional espacio afin, o equivalemente, si $\{v_1 - v_0, ..., v_k - v_0\}$ son linealmente independientes.

Dados puntos $v_0, ..., v_k$ en posición general en $\mathbb{R}^n$, el simplex, generado por $\{\nu_0, ..., \nu_k\}$ es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$, de la forma

$$\sum_{i=0}^{k} t_i v_i \quad \text{donde} \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=o}^{k} t_i = 1$$

con la topología de subespacio.

Cada uno de los puntos v_i es llamado vértice del simplex. Usaremos la notación $< v_0, ..., v_k >$ para denotar el simplex generado por $v_0, ..., v_k$.

El entero k (uno menos que el número de vértices) es llamado dimensión y un simplex k-dimensional simplex es llamado un k-simplex.
Asi, del simplex, un 0-simplex, es un punto.
1-simplex, es un segmento.
2-simplex, es un triángulo.
3-simplex, es un tetraedro.

Definición 11 *(Cara): Sea σ un simplex. Cada simplex generado por un subconjunto no vacío de sus vértices es llamado una cara de τ.*

Definición 12 *: Un complejo simplicial euclidiano es una colección de simplexes en algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, satisfaciendo las siguientes condiciones*

i) Si $\tau \in k$, entonces toda cara de τ está en k.

ii) La intersección de dos simplexes en k es vacía o es una cara de cada uno.

iii) Finitud local: todo punto en un simplex de k tiene una vecindad que intersecta a lo más un número finito de simplexes en k.

Definición 13 *: Una triangulación en un espacio X es un par (k, h) donde k es un complejo simplicial y $h : |k| \longrightarrow x$ es un homeomorfismo y $|k| = U\{\tau : \tau \in k\}$. Este $|k|$ en algunos textos se denomina el esqueleto del complejo simplicial.*

Definición 14 : *Sea G un grupo, si $x, y \in G$ denotamos por $[x, y]$ el elemento $[x, y] = x\ y\ x^{-1}y^{-1}$ de G, que sea denomina conmutador de x e y.*

El subgrupo de G generado por el conjunto de todos los conmutadores de G se denomina subgrupo conmutador de G y se denota por $[G, G]$.

Proposición 1 : *Dado G, el subespacio $[G, G]$ es un subgrupo normal de G y el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano. Si $h : G \longrightarrow H$ es un homeomorfismo de G en un grupo abeliano H, entonces el núcleo de h contiene a $[G, G]$ de modo que h induce un homeomorfismo $k : G/[G, G] \longrightarrow H$.*

Definición 15 : *Si X es un espacio conexo por caminos, sea*

$$H_1(X) = \frac{\pi_1(X, x_o)}{[\pi_1(X, x_o), \pi_1(X, x_o)]}$$

Llamamos a $H_1(X)$ el primer grupo de homología de X.

Capítulo 2

Variedades de Seifert

En este capítulo presentaremos definiciones básicas y algunos ejemplos de variedades de Seifert. Las definiciones corresponden al Paper citado en la referencia [4] y el ejemplo de Espacio Lente fue tomado de [1].

Una 3-variedad la consideramos como un espacio topológico localmente homeomorfo a un objeto tridimensional.

Si tengo una 3-variedad M, puedo obtener una 3-variedad distinta M' al pegarle a M objetos llamados n-asas ($n = 1, 2, 3$), tales n-asas son 3-bolas que se pegan a M por discos en ∂M si $n = 1$; por un anillo en ∂M si $n = 2$ y una 2-esfera en ∂M si $n = 3$.

Para ver como funciona una 1-asa y una 2-asa: lo que obtenemos es una 3-variedad distinta al toro sólido y tal 3-variedad se llama un cubo con asas de género 2 (Ver Fig. 2.1a). Si al toro sólido le pegamos una 2-asa, a través de un anillo en el hueco del toro, obtenemos una 3-bola (Ver Fig. 2.1b)

Fig. 2.1(a) **FIg. 2.1(b)**

Definición 16 ***(3-Variedad):*** *Una 3-variedad cerrada conexa orientada M es $M = V_1 \underset{h}{\cup} V_2$, donde V_1, V_2 son cubos con asas y $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$*

Una k-variedad inmersa en una n-variedad M, es propiamente inmersa si $\mathcal{N} \cap \partial M = \partial \mathcal{N}$.

Si $\mathcal{N}$ es una $(n-1)-$variedad inmersa en la $n-$variedad M, entonces $\mathcal{N}$ divide (dos lados) en M si $\mathcal{N}$ es propiamente inmersa en M y existe una inmersión $h : \mathcal{N} \times I \longrightarrow M$, tal que

$$h(x, \frac{1}{2}) = x \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{N}$$

y

$$h/\partial\mathcal{N} \times I \ \subset \partial M,$$

además $h(N \times I)$ es una vecindad de $\mathcal{N}$ en M.

