UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

El Rol de los Núcleos Reproductivos en la Teoría de Operadores de Composición en Espacios de HFA.

Lic. Lorena M. López

Barquisimeto, Edo. Lara, Venezuela
Julio 2006

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS

El Rol de los Núcleos Reproductivos en la Teoría de Operadores de Composición en Espacios de HFA.

Trabajo de Grado Presentado como Requisito Parcial
Para Optar al Título de Magister Scientiarum
Mención Matemática.

Autor: Lic. Lorena M. López

Tutor: Dr. José Giménez

Barquisimeto, Edo. Lara, Venezuela
Julio 2006

Resumen

Sea $H \subset \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ un espacio de Hilbert funcional analítico.
Si $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica tal que $f \circ \phi \in H$ para todo $f \in H$, entonces la relación de composición $H \ni \longrightarrow f \circ \phi$, define un operador lineal de H en H, denotado por C_ϕ, y conocido como `operador de composición con símbolo` ϕ.

Una de las últimas tendencias en investigación en el ámbito de la teoría de operadores en espacios de Hilbert Funcionales Analíticos (HFA) es el conocido `problema de los núcleos reproductivos;` esto es,

¿Hasta qué punto dependen ciertas propiedades claves de operadores que actúan en un espacio HFA, $\mathcal{H}$, de su comportamiento sobre los núcleos reproductivos de $\mathcal{H}$?.

En este trabajo, exhibimos y discutimos ejemplos y resultados fundamentales relacionados al papel que juegan los núcleos reproductivos en el comportamiento de algunos Operadores de Composición que actúan en espacios HFA. El marco principal en el cual desarrollamos nuestro trabajo, es el del espacio de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

Introducción

Denotaremos mediante $\mathbf{H}(\mathbb{D})$ al espacio de todas las funciones analíticas en el disco unitario, $\mathbb{D}$, dotado con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Sea H un subespacio de Banach de $\mathbf{H}(\mathbb{D})$.

Si $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica tal que $f \circ \phi \in H$ para todo $f \in H$; entonces ϕ induce un operador lineal $C_\phi : H \to H$, definido como

$$C_\phi(f) := f \circ \phi.$$

A C_ϕ se le denomina `operador de composición con símbolo` ϕ.

Un espacio de Hilbert, $\mathrm{H} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$, se dice un **Espacio de Hilbert Funcional**, si para todo $y \in \mathbb{D}$, el funcional de evaluación puntual:

$$\delta_y(f) := f(y)$$

es acotado en H. Como consecuencia, el teorema de representación de Riesz implica que para cada $y \in \mathbb{D}$, existe un único elemento $K_y \in \mathrm{H}$, tal que

$$\langle f, K_y \rangle = f(y) \qquad \forall\, f \in \mathrm{H}.$$

Un tal K_y es llamado núcleo reproductivo. En particular, si los vectores de H son funciones analíticas sobre una región $\Omega \subset \mathbb{D}$, el espacio H es llamado **Espacio de Hilbert Funcional Analítico** (HFA).

La Teoría de Núcleos Reproductivos ha sido extensamente estudiada desde la aparición del célebre artículo de N. Aronszajn, [1], *Theory of Reproducing Kernels*. Es notable, aunque quizá no sorprendente, el hecho de que el estudio de algunos propiedades de ciertos operadores que actúan en espacios de Hilbert funcionales analíticos se simplifica notablemente debido, precisamente, a la presencia de estos núcleos reproductivos. Este trabajo está inspirado en recientes artículos de investigación (por ejemplo: [17] (2004), [27] (2003) y [6] (2001)), en los que exponen interesantes evidencias de las estrechas relaciones que existen entre cierta clase de símbolos de operadores de composición y los núcleos reproductivos del espacio de Hardy $\mathbf{H}^2(\mathbb{D})$); a saber, estimaciones de la norma de operadores de composición; asi como, propiedades cíclicas y analíticas de estos.

Una de las últimas tendencias en investigación en el ámbito de la teoría de operadores es el conocido `problema de los núcleos reproductivos:`

⋆ **¿Hasta que punto dependen, las propiedades de un operador lineal que actúa en un espacio de Hilbert Funcional Analítico, de las propiedades analíticas y espaciales de la familia de núcleos reproductivos del espacio.?** ⋆

Como sugiere el título en este trabajo, en el mismo, exhibimos y discutimos ejemplos y resultados fundamentales relacionados al papel que juegan los núcleos reproductivos en el comportamiento de Operadores de Composición que actúan en espacios HFA. El marco principal en el cual desarrollamos nuestro trabajo, corresponde al del espacio de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. A tal efecto, nuestro trabajo cubre los siguientes objetivos generales:

- Introducción a la teoría general de los Núcleos Reproductivos.
- Estudio de algunas propiedades de Operadores de Composición en Espacios de Hardy.
- Descripción de como las propiedades analíticas de los Núcleos Reproductivos en el espacio $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ determina el comportamiento de ciertos Operadores de Composición.

Con el objeto de hacer nuestra exposición suficientemente autocontenida, en el `Capítulo 1` reseñamos algunos de los principales resultados de la teoría de funciones de una variable compleja. Así mismo, presentamos una visión panorámica de los fundamentos de la teoría general de operadores en espacios de Banach, en espacios de Hilbert y los conceptos básicos de la teoría de espacios H^p.

En el `Capítulo 2` describimos el espacio $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. Un ejemplo importante de espacio de Hilbert Funcional analítico, en el cual desarrollaremos la mayor parte de nuestro trabajo.

El término `espacio de Hilbert con núcleo reproductivo` es sinónimo de los espacio de Hilbert funcional. En el `Capítulo 3`, estudiamos concepto, propiedades y caracteristicas de los nucléos reproductivos en espacios de Hilbert funcionales.

El `Capítulo 4`, constituye la parte central de nuestro trabajo. En el, estudiaremos los operadores de composición en espacios HFA, mostrando, en particular, resultados recientes que ilustran la estrecha relación que existe entre los núcleos reproductivos del espacio H^2 y ciertas propiedades de operadores de composición $C_\phi : \mathrm{H}^2 \to \mathrm{H}^2$. Específicamente, estudiaremos propiedades tales como: acción del del adjunto, invertibilidad, normalidad y normas de operadores de composición en H^2.

En el `Capítulo 5`, revisaremos algunas instancias que evidencian la relación entre los núcleos reproductivos de los espacios $H^2(\mathbb{D})$ y $H_0^2(\mathbb{D})$, y ciertos aspectos dinámicos de operadores de composición subnormales.

AGRADECIMIENTO

* En primer lugar a Dios todopoderoso, por darme la luz y la fuerza necesaria para lograr mis objetivos académicos.

* A mi tutor, por estar siempre dispuesto a apoyarme, guiarme y enseñarme durante todo el tiempo que he dedicado a la elaboración de esta tesis.

* A mis amigos, los profesores Jurancy Ereu, Mireya Bracamonte, Miguel Vivas, Lucy E. Rodriguez, Liliana Pérez, Yadira Matute.

* A los profesores y a los compaẽros de la Maestría. A Carmela.

* Muy especialmenbte, a mi familia por brindarme siempre su apoyo incondicional.

* A Argenis...

* tvemp.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones Analíticas

En este trabajo consideraremos funciones a valores complejos, que están definidas en subconjuntos del plano complejo. La topología de $\mathbb{C}$ es la topología usual dada por el valor absoluto. Con el objeto de hacer esta exposición autocontenida, presentamos a continuación un resumen de las principales definiciones y resultados relacionados con la Teoría de Funciones de una Variable Compleja.

- [**Discos en** $\mathbb{C}$].

  Si $r > 0$ y a es un número complejo, denotaremos mediante $\mathrm{D}(a;r)$ al disco abierto de centro a y radio r. Es decir:

  $$\mathrm{D}(a;r) = \{z : |z-a| < r\}$$

  Al disco abierto de centro 0 y radio 1 lo denotaremos simplemente como $\mathbb{D}$, y lo llamaremos **disco unitario**.

  $\overline{\mathrm{D}}(\,a;r\,) \;=\; \{z : |z-a| \leq r\}$ es la adherencia de $\mathrm{D}(\,a;r\,)$, y

  $\mathrm{D}'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ es el disco perforado con centro a y radio r.

  Un subconjunto abierto y conexo diferente de vacío en el plano complejo se denomina **región**.

  La letra Ω denotará, en lo sucesivo, un subconjunto abierto del plano complejo.

  La **compactificación**, via proyección estereográfica, del plano complejo la denotaremos mediante $\widehat{\mathbb{C}}$.

///.

- [**Funciones Holomorfas**]

  Supongamos que f es una función compleja definida en Ω, diremos que f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ si

  $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

  existe. En este caso denotamos dicho límite por $f'(z_0)$. Si $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in \Omega$, diremos que f es holomorfa (o analítica en Ω.)

  La clase de todas las funciones holomorfas en Ω, que denotarararemos mediante $\boldsymbol{H}(\Omega)$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, si las operaciones lineales se definen puntualmente.

  ///.

- [**Teorema del Indice**] Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino[1] cerrado, sea Ω el complemento de $\gamma([a, b])$ en $\mathbb{C}$, y definamos

  $$\mathtt{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \Omega).$$

  Entonces, $\mathtt{Ind}_\gamma$ es una función a valores enteros la cual es constante sobre cada componente conexa de Ω; en particular, $\mathtt{Ind}_\gamma(z) = 0$ si z está en la componente no acotada de Ω.

  ///.

- [**Teorema Fundamental del Cálculo en** $\mathbb{C}$] Supongamos que $F \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y que F' es continua en Ω. Entonces

  $$\int_\gamma F'(z)dz = 0$$

  para todo camino cerrado γ en Ω.

  ///.

[1] Un camino (o contorno) es una curva rectificable en el plano, continuamente diferenciable a trozos. Como es usual en la literatura, en ocaciones, no haremos distinción entre una curva γ y su imagen $\gamma([a, b])$.

- [**Teorema de Cauchy**][2] Sean: $\Omega \subset \mathbb{C}$, un conjunto abierto y **convexo**, $p \in \Omega,\ f$ una función continua en $\Omega,$ tal que $f \in \boldsymbol{H}(\Omega - \{p\})$. Entonces existe $F \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$. Por lo tanto

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para todo camino cerrado $\gamma \subset \Omega$.

///.

- [**Fórmula Integral de Cauchy**] Supongamos que γ es un camino cerrado en un conjunto abierto y convexo Ω, y $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ y $z \notin \gamma([a, b])$, entonces

$$f(z) \cdot \mathtt{Ind}_\gamma(z) \ : \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1.1}$$

///.

- [**Teorema del Valor Medio de Gauss**] El caso en que $\mathtt{Ind}_\gamma(a) = 1$ es de particular interés: Si $f \in \boldsymbol{H}(\mathrm{D}(a, r))$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

///.

- [**Analiticidad**] Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces toda $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ puede representarse mediante series de potencias en Ω; precisando: Si $a \in \Omega$ entonces existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \forall \quad z \in D(a, r);$$

en particular, toda funcón $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ es infinitamente diferenciable.

Reciprocamente, si f puede representarse mediante series de potencias en Ω, entonces $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y f' también se representa mediante series de potencias en Ω.

[2] Esta versión de clásico teorema es suficiente para nuestros propositos.

De hecho si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \quad z \in \mathrm{D}(a,r),$$

entonces

$$f^k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)\, c_n\, (z-a)^{n-k}\,, \quad z \in \mathrm{D}(a,r). \tag{1.2}$$

En consecuencia, (1.1) implica que

$$k!\, c_k = f^k(a) \qquad\qquad (k = 0, 1, 2, ...),$$

de modo que para cada $a \in \Omega$ existe una única sucesión $\{c_n\}$ para la que se verifica (1.1).

///.

- [**Integrales de Tipo Cauchy**] Sea μ una medida compleja (finita) sobre un espacio medible X, φ una función compleja medible sobre X, Ω un conjunto abierto en el plano que no intersecta $\varphi(X)$ y

  $$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z} \qquad\qquad (z \in \Omega).$$

  Entonces $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$.

///.

- [**Ceros de Funciones Analíticas y Unicidad**] Supongamos que Ω es una región, $f \in \boldsymbol{H(\Omega)}$, y pongamos

  $$Z(f) := \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

  Entonces, o bien $Z(f) = \Omega$, o $Z(f)$ no tiene puntos límites en Ω. Si $Z(f) \neq \Omega$, entonces a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

  $$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad\qquad (z \in \Omega),$$

  donde $g \in \boldsymbol{H(\Omega)}$ y $g(a) \neq 0$; además, $Z(f)$ es a lo sumo numerable. Como consecuencia, se tiene el siguiente **teorema de unicidad** para funciones holomorfas:

Si f, g son funciones holomorfas en una región Ω y si $f(z) = g(z)$ para todo z de algún conjunto que posea un punto límite en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

$///.$

- [**Versión Cuadrática del TVM**]

  Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,\ \ z \in \mathrm{D}(a;r);\quad$ y $\quad$ si $\quad 0 < r < R$, entonces

$$\sum_{n=o}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{1.3}$$

$///.$

- [**Teorema de Morera**] Si f es una función continua en un dominio Ω y

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

  para todo contorno cerrado γ en Ω, entonces $f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D})$.

$///.$

- [**Teorema de Liouville**] Supongamos que $f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{C})$ y que existen constantes reales A, B, $R \in (0, \infty)$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que

$$|f(z)| \leq A|z|^N + B \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \geq R.$$

  Entonces f es un polinomio de grado menor o igual que N.

$///.$

- [**Teorema del Módulo Máximo**]

  - [**Versión 1**] Supongamos que Ω es una región, que $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y que $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$. Entonces

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in [0,2\pi)} |f(a + re^{i\theta})|. \tag{1.4}$$

    La igualdad se obtiene en (1.3) si y sólo si f es constante.

- [**Versión 2**] Si f es una función analítica en una región Ω y a es un punto de Ω tal que $|\,f(a)\,| \geq |\,f(z)\,|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f debe ser una Ω función constante.

///.

- [**Sucesiones de Funciones Holomorfas**] Una sucesión $\{f_j\}$ de funciones definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que converge a f, **uniformemente sobre subconjuntos compactos** de Ω, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un $N = N(K, \epsilon)$ tal que $|\,f_j(z) - f(z)| < \epsilon$ para toda $z \in K$, si $j > N$.

  La noción de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos, provee el escenario más natural para el tratamiento de límites de sucesiones de funciones holomorfas. La siguiente proposición pone claramente de manifiesto esta afirmación:

  Proposición:

  `Supongamos que` $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathtt{H}(\Omega)$ `y que` $f_j \longrightarrow f$ `uniformemente sobre subconjuntos compactos de` Ω. `Entonces`

$$f \in \mathtt{H}(\Omega) \quad \texttt{y} \quad f_j^{(n)} \longrightarrow f^{(n)}$$

  `uniformemente sobre subconjuntos compactos de` Ω.

///.

- [**Lema de Schwarz**] Supongamos que f es analítica en $\mathbb{D}$, y que satisface:

  a. $|\,f(z)\,| \leq 1$ para todo z en $\mathbb{D}$,

  b. $f(0) = 0$.

  Entonces $|\,f'(0)\,| \leq 1$ y $|\,f(z)\,| \leq |\,z\,|$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Además si $|\,f'(0)\,| = 1$ ó si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, entonces existe una constante c, $|\,c| = 1$, tal que $f(z) = c\,z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

///.

