Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

# SOBRE LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN POSITIVA PARA UN MODELO DEL TIPO LOTKA-VOLTERRA.

Br. Oswaldo Troncoso R.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Tutor: Msc. Miguel J. Vivas C.
Área de conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.

# DEDICATORIA

Dedico este trabajo y todo el esfuerzo
que el mismo ha significado,
con todo mi Amor
a la memoria del ser que dió luz a mi vida
y que guió mis pasos
con sus sabios consejos y su
Inmenso Amor
A MI MADRE QEPD
MAGALY CONSUELO
(1943-1982)

# AGRADECIMIENTO

Doy Gracias a Dios
por hacerme parte de su creación,
por su compañía y guía diarias,
por su presencia en cada una de las personas
que me han dado sus enseñanzas y apoyo.
Por haber superado con alegría
todos los momentos difíciles,
por todas sus Bendiciones
que diariamente recibo y han hecho posible
culminar con éxito esta carrera,
por todo ello y mucho más
AGRADEZCO A DIOS POR SOBRE TODO

# SOBRE LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN POSITIVA PARA UN MODELO DEL TIPO LOTKA-VOLTERRA

# RESUMEN

En este trabajo, se realiza una exposición detallada, de algunos de los resultados presentados por Antonio Tineo en su artículo científico titulado

"*An Iterative Scheme for the* $N-$*Competing Species Problem*".

Consideraremos el sistema competitivo Lotka-Volterra para n especies,

$$\dot{u}_i = u_i[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j] \,, \qquad 1 \leq i \leq n$$

donde $a_i, b_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones positivas, continuas y T-periódicas, estudiaremos un esquema iterativo desarrollado por Tineo en su artículo, para demostrar que el sistema anterior tiene una solución positiva, es decir que existe un estado de coexistencia.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción.

La ecología se ocupa de las interrelaciones que existen entre los organismos vivos, vegetales o animales, y sus ambientes, y éstos se estudian con la idea de descubrir los principios que regulan estas relaciones. El objeto principal de la Ecología es estudiar la evolución de las poblaciones, su extinción o supervivencia.

Durante los últimos años, se vive una situación dramática en el continente Africano, específicamente en el Lago Victoria, el más grande del mundo, y sus aguas son compartidas por tres países (Tanzania, Uganda y Kenia). Todo comienza en los años 50, se producen unos acontecimientos claves en el proceso de transformación de los ecosistemas del lago. Desde el punto de vista de riqueza piscícola, los científicos han clasificado más de 300 especies endémicas de pescados de la familia de los cíclidos, entre otras, una situación que representa –o representaba- una diversidad excepcional a escala planetaria.

A lo largo de miles de años, los diferentes géneros de especies se especializaron en diferentes nichos ecológicos del lago, de forma que esta diversidad resulta vital para mantener el equilibrio natural y la salud de las aguas de lago. Después de un largo período de debate y oposición, la perca del Nilo fue introducida al lago Victoria, como pez alimenticio.

Cientos de especies de peces cíclidos, originarios de ese lago, han sido devoradas por la perca del nilo. Esto está asociado al aumento espectacular de la biomasa de perca a partir de los años 70 y es el ejemplo más dramático de extinción de especies vertebradas del siglo XX.

A finales de los años 60, estas especies autóctonas suponían un 83 % de la masa y la perca, un 0,5 %. Quince años más tarde, se invirtieron estas cifras .

La destrucción medioambiental del lago Victoria es, tristemente, un buen ejemplo de un estadio adelantado de degradación crónica y permite visualizar hasta qué punto la introducción de especies no-autóctonas y la explotación piscícola intensiva de un medio natural con finalidades exportadoras puede llegar a alterar un ecosistema que durante cientos de años había alimentado de forma equilibrada las poblaciones locales. Esta situación se debe a varios factores, que han afectado gravemente el ecosistema del lago, pero también sus alrededores: deforestación, residuos industriales, agricultura, pero muy especialmente la introducción de la perca del Nilo.

Si bien la pérdida de biodiversidad por sobre-explotación pesquera del lago es en si misma una situación grave por lo que significa la destrucción de un medio natural, no podemos olvidar que la situación actual representa un riesgo elevado de colapso de un sistema de vida y de una fuente de recursos para unos veinticinco millones de personas .

Ya en el siglo XVIII el tema de la población mundial había empezado a preocupar a algunos matemáticos de la época. Entre los precursores podemos citar a Leonhard Euler (1707-1783), autor de los primeros estudios de los censos disponibles para descubrir las tendencias demográficas utilizando modelos matemáticos. Sin embargo, fue a finales del siglo cuando se inició el gran debate sobre la población mundial, con la obra de Thomas R. Malthus (1766-1834) Ensayo sobre el principio de la población (1798), en la que el autor recomendaba por primera vez en la historia la necesidad del control de la natalidad para luchar contra la progresión demográfica que amenazaba la propia supervivencia de la humanidad.

A continuación presentamos como ejemplo, un modelo diferencial de las Poblaciones, que está relacionado con la reproducción o extinción de ésta. Tal como está presentado, este modelo fue descrito por el Dr. Francisco Montes de Oca, (1996), "Dinamica Poblacional de una Especie."II ENEM. U.C.L.A., Barquisimeto-Lara.

Sea $P$ el número de habitantes en el instante de tiempo, $A$ el número de individuos que nacen en la unidad de tiempo, y B el número de individuos que mueren en la unidad de tiempo.

Así podemos afirmar que la velocidad con que varía $P$ en el transcurso del tiempo se da mediante la fórmula:

$$P'(t) = A - B$$

Suponiendo que A y B son proporcionales al número de habitantes, tenemos que:

$$P'(t) = (a - b)P(t)$$

el cual se conoce como MODELO DE MALTHUS. En este modelo $a$ es denominado coeficiente de crecimiento de la población $P$ y $b$ es el coeficiente de mortalidad.

Suponiendo que en el instante $t = t_0$ el tamaño de la población es $P_0$; resolviendo la ecuación diferencial encontramos como solución

$$P(t) = P_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$$

De aquí se deduce que si $a > b$, entonces $P(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y esto quiere decir que la población crece ilimitadamente. Por otra parte si $a < b$, entonces $P(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, la población tiende a desaparecer.

Sin embargo, como el sistema ecológico es cerrado, significa que tanto el alimento de la especie, como su hábitat, a pesar de ser abundantes no son ilimitados, y por ello debe existir un límite para el crecimiento de la especie.