Una superficie F, propiamente inmersa en la 3-variedad M o inmersa en ∂M, es comprensible en M si cumple las siguientes condiciones

i) Existe un disco D inmerso en M tal que $D \cap F = \partial D$ y ∂D no es contraible en F

ii) F es una 2-esfera y F acota una 3-célula en M. (Una 3-celula es un espacio homeomorfo a $B^3(S^2) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| \leq 1\}$.
En otro caso diremos que F es incomprensible en M

Definición 17 *: Una 3-variedad M se dice que es irreducible si toda 2-esfera inmersa en M, es comprensible en M. Toda irreducible 3-variedad M es suficientemente larga si M contiene una división (dos lados) por superficies incompresible .*

Definición 18 *: Sean (u, v) un par de enteros primos relativos, es decir, $m, c, d(u, v) = 1$. Sea D^2 el disco unitario en $\mathbb{R}^2$ definido en coordenadas polares como*

$$D^2 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1\} \quad ; y \ sea \quad I = [0, 1]$$

Un toro sólido fibrado del tipo (u, v), el cual denotaremos por Tuv es el espacio cociente del cilindro $D^2 \times I$ vía la identificación $((r, \theta), 1) \sim ((r, \theta + 2\pi \frac{v}{u}), 0)$. Luego, el centro del toro viene de la identificación de $\{0\} \times I$ e intersecta el disco meridiano $D^2 \times \{0\}$ una sola vez.

Todas las demás fibras intersectan $D^2 \times \{0\}$ exactamente u-veces. Salvo homeomorfismo que preserva la fibra podemos suponer $u > 0$ y $0 < v < u/2$.

El entero u es llamado el índice. Si $u > 1$, diremos que la fibra central es una fibra excepcional, en otro caso diremos que la fibra central es una fibra regular.

De esto tenemos que $Tuv = \dfrac{D^2 \times I}{\sim}$

Una 3-variedad fibrada de Seifert S es una 3-variedad, la cual es unión disjunta de curvas cerradas simples (fibras), tal que cada fibra tiene una vecindad cerrada, consistente de uniones de fibras, la cual es homeomorfa a un toro sólido fibrado vía un homeomorfismo que preserva la fibra.

Llamaremos a una tal vecindad de una fibra, una vecindad fibrada.

Supongamos que S es una 3-variedad fibrada de Seifert y τ es una fibra de S, si T_1 y T_2 son vecindades fibradas de τ, entonces existe un homeomorfismo que preserva la fibra de T_1 en T_2, el cual es la identidad en τ.

Luego tiene sentido llamar una fibra de τ de la fibración de Seifert S una fibra excepcional si τ tiene una vecindad fibrada, la cual es homeomorfa a un toro sólido fibrado vía un homeomorfismo que preserva la fibra enviando τ a una fibra excepcional. En otro caso diremos que la fibra τ de la fibración de Seifert es una fibra regular.

Nótese que en el caso $u = 1$, todas las fibras son regulares.

Definición 19 *: El espacio cociente de S obtenido por identificar cada fibra a un punto es una 2-variedad, la cual es conexa si S es conexa y disconexa en otro caso. Llamaremos este espacio cociente la variedad orbital de la fibración de Seifert S. Aquí hay una función natural de S a la variedad orbital llamada la función proyección.*

Observaciones :

1) Si S es una variedad fibrada de Seifert, entonces está implícito que S tiene una fibración de Seifert, es decir, S tiene una partición en curvas cerradas simples satisfaciendo las condiciones anteriores.

2) Podemos decir que una variedad fibrada de Seifert es un "espacio fibrado" ya que en entornos tubulares de las fibras, puede no existir la trivialización local

3) Si T es un toro fibrado, entonces T es una variedad fibrada de Seifert y toda fibra de T con la posible excepción de la fibra central es una fibra regular.

4) Si τ es una curva cerrada simple no-contraible en la frontera de un toro sólido T, entonces T tiene una representación como un sólido fibrado con τ como una fibra regular.

5) Si S es una Variedad de Seifert compacta, entonces como las vecindades fibradas dan un cubrimiento de M, por esto hay a lo más un número finito de fibras excepcionales en la fibración de Seifert de S.

6) Por convención, si S es una variedad fibrada de Seifert, entonces S es orientable, sin embargo, la variedad orbital puede o no ser orientable. Se dará un ejemplo (4)

7) Si S es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital B entonces $\partial S \neq \phi$ si y solamente si $\partial B \neq \phi$. Además, si S es compacto (equivalentemente si B es compacto) entonces cada componente de ∂S es un toro fibrado y cada fibra en ∂S es una fibra regular en la fibración de S.

8) Una forma usual de pensar una variedad fibrada de Seifert S es pensar S, obtenido de una S^1-fibración orientable sobre una 2 variedad, removiendo un número finito de fibras regulares y reemplazándola con fibras excepcionales.

Ejemplo 1: Sea B una 2-variedad compacta orientable. Tome $M = B \times S^1$, entonces S es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital B y función proyección $S \longrightarrow B$ en el primer factor.
Luego M es fibrado sobre B y sin fibras excepcionales.

Ejemplo 2: Sea S un S^1-fibrado sobre S^2, (necesariamente S es orientable). Entonces S es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital S^2 función proyección $S \longrightarrow B$ proyección fibrada. Luego S es un fibrado sobre S^2 y sin fibras excepcionales. Una tal S es justamente $S^2 \times S^1$.

Ejemplo 3:[1] El espacio lente $L(p, q)$ es una variedad de Seifert con variedad orbital S^2 y una fibra excepcional de índice $\mu = p^{-1} mod q$.

En este ejemplo se muestra que el índice de la fibra excepcional no es determinado por la variedad. Este ejemplo también puede mostrar que el número de fibras excepcionales no es determinado por la variedad, para $L(p, q)$ es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital S^2 y dos fibras excepcionales.
Veamos como podemos presentarlo geométricamente.
Sean p, q números enteros tales que $m.c.d(p, q) = 1$.
Sea P una región poligonal en el plano con centro de gravedad en el origen y vértices $a_0, a, ..., a_{p-1}$ y sea X la doble pirámide de unir por líneas los p puntos a $b_0 = (0, 0, 1)$ y $b_q = (0, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Identificando los triángulos con vértices $a_i a_{i+1} b_0$ y $a_{i+q} a_{i+q+1} b_q$. Para cada $i = 0, 1, ..., p-1$ en tal forma que

$$a_i \sim a_{i+q}, a_{i+1} \sim a_{i+q+1} \quad \text{y} \quad b_0 \sim b_q.$$

Los subíndices son leídos módulos p.
El espacio resultante es el espacio lente $L(p,q)$.