- [**Transformaciones de Möbius**] Una **transformación fraccional lineal** es una función racional de la forma

$$S(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } ad - bc \neq 0.$$

Es fácil ver que si $c \neq 0$, $S : \mathbb{C} \setminus \{d/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ es una aplicación biyectiva, con inversa dada por

$$S^{-1}(z) := \frac{dz - b}{-cz + a}. \tag{1.5}$$

Para propósitos mas generales es conveniente, sin embargo, considerar una transformación fraccional lineal como una aplicación biyectiva de $\widehat{\mathbb{C}}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$. Al conjunto de todas las transformaciones fraccionales lineales $S : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, lo denotaremos por $\mathbf{Lin}[\mathbb{C}]$. $\mathbf{Lin}[\mathbb{C}]$ es un grupo respecto a la operación de composición y la relación

$$\frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

establece un isomorfismo de grupos entre $\mathbf{Lin}[\mathbb{C}]$ y $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$.[3]

Dado $w \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, una aplicación fraccional lineal de la forma

$$\Phi_{(w,\theta)}(z) := e^{i\theta} \frac{z - w}{1 - \overline{w}\, z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

se llama una **transformación de Möbius**. En virtud de (1.4) la inversa de τ_w viene dada por

$$\Phi^{-1}_{(w,\theta)}(z) = \frac{z + e^{i\theta} w}{\overline{w}\, z + e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \frac{z + v}{1 + \overline{v}\, z} = \Phi_{(-v,-\theta)}(z),$$

donde $v := e^{i\theta} w$.

Por otra parte, usando (1.6), se verifica inmediatamente que la composición de dos transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius. Además, la relación

$$1 - |\Phi_{(w,\theta)}(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\, \overline{w}|^2}. \tag{1.7}$$

muestra que Φ_w aplica $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ y $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial\mathbb{D}$. En consecuencia, el conjunto

$$\{\Phi_{(w,\theta)} : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : \; w \in \mathbb{D}, \; \theta \in \mathbb{R}\}$$

es un grupo con respecto a la operación de composición de funciones.

///.

[3] Grupo de matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, con la operación de grupo dada por la multiplicacin de matrices.

- [**Automorfismos del Disco Unitario**] Denotaremos mediante $\mathbf{Aut}(\mathbb{D})$ al grupo de automorfismos analíticos del disco unitario. La siguiente proposición caracteriza completamente al conjunto $\mathbf{Aut}(\mathbb{D})$.

$$f \in \mathbf{Aut}(\mathbb{D}) \iff \exists\ (w,\theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \text{ tal que } f = \Phi_{(w,\theta)}.$$

///.

- [**Funciones Armónicas**] Sea Ω un abierto del disco $\mathbb{D}$, y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Diremos que u es armónica en Ω si u es de clase $\mathcal{C}^2$ y cumple:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0$$

`Es bien conocido el hecho de que tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica son funciones armónicas.`

///.

- [**Funciones Subarmónicas**] Una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua, se dice **subarmónica** sii para cada $z_0 \in \mathbb{D}$, existe un número positivo r_0 tal que el disco $\mathrm{D}(z_0, r_0) \subset \mathbb{D}$ y

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\, z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

para toda $r \in (0, r_0)$.

///.

A continuación, y a manera de ejemplo, presentamos una clase importante de funciones subarmónicas:

`Si` $f \in \mathtt{H}(\mathbb{D})$ `y` $p > 0$; `entonces la función` $|f(z)|^p$ `es subarmónica en` $\mathbb{D}$.

En efecto. Si $z_0 \in \mathbb{D}$ con $f(z_0) \neq 0$, entonces cualquier rama de la función $(f(z))^p$ es analítica en una vecindad de z_0; de este modo

$$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\, z_0 + re^{i\theta}))^p d\theta$$

para todo r suficientemente pequeño. De manera que

$$| f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p d\theta$$

para todo r suficientemente pequeño. Obviamente esto también se cumple para $f(z_0) = 0$. Luego, $|f(z)|^p$ es subarmónica en $\mathbb{D}$.

///.

1.2. Operadores en Espacios de Banach

- Un **espacio de Banach** X es un espacio vectorial complejo en el cual está definida una función $\| \, \| : X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:

  1. $\| x + y\| \| \leq \| x\| + \| y\|$ para todo x y y en X;
  2. $\| ax \| = |a| \| x \|$ para todo $a \in \mathbb{C}$;
  3. $\| x \| = 0$ si y solo si $x = 0$;
  4. si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X; esto es, $\| x_n - x_m \| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, entonces existe un vector $x \in X$ tal que $\| x_n - x \| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

  La función $\| \, \|$ se dice una **norma** en X.

  La cantidad $d(x, y) := \|x - y\|$, define una métrica en X. La topología inducida por la métrica d es llamada **topología de la norma** en X. La condición (4) dice que d es completa. Un espacio vectorial que satisface $(1), (2)$ y (3) se denomina **espacio normado**.

  La propiedad 1 de $\| \, \|$, llamada desigualdad triangual es equivalente

$$\forall x, y \in X \quad | \| x\| - \| y\| | \leq \|x - y\|.$$

  En consecuencias, si $\{ x_n \} \subset X$ satisface

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \| x \|.$$

///.

- Una transformación (u **operador**) lineal $T : X \to Y$, con X, Y espacios normados, se dice **acotada** si existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \le C\|x\|$ para todo $x \in X$. El siguiente resultado es bien conocido:

  Una transformación lineal es acotada si y solo ella es continua.

  Si X e Y son espacios de Banach, denotaremos mediante $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto

  $$\{T : X \to Y : T \text{ es lineal y continua}\}.$$

  . Si $Y = X$ escribiremos simplemete $\mathcal{L}(X)$.

  $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales

  $$\begin{aligned} (\lambda T)(x) &:= \lambda T(x), \\ (T_1 + T_2)(x) &:= T_1(x) + T_2(x); \end{aligned}$$

  más aun, $\mathcal{L}(X, Y)$ resulta ser un espacio de Banach respecto a la norma

  $$\begin{aligned} \| T \| &= \text{ínf}\,\{\mathrm{C} : \|T(x)\| \le \mathrm{C}\,\|x\|\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} \\ &= \sup\{ \|T(x)\| : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

  Diremos que dos espacios de Banach son **equivalentes** si existe una aplicación lineal, continua y biyectiva entre ellos.

  ///.

- A una transformación lineal $T : X \to \mathbb{C}$ se le denomina **funcional lineal**.

  Dado un espacio normado X, definimos X^* como el espacio de todos los funcionales lineales acotados en X. X^* es un espacio de Banach complejo con la norma

  $$\| f \|_{X^*} = \sup\{ \,|\, f(x) \,|\, : \|x\| \le 1 \,\} = \sup\{ \,|\, f(x) \,|\, : \|x\| = 1 \,\}.$$

  A X^*, dotado con la norma $\| \cdot \|_{X^*}$ se le denomina **espacio dual de** X.

  ///.

- Uno de los resultados fundamentales en la teoría de los espacios de Banach es el **Teorema de la aplicación abierta**:

  `Sean` X `y` Y `espacios de Banach. Si` $T : X \to Y$ `es un operador acotado y sobreyectivo, entonces` T `envía conjuntos abiertos en` X `a conjuntos abiertos en` Y.

  Una instancia importante del teorema de la aplicación abierta es la siguiente:

  Si T *es un operador lineal acotado y biyectivo de un espacio de Banach* X *sobre un espacio de Banach* Y*, entonces la inversa de* T*,* $T^{-1} : Y \to X$*, es tambien acotada.*

  En particular, si X es un espacio vectorial dotado de dos normas completas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ tales que $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ para alguna constante $C > 0$ y para todo $x \in X$, entonces existe otra constante $C^{'} > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq C^{'} \|x\|_1$ para todo $x \in X$. *En este caso decimos que* $\|x\|_1$ *es equivalente a* $\|x\|_2$.

  ///.

- Otro resultado fundamental sobre operadores lineales que actuan en espacios de Banach es el **Teorema del gráfico cerrado**:

  `Supongamos que` T `un operador lineal de un espacio de Banach` X `en un espacio de Banach` Y, `y que el conjunto` $\{ (x, T(x)) : x \in X\}$ `es cerrado en` $X \times Y$; `entonces` T `es acotado.`

  ///.

- Un subconjunto A de $\mathcal{L}(X, Y)$ se dice acotado puntualmente , si para todo $x \in X$ el subconjunto $\{T(x) : T \in A\}$ de Y es acotado en norma.

  Principio de acotación uniforme. `Sea` X `un espacio de Banach, y sea` Y `un espacio normado. Entonces un subconjunto de` $\mathcal{L}(X, Y)$ `es acotado en norma si y solo si es acotado puntualmente.`

  Corolario Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y sea $\{ T_n \}$ una sucesión en $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ para cada $x \in X$, entonces T es un operador acotado.

  ///.

- Además de la topología inducida por la norma en un espacio de Banach X, éste también suele dotarse de otra topología que resulta muy útil, llamada la

topología débil. La topología débil sobre X puede definirse describiendo todas sus redes convergentes:

Una red $\{ x_\alpha \}$ converge debilmente en X si para toda $F \in X^*$, la red de números complejos $\{F(x_\alpha)\}$ converge.

De esta definición resulta claro que toda red que converge en norma es también débilmente convergente.

$///.$

- En X^*, adicionalmente a la topología de la norma y a la topología débil, podemos definir otra topología llamada la topología débil-estrella (débil$-*$):

  Una red $\{F_\alpha\}$ es débil$-*$ convergente en X^* si para cada $x \in X$, la red de números complejos $\{F_\alpha(x)\}$ converge.

  $///.$

  Uno de los resultados más importantes acerca de la topología débil$-*$ es el **Teorema de Banach-Alaoglu**, el cual establece:

  `La bola unitaria cerrada del espacio de Banach` X^* `es compacta en la topología débil`$-*$.

  $///.$

- Supongamos que X es un espacio de Banach y que X_0 es un subespacio cerrado de X. Entonces, podemos definir una relación de equivalencia en X como sigue:

$$x \sim y \quad \text{si y solo si} \quad x - y \in X_0.$$

  Sea $X/X_0 := \{x + X_0 : x \in X\}$, el **espacio cociente inducido** por esta relación de equivalencia. Entonces X/X_0 resulta también un espacio vectorial complejo si se definen las operaciones lineales como:

$$\begin{aligned} \{x + X_0\} + \{y + X_0\} &:= \{x + y + X_0\} \ \forall\ x, y \in X \\ \lambda\{x + X_0\} &:= \{\lambda x + X_0\} \ \forall\ x \ \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

  Además, X/X_0 se convierte en un espacio de Banach con la siguiente **norma cociente** :

$$\|x + X_0\| := \text{ínf}\{ \|y\| : x - y \in X_o\}.$$

  Note que $\|x + X_0\|$ tiene también la siguiente útil interpretación geométrica:

$$\|x + X_0\| = \text{dist}(x, X_0) := \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in X_0\}.$$

- Si X y Y son ambos espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, entonces el núcleo de T:

$$\mathrm{Ker}(T) := T^{-1}\{0\}$$

es un subespacio cerrado de X. Si, además, T es sobreyectiva, entonces puede probarse, usando el teorema de la aplicación abierta, que

$$Y \cong X/\mathrm{Ker}(T)$$

$///.$

- Supongamos que X y Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado. Entonces T induce un operador lineal $T^* : X^* \to Y^*$ definido como:

$$T^*(F)(x) := F(T(x)) \qquad x \in X, F \in Y^*.$$

T^* es un operador acotado y se cumple $\|T^*\| = \|T\|$.

Al operador T^* se le denomina **operador adjunto** del operador T.

$///.$

Sea $(\Omega, d\mu)$ un espacio de medida σ-finita, $1 \leq p < +\infty$, $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, y sea T el operador definido por

$$Tf(x) := \int_\Omega G(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Si este operador aplica $L^p(\Omega, d\mu) \longrightarrow L^p(\Omega, d\mu)$, y resulta continuo, entonces el operador $T^* \in \mathcal{L}(L^q(\Omega, d\mu))$ está dado por

$$T^* f(x) = \int_\Omega \overline{G(x,y)} f(y) d\mu(y).$$

$///.$

1.2.1. Convergencia de Sucesiones de Operadores y Funcionales

Recordemos en primer lugar que una sucesión $\{x_n\}$, en un espacio normado X puede converger de dos maneras

- Converge fuertemente (o converge en norma) si existe un $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

- Converge debilmente a $x \in X$, si para todo $f \in X^*$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

  En este caso, denotaremos $x_n \xrightarrow{w} x$. El elemento x es llamado límite débil de la sucesión.

///.

Para una sucesión de operadores $\{T_n\} \in \mathcal{L}(X,Y)$, existen tres tipos fundamentales de convergencia :

1. Convergencia en norma en $\mathcal{L}(X,Y)$,
2. Convergencia en norma de $T_n(x)$ en Y,
3. Convergencia débil de $T_n(x)$ en Y.

- **Concretamente:** Sean X, Y espacios normados. Una sucesión de operadores $\{\,T_n\,\}$ pertenecientes a $\mathcal{L}(X,Y)$, se dice que:
  1. Converge a un operador T, uniformemente, si $\{\,T_n\,\}$ converge a T en la norma de $\mathcal{L}(X,Y)$; es decir, $\|T_n - T\| \to 0$.
  2. Converge fuertemente a T, si $T_n(x)$ converge a $T(x)$ en la norma de Y, para todo $x \in X$, es decir $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0$ para todo $x \in X$
  3. Converge débilmentea a T , si $T_n(x)$ converge débilmente en Y para todo $x \in X$, es decir $|f(T_n(x)) - f(T(x))| \to 0$ para todo $x \in X$ y para todo $f \in X^*$

///.

- **Convergencia de sucesiones de funcionales.** Sea $\{ f_n \}$ una sucesión de funcionales lineales acotados en un espacio normado X. Entonces:

  1. Convergencia fuerte de $\{ f_n \}$ significa que existe un $f \in X^*$ tal que

  $$\|f_n - f\| \to 0 \quad (\text{Notacion: } \; f_n \xrightarrow{\|\,\|} f).$$

  2. Convergencia débil$-*$ de $\{ f_n \}$ significa que existe $f \in X^*$ tal que

  $$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X \quad (\text{Notacion: } \; f_n \xrightarrow{w} f).$$

1.3. Espacios de Banach Funcionales Analíticos

Sea X un conjunto no vacío, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, y $\mathrm{H} \subset \mathbb{F}^X$ un espacio de Banach[4]. Diremos que H es un **Espacio de Banach Funcional**, si para todo $y \in X$, el funcional de evaluación puntual en y es acotado . Es decir, **si**

$\forall\, y \in X$, el operador $\delta_y : \mathrm{H} \to \mathbb{F}$, definido por

$$\delta_y(f) = f(y)$$

es acotado. Si X es una región en el plano complejo y las funciones de H son analíticas sobre el conjunto X, H se dice **Espacio de Banach Funcional Analítico**.

Puesto que nuestro interés estará centrado en espacios de Banach funcionales cuyos elementos son funciones analíticas, describimos a continuación una clase muy importante de tales espacios..

[4]Usaremos la notación A^B para denotar al conjunto de todas las funciones de B en A.

1.3.1. Espacios de Hardy $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$

Si $f \in \mathrm{C}(\mathbb{D})$,[5] usaremos la notación f_r para designar la función $f_r : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por $f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta})$. Si $f \in \mathbf{H}(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$ y $r \in [0,1)$, denotemos mediante $M_p(f,r)$ la media integral

$$M_p\,(f,r) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})\,|^p d\theta \right\}^{1/p} = \|\, f_r\,\|_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

Definimos el espacio de Hardy $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$ como el espacio vectorial de todas las funciones $f \in \boldsymbol{H(}\mathbb{D}\boldsymbol{)}$ tales que

$$\sup_{0<r<1} M_p(f,r) < \infty$$

Para con $p \geq 1$, $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}) = \mathrm{H}^p$ es un espacio de Banach[6] (ver [28]), con norma:

$$\|\, f\,\|_{\mathrm{H}^p} \quad := \quad \sup_{0<r<1} M_p(f,r). \tag{1.8}$$

Denotamos por H^∞ al espacio de las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$ con la norma:

$$\|f\|_\infty := \sup\left\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\right\}.$$

Propiedades de los Espacios $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$

1. Usando el hecho de que la medida $\dfrac{d\theta}{2\pi}$ es finita, y la desigualdad de Jensen ([28]), tenemos la siguiente contención espacial

$$\mathrm{H}^\infty \subset \mathrm{H}^p \subset \mathrm{H}^1.$$

   Para todo $p \geq 1$.