Durante los años 20, el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) y el biólogo americano Alfred J. Lotka (1880-1949) desarrollaron el modelo matemático de la competencia de dos especies con recursos limitados en un medio cerrado, y que se conoce como modelo de Lotka - Volterra.

En este trabajo consideraremos el sistema Lotka-Volterra para n especies

$$\dot{u}_i = u_i[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j] \ , \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.0.1}$$

donde $a_i, b_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones positivas, continuas y T-periódicas.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales (1.0.1), modelan la competencia de n especies en un medio cerrado y con recursos limitados, donde $u_i(t)$ representa el tamaño de la población de la especie i en un tiempo t ; $\dot{u}_i(t)$ representa la velocidad de crecimiento de la población de la especie i en un tiempo t ; $a_i(t)$ es la tasa de crecimiento de la especie i ; $b_{ij}(t)$ con $(i \neq j)$, representa el grado de inhibición de la especie i debido a la presencia de la especie j; y $b_{ij}(t)$ con $(i = j)$, representa el grado de inhibición de la especie i sobre si misma.

Desarrollaremos el esquema iterativo:

$$u_{i0} \equiv 0 \ , \qquad 1 \leq i \leq n;$$

$$\dot{u}_{ik} = u_{ik}[a_i - b_{ii}u_{ik} - \sum_{j \in J_i} b_{ij}u_{j,k-1}] \ , \qquad k = 1, 2, ...$$

para probar la existencia de un estado de coexistencia para (1.0.1).

Esto es, probaremos la existencia de una solución positiva de (1.0.1). Aquí y en adelante, consideraremos el conjunto

$$J_i = \{1, ..., i-1, i+1, ...n\}.$$

Más precisamente, sea $U_i$ la única solución positiva y T-periódica de la ecuación logística

$$\dot{x} = x[a_i(t) - b_{ii}(t)x]$$

Así, tenemos el siguiente teorema:

## Teorema 1.1

Supongamos que

$$\int_0^T [a_i(t) - \sum_{j\in J_i} b_{ij}U_j(t)]dt > 0\ , \qquad 1 \le i \le n \tag{1.0.2}$$

entonces el sistema (1.0.1) tiene una solución T-periódica $u^0$ con

$$u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0), \quad tal \quad que \quad u_i^0 > 0 \quad para \quad todo \quad i.$$

Este teorema, presentado por Tineo en [8] y demostrado por H. Smith en [6], es un corolario de un teorema de existencia, relacionados con sistemas competitivos.

## Teorema 1.2

Supongamos que $b_{ij}/a_i$ son constantes para todo i,j=1,...,n. Sí

$$\sum_{j\in J_i} b_{ij}a_j/b_{jj} < a_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{1.0.3}$$

entonces existen constantes positivas $u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0$ tales que $u_i(t) \longrightarrow u_i^0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, $para$ $i = 1, ..., n$, y para cualquier solución positiva $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de (1.0.1).

La demostración del Teorema 1.2, esta realizada en [4].

En los resultados presentados en este trabajo, incluyendo el Teorema 1.2, para que sean válidos debe suponerse que $b_{ij}$, $a_i$ son funciones continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $\mathbb{R}$.

# Capítulo 2

# Preliminares.

En este Capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados que serán necesarios en el desarrollo del presente trabajo. Tales resultados son obtenidos principalmente de [3],[7],[10].

## Definición 2.1 (Función localmente lipschitz)

Se dice que una función F es localmente Lipschitz respecto a la segunda variable, si para cada $(t_0, x_0)$ *en* $\mathbb{R}^2$, existe una vecindad abierta $N$ de este punto en $\mathbb{R}^2$ y una constante positiva K tal que

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq K|x-y| \quad para \ todo \quad (t,x),(t,y) \ en \ N.$$

## Teorema 2.1

Supongamos que S es un rectángulo definido por:

$$|x - x_0| \leq a, \ \ |y - y_0| \leq b, \ \ (a, b > 0),$$

o bien una franja dada por

$$|x - x_0| \leq a, \ \ |y| < \infty, \ \ (a > 0),$$

y que f es una función de una variable real definida en S, tal que $\partial f/\partial y$ existe, es continua en S, y, además, cumple la siguiente condición:

$$|\partial f/\partial y(x,y)| \leq K, \ \ ((x,y) \in S), \ con \ \ K > 0.$$

Entonces f satisface en S una condición de Lipschitz, cuya constante de Lipschitz es K.
**Demostración:** Ver [3]

## Teorema 2.2 (Existencia y Unicidad)

Si $f(t,x)$ es continua y satisface una condición de Lipschitz en $R = \{(t,x)/t \in [t_0 - a_1, t_0 + a_2], |x - x_0| \leq b\}$ y $M = max|f(t,x)|$, entonces el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

tiene una solución única en el intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ donde $\alpha = min\{a_1, a_2, b/M\}$.
**Demostración:** Ver [3]

## Definición 2.2 (La función de Poincaré)

Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2.0.1}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^k$, sea $u(t,x)$ solución de (2.0.1) determinada por la condición inicial $u(0,x) = x$.

La función de Poincaré $\pi : D_\pi \longrightarrow \mathbb{R}^k$ está definida por $\pi(x) = u(t,x)$ donde
$D_\pi = \{x \in \mathbb{R}^k / u(t,x)$ está definida en [0,T]$\}$.

## Definición 2.3

Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $F$ una familia de funciones. Se dice que $F$ es una familia de funciones equicontinuas $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ para toda función $\varphi \in F$ y todo $x, y \in X$.

## Definición 2.4

Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $F$ una familia de funciones. Se dice que $F$ es una familia de funciones uniformemente acotadas, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, si existe un $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$ para toda función $\varphi \in F$.

## Teorema 2.3 (Arzela)

Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto. Sí $F$ es una familia de funciones equicontinuas $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y uniformemente acotadas, entonces toda sucesión $\{\varphi_n\}$ de elementos de $F$ tiene una subsucesión $\{\varphi_{nk}\}$ uniformemente convergente en X.

**Demostración:** Ver [7]

## Teorema 2.4

Supongamos que $\{{f_n}'(x)\}$ es una sucesión de funciones continuas en $I$ para todo $n \in Z^+$, y supongamos además que $\{f_n\}$ converge en un punto $x_0 \in I$ y que $\{{f_n}'\}$ converge uniformemente en $I$ hacia una función f, entonces

$$f' = \lim_{n\to\infty} {f_n}' \quad y \;\; f' \;\; es \;\; continua \;\; en \;\; I,$$

en otras palabras, se puede intercambiar el límite con la derivada.