Fig. 2.2 Doble pirámide con p puntos que dividen el ecuador[1]

Esto ilustra lo complicado de contar topologías en 3 dimensiones.

Ejemplo 4 : El twisted I-fibrado sobre la botella de Klein es una variedad fibrada de Seifert en dos formas distintas. Es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital el disco y dos formas excepcionales cada una de índice dos. Esta también es una variedad fibrada de Seifert con variedad orbital la banda de Moebius y sin fibras excepcionales.

Sean X, Y espacios. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función. Un subconjunto Z de X es saturado con respecto a f si $Z = f^{-1}(f(Z))$.

En particular, si S es un variedad fibrada de Seifert con variedad orbital B y función proyección $P : S \longrightarrow B$, entonces un subconjunto Z de X es

[1] Existen otras formas de describir los Espacios Lentes $L(p,q)$.

saturado si y solo si es unión de fibras de S.

Nótese que si α es un arco expandido en B y C no intersecta un punto excepcional, entonces $p^{-1}(\alpha)$ es un anillo saturado en $S, (p^{-1}\alpha)$ tiene dos lados incomprensibles en S, y si α es una curva cerrada simple en B y α no acota un punto excepcional, entonces $p^{-1}(\alpha)$ es un toro saturado o botella de Klein en $S, (p^{-1}\alpha)$ es un toro si y solo si α tiene dos lados y $p^{-1}(\alpha)$ es incomprensible si toda α no acota un disco $D \subset B$ entonces D contiene al menos dos puntos excepcionales.

En el caso que $p^{-1}(\alpha)$ es una botella de Klein, la fibración de la botella de Klein es por círculos que preservan orientación. Sin embargo hay ejemplos de botellas de Klein saturadas en variedades fibradas de Seifert donde la fibración no es por orientación de curvas que la preservan, de hecho, tales botellas de Klein no son saturadas sobre curvas cerradas simples.

Capítulo 3

Propiedades topológicas de las Variedades de Seifert

Acá se presenta un resumen de las propiedades topológicas de las Variedades de Seifert presentadas por Jaco [4] y se estudia un ejemplo presentado originalmente por Montesinos. [5].

Lema 1 *Un propio embedded anillo, anillo saturado en un toro sólido fibrado T, es incomprensible en T.*

Lema 2 *Sea S una 3-variedad fibrada se Seifert. Toda fibra en una fibración de Seifert S tiene una potencia, la cual es homotópica en S a una fibra regular.*

Prueba *Sea S con una fibración fija de Seifert y supongamos que τ es una fibra. Entonces existe una vecindad fibrada U de τ y un homeomorfismo que preserva la fibra de U a un toro sólido fibrado.*

Lema 3 *Sea S una 3-variedad fibrada se Seifert. Supongamos que cada componente de S tiene frontera no vacia. Si τ es una fibra en alguna fibración* *de Seifert de S, entonces una potencia de τ es homotópica en S a una fibra en ∂S.*

Prueba *Como cada componente de S tiene frontera no vacia, es claro que toda fibra regular en una fibración de Seifert S es homotópica a una fibra en S. La conclusión entonces por Lema 2.*

3.1. Ejemplo de una variedad de Seifert torcida y sin fibras excepcionales.

3.1.1. El espacio tangente.

Sea $X \subset \mathbb{R}^N$ una n-variedad diferenciable. Los n-planos $T_x(x)$ tangentes a X en x se habrán de cortar en general. Se trata de imaginarlos distintos y componer con ellos un nuevo espacio.

El espacio tangente a x es

$$T(X) = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N / v \in T_x(X)\}$$

X se encaja en $T(X)$ como la "sección cero"

$$x \longrightarrow (x, 0)$$

Puede probarse que $T(X)$ no depende del encaje $X \subset \mathbb{R}^N$ y que es una 2n-variedad diferenciable.

Además, la aplicación $T(X) \longrightarrow X$ que pasa (x, v) a x define un fibrado con fibra un espacio vectorial real, de dimensión n, (el fibrado tangente) y

$T(X)$ tiene una orientación natural.

Indicación Si (v_i, φ_i) son cartas para X con V_i sufientemente pequeño, entonces $(V_i \times \mathbb{R}^n, \varphi_i \times Id)$ son cartas para $T(X)$ con cambios de cartas

$$\begin{aligned} \psi_{ij} : V_i \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow V_j \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longrightarrow (\varphi_j \varphi_i^{-1}(x), d(\varphi_j \varphi_i^{-1})_x V) \end{aligned}$$

donde $d(\varphi_j \varphi_i^{-1})_x$ es la diferencial en x.
Asi el jacobiano $d(\psi_{ij})$ tiene un cuadrado como determinante. Nótese que si (V_i, φ_i) y $(\widehat{V}_i, R\varphi_i)$ son cartas en donde R es la reflexión en $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$, entonces se tiene el cambio

$$\begin{aligned} V_i \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \widehat{V}_i \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longrightarrow (Rx, Rv) \end{aligned}$$

R es lineal y asi el jacobiano tiene determinante positivo.
De $T(X)$ se obtienen dos variedades interesantes.