[5] Como es usual $\mathrm{C}(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas en $\Omega \subset \mathbb{C}$

[6] La prueba de este hecho para el caso $p = 2$ será desarrollada en el capítulo 2.

2. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función $f \in \mathrm{H}^\infty$, que tenga como ceros prescritos los de una sucesión $\{\alpha_n\}$, es que dicha sucesión satisfaga la condición

$$\sum_{1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty. \tag{1.9}$$

Esta condición se conoce con el nombre de **Condición de Blaschke**. Ver [28]. En concreto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1.

Sea $\alpha = \{\alpha_n\} \subset \mathbb{D}$ una sucesión que satisface la condicion de Blaschke (1.9). Sea $m := \mathrm{Card}\,(\alpha^{-1}\{0\})$. Entonces el producto infinito

$$B(z) := z^m \prod_{|z_n| \neq 0} \frac{-\bar{\alpha}_n}{|\,\alpha_n\,|} \frac{z - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha}_n\, z} \tag{1.10}$$

converge en $\mathbb{D}$. La función $B(z)$ está en $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ y los ceros de B(z) son precisamente los puntos α_n, cada uno con multiplicidad igual a el número de veces que el mismo aparece en la sucesión $\{\alpha_n\}$.
Además $|\,B(z)\,| \leq 1$ y $|\,B(e^{i\theta})| = 1$ en c.t.p.

La función definida en (1.10) se denomina **producto de Blaschke** asociado a la sucesión $\{\,\alpha_n\}$.

$///.$

Teorema 1.2.

Si $f \in \mathrm{H}^p$, $p \geq 1$, entonces el límite

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) \tag{1.11}$$

existe en c.t.p. de $\partial\mathbb{D}$. f^* define una función en $L^p[0, 2\pi\,]$ y

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\, f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

En particular

$$\|\, f \,\|_{\mathrm{H}^p} = \lim_{r \to 1} \|\, f_r \,\|_{L^p(\partial\mathbb{D})} = \|\, f^* \,\|_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

$///.$

Observación 1.3.

Supongamos que $f \in \mathrm{H}^p$, $p > 1$, y que f no es identicamente igual a cero. Sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Pongamos $g = \frac{f}{B}$. Entonces $g \in \mathrm{H}^p$ [13] y $\| g \|_{\mathrm{H}^p} = \| f \|_{\mathrm{H}^p}$.[7] Como g no tienes ceros en $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, existe una $\varphi \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D})$ tal que $\exp(\varphi) = g$ ([28]). Pongamos $h = \exp(p\varphi/2)$. Entonces $h \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D})$, y $|h|^2 = |g|^p$, por lo que $h \in \mathrm{H}^2$. De hecho, $| h|_2^2 = | g|_p^p$.

Por lo tanto, f tiene una factorización de la forma

$$f = B \cdot h^{2/p},$$

donde $h \in \mathrm{H}^2$. y h no tiene ceros en $\mathbb{D}$. Esto hace posible, en muchos casos, aplicar resultados de H^2 a funciones de cualquier H^p.

///.

Observación 1.4.

Dado $f \in L^1\partial(\mathbb{D})$, la extensión armónica de f a $\mathbb{D}$, denotada por $\tilde{f}(z)$, está definida como

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) P_z(\theta) d\theta, \qquad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{1.12}$$

donde

$$P_z(\theta) = \frac{1 - | z|^2}{|1 - \overline{z}\, e^{i\theta}|^2} = \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

es el núcleo de Poisson de $\mathbb{D}$. Por ser la parte real de una función analítica, $P_z(\theta)$ es armónica en z para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$. En consecuencias $\tilde{f}(z)$

[7] $\| g \|_{\mathrm{H}^p}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | g^*(e^{i\theta}) |^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B^*(e^{i\theta})|^p |g^*(e^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B^* g^*(e^{i\theta})|^p d\theta = \| f \|_{\mathrm{H}^p}^p$.

es armónica en $\mathbb{D}$. Además, si $\hat{f}(n)$ son los coeficientes de Fourier de f, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\,\theta\,)\,P_z(\,\theta\,)d\theta \;=\; \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\hat{f}(n)z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}(-n)z^{-n}.$$

De manera que para $f \in L^p(\,\partial\mathbb{D})$, la extensión $\tilde{f}(z)$ es analítica en $\mathbb{D}$ si y solo si sus coeficientes de Fourier, $\hat{f}(n)$, son iguales a cero, para todo entero negativo

Reciprocamente, si f es una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que

$$\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})\,|^p d\theta\right) < +\infty, \tag{1.13}$$

entonces el límite radial

$$f^*(\theta) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe en c.t.p; los coeficientes de Fourier de f^* satisfacen: $\hat{f}(n) = 0$ para todo entero negativo n; y la extensión armónica de f^* a $\mathbb{D}$ es precisamente $f(z)$. Esta extensión armónica, establece una correspondencia $1-1$ entre las funciones $f \in L^p\partial(\mathbb{D})$ tales que $\hat{f}(n) = 0$ para todo entero negativo, y el espacio de funciones analíticas que cumplen (1.13)

Por tanto

$$\|\, f\,\|^p_{L^p(\partial\mathbb{D})} \;:=\; \sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{f}(re^{i\theta})\,|^p d\theta.$$

///.

Usaremos la formula de Cauchy para demostrar que $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$, $p \geq 1$, es un espacio de Banach funcional.

Sea $w \in \mathbb{D}$. La formula de Cauchy (1.1) muestra que si $|\, w\,| < r < 1$ y Γ_r es el círculo de radio r con centro en el origen, entonces, para cualquier f en $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - w}\, rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot \frac{r}{r - we^{-i\theta}}\, d\theta \end{aligned}$$

de lo cual resulta, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$|\, f(w)\,| \ \leq \ \|f_r\|_p \left\| \frac{r}{r - we^{-i\theta}} \right\|_q$$

donde $f_r \in \mathbb{C}^{[0,2\pi]}$ es la función definida como: $f_r(\theta) := f(re^{i\theta})$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Como $\left|\dfrac{r}{r - we^{-i\theta}}\right|$ converge uniformemente a la funcion acotada $(1 - we^{-i\theta})^{-1}$ cuando $r \to 1$ y $\|\, f_r \,\|_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq \|\, f\,\|_{\mathrm{H}^p}$, el funcional evaluación en w es continuo. Así $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$ es un espacio de

Banach funcional.

Lema 1.5. *Supongamos que* $f(z) = \dfrac{(az + b)}{(cz + d)}$ *es una función no constante en* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$; *entonces*

$$\|\, f\,\|^2 = \frac{|a| + |b|^2 - 2Re(\frac{\bar{a}bc}{d})}{|d|^2 - |c|^2}.$$

$///.$

1.4. Espacios de Hilbert

- Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un producto interno en H es una función $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que

  1. $\langle\, x, y\,\rangle = \overline{\langle\, y, x\,\rangle}$. para todo $x, y \in \mathcal{H}$

2. $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$ para todo $x,y,z \in \mathcal{H}$.
3. $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$ para todo $x,y \in \mathcal{H}$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
5. $\langle x,x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$

Una propiedad fundamental de un espacio con producto interno, $\mathcal{H}$, es la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**, la cual establece

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$$

para toda $x,y \in \mathcal{H}$, obteniéndose la igualdad si y solo si uno de los dos vectores (x ó y) es múltiplo escalar del otro.

Si H es un espacio con producto interno, la formula $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ define una norma en H (llamada la norma inducida por el producto interno). Si $\mathcal{H}$ con la norma definida anteriormente es un espacio de Banach, entonces diremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

En adelante $\mathcal{H}$ denotara un espacio de Hilbert

///.

- Sean x,y vectores en $\mathcal{H}$. Se dice que x,y son vectores ortogonales cuando

$$\langle x,y \rangle = 0.$$

Esto suele abreviarse con la expresión $x \perp y$.

Sea A un sub-conjunto no vacío de H, entonces el complemento ortogonal $A^{\perp}$ de A es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a todo vector de A. Esto es,

$$A^{\perp} = \{ x \in \mathcal{H} : x \perp y \quad \forall y \in A\}.$$

Un subespacio vectorial M de H es denso si y solo si el cero es el único vector ortogonal a M.

///.

Proposición 1.6. *Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una familia ortonormal de vectores en $\mathcal{H}$. Las siquientes condiciones son equivalentes:*

a. La familia $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal.

b. Si $x \perp e_i$ para cada $i \in I$, entonces $x = 0$.

c. Para cada vecto x tal que $\langle x, e_i \rangle \neq 0$ para a la más una cantinad numerable de indices $i \in I$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ donde la serie converge en norma.

d. Para cada par de vectores x, y, se tiene que $\langle x, e_i \rangle \neq 0$ y $\langle y, e_i \rangle \neq 0$ para, a lo sumo, una cantidad numerable de indices, y

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}.$$

e. Para cada vector x,

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} | \langle x, e_i \rangle |^2.$$

///.

- [**Teorema de Representación de Riez**].

  f es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{H}$ si y solo si existe un (único) vector $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

  ///.

- [**Adjuntos**]. Por el teorema de representación de Riesz, si T es un operador en $\mathcal{H}$, entonces el operador adjunto T^* de T es también un operador acotado en $\mathcal{H}$, y estan relacionado por la ecuación

  $$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

  la cual es usada algunas veces como definición del adjunto de un operador lineal acotado en espacio de Hilbert. Además, el operador adjunto de T^* es T.

- [**Clases de Operadores**].

  Un operador T que pertenece a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice positivo, y escribiremos $T \geq 0$ sii $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

  Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice:

  a Normal, si $T^* T = T T^*$.

  b Autoadjunto, si $T = T^*$.

c Subnormal, si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{H}$ y un operador normal $N \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ tal que $N|_{\mathcal{H}} = T$.

d Hiponormal, si $T^*T \geq TT^*$.

e Unitario si $U^*U = UU^* = I_{\mathcal{H}}$.

Es claro que todo operador normal es subnormal y no es dificil verificar que todo operador subnormal es hiponormal (ver por ejemplo [17]).

$///.$

- Dos operadores $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dicen **unitariamente equivalentes** sii existe un operador unitario $U \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$T = U^*SU$$

Note que un operador unitario, $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, es una isometría sobre $\mathcal{H}$. En consecuencia, la equivalencia unitaria de operadores preserva las propiedades métricas.

- ## Operadores Compactos.

Denotaremos a la bola unitaria de un espacio normado X mediante $\mathbb{B}_X$.

`Sean` X, Y `espacios de Banach. Un Operador` $T : X \to Y$, `se dice Compacto si` $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ `es un subconjunto compacto de` Y.

Proposición 1.7. *Sean X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ un operador lineal compacto y supongamos que $x_n \xrightarrow{w} x$.Entonces $\{T(x_n)\}$ converge fuertemente en Y.*

Demostración. Escribiremos $y_n = T(x_n)$ y $y = T(x)$. Veamos, en primer lugar que $y_n \xrightarrow{w} y$. Luego mostraremos que $y_n \xrightarrow{\|\,\|} y$.

Sea g un funcional lineal acotado en Y. Definamos ahora un funcional en X, de la manera siguiente

$$f(z) := g(T(z)) \qquad (z \in X)$$

Por hipótesis T es compacto, por tanto acotado. De aqui

$$|f(z)| = |g(T(z))| \leq \|g\|\|T(z)\| \leq \|g\|\|T\|\| z\|.$$

En consecuencia f es lineal y acotado.

Como $x_n \xrightarrow{w} x$, resulta $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, lo que a su vez implica $g(y_n) \longrightarrow g(x)$. Como g es arbitraria concluimos que

$$y_n \xrightarrow{w} y.$$

Probemos ahora que $y_n \xrightarrow{\|\,\|} y$.

Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces $\{y_n\}$ tiene una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que

$$\| y_{n_k} - y\| \geq \eta$$

para algún $\eta > 0$.

Como $x_n \xrightarrow{w} x$, $\{x_{n_k}\}$ es acotada y puesto que T compacto, $\{T(x_{n_k})\}$ debe contener una subsucesión convergente, digamos $\{\tilde{y}_j\}$. Supongamos $\tilde{y}_j \xrightarrow{\|\,\|} \tilde{y}$. Entonces, necesariamente $\tilde{y} = y$, y por lo tanto

$$\|\tilde{y}_i - y\| \to 0.$$

Pero $\|\tilde{y}_i - y\| \geq \eta > 0$, lo cual es una contradicción. De aquí que $y_n \xrightarrow{\|\,\|} y$. ■

- [**Propiedades de los operadores compactos**] Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.
  - $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es compacto si y sólo si T^* es compacto.
  - Un operador T en $\mathcal{H}$ es compacto , si, y sólo si existe una sucesión $\{T_n\}$ de operadores de rango finito[8] tal que, $\| T_n - T\| \to 0$.
  - Un operador T en $\mathcal{H}$ es compacto si y sólo si $\|Tx_n\| \longrightarrow 0$ siempre que $x_n \xrightarrow{w} 0$ en $\mathcal{H}$.
  - Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es compacto y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ entonces TS y ST también son operadores compactos.
  - Si $T, S \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ son compacto, entonces $T + S$ es compacto.

[8]Un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es llamado operador de rango finito, si el rango de T es finito dimensional

$///.$

- Si X es un espacio de Banach denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en $\mathcal{L}(X)$. El espacio cociente $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es llamado **Álgebra de Calkin**. La `norma esencial` de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se define como

  $$\| T \|_e := \text{ínf}\{\| T - K \| : K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\};$$

  esto es, $\| T \|_e$ es la norma de la clase de T en el álgebra de Calkin.

  La norma esencial representa la distancia entre T y el espacio de todos los operadores compactos $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; en particular $\| T \|_e = 0$ si y solo si T es compacto.

$///.$

Capítulo 2

El Espacio $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$

Recordemos que el espacio de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ (H^2, por simplicidad) se define como

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ \text{analítica} \quad : \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \right\}.$$

Este conjunto es diferente de vacío, pues contiene a los polinomios.