**Demostración:** Ver [7]

## Definición 2.5

Un conjunto C se dice que es convexo, si para cada par de puntos de C, el segmento que los une también está en C. Si $x_1$ y $x_2$ están en C, el segmento que los une puede escribirse como

$$(1-t)x_1 + tx_2, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

## Teorema 2.5 (Punto fijo de Brouwer)

Sea C un conjunto cerrado, acotado y convexo en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$. Si $f$ es una función continua y $f : C \longrightarrow C$ , entonces la función f tiene por lo menos un punto fijo en C.

**Demostración:** Ver [10]

# Capítulo 3

# La Ecuación Logística.

En esta sección estudiaremos el siguiente sistema unidimensional

$$\dot{x} = xF(t,x) \tag{3.0.1}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que es T-periódica en la variable t. Para aplicar la teoría conocida para EDO, debemos suponer que F es localmente Lipschitz respecto a la segunda variable.

## Teorema 3.1

Supongamos que:
(a) $F(t,x) > F(t,y) \quad si \quad 0 \leq x \leq y$;
(b) Existe una constante positiva M tal que $F(t,M) \leq 0$ para todo t;
(c) $\int_0^T F(t,0)dt > 0$
entonces, la ecuación (3.0.1) tiene exactamente una solución T-periódica y positiva $U$. De hecho, $U(t) \leq M$.

Más aún, la solución $u$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xF(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 > 0 \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

está definida en $[t_0, \infty)$ y $u(t) - U(t) \longrightarrow 0 \;\; cuando \;\; t \longrightarrow \infty.$

## Demostración:

Sea $u$ la solución del problema de valor inicial (3.0.2), es fácil ver que $u(t) > 0$ para todo t en el $Dom(u)$. En efecto,
supongamos por reducción al absurdo que existe un primer $t_1 > t_0$ tal que $u(t_1)$=0. Como la solución nula $u \equiv 0$ es solución del problema

$$\dot{x} = xF(t,x)$$

$$x(t_1) = 0$$

en un entorno de $t_1$ y por el teorema de existencia y unicidad, la solución $u$ del problema (3.0.2) y la solución nula deben coincidir en este entorno, y esto es una contradicción pues $u(t_0) > 0$ y $t_1$ es el primer elemento tal que $u(t_1)$=0.

Por otra parte podemos afirmar que:

$$u(t) \leq max\{u(t_0), M\} \quad en \quad [t_0, \infty) \cap Dom(u) \qquad (3.0.3)$$

Para demostrar esta afirmación, consideremos 2 casos, los cuales se pueden apreciar en la figura:

*Caso 1:*

Sea $u(t_0) \geq M > 0$ , de esta forma tenemos que $u(t_0) = max\{u(t_0), M\}$
Sea t fijo pero arbitrario, $t \geq t_0$ , por la hipótesis (a) tenemos que

$$F(t, u(t_0)) < F(t, M) \leq 0$$

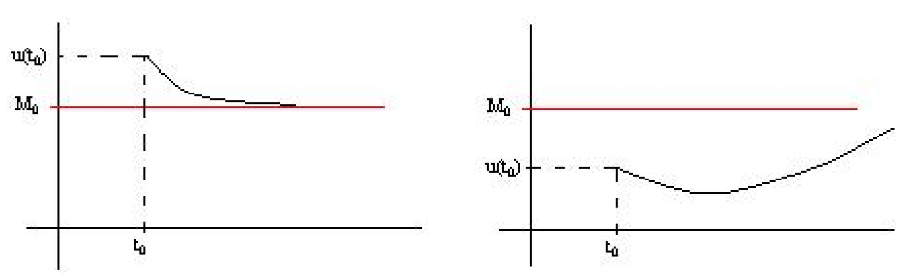


Figura 3.1: Casos 1 y 2

Supongamos ahora que $u(t) > u(t_0)$, luego por (a)

$$F(t, u(t)) < F(t, u(t_0)) < 0$$

y así obtenemos que $\dot{u}(t) < 0$, y esto es una contradicción puesto que $u(t) > u(t_0)$ para $t \geq t_0$. Por lo tanto,

$$u(t) \leq u(t_0) = max\{u(t_0), M\}.$$

*Caso 2:*

Sea $0 < u(t_0) < M$ , así nos queda $M = max\{u(t_0), M\}$. Supongamos por reducción al absurdo que existe un primer $t_1 > t_0$ tal que $u(t_1)$=M. La función constante $u \equiv M$ y la solución $u(t)$ de (3.0.2) con $u(t_1)$=M son soluciones del problema de valor inicial

$$(x - M)' = (x - M)F(t, x - M)$$

$$x(t_1) = M$$

en un entorno de $t_1$ y por el teorema de existencia y unicidad, la solución $u$ del problema (3.0.2) y la solución constante M deben coincidir en este entorno, y esto es una contradicción pues $0 < u(t_0) < M$ y $t_1$ es el primer elemento tal que $u(t_1)$=M.

En consecuencia, no es posible que $u(t) > M$, para algún $t > t_0$, pues de serlo, como $u$ es continua, existiría un $t_1$ con $t_0 < t_1 < t$ tal que $u(t_1) = M$ y llegamos a la misma contradicción.

Por lo tanto hemos demostrado la afirmación (3.0.3).

Así $u$ está acotada en $[t_0, \infty) \cap Dom(u)$, y de aqui $u$ está definida en $[t_0, \infty)$.

Para $x \geq 0$, sea $u(t, x)$ la solución de (3.0.1) tal que $u(t, x) = x$ y definimos la función de Poincaré como sigue:

$$P : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \quad dada \quad por \quad P(x) = u(T, x).$$

Sea $I(x) = \int_0^T F(t,x)dt > 0$, sustituyendo $x = 0$ nos queda por (c)

$$I(0) = \int_0^T F(t,0)dt > 0.$$

La función de Poincaré también es solución de (3.0.1), por lo tanto

$$u(T,x) = u(0,x)e^{\int_0^T F(t,x)dt} = xe^{\int_0^T F(t,x)dt}$$

Y sabemos que $P(x) = u(T,x), \quad P(0) = 0, \quad$ derivando nos queda

$$\dot{P}(x) = e^{\int_0^T F(t,x)dt} \quad y \quad \dot{P}(0) = e^{\int_0^T F(t,0)dt} = e^{I(0)} > 1, \quad pues \quad I(0) > 0.$$

Por (3.0.3) tenemos que $P(M) \leq M$ y de aquí P tiene un punto fijo $z \in (0, M]$ y entonces $U(t) := u(t,z)$ es una solución T.periódica y positiva de (3.0.1).