Una es el espacio esférico tangente o espacio de elementos de linea orientados de X $ST(X)$, formado por los pares $(x, v) \in T(X)$ con $||v|| = 1$; el otro es el espacio proyectivo tangente $PT(X)$ obtenido identificando (x, v) con $(x, -v)$ en $T(X) - X$ (Diferencia de conjuntos).

3.1.2. El fibrado normal. Vecindades tubulares.

Análogamente a $T(X)$ podemos definir el fibrado normal $N(X)$ a X en $\mathbb{R}^N$ (que en contraste con $T(X)$ depende del encaje $X \subset \mathbb{R}^N$).

Se define $N(X) = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N / v \perp T_x(X)\}$.

La proyección $(x, v) \longrightarrow x$ define un fibrado con base X y fibra $\mathbb{R}^{N-n}$.

Si $X \subset Y \subset \mathbb{R}^N$ son variedades, el fibrado normal a X en Y es el subfibrado de $T(Y)$ formado de aquellos (x, v) con $x \in X$ y $v \perp T_x(X)$.

Fig. 3.1 Fibrado normal a X en Y

Puede verse que $N(X)$ es una $N-$variedad diferenciable que se encaja en $\mathbb{R}^N$, o en Y, como un entorno tubular de X en $\mathbb{R}^N$ ó Y. El subconjunto $SN(X)$ formado de los (x, v) con $\|v\| = 1$ es una $(N-1)$-variedad diferenciable que es el borde de un entorno tubular cerrado de X. La variedad $SN(X)$ se llamará fibrado esférico normal a X en $\mathbb{R}^N$ ó Y.

Ejemplo 3 $\quad X = S^1 \qquad N = 3$

$$SN(S^1) = S^1 \times S^1$$

Pero no siempre el fibrado esférico normal es un producto.
Veamos sea el producto $X \times X$ y sea $\Delta \subset X \times X$ la diagonal.

i) $SN(\Delta)$ es difomorfo a $ST(X)$

Antes tenemos una proposición y una definición.

Proposición 2 *Dado $p \in M$, existe una vecindad V de p en M, un número $\varepsilon > 0$ y una aplicación $C^{\infty}\gamma : (-2,2) \times U \longrightarrow M$, $U = \{(q,w) \in TM, \quad q \in V, \quad w \in T_qM, \quad |w| < \xi\}$ tal que $t \longrightarrow \Upsilon(t,q,w), \quad t \in (-2,2)$ es la única geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad w, para cada $q \in V$ y cada $w \in t_qM$, con $|w| < \xi$.*

Observación 1 *Por un argumento análogo, podemos tomar la velocidad de una geodésica uniformemente grande en una vecindad de p.*

La proposición anterior nos permite introducir el concepto de aplicación exponencial de la manera siguiente.

Definición 20 *Dado $p \in M$ y $U \subset TM$ un abierto adecuado (proposición). Entonces la aplicación $exp : U \longrightarrow M$, dada por*

$$exp(q,v) = \Upsilon(1,q,v) = \Upsilon\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$
$$(q,v) \in U$$

es llamada la aplicación exponencial en U.

Probemos i) sean los puntos $(x,v) \in T(x)$ con $\|v\| < \xi$ suficientemente pequeño para asegurar la existencia de la aplicación exponencial. A cada tal (x,v) le asociamos un punto $(x, exp(x,v)) \in X \times X$, donde $exp(x,v)$ es $\alpha(1)$ siendo α la geodésica definida por las condiciones iniciales $\alpha(0) = x, \quad \alpha'(0) = v$. Se puede demostrar que $\{(x, exp(x,v)), x \in X, \quad \|v\| < \xi\}$ define una vecindad tubular de Δ en $X \times X$ y asi $SN(\Delta)$ es difeomorfo a $ST(X)$, tomando los pares (x,v) con $\|v\| = \sigma < \epsilon$ y su imagen por el difeomorfismo descrito.

Fig. 3.2 La aplicación exponencial

Por tanto $SN(S^2)$ *en* $S^2 \times S^2$ *es* $ST(S^2) = \mathbb{R}P^3$ *que no es un producto y es una variedad de Seifert sin fibras excepcionales en el caso* $N = 4$ *y* M *una 4-variedad Riemaniana con una métrica* g*.*

Capítulo 4

Invariantes y Cirugía

En este capítulo se harà un recorrido por la aplicación de cirugía y estudiaremos la manera en general de lograr la clasificación de las Variedades de Seifert, es decir, se presentará una notación adecuada para describir la estructura topológica de estas 3-variedades.

Describiremos ahora unos invariantes que determinan la clase de equivalencia de una variedad fibrada de Seifert orientada.

Sea F una fibra excepcional de S, S Variedad de Seifert. Se considera un entorno tubular de F que es un toro macizo fibrado V con la orientación inducida. Sobre ∂V se toma una fibra orientada H y se busca una fibra orientada Q tal que $Q.H = +1$ sobre ∂V y $M = \alpha Q + \beta H, 0 < \beta < \alpha$, donde M es un meridiano de V adecuadamente orientado. Es claro que α es un invariante de la clase del toro macizo fibrado (una fibra general de V es homóloga en V a alpha-veces F). También β es un invariante de la clase de V, pues Q es único (salvo homología) que cumple las condiciones anteriores. Así las fracciones $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}, ..., \dfrac{\alpha_s}{\beta_s}$ son invariante de la clase de $\boldsymbol{S}$ en las que hay s-fibras *excepcionales $F_1, ..., F_s$. Desalojamos ahora de S el interior de los toros macizos fibrados $V_1, ..., V_s$ y volvemos a rellenar con toros macizos de modo que los nuevos meridianos sean $Q_1, ..., Q_s$ se obtiene así una nueva variedad de Seifert.*

4.1. Instrucciones de Cirugía:

$\overset{o}{M}$ *indica interior de* M.