Mostraremos que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ es en realidad un espacio de Hilbert, con producto interno:

$$\langle f, g \rangle := \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, \overline{g(re^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Recordemos que si $f \in \mathbf{H}(\mathbb{D})$, la notación f_r, designará a la función $f_r \in \mathbb{C}^{\partial \mathbb{D}}$ definida mediante

$$f_r(\theta) := f(re^{i\theta}).$$

Supongamos que $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. Entonces f es una función analítica en $\mathbb{D}$, con expansión en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k, \ \ \forall \ \ z \in \mathbb{D}^1.$$

Luego

[1] La dualidad de $\hat{f}(k)$ como coeficiente de MacLauring y coeficiente de Fourier de f fue explicada en la sección 1.3.1. Observacion 2.

$$
\begin{aligned}
\| f_r \|_2^2 &= \int_0^{2\pi} f_r(\theta)\overline{f_r(\theta)}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\overline{f(re^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) r^k e^{ik\theta}\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\hat{f}(m)} r^m e^{-im\theta}\right) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{f}(k)\,\overline{\hat{f}(m)}\, r^{k+m} e^{i(k-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |\, \hat{f}(k)\,|^2 r^{2k},
\end{aligned}
$$

toda la serie involucrada converge absolutamente. De esto podemos concluir que la función $r \mapsto \|f_r\|_2$ es creciente en $(0,1)$. En consecuencia, el supremo en 1.8 puede ser reemplazado por $\lim_{r\to 1}$. Así

$$
\|f\|_{\mathrm{H}^2}^2 = \lim_{r\to 1} \sum_{k=o}^{\infty} |\, \hat{f}(k)\,|^2 r^{2k} = \sum_{k=o}^{\infty} |\, \hat{f}(k)|^2.
$$

De manera similar para $f, g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ obtenemos

$$
\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)},
$$

Es fácil constatar que $\langle\,,\,\rangle$ define un producto interno, y que $\|f\|_{\mathrm{H}^2}^2 = \langle f, f\rangle$ para cualquier $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

Nos proponemos, a continuación, mostrar que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert funcional analítico; esto es, que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ es completo y que los funcionales de evaluacion puntual sobre $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ son acotados. Esta última afirmación es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Supongamos que $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y que $\lambda \in \mathbb{D}$. Entonces*

$$|f(\lambda)| \quad \leq \quad \frac{\| f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}. \tag{2.1}$$

Demostración. Para un λ fijo en $\mathbb{D}$, consideremos la función $K_\lambda(z) = \dfrac{1}{1-\overline{\lambda} z}$ donde $|z|<1$. Notemos que $K_\lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\lambda}^{\,m} z^m$, de esta manera $K_\lambda \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, y

$$\|K_\lambda\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\,\overline{\lambda}^{\,m}|^{\,2} = \frac{1}{1-|\lambda|^2}.$$

La clave de la afirmación (2.1), está en que para cualquier $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$,

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle.$$

En efecto, para $r \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\overline{K_\lambda(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m r^m e^{-im\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\lambda^n r^{2n} \\
&= f(\lambda r^2).
\end{aligned}$$

f es analítica en $\mathbb{D}$, de manera que

$$\langle f, K_\lambda \rangle = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\overline{K_\lambda(re^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 1} f(\lambda r^2) = f(\lambda),$$

luego

$$|f(\lambda)| = |\langle f, K_\lambda\rangle| \leq \|f\|\|K_\lambda\| = \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}.$$

La función K_λ, $\lambda \in \mathbb{D}$, se denomina **Núcleo de Cauchy**[2]; más adelante explicaremos porque a una función tal como K_λ se le denomina núcleo reproductivo.

■

[2] La demostración de la proposición anterior se puede obtener también usando la fórmula de Cauchy para funciones en $\mathbf{H}(\mathbb{D})$. La demostración que damos la consideramos mas adecuada para nuestros propósitos.

Proposición 2.2. *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, *y* $\lambda \in \mathbb{D}$. *Entonces la sucesión* $\{f_n(\lambda)\}$ *converge uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathbb{D}$.

Demostración.

Si R es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces $c = \sup\{|\lambda| : \lambda \in R\} < 1$.

Por lema 2.1, $|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \dfrac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{1-c^2}}$. Además,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{\lambda\in R} |\, f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \lim_{n,m\to\infty} \|\, f_n - f_m\| = 0.$$

■

`Supongamos que` $\{f_n\}$ `es una sucesión de Cauchy en` $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ `. Definimos la función` $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ `mediante` $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. `Mostraremos que` $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, `y que`

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

En efecto,

Puesto que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función f, en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, $f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D})$.

Por otra parte tenemos que, para todo $r < 1$, dado $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$: $\|\,(f_n - f_m)_r\,\|_{L^2} < \epsilon$; luego,

$$\lim_{n\to\infty} \|\,(f_n - f_m)_r\|_{L^2} = \|\,(f - f_m)_r\|_{L^2} = M_2\,(f - f_m, r) = \lim_{n\to\infty} M_2\,(f_n - f_m, r) \leq \epsilon$$

de donde resulta

$$\|\, f_r\|_2 \leq \epsilon + \|\, f_{m_r}\|_2.$$

En consecuencia, (tomando $\sup\limits_{0<r<1}$) $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y $\|f - f_m\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

■

Resumiendo, tenemos

Teorema 2.3. $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ *es un espacio de Hilbert funcional analítico.*

El espacio $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ puede verse también como

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D}) \ : \ \sum_{j=0}^{+\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}.$$

Consideremos ahora el conjunto formado por las funciones en $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ definidas como:

$$e_n(z) = z^n \text{ para } n \geq 0$$

Teorema 2.4. *El conjunto* $\{e_n\}$ *forma una base ortonormal de* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$

Demostración. Sea $n \neq m$. y $z \in \mathbb{D}$, Entonces

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^m \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\overline{e^{im\theta}}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\theta(n-m)}}{i(n-m)}\bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i2\pi\theta(n-m)}}{i(n-m)} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\|z^n\|^2 = \langle z^n, z^n\rangle &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\overline{e^{in\theta}}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-n)}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta(0)}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 1.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Espacios HFA y Núcleos Reproductivos

En lo que que sigue $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, E es un conjunto no vacío y $\mathcal{H} \subset \mathbb{F}^E$ es un espacio de Hilbert. La norma de un elemento en $\mathcal{H}$ será denotado por $\|f\|$, y el producto interior mediante $\langle f_1, f_2 \rangle$, con f_1, f_2 en $\mathcal{H}$.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Diremos que $\mathcal{H}$ es un **espacio de Hilbert funcional**, si para todo $y \in E$, los funcionales de evaluación puntual son acotados en $\mathcal{H}$; es decir si $\forall\, y \in E$, el funcional lineal $\delta_y : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$, definido por

$$\delta_y(f) := f(y)$$

es continuo.

En este caso para cada $y \in E$, el teorema de representación de Riesz, garantiza la existencia de un **único elemento**, $K_y, \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle f, K_y \rangle = f(y),$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.
Este elemento K_y es llamado **núcleo reproductivo** del punto y de $\mathcal{H}$.

Definición 3.2. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert funcional, la función

$$K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} :\to \mathbb{C},$$

definida por

$$K(x,y) := K_y(x),$$

se denomina **núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$**.

Observemos que:

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle\, K_y, K_x \,\rangle.$$

El término, espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, es, por lo tanto, sinónimo de espacio de Hilbert funcional. Si los elementos de un espacio de Hilbert funcional, $\mathcal{H}$ son funciones analíticas en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces diremos que $\mathcal{H}$ es un **espacio de Hilbert funcional analítico (HFA).**

3.1. Propiedades Básicas de los Núcleos Reproductivos

Teorema 3.3. *El espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$, admite a lo sumo un único núcleo reproductivo.*

Demostración. Supongamos que K y $\hat{K}$ son núcleos reproductivos de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned}
||K_y - \hat{K}_y||^2 &= \langle K_y - \hat{K}_y, K_y - \hat{K}_y \,\rangle \\
&= \langle K_y - \hat{K}_y, K_y \rangle - \langle K_y - \hat{K}_y, \hat{K}_y \rangle \\
&= \langle\, K_y, K_y \,\rangle - \langle\, \hat{K}_y, K_y \,\rangle - \langle\, K_y, \hat{K}_y \,\rangle + \langle\, \hat{K}_y, \hat{K}_y \,\rangle \\
&= K(y,y) - \hat{K}(y,y) - K(y,y) + \hat{K}(y,y) = 0.
\end{aligned}$$

Lo que implica que $K = \hat{K}$.

Teorema 3.4. *Si K es el núcleo reproductivo de un espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$, entonces para todo par x, y en E se tiene,*

a) $K(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in E.$

b) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

c) $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)\,K(y,y)$

Demostración.
a. Si $x \in E$ entonces

$$0 \leq \|\, K_x \,\|^2 = \langle K_x, K_x \rangle = K(x,x).$$

b. $\forall\, x, y \in E$

$$K(x,y) = \langle\, K_y, K_x \,\rangle = \langle \overline{K_x, K_y} \rangle = \overline{K(y,x)}.$$

c. Por la desigualdad de Cauchy- Shwartz

$$|K(x,y)|^2 = |\langle\, K_y, K_x \,\rangle| \leq \|K_y\|^2 \,\|\, K_x \,\|^2 = K(y,y)\,K(x,x).$$

■

Teorema 3.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K. Entonces el espacio generado por $K(E) = \{K_x \,/\, x \in E\}$ es denso en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $f \in H$

$$\begin{aligned} f \perp \operatorname{span} K(E) \;&\Leftrightarrow\; \langle f, k_y \rangle = 0 \qquad \forall\, y \in E \\ &\Leftrightarrow\; f(y) = 0 \qquad \forall\, y \in E. \end{aligned}$$

Así, $f = 0$, y por tanto el espacio generado por $K(E)$ es denso en $\mathcal{H}$.

■

Una cualidad muy particular de los espacios HFA, que a menudo resulta deteminante en las aplicaciones, es que no necesitamos disponer de toda la familia de núcleos reproductivos para generar el espacio $\mathcal{H}$. La demostración del teorema anterior y el teorema de unicidad para funciones analíticas implican la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Sea $\mathcal{H} \subset \boldsymbol{H}(\Omega)$ un espacio* HFA, *con familia de núcleos reproductivos $\{K_w\}_{w \in \Omega}$. Si $\{w_n\}$ es una sucesión convergente en Ω, entonces*

$$\overline{\operatorname{Span}(K_{w_n})} = \mathcal{H}.$$

Demostración.

La demostración es similar a la de la proposición anterior, reemplazando $K(E)$ por $K(w_n)$ e invocando el teorema de unicidad para funciones analíticas.

$///.$

Teorema 3.7. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional con núcleo reproductivo K, y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una suceción de Cauchy (respecto a la norma) en $\mathcal{H}$, y f límite de dicha sucesión, entonces,*

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$$

para toda $y \in E$.

Demostración. Sea $y \in E$

$$|\,(f_n - f)(y)| = |\,\langle f_n - f, k_y\rangle| \leq \|f_n - f\|\;\|k_y\| \to 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 3.8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K. Si $\{e_j : j \in J\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ (J un conjunto de indices), entonces el núcleo reproductivo K, está dado por:*

$$K(x,y) = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j(x)^1,$$

donde la serie converge puntualmente.

Demostración. Si $y \in E$, entonces:

$$\langle\, K_y, e_j\rangle = \overline{\langle e_j, K_y\rangle} = \overline{e_j(y)}.$$

Así

$$K_y = \sum_{j\in J}\langle K_y, e_j\rangle\, e_j = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j.$$

Puesto que esta suma converge en norma, ella converge puntualmente y

[1]Por la teoría de sumas conmutativas en espacios de Banach (ver[4]), ésta es una suma de una cantidad numerable de términos.

$$K(x,y) = K_y(x) = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j(x).$$

■

Observación 3.9.

En el capítulo anterior demostramos que el conjunto $\{e_n\}$ es una base de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, por lo tanto el núcleo reproductivo de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, viene dado como

$$K_w(z) = K(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, \overline{w}^n = \frac{1}{1-\overline{w}\, z}.$$

Esto justifica el comentario que hicimos al concluir la demostración de la proposición (2.1).

3.2. Caracterización de los Núcleos Reproductivos

En esta sección exhibiremos condiciones necesarias y suficientes para que una función $K(x,y)$ sea un núcleo reproductivo para algún espacio de Hilbert funcional.

Recordemos primero algunas nociones de la teoría de matrices.

Una matriz compleja $A = \big(a_{i,j}\big)_{n\times n}$ se dice positiva $\big(A \geq 0\big)$ sí, y sólo si, para toda $n-$upla $(\alpha_1,\, \alpha_2,\, ...,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ se cumple

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j\, a_{i,j} \geq\ 0. \tag{3.1}$$

Es claro que si $\langle\, ,\, \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$, entonces $A \geq 0$ si y solo si $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$. De hecho, la suma en (3.1) es igual a $\langle Ax, x\rangle$ para el vector x cuya i-esima componente es el número α_i.

No es difícil verificar que $A \geq 0$, si y solo si $A = A^*$ y todo autovalor[2] λ de A satisface $\lambda \geq 0$. Por esta razón, algunas autores prefieren referirse a una tal matriz semi-definida positiva o no negativa.

[2]Recuérdese que $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice autovalor de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si $T(v) = \lambda v$ para algún $v \neq 0$.

En el caso que $A = A^*$ y que todo autovalor λ de A satisfaga $\lambda > 0$, entonces diremos que A es estrictamente positiva $\big(A > 0\big)$.[3]

Definición 3.10. Sea E un conjunto y $K : E \times E \to \mathbb{C}$ una función de dos variables. K se dice una función núcleo $\big(K \geq 0\big)$ siempre que, para todo n y para toda escogencia de n puntos distintos, $\{ x_1, ... x_n \} \subset E$, la matriz $\big(K(x_i, x_j)\big) \geq 0$.

Proposición 3.11. *Sea $\mathcal{H}$ en espacio de Hilbert funcional con núcleo reproductivo K. Entonces K es una función núcleo.*

Demostración. Si $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, son escalares en $\mathbb{C}$ y $y_1, y_2, ..., y_n$ son elementos de $\mathcal{H}$, entonces, para la función $x \to \sum_{j=1}^{n} \xi_j K(x, y_j)$ de $\mathcal{H}$ se tiene,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \| \sum_{j=1}^{n} \xi_j K_{y_j} \|^2 &= \langle \sum_{j=1}^{n} \xi_j K_{y_j}, \sum_{i=1}^{n} \xi_i K_{y_i} \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi_i} \xi_j \, \langle K_{y_j}, K_{y_i} \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi_i} \, \xi_j \, K(y_i, y_j).
\end{aligned}
$$

■

Generalmente, un núcleo reproductivo satisface $K(y_i, y_j) > 0$ puesto que, en caso contrario, debe existir algún vector $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, diferente de $\mathbf{0}$ tal que

$$\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j K_{y_j} \| = 0.$$

Por lo tanto $\forall f \in \mathcal{H}$ tenemos $\sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j} \, f(y_j) = \langle f, \sum_{j=1}^{n} \xi_j K_{y_j} \rangle = 0$. Así, en este caso, existe una ecuación de dependencia lineal entre los valores de todas las funciones en $\mathcal{H}$ para algún conjunto finito de puntos $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset E$.

[3] Note que si A es una matriz, la afirmación $A > 0$ es equivalente a $A \geq 0$ y A es invertible.

Teorema (E.G. Moore-N. Aronzajn)

Sea E un conjunto y $K : E \times E \to \mathbb{F}$ una función. Si K es una función núcleo, entonces existe un único espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$, tal que K es el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$.

Demostración. Sea H_0 el espacio generado por el conjunto $\{K_x : x \in E\}$. Definimos un producto interno en H_0 de la siguiente manera:

Consideremos $f = \sum_{i\in J} \alpha_i K_{x_i}$ y $g = \sum_{j\in J} \beta_j K_{t_j}$, entonces,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j}\, K(t_j, x_i).$$

donde J es un sunconjunto de indices finito.

Sea $f \in H_0$, entonces, si $y \in E$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle f, K_y \rangle &= \langle \sum_{j\in J} \alpha_j\, K_{y_j}, K_y\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \alpha_j \langle\, K_{y_j}, K_y\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \alpha_j\, K(y, y_j) \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ la completación de H_0 con la norma inducida por $\langle\, ,\, \rangle$. Bastará probar que $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ es único.

Supongamos que H es otro espacio de Hilbert que admite a K como núcleo reproductivo.

Entonces $H_0 \subset \mathcal{H}_{\mathcal{K}}$, pues los elementos de de H_0 son combinaciones lineales de las funciones K_y pertenecientes a H .