Sean $V \; y \; W$ dos soluciones positivas y T-periódicas de (3.0.1) y definamos la función $h = (V/W) - 1$. Entonces h es T-periódica y

$$\dot{h} = VW^{-1}[F(t,V) - F(t,W)].$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \dot{h} = (\dot{V}W - \dot{W}V)/W^2 &= (VWF(t,V) - VWF(t,W))/W^2 \\ &= VW^{-1}[F(t,V) - F(t,W)]. \end{aligned} \tag{3.0.4}$$

Si $V \neq W$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $V < W$ y por (3.0.4), tenemos que $\dot{h} > 0$. En particular, h es no periódica y esto es una contradicción, pues h debe ser periódica por la forma como está definida. Equivalentemente, afirmamos que z es el único punto fijo de P en $(0, \infty)$.

Sea $u(t) = u(t, x_0)$ la solución de (3.0.2). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t_0 = 0$. Así tenemos que u(t + T) es también solución de (3.0.1), y $\{u(nT) : n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión monótona y positiva de $\mathbb{R}$. En particular, $u(nT) \to q$, para algún $q \geq 0$.

## Afirmación 3.1

$q > 0$

### Demostración:

Supongamos que $q = 0$, entonces $\{u(nT)\}$ es estrictamente decreciente y $u(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Ahora bien, tomemos un número fijo $\varepsilon > 0$, tal que $\int_0^T F(t, \varepsilon)dt > 0$ y elegimos $t_1 > t_0$ tal que $u(t) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_1$.

Integrando la relación $u'(t)/u(t) = F(t, u(t))$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$ tenemos que:

$$0 > \ln(u(nT + T)/u(nT)) = \int_{nT}^{nT+T} F(t, u(t))dt \geq \int_{nT}^{nT+T} F(t, \varepsilon)dt$$

$= \int_0^T F(t, \varepsilon)dt > 0$ para todos números enteros $n \geq t_1/T$.

Con esta contradicción, queda probada la afirmación.

Por otra parte observemos que

$$P^2(x_0) = P \circ P(x_0) = P(u(T, x_0)) = u(T + T, x_0) = u(2T, x_0)$$

y en forma similar

$$P^n(x_0) = P \circ P^{n-1}(x_0) = P(u(nT - T, x_0)) = u(T + nT - T, x_0) = u(nT, x_0).$$

Veamos ahora que q es un punto fijo de P, en efecto, sabemos que

$$P^n(x_0) = u(nT) \to q.$$

Luego, calculamos $P(q)$, teniendo en cuenta la continuidad de $P$,

$$\begin{aligned} P(q) &= P(\lim_{n\to\infty} u(nT)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(u(nT)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P^{n+1}(q) = q \end{aligned}$$

Así, q es otro punto fijo de P, con lo cual se tiene que q = z por ser z el único punto fijo de P y entonces $u(t) - U(t) \to 0$ *cuando* $t \to 0$. Esto completa la demostración.

## Afirmación 3.2

Sí $F(t, M) \equiv 0$, entonces la función constante $M$, es una solución positiva y T-periódica de (3.0.1), y así, la solución $U$ referida en el teorema 3.1 es la función constante $M$.

### Demostración:

Es evidente que si $M$ es una función constante, y $F(t, M) \equiv 0$, se tiene que $\dot{M} = MF(t, M)$, y por lo tanto $M$ es solución positiva y T-periódica de (3.0.1). Del hecho que $U(t) \leq M$ y de la unicidad de U dada en el teorema 3.1, concluimos que U=M.

## Proposición 3.1

Sean $F, G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas y T-periódicas respecto de la primera variable. Supongamos que (3.0.1) (respectivamente $\dot{x} = xG(t, x)$) tiene una solución positiva y T-periódica $U$ (respectivamente $V$).

Si $F \leq G$ y G es estrictamente decreciente con respecto a x, entonces $U \leq V$.

### Demostración:

Definamos $h = (V/U) - 1$. Entonces, h es T-periódica y

$$h' = VU^{-1}[G(t, V) - F(t, U)] \geq VU^{-1}[G(t, V) - G(t, U)].$$

Supongamos ahora, por reducción al absurdo, que $h(\tau) < 0$ para algún $\tau$. Es decir $V(\tau) < U(\tau)$, y como G es estrictamente decreciente por hipótesis, tenemos que $h'(\tau) > 0$.
Afirmación: $h < 0$ en $(-\infty, \tau)$
Demostración de esta afirmación:

En efecto, en caso contrario debe existir $t_1 < \tau$, tal que $h(t_1) = 0$ por la continuidad de $h$. De aqui se deduce que $U(t_1) = V(t_1)$ y por lo tanto $h'(t_1) \geq 0$ y esto es una contradicción, por el hecho que $h(\tau) < 0$. Así hemos probado que $h < 0$ en $(-\infty, \tau)$.

Luego $V < U$ en este intervalo y por tanto $h' > 0$ en $(-\infty, \tau)$ y esto contradice el hecho que $h$ es T-periódica.

# Capítulo 4

# Esquema Iterativo para el caso 2x2.

En este capìtulo vamos a desarrollar el esquema iterativo para el caso en que n=2, para lo cual tenemos un sistema competitivo 2x2. Esto nos permitirá visualizar el desarrollo del esquema para el caso general nxn. En lo que sigue, consideraremos a,b,c,d,e,f, constantes positivas, pero el razonamiento también vale para el sistema no autónomo en la que estas letras representan funciones positivas, continuas y T-periódicas.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1[a - \;\; bx_1 - cx_2] \\ \dot{x_2} = x_2[d - \;\; ex_1 - fx_2] \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Una solución para (4.0.1) es $U_1 = (u_{11}, u_{12}) = (0, 0)$. Sustituyendo $u_{11}$ en $x_1$ en la segunda ecuación de (4.0.1) y $u_{12}$ en $x_2$ en la primera ecuación de (4.0.1) tenemos un sistema de ecuaciones logísticas de (4.0.1), a saber

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1[a - \;\; bx_1 - cu_{12}] \\ \dot{x_2} = x_2[d - \;\; eu_{11} - fx_2] \end{cases} \tag{4.0.2}$$