Supongamos que tenemos los siguientes datos

a) *Una 3-variedad M, posiblemente con frontera*

b) *Una unión $L = L_1 \cup ... \cup L_n$ de curvas cerradas simples en el interior $\overset{0}{M}$ de M,*

c) *Vecindades tubulares cerradas disjuntas N_i de L_i en $\overset{0}{M}$*

d) *Una específica curva cerrada simple J_i en ∂N_i.*

Así podemos construir la 3-variedad

$$M^1 = M - (\overset{0}{N}_1 \cup ... \overset{0}{N}_n) \underset{h}{\cup} (N_1 \cup ... \cup N_n)$$

donde h es la unión de homeomorfismo $h_i : \partial N_i \longrightarrow \partial N_i \subset M$, cada la una nueva curva meridiana μ_i de N_i sobre la específica J_i.

Nótese que el tipo de homeomorfismo de M' no depende de la escogencia de h y M'. Está bien definida por condiciones $(a) - (d)$.

Definición 21 *: La 3-variedad M' se dice el resultado de una cirugía de Dehn en M a lo largo de la curva L con instrucciones de cirugía (c) y (d).*

Así, de lo anterior, sea V un toro macizo y H una curva simple sobre ∂V que no es un meridiano. Entonces V se puede fibrar de modo que se convierte en un toro macizo fibrado de fibra H. Su clase de la fibración es única. La variedad de Seifert N no tiene fibras excepcionales, pues el meridiano del nuevo V_i es Q_i que es homólogo a $Q_i + 0H_i$ sobre ∂V_i. Por tanto N es una fibración orientable localmente trivial con base orientable F_g, o no orientable N_k y clase de Euler e. Es claro que el carácter de orientabilidad de la base, su género y e son invariantes de S.

Veamos ahora que estos invariantes determinan la clase construyendo a partir de ellos la variedad S.

Representemos a S por la notación

$$(0, 0, g \big| -e; \quad \alpha_1/\beta_1, ..., \quad \alpha_S/\beta_s)$$

ó

$$(0, n, k \big| -e; \quad \alpha_1/\beta_1, ..., \quad \alpha_s/\beta_S)$$

La razón de $-e$ se verá a continuación.

Observaciones :

i) La base F_g ó N_k que se acaba de obtener para N coincide con el espacio obtenido, colapsando las fibras de la Variedad de Seifert original $\mathcal{S}$.

ii) Una Variedad de Seifert, cuyas fibras son órbitas de una S^1 acción tiene base orientable, ya que si la base tiene una banda de Moebius sobre ésta, la fibración es localmente trivial con sección y por lo tanto trivial.

Dadas los invariantes, construir la variedad,

a) *Construyamos primero* $(0 \circ g|0)$, *el caso* $g = 0$, *es decir,* $S^1 \times S^2$, *lo obtenemos al tomar un nudo trivial en* S^3 *y hacer cirugía cero.*

Fig. 4.1 $S^1 \times S^2$

El disco D^2 *de la figura junto con el que bordea* ℓ, *tras la cirugía es un* S^2.

La variedad $(0 \circ g/0) = S^1 \times F_g$ *se obtiene como sigue*

Fig. 4.2 $S^1 \times F_g$

Las curvas $A_1^+, A_1^-, ..., A_g^+, A^-$ *son fibras de* $S^1 \times S^2$.

Se vacián entornos de A_i^+, A_i^- *y se pegan las fronteras resultantes entre si: meridiano* m_i^+ *con meridiano* m_i^- *y longitud* ℓ_i^+ *con longitud* ℓ_i^-. *Los entornos* A_i^+, A_i^- *vacian de* D^2 *un par de discos, cuyas fronteras identificadas dan una asa.*

Otra representación de $S^1 \times F_g$. *Para* $g = 1$ *tenemos los anillos de Borromeo (nudos).*

Fig. 4.3 Otra representación de $S^1 \times F_g$

Para $g = 1$ ***tenemos los anillos de Borromeo.***

Indicación: *La identificación entre los bordes de los entornos* $N(A_i^+), N(A_i^-)$ *se pueden interpretar como sigue:*

A D^4, *cuyo borde es* S^3, *se le pega* $S^1 \times [0,1] \times D^2$ *de modo que* $S^1 \times \{0,1\} \times D^2$ *se identifica con* $N(A_i^+) \cup N(A_i^-)$. *La frontera resultante es* $S^1 \times F_g$. *Pegamos ahora* $S^1 \times [0,1] \times D^2$ *en dos etapas. En la primera, pegamos* $E_-^1 \times [0,1] \times D^2$.

(E_1^+ = hemisferio norte de S^1) y esto introduce un círculo valorado con un cero. En la segunda pegamos $E^1 \times [0,1] \times D^2$.

Fig. 4.4 Pegado de $S^1 \times [0,1] \times D^2$

b) Construimos ahora $(0\ \ n\ \ k\ \ /\ \ 0)$. Se obtiene esta variedad como sigue:

Fig. 4.5 $(0\ \ n\ \ k\ \ |o)$

Las curvas $B_1, ..., B_k$ son fibras de $S^1 \times S^2$. Se varian entonces $N(B_i)$ de $i = 1, ..., k$ y se autoidentifica $\partial N(B_i)$ como se indica en la figura.