Para ver que

$$H = \mathcal{H}_{\mathcal{K}} \qquad \text{y} \quad \langle\, ,\, \rangle_H = \langle\, ,\, \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}.$$

observemos que para cualquier $x, y \in E$

$$\langle\, K_y, K_x\rangle_H = K(x, y) = \langle K_y, K_x\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$$

. En consecuencia, por linealidad, para todo $f, g \in H_0$

$$\langle f, g \rangle_H = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{K}}$$

. Como H y $\mathcal{H}_\mathcal{K}$ son completaciones de H_0, se sigue de la unicidad de la completación que $H = \mathcal{H}_\mathcal{K}$.

■

Definición 3.12. Dada una función núcleo $K : E \times E \to \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{H}_\mathcal{K}$ denota el único espacio de Hilbert funcional con núcleo reproductivo K.

Proposición 3.13. *Sea E un conjunto arbitario, $f : E \to \mathbb{C}$ una función diferente de cero y pongamos $K(x,y) := f(x)\overline{f(y)}$. Entonces K es positiva, $\mathcal{H}_\mathcal{K}$ es el espacio generado de f y $\| f \| = 1$.*

Demostración.

Notemos que K_y se puede escribir de la forma, $K_y = \overline{f(y)}f$. De acá

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi_j} K(y_i, y_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi_j} \langle K_{y_j}, K_{y_i} \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi_j} \langle \overline{f(y_j)} f, \overline{f(y_i)} f \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi_j} \overline{f(y_j)}\, f(y_i) \langle f, f \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi_j} \overline{f(y_j)}\, f(y_i) \, \|f\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(y_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j f(y_j)} \right) \|f\|^2 \\
&= |\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(y_i)|^2 \|f\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto K es positiva.

Ahora bien, por ser $K_y = \overline{f(y)} f$, W es el espacio de dimensión uno generado por f, y ya que los espacios de dimensión uno son completos se tiene que $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ es justamente el espacio generado por f.

Finalmente, calculemos la norma de f.
Fijemos un punto cualquiera y tal que $f(y) \neq 0$. Entonces,

$$|f(y)|^2 \|f\|^2 = \|\overline{f(y)} f\|^2 = \|K_y\|^2 = \langle K_y, K_y \rangle = K(y,y) = |f(y)|^2 \Longrightarrow \|f\|^2 = 1,$$

Así,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \, \bar{\xi}_j \, K(y_i, y_j) = \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(y_i) \right|^2 .$$

■

Capítulo 4

Operadores de Composición

Sea X un conjunto arbitrario no vacío.

Supóngase que, $\forall\, x \in X,\ F_x$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces, el producto cartesiano

$$\prod_{x \in X} F_x$$

es un espacio vectorial, cuando definimos las operaciones lineales puntualmente.

Cada elemento de $\prod_{x \in X} F_x$ se conoce como una *sección* (o corte transversal) y a la familia $\prod_{x \in X} F_x$, se le llama un fibrado vectorial sobre X.

Ejemplo 1

Si $\quad F_x = \mathbb{C}, \quad \forall\, x \in X$, entonces

$$\prod_{x \in X} F_x \quad = \quad \{f : X \mapsto \mathbb{C}\}.$$

$///.$

Sea $L(X)$ un subespacio vectorial topológico de $\prod_{x \in X} F_x$.

Si $\varphi : X \mapsto X$ es una aplicación tal que

$$(f \circ \varphi) \in \prod_{x \in X} F_x \quad \text{para toda} \quad f \in L(X)\,,$$

entonces la correspondencia

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

define una transformación lineal de $L(X)$ a $\prod_{x\in X} F_x$ llamada *Operador de Composición con símbolo* φ, y denotada como C_φ.

Al parecer, una de las primeras referencias a Operadores de Composición data de 1871, cuando, Schroeder [32] estudió el siguiente *problema espectral*:

`Dada una función` φ, `hallar funciones` f `y escalares` α `tales que`

$$(f \circ \varphi)(z) = \alpha f(z)$$

$\forall z$ `en un dominio apropiado`

En las últimas décadas, la teoría de operadores de composición tomó nuevo impulso a raíz de la publicación del artículo "`Composition Operators`" de E. A. Nordgren [24] en 1968; así como la publicación de la tesis doctoral "`Composition operators on` H^p"(University of Toledo, 1969), de H. J. Schwartz [29].

Nos interesan, en particular, los casos en que $C_\varphi : \mathcal{L}(X) \mapsto \mathcal{L}(X)$; en especial, el caso en que

- X es un dominio de $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^n$,
- $\varphi : X \mapsto X$ es una función holomorfa y
- $L(X)$ es un espacio vectorial topológico cuyos elementos son funciones holomorfas definidas en X.

En lo que sigue, $\mathcal{H} \subset \mathbb{F}^{\mathbb{D}}$ denotará un espacio de Hilbert Funcional.

Proposición 4.1. *Cualquier operador de composición de* $\mathcal{H}$ *en* $\mathcal{H}$, *es acotado.*

Demostración. Aplicaremos el teorema del gráfico cerrado. Supongamos que $\{f_n\}$ es una suceción de funciones en $\mathcal{H}$ que converge en norma a un elemento f; supongamos también que $\{C_\psi(f_n)\}$ converge a algún elemento g. Como cada función de evaluación es acotada, las funciones f_n convergen puntualmente a f; en consecuencia $C_\psi(f_n) = f_n \circ \psi$ converge puntualmente a $C_\psi(f) = f \circ \psi$. Por unicidad de límite tenemos $C_\psi(f) = g$. ■

Mientras que es facíl describir un operador de composición C_ψ, con frecuencia es difícil representar el adjunto, C_ψ^* explicitamente. Este ,sin embargo tiene una propiedad particularmente útil.

Teorema 4.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert Funcional y A un operador sobre $\mathcal{H}$. Entonces A es un operador de composición si y solo si el conjunto $K(\mathbb{D}) = \{K_x / \, x \in \mathbb{D}\}$ es invariante bajo A^*. En este caso ψ es determinado por $A^* K_x = K_{\psi(x)}$.*

Demostración.

Supongamos que A es un operador de composición, digamos $A = C_\psi$ para algún ψ. Sea $K_x \in K(\mathbb{D})$ entonces $\forall f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle\, f, A^* K_x \,\rangle &= \langle Af, K_x \rangle \\ &= \langle C_\psi(f), K_x \rangle \\ &= \langle f \circ \psi, K_x \rangle \\ &= (f \circ \psi)(x) \\ &= f(\psi(x)) \\ &= \langle f, K_{\psi(x)} \rangle. \end{aligned}$$

Así $A^* K_x = K_{\psi(x)}$. Por lo tanto $K(\mathbb{D})$ es invariante bajo A^*
Consideremos ahora $K(\mathbb{D})$ invariante bajo A^*. $A^* K_x = K_{\psi(x)}$.
Sea $f \in \mathcal{H}$, $x \in E$

$$A(f(x)) = \langle Af, K_x \rangle = \langle f, A^* K_x \rangle = \langle f, K_{\psi(x)} \rangle = f(\psi(x)) = (f \circ \psi)(x)$$

Así existe $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f \circ \psi = Af$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Por lo tanto A es un operador de composición.

$\blacksquare$

Gran parte de las investigaciones sobre operadores de composición están dedicados a caracterizar aquellos operadores de composición que son autoadjuntos, normales, subnormales, etc.

En lo que sigue, analizaremos las condiciones que deben cumplirse para que el adjunto de un operador de composición sea también un operador de composición, asi como las implicaciones de este hecho.

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbet funcional, cuyo núcleo reproductivo se puede escribir en la forma $K_w(z) = u(z\overline{w})$, donde u es una función $1-1$ en $\mathbb{D}$, y sea $C_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador de composición. Entonces el operador adjunto, C_φ^*, es tambien un operador de composición si y solo si $\varphi(z) = az$, donde $0 < |a| \leq 1$. Si este es el caso el símbolo para el adjunto es $\psi(z) = \overline{a}z$.*

Demostración. Supongamos que $C_\varphi^* = C_\psi$ para alguna $\psi \in \mathbf{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Entonces

Por propiedades de espacios de Hilbert funcionales se tiene,

$$
\begin{aligned}
K_{\psi(w)}(z) &= \langle K_{\psi(w)}, K_z \rangle \\
&= \langle C_\psi^*(K_w), K_z \rangle \\
&= \langle K_w, C_\psi K_z \rangle \\
&= \langle K_w, C_\varphi^* K_z \rangle \\
&= \langle C_\varphi K_w, K_z \rangle \\
&= (C_\varphi K_w)(z) \\
&= (K_w \circ \varphi)(z) \\
&= K_w(\varphi(z))
\end{aligned}
$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$. Además $\overline{\psi(w)}z = \overline{w}\varphi(z)$ para todo $z, w \in \mathbb{D}$.
Fijemos un valor de w. Entonces la función $\dfrac{\varphi(z)}{z}$, analítica en $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, debe ser constante allí, y en consecuencia, podemos extenderla analíticamente a todo $\mathbb{D}$, con lo que necesariamente, $\varphi(z) = az$. Por lema de Schawarz se obtiene $|a| \leq 1$. La igualdad $\psi = \bar{a}z$ es immediata.

Recíprocamente. Pongamos $\psi(w) := \bar{a}\,(w)$. $w \in \mathbb{D}$.
Mostraremos que $C_\phi^* = C_\psi$. Para ello será suficiente verificar que la igualdad se satisface al evaluar los operadores sobre los núcleos reproductivos: en efecto,

Fijemos $w \in \mathbb{D}$. Entonces, $\forall\, z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} C_\varphi^* K_w(z) &= K_{\varphi(w)}(z) \\ &= u(z\,\overline{\varphi(w)}) \\ &= u(z\,\overline{aw}) \\ &= u(z\,\overline{a}\,\overline{w}) \\ &= u(\,(\overline{a}\,z)\,\overline{w}) \\ &= u(\psi(z)\,\overline{w}) \\ &= K_w(\psi(z)) \\ &= C_\psi K_w(z). \end{aligned}$$

Luego, C_φ^* es un operador de composición.

■

Teorema 4.4.

$$C_\psi \ \textbf{\textit{hiponormal}} \ \Longrightarrow \ \psi(0) \ = \ 0. \tag{4.1}$$

`En efecto:`

Evidentemente, $C_\psi(e_0) = e_0$. Luego, e_0 es un autovector de C_ψ. La hiponormalidad de C_ψ implica entonces que e_0 es también un autovector de C_ψ^* (ya que $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^*)$). En consecuencia

$$K_{\psi(0)} = C_\psi^*(K_0) = C_\psi^*(e_0) = e_0 = K_0.$$

Como la correspondencia $\mathbb{D} \ni w \longmapsto K_w$ es inyectiva, concluimos que $\psi(0) = 0$.

■

Teorema 4.5. C_φ *es normal si y sólo si* $\varphi(z) = az$ *donde* $|a| \leq 1$.

Demostración. Si C_φ es normal entonces, por 4.1, $\varphi(0) \ = \ 0$; en consecuencia, la serie de Fourier de φ en H^2 es de la forma $\varphi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$. Luego, por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} \|\, C_\varphi^* e_1 \,\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle C_\varphi^* e_1, e_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_1, \varphi^n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Pero $\varphi(0) = 0$, así que $\langle e_1, \varphi^n \rangle = 0$ para $n \geq 2$. Por lo tanto,

$$\|C_\varphi^* e_1\|^2 = |\, a_1|^2.$$

Por otro lado,

$$\| \, C_\varphi(e_1) \, \|^2 \; = \; \| \, \varphi \, \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$

De manera que siendo $C_\varphi^* C_\varphi - C_\varphi C_\varphi^* = 0$, debe tenerse

$$|\, a_1 \,|^2 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$

En consecuencia, $a_n = 0$ para $n \geq 2$ y $\varphi(z) = a_1 \, z$.

Recíprocamente, si $\varphi(z) = az$, entonces por teorema (4.3), C_φ^* es un operador de composición, es decir , $C_\varphi^* = C_\psi$ donde $\psi(z) = \bar{a}z$. Entonces, sea $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$

$$\begin{aligned}
C_\varphi C_\psi f(z) = C_\varphi(f \circ \psi)(z) \;&=\; C_\varphi(f(\psi(z))) \\
&=\; C_\varphi f(\, \overline{a}z \,) \\
&=\; (f \circ \varphi)(\overline{a}z) \\
&=\; f(\, \varphi(\overline{a}z \,)). \\
&=\; f(\, a\overline{a}z \,) \\
&=\; f(\, \overline{a}(az) \,) \\
&=\; (f \circ \psi)(az) \\
&=\; C_\psi f(az) \\
&=\; C_\psi C_\varphi f(z)
\end{aligned}$$

Lo cual implica que C_φ conmuta con su adjunto. Por tanto C_φ es normal.

■

Los siguientes resultados nos sirven para caracterizar operador de composición invertibles en espacios $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

Definición 4.6. Un operador $A \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, se dice casi-multiplicativo si

$$A(f_1.f_2) = Af_1.Af_2,$$

siempre que $f_1,\ f_2$ y $f_1.f_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

Teorema 4.7. *Un operador A diferente de cero en $\mathcal{L}(\mathrm{H}^2(\mathbb{D}))$, es un operador de composición si y solo si $Ae_n = (Ae_1)^n$ para $n = 0, 1, 2, ...$*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para probar la suficienciaa pongamos

$$\varphi := A(e_1).$$

Entonces

$$\|\varphi^n\| \leq \|Ae_n\| \leq \|A\| \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$$

lo cual implica que $|\varphi| \leq 1$ en c.t.p. sobre $\partial\mathbb{D}$. En efecto, en caso contrario, podemos hallar un conjunto $E \subset \partial\mathbb{D}$, con medidad de Lebesgue $m(E) > 0$ y $\epsilon > 0$, tal que $|\varphi^*|_E| > 1 + \epsilon$. Así

$$\|\varphi^n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n}\, d\theta \geq \int_E |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n}\, d\theta > (1+\epsilon)^{2n}\, m(E) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

una contradicción.

Por el Principio del Módulo Máximo se concluye: o bien $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ó φ es una constante de módulo 1. Supongamos que $\varphi \equiv e^{i\alpha}$. Entonces, para cada n

$$A(e_n) = e^{i\alpha n} e_0$$

lo cual es imposible. Por lo tanto $\varphi \in \mathbf{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ y $A = C_\varphi$.

Corolario 4.8. *Si A es un operador diferente de cero en $\mathcal{L}(\mathrm{H}^2(\mathbb{D}))$, entonces A es un operador de composición si y solo si A es casi-multiplicativo.*

Demostración. Supongamos que A es un operador diferente de cero en $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y que A es casi-multiplicativo. Entonces

$$Ae_n = A(e_n.e_0) = Ae_n.Ae_0$$

de aquí podemos decir que $Ae_0 \neq 0$. Pues de lo contrario A sería el operador nulo.

Por otro lado $A\, e_0 = Ae_0.Ae_0$, así que, $Ae_0 = e_0$. Además

$$Ae_2 = Ae_1.Ae_1 = (Ae_1)^2$$

Continuando de esta forma tenemos que para todo $n \geq 2$

$$Ae_n = Ae_1.Ae_{n-1} = Ae_1.(Ae_1)^{n-1} = (Ae_1)^n.$$

En consecuencias , por teorema 4.7, A es un operador de composición.

Recíprocamente. Supongamos que A es un operador de composición. $A = C_\psi$, para algún $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, entonces

$$A(f_1.f_2) = C_\psi(f_1.f_2) = (f_1.f_2) \circ (\psi) = C_\psi(f_1).C_\psi(f_2) = Af_1.Af_2.$$

Por tanto A es casi multiplicativo.