Una solución para (4.0.2) es $U_2 = (u_{21}, u_{22})$. De acuerdo a resultados presentados en [1], la solución $U_2$ es positiva en el sentido vectorial, es decir:

$$(0, 0) = U_1 \; < \; U_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_{21} > 0 \quad y \quad u_{22} > 0$$

Sustituyendo $u_{21}$ en $x_1$ y $u_{22}$ en $x_2$ en el sistema (4.0.1) y en forma analóga a la primera sustitución tenemos otro sistema de ecuaciones logísticas de (4.0.1),

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1[a - \;\; bx_1 - cu_{22}] \\ \dot{x_2} = x_2[d - \;\; eu_{21} - fx_2] \end{cases} \tag{4.0.3}$$

Una solución para (4.0.3) es $U_3 = (u_{31}, u_{32})$. Haciendo una comparación de algunos terminos, tenemos que

$$a - bx_1 - cu_{22} \leq a - bx_1 - cu_{12}$$

$$d - eu_{21} - fx_2 \leq d - eu_{11} - fx_2$$

Luego, aplicando la proposición 3.1 tenemos la siguiente desigualdad:

$$(0,0) = U_1 \ < \ U_3 \ \leq \ U_2.$$

Sustituimos ahora $u_{31}$ $y$ $u_{32}$ en forma análoga a la anterior y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1[a - \quad bx_1 - cu_{32}] \\ \dot{x_2} = x_2[d - \ eu_{31} - fx_2] \end{cases} \tag{4.0.4}$$

Una solución para (4.0.4) es $U_4 = (u_{41}, u_{42})$. Comparando nuevamente algunos terminos, tenemos que

$$a - bx_1 - cu_{22} \leq a - bx_1 - cu_{32} \leq a - bx_1 - cu_{12}$$

$$d - eu_{21} - fx_2 \leq d - eu_{31} - fx_2 \leq d - eu_{11} - fx_2$$

Y así tenemos otra desigualdad la cual se va formando en cierto orden tal como se aprecia:

$$(0,0) = U_1 \ < \ U_3 \ \leq \ U_4 \ \leq \ U_2$$

razonando en forma inductiva tenemos dos sucesiones

$$U_{2k} = (u_{2k,1}; u_{2k,2})$$

$$U_{2k+1} = (u_{2k+1,1}; u_{2k+1,2})$$

las cuales son monótonas y acotadas, y por criterio de convergencia de sucesiones, estas resultan ser convergentes puntualmente, es decir

$$\lim_{k\to\infty} U_{2k} = \lim_{k\to\infty} (u_{2k,1}; u_{2k,2}) = (\bar{U}_1, \bar{U}_2)$$

$$\lim_{k\to\infty} U_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (u_{2k+1,1}; u_{2k+1,2}) = (\underline{U}_1, \underline{U}_2)$$

Los términos de las sucesiones antes mencionada, satisfacen el sistema (4.0.1) en el sentido siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{2k,1} &= u_{2k,1}[a - bu_{2k,1} - cu_{2k+1,2}] \\
\dot{u}_{2k,2} &= u_{2k,2}[d - eu_{2k-1,1} - fu_{2k,2}] \\
\dot{u}_{2k+1,1} &= u_{2k+1,1}[a - bu_{2k+1,1} - cu_{2k,2}] \\
\dot{u}_{2k+1,2} &= u_{2k+1,2}[d - eu_{2k,1} - fu_{2k+1,2}]
\end{aligned}$$

tomando límite y aplicando el Teorema de Arzela-Ascoli nos quedan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{U}}_1 &= \bar{U}_1(a - b\bar{U}_1 - c\underline{U}_2) \\
\dot{\bar{U}}_2 &= \bar{U}_2(d - e\underline{U}_1 - f\bar{U}_2) \\
\dot{\underline{U}}_1 &= \underline{U}_1(a - b\underline{U}_1 - c\bar{U}_2) \\
\dot{\underline{U}}_2 &= \underline{U}_2(a - b\bar{U}_1 - c\underline{U}_2)
\end{aligned}$$

Observando estas expresiones, tenemos que los pares $(\bar{U}_1, \underline{U}_2)$ y $(\underline{U}_1, \bar{U}_2))$ son soluciones positivas del sistema (4.0.1).

# Capítulo 5

# Esquema Iterativo para el caso general.

Denotemos por $F_i(t,x)$, $\quad con\ 1 \leq i \leq n$, una función real y continua, definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, la cual es T-periódica en la variable t y localmente Lipschistz respecto a la variable x. Asumimos las siguientes hipótesis:

$$(H1) \quad F_i(t,x) > F_i(t,y) \ \ si\ \ 0 \leq x \leq y, \quad x \neq y, \quad y \quad i = 1, ..., n.$$

Aquí, $x \leq y$ denota el orden usual en $\mathbb{R}^n$.

$$(H2) \quad Existen\ \ constantes\ \ positivas\ \ M_1, M_2, ..., M_n \quad tales\ \ que$$

$F_i(t, 0, .., 0, M_i, 0, .., 0) \leq 0$ para todo t en $\mathbb{R}$ $\quad y \quad i = 1, ..., n$.

Del Teorema 3.1, nosotros sabemos que el problema

$$\dot{x} = xF_i(t, 0, .., 0, x, 0, .., 0), \qquad x(t+T) = x(t), \ \ x > 0$$

tiene exactamente una solución, la cual se denota por $U_i$.

## Teorema 5.1

Supongamos que

$$\int_0^T F_i(t, U_1(t), ...U_{i-1}(t), 0, U_{i+1}(t), ..., U_n(t))dt > 0 \ , \qquad 1 \leq i \leq n; \qquad (5.0.1)$$

Entonces, existen funciones continuas y T-periódicas

$$\bar{u} = (\bar{u_1}, ..., \bar{u_n}) \quad y \quad \underline{u} = (\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

con las siguientes propiedades:

(a) $\bar{u}_i \geq \underline{u}_i > 0, \quad para \quad 1 \leq i \leq n$, y

$$\begin{cases} \bar{u}_i{}' = \bar{u}_i F_i(t, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \underline{u}_{i+1}, ..., \underline{u}_n) \\ \underline{u}_i' = \underline{u}_i F_i(t, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_{i-1}, \underline{u}_i, \bar{u}_{i+1}, ..., \bar{u}_n). \end{cases} \tag{5.0.2}$$

En particular,$(\bar{u}_1, \underline{u}_2)$ y $(\underline{u}_1, \bar{u}_2)$ son soluciones del sistema (1.0.1) si $n = 2$.