Fig. 4.6 Identificación en $\partial N(B_i)$

Es decir, se representa $\partial N_i(\mathcal{A}_i)$ *como* $S^1 \times S'$ *de modo que* $S^1 \times \{0\}$ *sea un meridiano* m *de* $N_i(\mathcal{A}_i)$ *y* $\{0\} \times S^1$*, sea una longitud* ℓ *de* $\partial N_i(\mathcal{A})$*; homología nula en* $S^3 - \mathcal{A}_i$ *y se define la identificación en* $S^1 \times S'$ *como* $(\alpha, \beta) = (a\alpha, c\beta)$ *donde* $a : S' \longrightarrow S^1$ *es rotación de* 180^0 *y* c *es conjugación en* $S^1 \subset \mathbb{C}$
Así se obtiene $(0\ n\ k\ /\ 0)$

Observación: *No es difícil ver que puede obtenerse también* $(0\ n\ k \mid 0)$ *por la cirugía de la figura.*

Fig. 4.7 $(0\ n\ |o)$

construyamos las variedades:

$$(0\ o, g/b; \quad \alpha_1/\beta_1, ..., \alpha_s/\beta_s) \quad y \quad (0nk)|b; \alpha_1/\beta_1, ..., \alpha_s/\beta_s)$$

Para esto, se toma en el borde de un entorno $(N(F)$ *de una fibra general* F*, la base* Q*,* H *entonces* $Q.H = +1$ *(sobre* $\partial N(F)$*), se tomó, para la definición de la clase de Euler, la curva* Q *con la orientación inducida por* *la superficie perforada y así Q tiene la orientación opuesta. Por eso se elije $b = -e$.*

4.2. Cambio de orientación y normalización

Sea $(0_{0g}^{nk}|b; \quad \alpha_1/\beta_1, ..., \alpha_s/\beta_s)$ con $\alpha_i \neq 0$ y donde no necesariamente se cumple $0 < \beta_i < \alpha_i$.
Al realizar las cirugias de la siguiente figura, usando los valores de la anterior signatura, es claro que se obtiene una variedad M de Seifert. Así, normalizar significa hallar los invariantes de Seifert de M. La siguiente observación geométrica es suficiente para hacerlo.

Fig.4.8 Las Variedades de Seifert $(0\; o\; g|b, \alpha_1/\beta, ..., \alpha_s/\beta)$ ***y*** $(0\; n\; k|b; (\alpha_1/\beta, ..., \alpha_s/\beta)$

La variedades de Seifert

$$(0\;\; o, g/b; \quad \alpha_1/\beta_1, ..., \alpha_s/\beta_s)$$

y

$$(0\, n\, k)/b; \alpha_1/\beta_1, ..., \alpha_s/\beta_s)$$

Observación : *Sean dos curvas en un toro macizo V, paralelas con instrucciones de cirugía $1/b$, y α/β. Sin cambiar el meridiano del toro macizo resultante, pueden modificarse las instrucciones de cirugía por*

$$(1/b, \alpha/\beta) \longrightarrow \left(\frac{1}{b} + n, \frac{d}{\beta} - \alpha n\right)$$

Para verlo se toma el anillo A, se corta a lo largo de él y se desplaza un lado $n-$vueltas, después se vuelve a pegar. Así $m_1 + b\ell_1$ se convierte en

$$m_1 + (n+b)\ell_1 \quad y \quad \alpha m_2 + \beta\ell_2 \quad en \quad \alpha m_2 + (\beta - \alpha_n)\ell_2$$

Fig. 4.9 Normalización (n = 2)

Capítulo 5

Las variedades de mosaicos euclídeos

Presentaremos una 3-Variedad esférica que llamaremos variedad de Mosaicos, estudiados en [5], a la cual, a partir de cirugía, se logran conseguir algunos invariantes topológicos.

Las variedades de mosaico euclídeos son de Seifert y vamos a hallar sus invariantes.
Lo haremos para la siguiente variedad de celosias cuadradas. Sea M el conjunto de celosias embolsados de $\mathbb{R}^2$ iguales a la cuadrícula de la siguiente figura de lado 1.

Fig. 5.1. Celosía cuadrada de $\mathbb{R}^2$

Sea (U, ϵ) *un par formado de un disco abierto de* $\mathbb{C}$*, de radio* $< \dfrac{1}{2}$ *provisto de "Retícula Telescópica" y de un ángulo* $0 < \epsilon < \pi/4$.

Definimos $\langle u, \epsilon \rangle$ *como el conjunto de celosias de* M *con un vértice en* U *(y por tanto sólo uno) cuyas rectas varian su dirección con respecto a la mira telescópica en menos de* $|\epsilon|$*, véase la siguiente figura.*

Fig. 5.2. ***La celosía*** d ***es el abierto*** $\langle u, \varepsilon \rangle t$

Afirmación : *Los conjuntos* $\langle u, \epsilon \rangle$ *definen la base de una topología Haussdoff de* M.

Sea $d \in \langle u, \epsilon \rangle \cap \langle V, n \rangle$*, entonces* d *tiene vértices* $p \in U$ *y* $Q \in V$*. Sea* t *la translación de* P *a* Q*. Entonces la figura muestra como es la intersección* $d \in \langle u, \epsilon \rangle \cap \langle V, n \rangle$.

Fig. 5.3 ***(***$\langle U, \varepsilon \rangle$ ***es la base de una topología)***

Si las celosías c y d tienen un vértice común es fácil encontrar abiertos disjuntos. Si no, la distancia entre pares de vértices está acotada inferiormente por un número r mayor que cero. Basta tomar U y V de radio menor que ${}^{r}/_{2}$.