■

Teorema 4.9. *C_ψ es invertible en $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, si y solo si ψ es un automorfismo (analítico) del disco.*

Demostración. [$\Rightarrow$]:

Supongamos que C_ψ es invertible, es decir, existe un operador $A \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, tal que $AC_\psi = C_\psi A = I$.

Mostraremos, en primer lugar, que A es casi-multiplicativo:

Sean $f_1, f_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ tales que $f_1 \cdot f_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. Como C_ψ es sobreyectiva, existen g_1, $g_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ tales que $C_\psi g_1 = f_1$ y $C_\psi g_2 = f_2$. Luego

$$C_\psi\, g_1 \cdot g_2 = C_\psi g_1 \cdot C_\psi g_2 = f_1 \cdot f_2.$$

Invocado de nuevo la sobreyectividad de C_φ, tenemos que existe $h \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ tal que $C_\psi h = f_1 \cdot f_2$. Ahora bien, las funciones $g_1 \cdot g_2$, h son analíticas en $\mathbb{D}$, y coinciden el el abierto $\psi(\mathbb{D})$. Por el principio de unicidad para funciones analíticas concluimos que $g_1 \cdot g_2 = h$ en $\mathbb{D}$. En consecuencia, $g_1 \cdot g_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y además

$$\begin{aligned} Af_1 \cdot f_2 &= AC_\psi g_1 \cdot AC_\psi g_2 \\ &= AC_\psi g_1 \cdot g_2 \\ &= g_1 \cdot g_2 \\ &= Af_1 \cdot Af_2. \end{aligned}$$

Luego, A es casi-multiplicativo y por corolorio 4.8, exite un θ tal que $A = C_\theta$. A es la inversa de C_ψ, así que ,

$$C_\theta C_\psi = C_\psi C_\theta = I = I_{e_1}$$

de este modo $\psi\theta = \theta\psi = e_1$. Esto implica que que ψ es un automorfismo del disco y $\theta = \psi^{-1}$.

[$\Leftarrow$]. Reciprocamente, por ser ψ un automorfismo del disco, existe ψ^{-1} y es analítica en $\mathbb{D}$. Luego,

$$C_\psi C_{\psi^{-1}}(f) = C_\psi(f \circ \psi^{-1}) = f \circ \psi^{-1} \circ \psi = f,$$

de igual manera $C_\psi C_{\psi^{-1}} = I$. Por lo tanto, C_ψ es invertible y $C_\psi^{-1} = C_{\psi_{-1}}$.

■

4.1. Norma de un operador de Composición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Recordemos que la norma de T está definida por

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup\{ \|T(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{ \|T^*(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}. \end{aligned}$$

Calcular el valor exacto de la norma de un operador de composición en un espacio de Hilbert funcional analítico, es un trabajo difícil; por ejemplo, en el espacio de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, la norma de un operador de composición ha sido calculada sólo en ciertos casos especiales; sin embargo, es posible estimar adecuadamente la misma.

Teorema 4.10. ***Pricipio de Subordinación de Littlewood*** *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica tal que $\varphi(0) = 0$. Si $f \in \mathrm{H}^2$, entonces*

$$\|C_\varphi(f)\| \leq \| f \|.$$

Teorema 4.11. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorfismo. Entonces para toda $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$*

$$\left(\frac{1 - |\psi(0)|}{1 + |\psi(0)|} \right)^{1/2} \|f\| \ \leq \ \|C_\psi f\| \ \leq \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right)^{1/2} \| f \|.$$

Más aun, estas desigualdades son óptimas y

$$\|C_\psi\| \ = \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right)^{1/2}.$$

Demostración. Como ψ es un automorfismo de $\mathbb{D}$, ψ es una transformación fraccional lineal de la forma

$$\psi(z) = \lambda \frac{z + u}{1 + \bar{u} z}$$

donde $|\lambda| = 1$ y $|u| < 1$.

Sea f un polinomio complejo. Entonces f es acotada en $\mathbb{D}$ y por lo tanto, $f \circ \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ y su norma en H^2 es

$$\|f \circ \psi\|_{H^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Como ψ es un homeomorfismo suave sobre el círculo unitario, podemos cambiar variables en el círculo:

$$e^{it} = \psi(e^{i\theta}) = \lambda \frac{e^{i\theta} + u}{1 + \bar{u} e^{i\theta}}$$

o

$$e^{i\theta} = \psi^{-1}(e^{it}) = \bar{\lambda} \frac{e^{it} - \lambda u}{1 - \overline{\lambda u} e^{it}}$$

de lo cual, al diferenciar y simplificar, se obtiene

$$e^{i\theta} d\theta = \frac{\overline{\lambda} e^{it} - \overline{\lambda} |u|^2 e^{it}}{(1 - \overline{\lambda u} e^{it})^2} dt.$$

Finalmente, tomando módulo tenemos

$$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi}.$$

Así

$$\int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))\,|^2\frac{d\theta}{2\pi} \;=\; \int_0^{2\pi} |f(e^{it})\,|^2\frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi}\,.$$

Observemos ahora que

$$\frac{1-|\,u|^2}{(1+|u|)^2} \leq \frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2} \leq \frac{1-|\,u|^2}{(1-|u|)^2},$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\frac{1-|\,u|^2}{(1+|u|)^2}\frac{d\theta}{2\pi} \quad &\leq \quad \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi}\\ &\leq \quad \int_0^{2\pi} |f(e^{i}t)|^2\frac{1-|\,u|^2}{(1-|u|)^2}\frac{d\theta}{2\pi}\,,\end{aligned}$$

y como $|u| = |\psi(0)|$, se concluye que

$$\left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|f\| \,\leq \|C_\psi f\| \,\leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|\,f\,\|.$$

Puesto que los polinomios son densos en $H^2(\mathbb{D})$, estas desigualdades son válidas para todo f en $H^2(\mathbb{D})$.

Para mostrar que la desigualdad de la derecha es óptima, recordemos que $\forall\ w \in \mathbb{D}$: $C_\psi^*(k_w) = k_{\psi(w)}$. Pongamos $u = se^{i\theta}$ y sea $\{r_n\}$ una sucesión de números reales positivos que converge, de manera creciente, a 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $w_n := r_n\, e^{i\theta}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\|C_\psi^*\|^2 &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\|K_{\psi(w_n)}\|^2}{\|K_{w_n}\|^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-|\,w_n|^2}{1-|\psi(w_n)|^2} \\
&= \frac{(\,1+|\,u|\,)^2}{1-|\,u|^2} \\
&= \frac{1+|\,\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que la desigualdad de la derecha es óptima y que

$$\|C_\psi\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}.$$

Para mostrar que la desigualdad de la izquierda también es óptima consideremos una sucesión $\{g_n\}$ tal que $\lim \|C_\psi\, g_n\| = \|C_\psi^{-1}\|$ y definamos $f_n := C_\psi^{-1}\, g_n$. Entonces

$$\lim \|C_\psi\, f_n\| = \lim \|g_n\| = \left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2} \|f\|.$$

■

Corolario 4.12. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica, entonces en $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ tenemos*

$$\left(\frac{1}{1-|\psi(0)|^2}\right)^{1/2} \leq \|C_\psi\| \leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Demostración. Sea

$$\phi(z) = \frac{\psi(0)-z}{1-\overline{\psi(0)}z}$$

De manera que ψ es un automorfismo del disco. Definamos $\psi_0 := \phi\circ\psi$; observemos que $\psi_0(0) = 0$ y $\psi = \phi^{-1}\circ\psi_0$, por tanto $C_\psi = C_{\psi_0} C_{\phi^{-1}}$. Además $\phi^{-1} = \phi$ y $\|f\circ\psi_0\| \leq \|f\|$ por el teorema 4.10. Por lo tanto $\|C_{\psi_0}\| \leq 1$.

Luego

$$\|C_\psi\| \le \|C_{\psi_0}\|\|C_{\psi^{-1}}\| \le \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}.$$

Por otro lado

$$\| C_\psi \| = \| C_\psi^* \| = \sup_{0<r<1} \left\{\|C_\psi^* f\| : \|f\| = 1\right\};$$

en particular, para el núcleo reproductivo normalizado k_0, tenemos

$$\|C_\psi\| \ge \|C_\psi^*(k_0)\| = \|k_{\psi(0)}\| = \sqrt{\frac{1}{1-|\psi(0)|^2}}$$

■

Las estimaciones 4.2, muestran que si $\psi(0) = 0$ entonces $\| C_\psi \| = 1$,. La desigualdad inferior es óptima cuando ψ es una constante, y la desigualdad superior cuando ψ es una función interior.

Lema 4.13. *Sea h un elemento de $\mathcal{H}$; entonces $\| T(h)\| = \|T\| \|h\|$ si y sólo si $(T^* T)(h) = \| T\|^2 h$.*

Demostración. Supongamos que $(T^* T)(h) = \|T\|^2 h$; entonces

$$\| T(h) \|^2 = \langle T(h), T(h) \rangle = \langle T^* T(h), h \rangle = \langle \| T \|^2 h, h \rangle = \|T\|^2 \|h\|^2.$$

Reciprocamente, supongamos $\| T(h)\| = \|T\| \|h\|$; entonces

$$\begin{aligned} \|T\|^2 \|h\|^2 &= \| T(h)\|^2 = \langle T(h), T(h) \rangle = \langle T^* T(h), h \rangle \\ &\le \|(T^* T)(h)\| \|h\| \\ &\le \|T\|^2 \| h \|^2 \end{aligned}$$

De aquí. $(T^* T)(h)$ es un multiplo escalar de h; puesto que $\|(T^* T)(h)\| = \|T\|^2\|h\|$ y $T^* T$ es un operador positivo

$$(T^* T)(h) = \|T\|^2 h.$$

■

Siempre que $\|T(h)\| = \|T\|\|h\|$ para $h \neq 0$, decimos que el operador T alcanza su norma en un elemento de h.

Proposición 4.14. *Supongamos que* $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *es una aplicación analítica con* $\psi(0) \neq 0$. *Si el operador* $C_\psi^* : \mathrm{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ *alcanza su norma en una función núcleo, entonces* ψ *debe tener la forma* $\psi(z) = az + b$.

Demostración. Supongamos que $C_\psi^* : \mathrm{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ alcanza su norma en una función núcleo k_w por proposición 4.13 tenemos

$$\|C_\psi^*\|^2\, K_w = (C_\psi\, C_\psi^*)(K_w) = C_\psi(K_{\psi(w)}) = K_{\psi(w)} \circ \psi.$$

Luego

$$\|C_\psi^*\|^2\, \frac{1}{(1 - \overline{w}z)} = \frac{1}{(1 - \overline{\psi(w)}\psi(z)\,)}.$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto

$$\frac{1 - \overline{\psi(w)}\psi(z)}{1 - \overline{w}z} = c,$$

para alguna constante c. si $\psi(w) = 0$, entonces $w = 0$ lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto

$$\psi(z) = \left(\frac{1 - c}{\overline{\psi(w)}}\right) + \left(\frac{c\overline{w}}{\overline{\psi(w)}}\right) z$$

■

4.2. Normas de Operadores de Composición y Núcleos reproductivos

La norma de un operador de composición inducido por una función interior fue calculada por E. A. Nordgren en 1968, [24]. C. Cowen en 1988, [9], dedujo una fómula para el operador de composicón C_ψ cuando $\psi(z) = sz + t$, donde $|\, s\,| + |\, t\,| \leq 1$. C. Cowen mostró que, en este caso:

$$\|\, C_\psi\| \;=\; \left(\frac{2}{1 + |\, s\,|^2 - |\, t\,|^2 + \sqrt{(1 - |\, s\,|^2 + |\, t\,|^2)^2 - 4|\, t\,|^2}} \right)^{1/2}. \qquad (4.3)$$

La dificultad para calcular la norma de un operador de composición, radica en el hecho de que debe considerarse la acción de C_ψ, o de C_ψ^* sobre todas las funciones $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, de norma 1; por tal razón, se acostumbra considerar la acción de C_ψ, o C_ψ^*, sobre subconjuntos convenientes de la esfera unitaria de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ que permitan facilitar los cálculos. Uno de tales conjuntos es la colección de núcleos reproductivos normalizados. Esto vincula el problema del cálculo de la norma de un operador de composición con el célebre `Problema de los Núcleos Reproductivos` (en Inglés: Reprocuding Kernel Thesis):

> **¿Hasta que punto dependen, las propiedades de un operador lineal que actúa en un espacio de Hilbert Funcional Analítico, de las propiedades analíticas y espaciales de la familia de núcleos reproductivos del espacio. ?**

Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica. Definimos:

$$\begin{aligned} S_\psi &= \sup\{\, \|\, C_\psi\, k_w\| : w \in \mathbb{D}\,\} \\ S_\psi^* &= \sup\{\, \|\, C_\psi^*\, k_w\| : w \in \mathbb{D}\,\} \end{aligned}$$

Es claro que $\|\, C_\psi\| \;\geq\; S_\psi$ y $\|\, C_\psi^*\| \;\geq\; S_\psi^*$. Estas cantidades son relativamente fáciles de calcular, y nos permiten pensar en que podemos determinar $\|\, C_\psi\|$ para ciertas funciónes $\psi \in \mathbf{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, calculando unicamente S_ψ o S_ψ^*.
Evidentemente, será preferible trabajar con S_ψ^* debido a que es posible aplicar la propiedad del teorema 4.2.

Diremos que C_ψ tiene la **propiedad del núcleo supremo** si $\|\, C_\psi\| = S_\psi^*$.

Es útil recordar que para un operador $T \in \mathcal{H}$, si $\|\, T\|_e \; < \|\, T\|$ entonces T alcanza su norma en un elemento de $\mathcal{H}$ [21]; pues, con frecuencia resulta más facíl calcular $\|C_\psi\|_e$ en lugar de $\|\, C_\psi\, \|$, y en la mayoria de los casos donde conocemos la norma exactamente se cumple que

$$\|\, T\|_e \; = \|\, T\|.$$

- **Supongamos que $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica. ¿Cuándo la norma del operador de composición C_ψ es igual a S_ψ o a S_ψ^*?.**

Esta interrogante fue propuesta por C. Cowen y B. MacCluer en el año 1996, en su famoso listado de `problemas abiertos`. Ver [14].

El núcleo reproductivo del punto $w \in \mathbb{D}$ en $H^2(\mathbb{D})$ es

$$K_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}z}.$$

Por lo tanto

$$\| K_w(z) \| = \sqrt{\frac{1}{1-|w|^2}}.$$

y

$$k_w(z) := \frac{K_w(z)}{\| K_w \|} = \frac{\sqrt{1-|w|^2}}{1-\overline{w}z}.$$

Teorema 4.15. *Supongamos que $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función interior; entonces $\| C_\psi \| = S_\psi$*

Si ψ es una función interior con $\psi(0) = 0$, entonces C_ϕ es una isometría; es decir $\| C_\psi f \| = \|f\| \quad \forall f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ [24]. Este caso es inmediato.