(b) $\bar{u} = \underline{u}$ si $\bar{u}_i(t_0) = \underline{u}_i(t_0)$ para algún $(i, t_0)$

(c) $\underline{u} \leq \underline{v}$ y $\bar{v} \leq \bar{u}$, para cada solución $(\bar{v}, \underline{v})$ de (5.0.2).
En particular, $\underline{u} \ \leq u \ \leq \bar{v}$, para cada solución T-periódica y positiva

$u = (u_1, u_2, ..., u_n) \quad de$

$$u_i' = u_i F_i(t, u_1, ....., u_n) \ , \qquad 1 \leq i \leq n \tag{5.0.3}$$

y por lo tanto $(u, v)$ es una solución de (5.0.2).

## Demostración:

En primer lugar definamos $\bar{u}_{i1} = U_i$, usando el teorema 3.1 y la proposición 3.1, podemos probar, inductivamente, la existencia de dos sucesiones

$$\{\bar{u}_k = (\bar{u}_{1k}, ...., \bar{u}_{nk}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$$

$$\{\underline{u}_k = (\underline{u}_{1k}, ...., \underline{u}_{nk}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$$

de funciones positivas y T-periódicas, tales que

$$\begin{gathered} \underline{u}_{ik}' = \underline{u}_{ik} F_i(t, \bar{u}_{1k}, ..., \bar{u}_{i-1,k}, \underline{u}_{ik}, \bar{u}_{i+1,k}, ..., \bar{u}_{nk}) \\ \bar{u}_{i,k+1}' = \bar{u}_{i,k+1} F_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, \bar{u}_{i,k+1}, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{n,k}) \\ \underline{u}_1 \leq .... \leq \underline{u}_k \leq \bar{u}_k \leq .... \leq \bar{u}_1 \end{gathered} \tag{5.0.4}$$

para todo entero $k \geq 1$. Note que $\underline{u}_{i1} \leq U_i$ y entonces (5.0.1) se satisface si reemplazamos $U_i \quad por \quad \underline{u}_{i1}$.

En particular, nosotros podemos definir funciones positivas y T-periódicas,

$$\bar{u}, \quad \underline{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \textit{por}$$

$$\bar{u}(t) = \lim_{k\to\infty} \bar{u}_k(t), \quad \underline{u}(t) = \lim_{k\to\infty} \underline{u}_k(t).$$

Tales límites existen pues las sucesiones $\{\bar{u}_k\}$ y $\{\underline{u}_k\}$ son monótonas y acotadas. En consecuencia, las sucesiones $\{\bar{u}_k\}$ y $\{\underline{u}_k\}$ son acotadas uniformemente, y lo mismo ocurre para las sucesiones$\{\bar{u}'_k\}$ y $\{\underline{u}'_k\}$.

Luego, usando el Teorema de Arzela-Ascoli, y por resultados acerca de límites y derivadas, concluimos que el par de funciones $(\bar{u}, \underline{u})$ es una solución de (5.0.2), y esto completa la prueba de la parte (a).

Si $\bar{u}_i(t_0) = \underline{u_i}(t_0)$ entonces $\bar{u}_i'(t_0) = \underline{u_i}'(t_0)$ y la prueba de la parte (b) se sigue de la hipótesis (H1).

Para probar (c), afirmamos que $\bar{v}_i$ es una solución positiva y T-periódica de la ecuación

$$\dot{x} = xF_i(t, \underline{v}_1(t), ..., \underline{v}_{i-1}(t), x, \underline{v}_{i+1}(t), ..., \underline{v}_n(t))$$

y sabemos además que

$$\dot{x} = xF_i(t, 0, .., 0, x, 0, .., 0), \qquad x(t+T) = x(t), \quad x > 0$$

tiene exactamente una solución, la cual se denota por $U_i$. De aqui y por la proposición 3.1, se tiene que $\bar{v}_i \leq U_i$ pues $\underline{v}_j > 0$. Por inducción sobre k, conseguimos que $\bar{v} \leq \bar{u}_k$ y $\underline{u}_k \leq \underline{v}$ para todo k. En efecto, verifiquemos que se cumplen las desigualdades para k=1.

Sea $\dot{x} = xF_i(t, U_1, ...U_{i-1}, x, U_{i+1}, ..., U_n) = xF_i(\bar{u}_{11}, .., \bar{u}_{i-1,1}, x, \bar{u}_{i+1,1} .., \bar{u}_{n1})$ y como $\bar{v}_i \leq U_i$ y F es decreciente, tenemos que

$$F_i(t, \bar{v}_1(t), ..., \bar{v}_{i-1}(t), x, \bar{v}_{i+1}(t), ..., \bar{v}_n(t)) \geq F_i(t, \bar{u}_{11}, .., \bar{u}_{i-1,1}, x, \bar{u}_{i+1,1} .., \bar{u}_{n1})$$

luego, de aqui y de la proposición 3.1, concluimos que $\underline{v}_i \geq \underline{u}_{i1}$ y $\bar{v}_i \leq u_{i1} \leq \bar{u}_{i1}$.

Supongamos que se cumplen las desigualdades para k,es decir, $\bar{v} \leq \bar{u}_k$ y $\underline{u}_k \leq \underline{v}$, y probemos que también se cumplen para k+1, veamos.

Consideremos las ecuaciones siguientes,

$$\dot{x} = xF_i(t, \bar{u}_{1k}, ..., \bar{u}_{i-1,k}, x, \bar{u}_{i+1,k}, ..., \bar{u}_{nk})$$

$$\dot{x} = xF_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, x, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{nk})$$
$$\dot{x} = xF_i(t, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_{i-1}, x, \underline{v}_{i+1}, ..., \underline{v}_n)$$
$$\dot{x} = xF_i(t, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_{i-1}, x, \bar{v}_{i+1}, ..., \bar{v}_n)$$

cuyas soluciones son $\underline{u}_{ik}$ , $\bar{u}_{i,k+1}$ , $\bar{v}_i$ y $\underline{v}_i$ respectivamente.

Por la hipótesis inductiva, H1 y la proposición 3.1, se tiene que $\bar{v}_i \leq \bar{u}_{i,k+1}$. Ahora de aqui, y nuevamente por H1 tenemos que

$$F_i(t, \bar{u}_{1,k+1}, ..., \bar{u}_{i-1,k+1}, x, \bar{u}_{i+1,k+1}, ..., \bar{u}_{n,k+1}) \leq F_i(t, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_{i-1}, x, \bar{v}_{i+1}, ..., \bar{v}_n)$$

y de nuevo por la proposicion 3.1 concluimos que $\underline{u}_{i,k+1} \leq \underline{v}_i$, y de esta manera se da por terminada la demostración.