Se tiene para cada $\langle u, \epsilon\rangle$ una biyección ϕ con el abierto $U_X(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ que asigna a cada $c \in \langle u, \epsilon\rangle$ el par (P, α) donde P es el vértice de c que yace en U y α el ángulo $-\epsilon < \alpha < \epsilon$ que las rectas de C forman con la retícula telescópica. Las funciones ϕ definen una estructura de variedad orientada diferenciable de dimensión 3 en M (el cambio de cartas consiste en la traslación t y un giro del ángulo α por un ángulo constante que mide la diferencia entre las retículas de U y V.

Diremos que M es la 3-Variedad de celosias cuadradas. La variedad M no tiene frontera y es compacta. En efecto, una sucesión infinita de celosias tiene infinitos vértices en un cuadrado de lado uno. Así, los vértices tienen un punto de acumulación P en el cuadrado; en consecuencia, también las celosias se acumulan en una celosia con vértice P, ya que las direcciones de su rectas varian en S^1, que es compacto.
Así, M es variedad de Seifert.

La variedad M está orientada: Una carta $\langle u, \epsilon\rangle$ de M se puso en correspondencia biunívora con $ux(-\epsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}u$ tiene la orientación de $\mathbb{R}^2$.

Fig. 5.4 Orientación de $\mathbb{R}^2$

y $(-\epsilon, \epsilon)$ *se orienta de menos a más, los cambios de carta se hicieron utilizando traslaciones y rotaciones de* $\mathbb{R}^2$ *que preservaron orientación.*

La variedad M *admite una* S^1-*acción:*
Se toma un punto $0 \in \mathbb{R}^2$ *y, llamando* $V_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *al giro de* $\mathbb{R}^2$ *de centro* 0 *y ángulo* t*, se define la* S^1*-acción mediante:*

$$\begin{aligned} \varphi_0 : S^1 \times M^3 &\longrightarrow M^3 \\ (t, c) &\longrightarrow \Upsilon_t C \end{aligned}$$

Esta acción es diferenciable y efectiva.

φ_o *y* φ_p *son conjugadas (y por tanto equivalentes) para* $p \in \mathbb{R}^2$.

5.1. Cálculo de fibras excepcionales

Los mosaicos que tienen 0 *como vértice dan una órbita que se cierra al dar* $1/4$ *de vuelta y definen una fibra excepcional con* $\alpha = 4$.

Análogamente, si 0 *es centro de un cuadrado se tiene* $\alpha = 4$*; si* 0 *es centro de arista es* $\alpha = 2$*. Así hay tres fibras excepcionales de multiplicidades* $\alpha = 4, 4, 2,$*. Véase la siguiente figura:*

Fig. 5.5 Fibras excepcionales

En los demás casos, cada órbita es una fibra general.

Para hallar el valor de B para una fibra excepcional F emplearemos la siguiente regla:

a) Hallar un meridiano m de un entorno tubular $N(F)$ y orientarlo de modo que m seguido de la orientación de una órbita $S^1x, x \in m$, de la orientación de $\partial N(F)$

Fig. 5.6 Orientación de m

b) Se enumeran sucesivamente los puntos de $(S^1x) \cap m$ empezando por $x = 0$ siguiendo la orientación de m.

c) El número que sigue a cero sobre S^1x es β.

Fig.5.7 Cálculo de β

Sea F la fibra excepcional generada por un mosaico C que tiene un vértice en 0. Sea $\langle u, \epsilon \rangle$ un entorno de C en M, donde U es un disco centrado en 0 de radio $1/4$ y $\epsilon < \dfrac{\pi}{4}$. Entonces $N(F) = S^1 \langle u, \epsilon \rangle$. Para hallar m, veamos como es la S^1-acción en $\langle u, \epsilon \rangle$. Identificamos $\langle u, \epsilon \rangle$ con $Ux(-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $Ux\{0\}$ corresponde al disco $D^2 \subset \langle u, \epsilon \rangle$ formando los mosaicos paralelos a C con vértices en U.

Observando ahora la figura siguiente, vemos que el valor de $\tau t(-\varepsilon, \varepsilon)$ de la S^1-acción mueve $U \times \{0\}$ haciéndolo girar en t, con centro 0 y subir en t. Así $\langle u, \epsilon \rangle$ está fibrado por la S^1-acción y D^2 es un disco meridiano. Por tanto m está formado de mosaicos paralelos a c con vértices en ∂U.

Fig. 5.8 Acción en $\langle U, \varepsilon \rangle$

Así m se identifica con ∂U. La orientación de $\langle u, \epsilon \rangle = U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ es la u seguida de la de $(-\epsilon, \epsilon)$ y como la S^1-acción en $\langle u, \epsilon \rangle$ respeta la orien-tación de $(-\epsilon, \epsilon)$ vemos que m debe ser orientado como ∂u. Hemos cumplido el objetivo a) de la regla.

Fig. 5.9 **Orientación de m**

Para calcular B, numeramos los mosaicos de $S^1 d \cap m$, siguiendo la rotación de m; del mosaico que sigue a $d = 0$ en $S^1 d$ es 1; luego $\beta = 1$.
El mismo argumento en los casos restantes implica que las fibras excepcionales son $4/1, 4/1, 2/1$.

5.2. Cálculo de la base:

Sea C un cuadrado de lado 1, contenido en $\mathbb{R}^2$ y sea T el subespacio de M, formado de mosaicos paralelos a los lados de C (y que, por tanto, tienen algún vértice en C).
La aplicación $f : C \longrightarrow T$ que a cada $V \in C$ asigna el mosaico Cv de T con vértice e V, es continua y factoriza a través del toro.