Supongamos entonces que $\psi(0) \neq 0$
Sea ψ una función interior y tomemos $\beta = \psi(0)$. La función

$$\tau(z) = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta}z},$$

es un automorfismo del disco $\mathbb{D}$, con $\tau^{-1} = \tau$. Así para $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$,

$$\| C_\psi f \| = \| (C_\psi C_\tau) C_\tau f \| = \| C_\tau f \|,$$

hemos usamos el hecho de $C_\psi C_\tau = C_{\tau\circ\psi}$ es una isometria. De esta manera

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} \|C_\psi(k_w)\| \;=\; \sup_{w\in\mathbb{D}} \|C_\tau(k_w)\|.$$

empleando el lema 1.5 tenemos

$$\begin{aligned}
\|C_\tau k_w\|^2 &= \|\, k_w \circ \tau\|^2 \\
&= \frac{1}{\|K_w\|^2}\|K_w \circ \tau\|^2 \\
&= (1-|w|^2)\,\frac{|\,\beta\,|^2 + 1 + 2Re\left(\dfrac{\beta(\bar{w}-\bar{\beta})}{1-\bar{w}\beta}\right)}{|1-\bar{w}\beta|^2 - |\bar{w}-\bar{\beta}|^2} \\
&= \frac{|\,\beta\,|^2 + 1 + 2Re\left(\dfrac{\beta(\bar{w}-\bar{\beta})}{1-\bar{w}\beta}\right)}{1-|\beta|^2}.
\end{aligned}$$

Cuando $w \to \dfrac{\beta}{|\beta|}$ dentro del disco $\mathbb{D}$, la última igualdad se aproxima a $\dfrac{1+|\beta|}{1-|\beta|}$, con lo que

$$\|\, C_\psi\| \geq S_\psi = \sup\{\, \|C_\psi k_w\,\|\} \geq \lim_{|w|\to\beta/|\beta|} \|\, C_\psi k_w\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\phi(0)|}\right)^{1/2}$$

como ϕ es una función interior

$$\|\, C_\psi\,\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}$$

De manera que $\|C_\psi\| = S_\psi$

$\blacksquare$

Proposición 4.16. *Sea* C_ψ *un operador de composición en el espacio* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. *Entonces*

$$S_\psi^* \;\leq\; S_\psi$$

Demostración. Sea $w \in \mathbb{D}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|C_\psi^* k_w\| &= \frac{\|C_\psi^* K_w\|}{\|K_w\|} = \frac{\|K_{\psi(w)}\|}{\|K_w\|} \\
&= \frac{\sqrt{1-|w|^2}}{\sqrt{1-|\psi(w)|^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}}{1-|\psi(w)|^2} \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|K_{\psi(w)}\|^2 \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle K_{\psi(w)}, K_{\psi(w)}\rangle| \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle K_{\psi(w)}, C_\psi^* K_w\rangle| \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle C_\psi K_{\psi(w)}, K_w\rangle| \\
&\leq \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(w)}\|\,\|K_w\| \\
&= \sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(w)}\| \\
&= \|C_\psi k_{\psi(w)}\|.
\end{aligned}$$

Tomando supremo a ambos lados tenemos

$$S_\psi^* \leq S_\psi$$

■

Lema 4.17. *En* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ *los núcleos reproductivos normalizados* $\{k_w\}$ *convergen a cero debilmente cuando* $|w| \to 1^-$.

Demostración.

Sea p un polinomio complejo. Pongamos $M = \sup\{|p(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$. Entonces

$$\langle p, k_w \rangle = \langle p, \frac{K_w}{\|K_w\|} \rangle = \frac{1}{\|K_w\|} \langle p, K_w \rangle = \sqrt{1-|w|^2}\, p(w);$$

consecuentemente,

$$0 \leq \lim_{|w|\to 1^-} |\langle\, p, k_w \,\rangle| \leq \lim_{|w|\to 1^-} M\sqrt{1-|w|^2} = 0.$$

Consideremos ahora $f \in H^2(\mathbb{D})$. Entonces existe una sucesion de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\| = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\|p_n - f\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, para todo $w \in \mathbb{D}$:

$$|\langle\, f, k_w \,\rangle - \langle\, p_n, k_w \,\rangle| \;\leq\; \|f - p_n\| \cdot \|k_w\| < \varepsilon \;\text{ para todo }\; n \geq N.$$

Fijemos $n_0 \geq N$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $1 - |w| < \delta$ implica $|\langle p_{n_0}, k_w\rangle| < \varepsilon$.

Luego, si $1 - |w| < \delta$,

$$|\,\langle\, f, k_w \,\rangle| \leq |\langle\, f - p_{n_0}, k_w \,\rangle\,| + |\,\langle\, p_{n_0}, k_w \rangle| < 2\varepsilon$$

$\blacksquare$

Teorema 4.18. *Supongamos que C_ψ es un operador de composicón compacto en* $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ *y que $\psi(0) \neq 0$. Entonces $\|C_\psi\| = S_\psi^*$ si y sólo si $\psi(z) = sz + t$ para constantes complejas s y t, las cuales satisfacen $|\,s| + |\,t| < 1$*

Demostración. Supongamos que C_ψ es compacto, $\psi(0) \neq 0$ y $\|C_\psi\| = S_\psi^*$.

Como k_w converge a cero débilmente cuando $|\,w| \to 1^-$ y C_ψ es compacto

$$\lim_{|w|\to 1^-} \|\, C_\psi^* k_w\| = 0$$

de manera que S_ψ^* es igual $\|\, C_\psi^* k_\beta \,\|$ para algún $\beta \in \mathbb{D}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|\, C_\psi \,\| &= \|\, C_\psi^* k_\beta \,\| \\
&= \sqrt{1-|\beta|^2}\,\sqrt{1-|\psi(\beta)|^2}\,|\langle C_\psi K_{\psi(\beta)}, K_\beta\rangle| \\
&\leq \sqrt{1-|\beta|^2}\,\sqrt{1-|\psi(\beta)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(\beta)}\|\,\|\, K_\beta \,\| \\
&= \sqrt{1-|\psi(\beta)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(\beta)}\| \\
&= \|C_\psi k_{\psi(\beta)}\| \\
&\leq \|C_\psi\|;
\end{aligned}$$

en consecuencia, cada desigualdad en la cadena precedente es una igualdad. En particular $|\langle C_\psi K_{\psi(\beta)}, K_\beta\rangle| = \|C_\psi K_{\psi(\beta)}\| \, \| K_\beta \|$. Por lo tanto $C_\psi K_{\psi(\beta)} = c\, K_\beta$ para alguna constante c diferente de cero. Esto es

$$\begin{aligned}
K_{\psi(\beta)} \circ \psi &= c\, K_\beta \\
K_{\psi(\beta)}(\psi(z)) &= c\, K_\beta(z) \\
\frac{1}{1-\overline{\psi(\beta)}\,\psi(z)} &= c\,\frac{1}{1-\overline{\beta}z} \\
1-\overline{\beta}z &= c\,(1-\overline{\psi(\beta)}\psi(z)) \\
\overline{\psi(\beta)}\psi(z) &= (1-\frac{1}{c}) + (\frac{\overline{\beta}}{c})z
\end{aligned}$$

como $\|C_\psi k_{\psi(\beta)}\| = \|C_\psi\| \geq \dfrac{1}{\sqrt{1-|\psi(0)|^2}}$ y $\psi(0) \neq 0$ debe ser $\psi(\beta) \neq 0$. En consecuencia $\psi(z) = sz + t$ para algunas constantes s y t en $\mathbb{C}$.

Como $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, tenemos $|\psi(z)| = |sz+t| < 1$. Supongamos $t \neq 0$, pongamos $s/t = |s/t|e^{i\theta}$ y definamos la sucesión

$$z_n \;:= \big(1-\frac{1}{n}\big)e^{-i\theta}.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{-i\theta}$ y además $|z_n| = 1 - \frac{1}{n} < 1$, de manera que $|\,\psi(z_n)\,| = |\,sz_n + t\,| < 1$. Tomando límite se obtiene

$$|\,\psi(e^{-i\theta})\,| \;\leq\; 1.$$

Pero

$$\begin{aligned}
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| &= |\,se^{-i\theta} + t\,| \\
\psi(e^{-i\theta})\,| &= \Big|\,|\frac{s}{t}|e^{i\theta}\,te^{-i\theta} + t\,\Big| \\
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| &= |\,t|\,\Big|\,|\frac{s}{t}| + 1\,\Big| \\
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| &= |s| + |\,t\,|
\end{aligned}$$

de aquí $|\,s\,| + |\,t\,| \leq 1$. La compacidad de C_ψ obliga a que $|\,s\,| + |\,t\,| < 1$.
En efecto:
supongamos que $|\,s\,| + |\,t\,| = 1$, $\dfrac{s}{t} = |\dfrac{s}{t}|e^{i\theta}$ y consideremos nuevamente la sucesión

$z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{-i\theta}$. Entonces

$$|\,\psi(z_n)\,|^2 \;=\; |\,sz_n+t\,|^2 \;=\; |\,t|^2\left(\,|\frac{s}{t}|\left(1-\frac{1}{n}\right)\,+\,1\,\right)^2.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\|\,C_\psi^* k_{z_n}\,\|^2 &= \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}{1-\left(\,|\,s\,|+|\,t\,|-\dfrac{|\,s\,|}{n}\,\right)^2}\\ &= \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}{1-\left(1-\dfrac{|\,s\,|}{n}\,\right)^2}\\ &= \frac{n^2-(\,n-1)^2}{n^2-(\,n-|\,s\,|\,)^2},\end{aligned}$$

de lo cual, tomando límite, se obtiene

$$\|\,C_\psi^* k_{z_n}\,\|^2 \;\to\; \frac{1}{|\,s\,|}$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $\psi(z) \;=\; sz+t$ donde $|\,s|\,+\,|\,t|\;<\;1$. Debemos probar que $\|C_\psi\| = S_\psi^*$

C. Cowen demostró en [8] que

$$\|\,C_\psi\| = \left(\frac{2}{1+|\,s\,|^2-|\,t\,|^2+\sqrt{(1-|\,s\,|^2+|\,t\,|^2)^2-4|\,t\,|^2}}\right)^{1/2}$$

Sea

$$\beta \;=\begin{cases} 0 & s=0\\ \frac{1-|\,s\,|^2-|\,t\,|^2-\sqrt{(1-|\,s\,|^2-|\,t\,|^2)^2-4|\,s\,|^2\,|\,t\,|^2}}{2|\,s\,||\,t\,|}\,e^{i(arg(t)-arg(s))} & s\neq 0\end{cases}$$

llamemos $q=(1-|\,s\,|^2-|\,t\,|^2\,)^2-4|\,t\,|^2|\,s\,|^2$. Observemos que

$$q = \left(1-(|\,s\,|-|\,t\,|)^2\right)\left(1-(|\,s\,|+|\,t\,|)^2\right)$$

de modo que q es positiva $(|\,s\,|-|\,t\,| \leq \left|s+t\right| \leq |\,s\,|+|\,t\,| < 1)$.

Luego, dado $s \neq 0$

$$|\,\beta\,| = \left(\frac{1-|\,s\,|^2-|\,t\,|^2-\sqrt{q}}{2|\,s\,||\,t\,|}\right) = \frac{2|\,s\,||\,t\,|}{1-(|\,s\,|^2+|\,t\,|^2)+\sqrt{q}}.$$

Usando el hecho que $|\,s\,|^2+|\,t\,|^2 \leq 1-2|\,s\,|^2|\,t\,|^2$, tenemos que $\beta \in \mathbb{D}$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|C_\psi\|^2 &\geq S_\psi^* \\
&\geq \|\,C_\psi^* k_\beta\,\|^2 \\
&= \frac{1-|\beta|^2}{1-|\,s\beta+t|^2}. \\
&= \frac{1-\left(\dfrac{2|s||t|}{1-(|s|^2+|t|^2)+\sqrt{q}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{2|t|}{1-|s|^2+|t|^2+\sqrt{q}}\right)^2} \\
&= \frac{1-|s|^2+|t|^2+\sqrt{q}}{1-|s|^2-|t|^2+\sqrt{q}} \\
&= \frac{2}{1+|s|^2-|t|^2+\sqrt{q}} \\
&= \|C_\psi\|^2,
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\|C_\psi\| = S_\psi^*$$

■

De la demostración del teorema anterior se deduce el siguiente resultado.

Corolario 4.19. *Supongamos que* $S_\psi^* = \| C_\psi \|$, *que* $\psi(0) \neq 0$, *y que* ψ *no tiene la forma* $\psi(z) = sz + t$ *para algunas constantes* s, t. *Entonces*

$$S_\psi^* = \limsup_{|w| \to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

Proposición 4.20. *Supongamos que* $S_\psi^* = \| C_\psi \|$, *que* $\psi(0) \neq 0$, *y que* ψ *no tiene la forma* $\psi(z) = sz + t$ *para algunas constantes* s, t, *entonces*

$$\| C_\psi \| = \| C_\psi \|_e,$$

donde $\| C_\psi \|_e$, *denota la norma esencial de* C_ψ.

Demostración. Sea Q un operador compacto en $H^2(\mathbb{D})$ y sea $\{w_j\}$ una sucesión en el disco con $| w_j | \to 1$. Entonces $Q^* k_{w_j} \longrightarrow 0$ en $H^2(\mathbb{D})$, así

$$\begin{aligned} \| C_\psi^* - Q^* \| &\geq \lim_{j \to \infty} \| (C_\psi^* - Q^*) k_{w_j} \| \\ &= \lim_{j \to \infty} \| C_\psi^* k_{w_j} - Q^* k_{w_j} \| \\ &= \lim_{j \to \infty} \| C_\psi^* k_{w_j} \|. \end{aligned}$$

Para cualquier operador compacto Q,

$$\| C_\psi - Q \| \geq \limsup_{|w| \to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

En consecuencia.

$$\| C_\psi \|_e \equiv \inf\{ \| C_\psi - Q \| : Q \text{ compacto} \} \geq \limsup_{|w| \to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

Finalmente, Por el corolario 4.19 tenemos

$$\| C_\psi \| \geq \| C_\psi \|_e \geq \limsup_{|w| \to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \| = S_\psi^* = \| C_\psi \|.$$

$\blacksquare$

El hecho de que $\| C_\psi \| = \| C_\psi \|_e$, no garantiza el que S_ψ^* sea igual a $\| C_\psi \|$. Por ejemplo, la función interior (no univalente)

$$\varphi(z) = \left(\frac{1-2z}{2-z}\right)^2$$

satisface $\| C_\varphi \| = \| C_\varphi \|_e$, [30]; sin embargo $S_\psi^* < \| C_\psi \|$, [1].

Teorema 4.21. *Supongamos que ψ es una función interior que no es un automorfismo del disco unitario $\mathbb{D}$ y que $\psi(0) \neq 0$. Entonces*

$$\|C_\psi\| > S_\psi^*.$$

Demostración. Sea

$$\tau(z) := \frac{\psi(0) - z}{1 - \overline{\psi(0)}z}$$

entonces τ es un automorfismo del disco $\mathbb{D}$ que asigna $\psi(0) = 0$. Observemos que $\tau \circ \psi$ es una aplicación del disco en el disco, que fija el valor cero. Puesto que ψ no es un automorfismo del disco, $\tau \circ \psi$ no es una rotación.
En efecto. Supongamos que $\tau \circ \psi$ es una rotación, entonces

$$(\tau \circ \psi)(z) = e^{i\theta} z \qquad \forall\, \theta$$

de manera que

$$\tau(\psi(z)) = \frac{\psi(0) - \psi(z)}{1 - \overline{\psi(0)}\psi(z)} = e^{i\theta} z$$

aplicando τ^{-1} por la izquierda tenemos

$$\psi(z) = (\tau^{-1}(e^{i\theta} z))$$

Por ser composición de automorfismo, ψ es un automorfismo, lo cual es una contradicción . Por tanto $\tau \circ \psi$ no es una rotación.

$\| (\tau \circ \psi)(z) \| \leq 1$ y $(\tau \circ \psi)(0) = 0$, aplicando lema de Schwarz

$$1 \leq \frac{1 - |\,\tau(\psi(z))|^2}{1 - |z|^2}.$$

Luego

$$1 \leq \liminf_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\,\tau(\psi(z))|^2}{1-|z|^2} = \liminf_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1-|\,\tau(\,\psi(z))|}{1-|z|}\right)\left(\frac{1+|\,\tau(\,\psi(z))|}{1+|z|}\right),$$

Por hipótesis ψ es una función interior, así que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1+|\,\tau(\,\psi(z))|}{1+|z|}\right) = 1,$$

Luego

$$1 \leq \liminf_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\,\tau(\psi(z))|^2}{1-|z|^2} = \liminf_{|z|\to 1^-} \left(\frac{1-|\,\tau(\,\psi(z))|}{1-|z|}\right)$$

Por lema 7.33 de [9], el valor común en realidad excede a 1. En consecuencias existe una constante $C > 1$ y un r con $0 < r < 1$ tal que para todo $z \in A = \{z : r < |z| < 1\}$,

$$C < \frac{1-|\,\tau(\psi(z))|^2}{1-|z|}.$$

Por 1.7

$$1-|\,\tau(\psi(z))|^2 = \frac{(\,1-|\,\psi(z)|^2\,)(1-|\,\psi(0)|^2\,)}{|\,1-\psi(z)\,\overline{\psi(0)}\,|^2}.$$

Por lo tanto para todo $z \in A$, tenemos

$$C < \frac{(1-|\,\psi(z)|^2)\,(1-|\psi(0)|^2)}{(1-|\,z|^2)\,(1-|\psi(0)|\,)^2},$$

luego

$$\frac{1-|z|^2}{1-|\psi(z)\,|^2} < \left(\frac{1}{C}\right)\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}.$$

Si ψ es interior, E. A. Nordgren probó en [24] que

$$\|C_\psi\|^2 = \frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|},$$

de manera que al ser $C > 1$ tenemos

$$\limsup_{|w|\to 1^-} \| C_\psi^* k_w \| < \|C_\psi\|. \tag{4.4}$$

Por hipótesis ψ es interior y no fija el origen, luego, no tiene la forma $\psi(z) = sz + t$ para constantes s y t. Por el corolario 4.19 y la ecuación 4.4 se concluye

$$\|C_\psi\| > S_\psi^*.$$

■

Capítulo 5

Núcleos Reproductivos y Símbolos de Operadores de Composición

Basado en un resultado de C. C. Cowen ([9]), en [17] se muestra que si ψ es una auto-aplicación fraccional lineal de $\mathbb{D}$, entonces $C_\psi : \mathrm{H}^2 \to \mathrm{H}^2$ es un operador subnormal no trivial si, y sólo si, C_ψ es unitariamente equivalente a un operador de composición C_ϕ con símbolo ϕ de la forma

$$\phi \equiv \phi_a := \frac{z}{az+1+a} \quad (a>0).$$

Un hecho fundamental para establecer la subnormalidad de C_{ϕ_a} lo constituye el que, en general

$$C_\psi \; \texttt{hiponormal} \quad \Longrightarrow \; \psi(0) \quad = \quad 0. \tag{5.1}$$

Como $C_\psi(e_0) = e_0$ para todo $\psi \in \mathbf{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, bastará pués considerar la la restricción $C_{\phi_a}\big|_{H_0^2(\mathbb{D})}$, donde $H_0^2(\mathbb{D})$ es el complemento ortogonal de las funciones constantes en H^2. Esto es

$$\mathrm{H}_0^2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{H}^2 : f(0) = 0\}.$$

Se verifica inmediatamente que $\mathrm{H}_0^2(\mathbb{D})$ es un espacio HFA, para el cual el conjunto $\{z, z^2, \ldots, \}$ es una base ortonormal. Consecuentemente, los núcleos reproductivos de $H_0^2(\mathbb{D})$ están dados por

$$K(z,w) := K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \bar{w}^n = \frac{\bar{w}z}{1-\bar{w}z}.$$

Nótese que las funciones K_w son, de hecho, aplicaciones fraccionales lineales con la propiedad $K_w(0) = 0$. En particular, si restringimos w al intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ tenemos que los núcleos reproductivos "pesados"

$$\varphi_w(z) := \frac{1-w}{w} K_w$$

pertenecen a $\mathbf{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, y en consecuencia, pueden fungir como símbolos de operadores de composición en $\mathcal{L}(\mathrm{H}_0^2)$.

Por otra parte,

$$\phi_a(z) = \frac{z}{az+1+a} = -\frac{1}{a}\,\frac{(-\frac{a}{1+a})z}{1+(\frac{a}{1+a})z} = -\frac{1}{a}K_{(-\frac{a}{1+a})}. \tag{5.2}$$

En [17] se demuestra que para todo $\lambda > 0$, es posible definir potencias fraccionales de ϕ_a; a saber,

$$\phi_a^\lambda := \frac{z}{((1+a)^\lambda - 1)z + (1+a)^\lambda} \quad (= \phi_{(1+a)^\lambda - 1}).$$

Pongamos $\widetilde{K}^\lambda := \phi_a^\lambda$. Entonces, en virtud de (5.2) tenemos

$$\widetilde{K}^\lambda = \frac{1}{1-s_\lambda} K_{\left(\frac{1-s_\lambda}{s_\lambda}\right)},$$

donde $s_\lambda := (1+a)^\lambda$.

Así, tenemos que existe una familia $\{\widetilde{K}^\lambda\}_{\lambda>0} \subset \mathrm{H}_0^2$, de núcleos reproductivos "pesados", que satisface las siguientes propiedades

a. $\widetilde{K}^\lambda \in \mathbf{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$.

b. $\widetilde{K}^{\lambda} \circ \widetilde{K}^{\mu} = \widetilde{K}^{\lambda+\mu}$ (para todo $\lambda > 0$)

c. $\overline{\text{Span}\{\widetilde{K}^{\lambda}\}_{\lambda>0}} = H_0^2$ (Teorema 3.5).

d. $C_{\phi_a}^{*}\widetilde{K}^{\lambda} = \frac{1}{1-s_{\lambda}} K_{\phi_a((1-s_{\lambda})/s_{\lambda})}$ (Teorema 4.2).

e. El sistema $(C_{\phi_a}, \{\widetilde{K}^{\lambda}\}_{\lambda>0})$ posee la "propiedad de shift unilateral"

$$C_{\phi_a}\widetilde{K}^{\lambda} = \widetilde{K}^{\lambda+1}.$$

Veamos que en realidad, la subnormalidad de C_{ϕ_a} en H_0^2 depende fundamentalmente de las propiedades espaciales de la familia $\{\widetilde{K}^{\lambda}\}$, más que de sus propiedades analíticas. En efecto, por el criterio de Bram-Halmos (ver por ejemplo [17]), $C_{\phi} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^2)$ es subnormal si y sólo si para cualquier colección finita $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathrm{H}_0^2$

$$\sum_{i,j} \langle C_{\phi}^{i} f_j, C_{\phi}^{j} f_i \rangle \geq 0.$$

Ahora, si $f_i = \sum_{i_k} \alpha_{i_k} \widetilde{K}^{\lambda_{i_k}}$, entonces

$$\begin{aligned}\Big\langle C_{\phi_a}^{i} \sum_{j_k} \alpha_{j_k} \widetilde{K}^{\lambda_{j_k}},\ C_{\phi_a}^{j} \sum_{i_n} \alpha_{i_n} \widetilde{K}^{\lambda_{i_n}} \Big\rangle &= \Big\langle \sum_{j_k} \alpha_{j_k} \widetilde{K}^{\lambda_{j_k}+i},\ \sum_{i_n} \alpha_{i_n} \widetilde{K}^{\lambda_{i_n}+j} \Big\rangle \\ = \sum_{j_k, i_n} \left(\frac{\alpha_{j_k}}{1 - s_{\lambda_{j_k}+i}} \right) \overline{\left(\frac{\alpha_{i_n}}{1 - s_{\lambda_{i_n}+j}} \right)} \Bigg\langle K_{\left(\frac{1-s_{\lambda_{j_k}+i}}{s_{\lambda_{j_k}+i}}\right)}, K_{\left(\frac{1-s_{\lambda_{i_n}+j}}{s_{\lambda_{i_n}+j}}\right)} \Bigg\rangle, &\end{aligned} \tag{5.3}$$

esta última suma es positiva (ver (3.11)). Por lo tanto, la subnormalidad de C_{ϕ_a} es consecuencia directa de la positividad de los núcleos reproductivos.

De este modo, aunque nuestro estudio de n-uplas de operadores de composición hiponormal (subnormal) con símbolo fraccional lineal, nos conduce a considerar semigrupos generados por operadores de composición de la forma C_{ϕ_a}, este tipo de semigrupo , nos brinda la posibilidad de expresar $\{C_{\phi_a}^{\lambda}\}_{\lambda \geq 0}$, como una familia de núcleos reproductivos, que determinan las propiedades'de C_{ϕ_a}.

Ahora describiremos otros espacios de Hilbert funcional que estan estrechamente relacionados con los espacios de Hardy H^2. Nuestra principal referencia es [11].

Definición 5.1. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H} \subset A(\mathbb{D})$ se dice espacio de Hardy con peso si $\{\mathbf{1}, z, z^2, \dots\}$ constituye un conjunto ortogonal completo de vectores diferentes de cero en $\mathcal{H}$ con $||\mathbf{1}|| = 1$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hardy con peso y sea $\beta(j) := ||z^j||$. De esta manera para cualquier $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in \mathcal{H}$ tenemos $||f|| = \big(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \beta(j)^2\big)^{\frac{1}{2}}$. La sucesión $\{\beta(j)\}_{j=0}^{\infty}$ es llamada *sucesión de pesos* de $\mathcal{H}$, y $\mathcal{H}$ es denotado por $H^2(\beta)$. Claramente, el espacio de Hardy clásico es un espacio de Hardy con peso, con sucesión de pesos $\beta(j) \equiv 1$.

El *Espacio de Bergman*, denotado $A^2(\mathbb{D})$, es el espacio de Hardy con peso con sucesión de pesos

$$\beta(j) = (j+1)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{all } j \geq 0).$$

Este espacio también puede ser visto como

$$A^2(\Delta) = \{f \in A(\Delta) : \int_{\Delta} |f(z)|^2 \, \frac{dA(z)}{\pi} < \infty\}$$

donde $dA(z)$ es la medida de área de Lebesgue en el disco unitario. La norma de un elemento $f \in A^2(\mathbb{D})$, esta dado por $||f|| = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. $A^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert funcional con núcleo reproductivo

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2} \quad (z, w \in \mathbb{D}). \tag{5.4}$$

El *Espacio de Dirichlet*, denotado $\mathcal{D}$, es el espacio

$$\mathcal{D} := \{f \in A(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, \frac{dA(z)}{\pi} < \infty\},$$

con norma dada por $||f|| = |f(0)| + \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. $\mathcal{D}$ es equivalente (ver [11]) al espacio de Hardy con peso $H^2(\beta)$ con sucesión peso

$$\beta(j) = (j+1)^{\frac{1}{2}} \quad (j \geq 0).$$

La pregunta.

¿Que aplicaciónes fraccionales lineales, inducen operadores de compasición hipornormales (subnormales) no triviales en $A^2(\mathbb{D})$?

hasta donde sabemos, permanece sin respuesta.

Nótese que si $w \in \mathbb{D}$, entonces en $A^2(\mathbb{D})$

$$K_w \circ K_w(z) = \frac{(1-\overline{w}z)^4}{((1-\overline{w}z)^2-\overline{w})^2},$$

no es un núcleo reproductivo.

¿Hasta qué grado las propiedades de un operador de composición hiponormal, con símbolo fraccional lineal, dependen de la estructura intrínseca de H^2?

La situación parece bastante excepcional; En efecto, el hecho que el operador multiplicación M_z (una versión analítica del shift unilateral en $\ell^2(\mathbb{C})$) es una isometría de H^2 sobre H_0^2 no es cierto en otros espacios de Hardy con peso, ni los núcleos reproductivos de aquellos espacios se comportan bien bajo iteración. Por otra parte, C. C. Cowen, [10], probó que la subnormalidad del adjunto de un operador de composición en H^2 se transfiere automaticamente al espacio de Bergman. En conclusión, estimamos se necesita mas estudio para entender propiamente este fenómeno.

⋆⋆⋆⋆⋆

Bibliografía

[1] M. Appell, P. Bourdon, y J. Thrall, *Norms of Composition Operators on the Hardy space*, Experiment. Math. 5 (1996) 111-117.

[2] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.

[3] P. Avramidou, F. Jafari, *On norms of Composition Operators on Hardy spaces* (Edwardsville, 1998), 47-54, Comtemp. Math. Vol. 232 Amer. Math. Soc., Providence 1999.

[4] G. Bachman, L. Narici *Analisis Funcional* Editorial Tecnos. Madrid, 1981.

[5] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, *Cyclic Phenomena for Composition Operators*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1997.

[6] P. Bourdon, D. Retsek *Reproducing kernels and norms of composition operatos* Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 387-394.

5Analysis 81 (1988), 298-319.

[7] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[8] C. C. Cowen, *Composition operators on H^2*, J. Operator Theory 9 (1983), 77-106.

[9] C. C. Cowen, *Linear fractional composition operators on H^2*, Integral Equations and Operator Theory 11 (1988), 151-160.

[10] C. C. Cowen, *Transferring subnormality of adjoints of composition operators*, Integral Equations Operator Theory 15 (1992), 167-171.

[11] C. C. Cowen, and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, New York, 1994.

[12] C. Hammond, *On the Norm of a Composition Operators* , Thesis, University of Virginia, 2003.

[13] P. Duren, *Theory of H^p spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[14] F. Jafary, B. D. MacCluer, C. C. Cowen and D. Porter, *Studies on Composition Operators*, Contemp. Math, Vol 213 Mathematical Society, 1998.

[15] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New-York, 1981.

[16] Garro. Guillermo, *Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo.* tesis profesional, 2003.

[17] J. Giménez, *Joint hyponormality of composition operators with linear fractional symbols*, Integral Equations and Operator Theory 43 (2002), 385-396.

[18] J. Giménez, *Joint spectrum of subnormal n-tuples of composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2001), 2015-2023.

[19] J. Giménez, *Subnormal Semigroups of Composition Operators.* Proc. Amer. Math. Soc, 133 (2005), 1749–1756.

[20] C. Hammond, *On the norm of a Composition Operator with linear Fractional Symbol,* Acta Sci. Math.(Szeged)2003

[21] C. Hammond, *On the norm of a Composition Operator ,* Thesis, universidad de Virginia, 2003.

[22] M.j. Martín , *Adjoints of composition operators with linear fractional symbols and their norms,* First advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis (Seville 2004), pp. 105-112 (A. Montes-Rodriguez, editor), University of Seville 2005

[23] M. Martín and D. Vukotić, *Adjoints of composition operators on Hilbert space of analytic functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 131. (2003), no. 2, 601-606.

[24] E. A. Nordgren, *Composition Operators*, Canadian J. Math. 20(1968),442-449. (MR 36-6961).

[25] E. A. Nordgren, *Composition Operators on Hilbert Space*, Lecture Notes in Mathematics 693, Springer- Verlag, New York,(1978),37-68.

[26] V. I. Pausen, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert space* http://www.math.uh.edu/ vern/rkhs.pdf, 2006

[27] D. Retsek, *The kernel supremum property and norms of composition operators ,* Thesis, Washington University, 2001.

[28] W. Rudin, *Real Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1921.

[29] H. J. Schwartz, *Composition Operators on H^p*, Thesis, University of Toledo, 1969.

[30] J. Shapiro, *The essential norm of a composition operator,* Ann. of Math. (2) 125 (1987), 375-404.

[31] J. Shapiro, *What do composition operators know about inner functions?* Monatshefte für Mathematik 130 (2000), 57–70.

[32] E. Schroeder, *Über itierte Funktionen*, Math. Ann. 3(1871), 296-322. Springer-Verlag, New York, 1993

[33] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.