# Afirmación 5.1

Supongamos que $F_i(t, 0, \ldots, 0, M_i, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ para todo i.

Por afirmación 3.2, $U_i \equiv M_i$, y por inducción, las sucesiones $\{\bar{u}_k\}, \{\underline{u}_k\}$ en la prueba del teorema 5.1 son constantes. Por lo tanto, la solución $(\bar{u}, \underline{u})$ de (5.0.2) es constante.

## Demostración:

Verifiquemos para $k = 1$.
Sabemos que $0 < \bar{u}_{i1} \; = U_i = M_i \quad para \quad 1 \leq i \leq n.$
Por otra parte $\underline{u}_{i1} = (\underline{u}_{11}, \underline{u}_{21}, \ldots, \underline{u}_{n1})$
Definamos la función

$$g_i(x) = F_i(t, \bar{u}_{11}, ..., \bar{u}_{i-1,1}, x, \bar{u}_{i+1,1}, ..., \bar{u}_{n1})$$

por (5.0.1) existe un intervalo $(a, b) \subseteq [0, T]$ tal que $g_i(0) > 0$.
Por otra parte

$$g_i(M_i) = F_i(t, M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_n) \; < \; F_i(t, 0, \ldots, 0, M_i, 0, \ldots, 0) \; = \; 0$$

De aqui tenemos que $g_i(0) > 0$ y $g_i(M_i) < 0$ para todo $t \in (a, b)$. Como g es una función continua, existe $w_i \ \ tal \ \ que \ \ g_i(w_i) = 0$. De esta forma $\underline{u}_{i1} = w_i \leq M_i$, por la afirmación 3.2.
Luego se cumple que las sucesiones $\{\bar{u}_k\}, \{\underline{u}_k\}$ son constantes para k=1.

Supongamos ahora que las sucesiones

$$\bar{u}_k = (\bar{u}_{1k}, ...., \bar{u}_{nk})$$

$$\underline{u}_k = (\underline{u}_{1k}, ...., \underline{u}_{nk})$$

son constantes y además sabemos por el teorema 5.1 que

$$\underline{u}_1 \leq .... \leq \underline{u}_k \leq \bar{u}_k \leq .... \leq \bar{u}_1 = M$$

para todo entero $k > 1$. Demostremos que $\bar{u}_{k+1}$ también es constante.En efecto,$\bar{u}_{k+1}$ es solución de

$$\dot{x}_i = x_i F_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, x_i, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{nk}).$$

Definamos la función

$$h_i(x) = F_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, x, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{nk})$$

Observese que

$$h_i(0) = F_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, 0, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{nk}) > F_i(t, M_1, \ldots, 0, \ldots, M_n)$$

para todo $t \in (a, b)$, pues $\underline{u}_{ik} < M_i$ y además $h_i(0) > 0$ por (5.0.1).
Ahora bien,

$$h_i(M_i) = F_i(t, \underline{u}_{1k}, ..., \underline{u}_{i-1,k}, M_i, \underline{u}_{i+1,k}, ..., \underline{u}_{nk}) < F_i(t, 0, \ldots, M_i, \ldots, 0) = 0.$$

Como h es una función continua, y razonando en forma análoga al caso k=1, se concluye que existe $z_i \ \ tal \ \ que \ \ g_i(z_i) = 0$. De esta forma $\bar{u}_{i,k+1} = z_i$ es constante.
En forma análoga se demuestra para $\underline{u}_{i,k+1}$.

Así hemos demostrado que las sucesiones $\{\bar{u}_k\}, \{\underline{u}_k\}$ son constantes para todo k.

## Corolario 5.1

Sea $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función localmente lipschitz tal que $F(0) > 0$ y $F(x) > F(y)$ si $0 \leq x \leq y$ y $x \neq y$.

Supongamos además que existen constantes positivas $M_i$, con $1 \leq i \leq n$, tales que
$F_i(M_1, \ldots, M_{i-1}, 0, M_{i+1}, \ldots, M_n) > 0$ y $F_i(0, \ldots, 0, M_i, 0, \ldots, 0) = 0$.
Entonces existe $x > 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $F(x) = 0$.

### Demostración:

Sabemos por la afirmación anterior que

$$\bar{u}_k = (A_1, ...., A_n)$$

$$\underline{u}_k = (B_1, ...., B_n)$$

son constantes y $A_i \geq B_i > 0$. Por otra parte $B_i$ y $A_i$ son soluciones de

$$\underline{u}_i' = \underline{u}_i F_i(t, A_1, ..., A_{i-1}, \underline{u}_i, A_{i+1}, ..., A_n), \;\; y$$

$$\bar{u}_i' = \bar{u}_i F_i(t, B_1, ..., B_{i-1}, \bar{u}_i, B_{i+1}, ..., B_n)$$

respectivamente. Así tenemos que

$$F_i(t, A_1, ..., A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, ..., A_n) = 0 < F_i(0, .., 0)$$

$$F_i(t, B_1, ..., B_{i-1}, A_i, B_{i+1}, ..., B_n) = 0 < F_i(0, .., 0).$$

Luego sumando $A_j$ y $B_j$ tal como sigue,tenemos lo siguiente:

$$F_i(t, A_1 + B_1, ..., A_{i-1} + B_{i-1}, A_i + B_i, A_{i+1} + B_{i+1}, ..., A_n + B_n) = 0 < F_i(0, .., 0)$$

para todo i, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto,

$$F(t, A_1 + B_1, ..., A_{i-1} + B_{i-1}, A_i + B_i, A_{i+1} + B_{i+1}, ..., A_n + B_n) < 0 < F(0).$$

Como $F$ es continua, existe $x > 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $F(x) = 0$.

Supongamos que $x \leq 0$, entonces $0 < F(0) \leq F(x)$, es una contradicción del hecho que $F(x) = 0$. Por lo tanto $x > 0$, y así termina la demostración.

Dado un punto $q = (q_1, \ldots, q_n)$ en $\mathbb{R}^n$, denotamos por $u(t, q)$ la solución de (5.0.3), satisfaciendo la condición inicial $u(0) = q$.