Fig. 5.10. **El Toro $C/\mathbb{R}$**

Así T es un toro. Como cualquier mosaico de M tiene en su órbita, otro con lados paralelos a C, vemos que $S^1T = M$. La base de la fibración será T/S^1; pero, como a cada cuarto de vuelta, un mosaico se hace paralelo así mismo, la acción de S^1 en T es exactamente la de su subgrupo $z/4 \subset S^1$.

Un dominio fundamental para la acción de $z/4$ en T es uno de los cuatro cuadrados iguales de la figura.

***Fig. 5.11. Dominio fundamental para la acción** $T/Z_4 \simeq S^2$*

5.3. Cálculo de b

Emplearemos el hecho de que existe un toro $T^2 \subset M$ que corta transversalmente a las órbitas, y el concepto de cubierta ramificada que introducimos ahora.

Sea S una n-variedad triangulada y $L \subset S$ un $(n-2)$ complejo. Cada cubierta de $S - L$ tiene una complexión $\sum$ única llamada la cubierta ramificada asociada. Si B es la pre imagen de L se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma - \beta \arrow[r] \arrow[d, "ab\, p"'] & \Sigma \arrow[d, "p"] \\
S \cdot L \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

donde abp es la cubierta de partida y p la ramificada asociada. Sea $b \in B$ y U un entorno de $P(b)$ en S. Sea V la componente de $P^{-1}(U)$ que contiene a b. Entonces $V - B \longrightarrow U - L$ es una cierta de $\mu-$hojas.

El mínimo U para todo μ es el índice de ramificación en b. Si el índice de ramificación es finito para todo $b \in B$, entonces $\sum$ está triangulada y B es un $(n-2)$ sub-complejo. Si L es una sub-variedad $(n \leq 3)$ entonces $\sum$ es una n-variedad y B una $(n-2)$ subvariedad.

Así $\sum$ queda determinada por $\sum -B$ y está por monodromía.

$$w : \pi_1(S - L) \longrightarrow S_n \quad \textit{(grupo simétrico de n-índices)}$$

de la cubierta abp de n hojas. El subgrupo de $\Pi_1(S-L)$ que estabiliza algún índice es $\Pi_1(\sum -B)$.

Como ejemplo, sea G un grupo finito que actúa como grupo de difeomorfismos sobre una variedad M.
La proyección $p : M \longrightarrow M/G$ es una cubierta ramificada y B es el conjunto de puntos cuyo grupo de isotropía no es la identidad.

En el caso de la variedad de mosaicos cuadrados M^3, sea $G = z_4 \subset S^1$. Entonces z_4 actúa en M^3 como un grupo de difeomorfismo y $M^3 \longrightarrow M^3/\mathbb{Z}_4$ es una cubierta ramificada. Como Z_4 preserva fibras de la fibración de Seifert; sus fibras son cocientes de S^1 por la acción de $\mathbb{Z}_4$.

Vamos a calcular las variantes de $M/\mathbb{Z}_4$.

La base es la misma que la de M, es decir S^2. Pero M/z_4 no tiene fibras *excepcionales. En efecto, veamos como se realiza el cociente en el entorno tubular de una fibra excepcional de M, por ejemplo la $4/1$*

Fig. 5.12 Cociente en el entorno de una fibra excepcional

La fibra en el cociente, tiene un entorno tubular con meridiano $m' = Q' + H'$ en donde Q', H' son imágenes de H y Q. En general, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ produce $\alpha/\beta h$ bajo la acción de $\mathbb{Z}_n \subset S^1$, por tanto $M/\mathbb{Z}_4 =< 0oo/4b;\ 1,1,\ 1/2) =$ pero el toro T se encaja en M y es transversal a las fibras y hemos visto que $T/zg \cong S^2$ se encaja en $\frac{M}{\mathbb{Z}_4}$ y es transversal a las fibras. Entonces $M/\mathbb{Z}_4$ tiene sección, luego $4b + 4 = 0$, por tanto $b = -1$ y $M = \langle / - 1; 4, 4, 2\rangle$.

Nota: *Todo este ejemplo ilustra la aplicación de la cirugía y la forma de conseguir los invariantes de una Variedad de Seifert.*

Bibliografía

[1] M.A. Armstrong, Topología Básica., *GTM. Springer-Verlag*

[2] César Camacho y Alcides Lins Nieto, Teoría Geomérica de Foliaciones.*IMPA, Brasil Editorial Euclides. Río de Janeiro. 1979.*

[3] J. Hempel, 3 Manifolds. *Princeton University. 1976.*

[4] William Jaco, Seifert Fibered spaces in 3-manifolds. *Mememorias de la AMS, -Sept. 1979,Volumen 21 No. 220.*

[5] José María Montesinos Amibilia, Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas. Variedades de Mosaicos.*México 1982.*

[6] Jesús Muciño , Tópicos de Geometría Algebraica., *Sociedad Matemática Mexicana. 2002. Pág. 161-172*

[7] James Munkres , Topología *2da. edición. 2000.Prentice-Hall*

[8] M. Nakahara, Geometría, Topología y Física., *Instituto de Física. 2003.*

[9] Silvia de Neymet U., Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones. *Sociedad Matemática Mexicana. 2005.*

[10] Jorge Sáenz , Variedades Diferenciables. *Departamento de Matemáticas. Decanato de Ciencias y Tecnología, UCLA. 1995.*