# Proposición 5.1

Supongamos que se cumple (5.0.1) y sea $\bar{u}, \underline{u}$ dadas como en el teorema 5.1. Si $n \geq 3$ y $\underline{u} < \bar{u}$ y $\underline{u}(0) < q < \bar{u}(0)$, con $q \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\underline{u}(t) < u(t,q) < \bar{u}(t) \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad t > 0.$$

## Demostración:

Denotemos $u(t) = u(t,q)$ y supongamos que existe un $t_0 > 0$ tal que $\underline{u}(t) < u(t) < \bar{u}(t)$ *para todo* $0 \leq t < t_0$ y $u_i(t_0) = \bar{u}_i(t_0)$ (o también $u_i(t_0) = \underline{u}_i(t_0)$) para algún i,(ver figura 5.1).

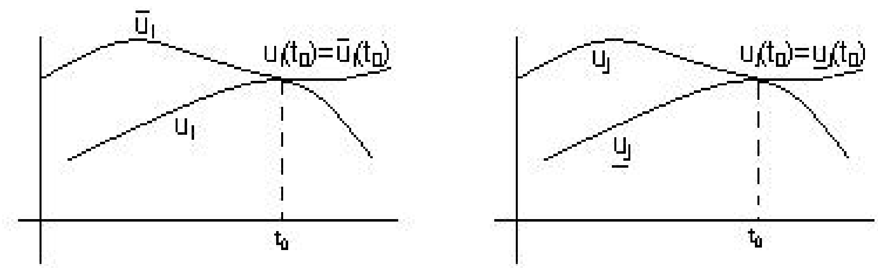


Figura 5.1: Coinciden en $t_0$

Entonces,

$$F_i(t_0, \underline{u}_1(t_0), \ldots, \underline{u}_{i-1}(t_0), \bar{u}_i(t_0), \underline{u}_{i+1}(t_0), \ldots, \underline{u}_n(t_0)) \leq F_i(t_0, u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0)) \tag{5.0.5}$$

$$F_j(t_0, \bar{u}_1(t_0), \ldots, \bar{u}_{j-1}(t_0), \underline{u}_j(t_0), \bar{u}_{j+1}(t_0), \ldots, \bar{u}_n(t_0)) \geq F_j(t_0, u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0)) \tag{5.0.6}$$

por ser F decreciente,tal como se indica en la hipótesis H1.

Pero como $u(t) < \bar{u}(t)$ para $0 \leq t < t_0$, se tiene que $u_r(t_0) = \bar{u}_r(t_0)$ para todo $r \neq j$, en particular para $r = k$, tenemos que

$$\bar{u}_k(t_0) = u_k(t_0) = \underline{u}_k(t_0)$$

y por teorema 5.1, parte b), se tiene que $\bar{u} = \underline{u}$ y esto contradice la hipótesis $\underline{u} < \bar{u}$. Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\underline{u}(t) < u(t,q) < \bar{u}(t) \qquad para \qquad todo \qquad t > 0.$$

# Teorema 5.2

Sean $F_i(t,x)$, las funciones componentes de $F$ dadas anteriormente con sus respectivas propiedades. Si se cumple (5.0.1), entonces el sistema (5.0.3) tiene una solución T-periódica

$$u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0), \quad tal \quad que \quad u_i^0 > 0 \quad para \quad todo \quad i.$$

## Demostración:

Sean $\bar{u}, \underline{u}$ dadas como en el teorema 5.1. Así podemos suponer que $n \geq 3$ y $\underline{u} < \bar{u}$.

Definamos el conjunto A como sigue:

$$A = \{q \in \mathbb{R}^n / \underline{u}(0) \leq q \leq \bar{u}(0)\},$$

por la forma como esta definido tenemos que $A$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo en el espacio $\mathbb{R}^n$.

Definamos sobre el conjunto $A$ la función de Poincaré

$$P : A \longrightarrow A$$

dada por

$$P(q) = u(T,q)$$

Sea $q \in A$, entonces por definición $\underline{u}(0) \leq q \leq \bar{u}(0)$, y por la proposición 5.1

$$\underline{u}(t) < u(t,q) < \bar{u}(t) \qquad para \qquad todo \qquad t > 0,$$

en particular para $t = T$ nos queda

$$\underline{u}(T) < u(T,q) < \bar{u}(T),$$

pero sabemos que $\bar{u}$ $y$ $\underline{u}$ son T-periódicas y $u(T,q) = P(q)$, por lo tanto

$$\underline{u}(0) < P(q) < \bar{u}(0),$$

por lo cual tenemos que $P(A) \subseteq A$ y así $P$ está bien definida.

Así tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema de punto fijo de Brouwer, y por lo tanto podemos afirmar que la función de poincaré $P$ definida por $u(T,q) = P(q)$, con $q \in A$ tiene un punto fijo en el conjunto

$$A = \{q \in \mathbb{R}^n / \underline{u}(0) \leq q \leq \bar{u}(0)\},$$

y está demostrado en [9], que si la función de poincaré tiene un punto fijo, digamos $q_0 \in A$, entonces la función $u(t, q_0)$ es una solución T-periódica del sistema (5.0.3).

Considerando que el sistema (5.0.3), modela la competencia de n especies en un medio cerrado y con recursos limitados, podemos concluir que las n especies coexisten, es decir, existe una solución positiva del sistema.

# Bibliografía


[1] S.Ahmad (1993), On Non autonomous Volterra-Lotka Competition Equations, Proceedings of the American Matematical Society, 117, No.1, 199-204.

[2] T. Apostol, (1957), Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. Barcelona.

[3] E. Coddington, (1976), Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Continental, S.A. Mexico.

[4] K. Gopalsamy, Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system.J.Austral.Math. Soc.Ser. B. 27 (1985), 66-72.

[5] F. Montes de Oca, (1996), Dinamica Poblacional de una Especie. II ENEM. U.C.L.A., Barquisimeto-Lara.

[6] H. Smith. Periodic solutions of competitive and cooperative systems, SIAM J. Math. Anal. 17, Nº6 (1986), 1289-1318.

[7] J. Sotomayor, (1979), Lições de equqções diferenciais ordinárias.Impa. Brasil.

[8] A. Tineo. (1992),An Iterative Scheme for the N-Competing Species Problem, J.Diff. Equations 116, 1-15.

[9] A. Tineo. (199), An Introduction to Periodic Competitive Systems, X ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS.

[10] W. Tutschkeand C.J. Vanegas,(2005) Fixed-point Theorems and their Apllications To Differential Equations, XVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS.