UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“SUPERVIVENCIA Y EXTINCIÓN EN UN MODELO POBLACIONAL DE DOS ESPECIES EN COMPETENCIA”

Trabajo Especial de Grado presentado por

ANDY EL ACHOUCHE EL MAAZ

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: M.Sc. Miguel J. Vivas C.

Barquisimeto, Venezuela. Septiembre de 2007

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"SUPERVIVENCIA Y EXTINCIÓN EN UN MODELO POBLACIONAL DE DOS ESPECIES EN COMPETENCIA"

Presentado por el ciudadano ANDY EL ACHOUCHE EL MAAZ titular de la Cédula de Identidad Nº 17.306.353. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedico este logro a mi madre, que con su esfuerzo, dedicación, paciencia e infinito amor supo guiarme por el buen camino.
Todos mis éxitos te los debo a ti.
Gracias por existir.

Agradecimientos

Gracias a Dios por estar siempre a mi lado y por darme la sabiduría para lograr la culminación de esta etapa de mi vida.

A mi segunda casa la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, y todos los profesores que forman parte de ella.

A mi tutor y amigo el Profesor Miguel Vivas por su disposición incondicional, su preocupación e interés a lo largo del desarrollo de la tesis.

A mi hermana por brindarme su apoyo en los momentos más difíciles y por enseñarme que con trabajo esfuerzo y dedicación se puede alcanzar el éxito.

A mis compañeros y amigos: José Soto, Oswaldo Troncoso, Oscar Del Moral, Vanessa Rodriguez y Rubén Ortíz. Gracias por acompañarme todos estos años.

A Isaac Mendoza por ayudar en la elaboración del diseño de esta tesis.

“SUPERVIVENCIA Y EXTINCIÓN EN UN MODELO POBLACIONAL DE DOS ESPECIES EN COMPETENCIA”

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar en forma detallada los resultados obtenidos por Shair Ahmad [1] en su artículo “ON THE NONAUTONOMOUS VOLTERRA-LOTKA COMPETITION EQUATIONS”.
Consideraremos el sistema

$$\begin{cases} u'(t) &= u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)v(t)] \\ v'(t) &= v(t)[d(t) - e(t)u(t) - f(t)v(t)] \end{cases}$$

donde $a(t), \dots, f(t)$ son funciones continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. demostraremos que cuando se satisfacen las desigualdades

$$a_L f_L > c_M d_M \quad \text{y} \quad b_M d_M \leq a_L e_L$$

entonces la solución $col(u(t), v(t))$ con condiciones iniciales positivas tiene el siguiente comportamiento: una de las especies se extingue $(\lim_{t\to\infty} v(t) = 0)$ y la otra especie tiende a $u^\star(t)$ es decir $\lim_{t\to\infty} u(t) - u^\star(t) = 0$, donde $u^\star$ es la única solución acotada de la ecuación logística $u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t)]$.
El propósito fundamental es dar una demostración diferente a la realizada por Rafael Restrepo [3] en su trabajo titulado “EXTINCIÓN Y SOBREVIVENCIA EN UN SISTEMA LOTKA-VOLTERRA”.

Este trabajo fue presentado en la V Jornada de Investigación y Postgrado del Decanato de Ciencias y Tecnología de la UCLA. Realizado del 11 al 13 de julio del 2007.

Índice

Capítulo 1
Introducción

En este trabajo citaremos el sistema Lotka-Volterra, el cual debe su nombre a dos ilustres personajes.
El primero *Alfred James Lotka* Matemático estadounidense nacido en Lemberg en el año de 1880 y murió en Nueva York en 1949. Especializado en estadística, se le considera el fundador de la demografía matemática. Estudió la evolución de las poblaciones y definió los conceptos de población estable, población estacionaria y tasa de crecimiento natural. Su obra más importante se titula *Teoría analítica de las asociaciones biológicas.*

El segundo *Vito Volterra* Físico matemático italiano nacido en Ancona en 1860 y muere en Roma en el año 1940. Catedrático de la Universidad de Roma desde 1900, senador y presidente de la Academia de Lincei, durante la I Guerra Mundial se alistó en el cuerpo de Ingenieros, donde se interesó por la artillería aire-tierra, asegurándose haber sido el primero que disparó desde una aeronave. Su oposición al fascismo y el pretexto de su origen judío le ocasionaron la expulsión de su cátedra y de las sociedades científicas italianas, si bien en 1936 el papa le recibió en la Pontificia Academia de Ciencias. Exiliado a Francia hasta 1939, impartió cursos en distintos países, entre ellos España. Volterra desarrolló la solución de ecuaciones integrales de límites variables que lleva su nombre, y en 1926, sobre un problema de poblaciones de peces, diseñó la ecuación logística que serviría de base a Alfred J. Lotka (1880-1949) para desarrollar la ley de crecimiento de dos poblaciones competitivas (por ejemplo, depredadores y presas), expresada como sistema de doble ecuación diferencial (ecuaciones de Lotka-Volterra). Sus Obras matemáticas (Roma, 1954-62) se publicaron en 5 volúmenes.

En este trabajo haremos en primer lugar un estudio detallado sobre la ecuación logística

$$u'(t) = u(t)[a - bu(t)],$$

demostrando algunos teoremas y proposiciones que describirán las soluciones de dicha ecuación.

Seguidamente extenderemos el estudio sobre el sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} u'(t) &= u(t)[a - bu(t) - cv(t)], \\ v'(t) &= v(t)[d - eu(t) - fv(t)], \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $a, \ldots, f$ son constantes positivas.

El sistema (1.1) postula lo siguiente:

- Cada una de las especies, en ausencia de la otra, tiene un crecimiento determinado por una ecuación logística.
- Cada especie compite por un recurso compartido y por lo tanto infiere con el crecimiento de la otra. Así, la presencia de cada especie influye de manera negativa en la tasa de crecimiento de la otra.

Mas específicamente una interpretación de las constantes $a, \ldots, f$ es la siguiente:

- a y d representan la razón de crecimiento de las especies u y v respectivamente.
- b y e representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento.
- c y f representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra.

En el capítulo 4 probaremos la existencia y unicidad de puntos de equilibrio positivos de la solución del sistema (1.1), su monotonía, su convergencia hacia algún punto de equilibrio, entre otros resultados, los cuales se encuentran en el texto: "ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS" de Antonio Tineo y Jesus Rivero [6].

Para finalizar en el capítulo 5 generalizaremos el sistema (1.1) cambiando las constantes $a, \ldots, f$ por funciones $a(t), \ldots, f(t)$ que sean continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Esto fue considerado por Shair Ahmad [1] en su artículo “ON THE NONAUTONOMOUS VOLTERRA-LOTKA COMPETITION EQUATIONS” en el cual se demuestra que bajo ciertas condiciones una de las especies se extingue y la otra se estabiliza a medida que pasa el tiempo a la solución de una ecuación logística.

Capítulo 2
Preliminares

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados que serán necesarios en el desarrollo del presente trabajo. Tales resultados son obtenidos principalmente de [2], [4], [5] y [6] y sus pruebas pueden ser vistas allí.

Definición 2.1. Sea $n \geq 1$ un entero. ***Una ecuación diferencial ordinaria de orden n*** es una expresión de la forma

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

donde $F : W \to \mathbb{R}^p$ es una función continua definida en un abierto W de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \cdots \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{np}$. Cuando $p = 1$ se dice que (2.1) es una ***ecuación escalar***, mientras que si F no depende de la variable t se dice que (2.1) es un ***sistema autónomo***.

Definición 2.2. Una ***solución*** de (2.1) es una función $v : I \to \mathbb{R}^p$ de clase C^n definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$:

(1) $(t, v(t), \ldots, v^{(n-1)}) \in W$.

(2) $v^{(n)}(t) = F(t, v(t), \ldots, v^{(n)}(t))$.

Definición 2.3. Sea $(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in W$. La expresión

$$\begin{array}{rcl} y^{(n)} & = & F(t, y, \ldots, y^{(n-1)}); \\ y(t_0) & = & y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{array} \tag{2.2}$$

es llamada un ***problema a valores iniciales*** (algunas veces denotado PVI). Una *solución* de (2.2) es una función $v : I \to \mathbb{R}^p$ tal que:

(3) v es solución de (2.1); $t_0 \in I$; $\quad v(t_0) = y_0, \ldots, v^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

Definición 2.4. Diremos que F es ***localmente Lipschitziana*** en x, si dado $(t_0, x_0) \in W$, existe un rectángulo R centrado en (t_0, x_0) y una constante $L > 0$ tal que

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall\ (t,x),\ (t,y) \in R \tag{2.3}$$

Teorema 2.1 (Unicidad)**.** *Supongamos que F es localmente Lipschitziana en x y sean $u : I \to \mathbb{R}^n$, $v : J \to \mathbb{R}^n$ soluciones de*

$$x' = F(t,x), \tag{2.4}$$

que coinciden en algún punto. Entonces $u \equiv v$ en $I \cap J$.

Demostración. Ver [6] capítulo 4 página 69.

Teorema 2.2 (Existencia)**.** *Supongamos que F es localmente Lipschitziana en x. Sea $(t_0, x_0) \in W$ y sea $R = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, r)$ un rectángulo en W tal que el problema a valores iniciales*

$$x' = F(t,x); \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.5}$$

es satisfecha para algún $L > 0$. Entonces el problema (2.5) posee una solución definida en $(t_0 - \alpha, t_0 - \alpha)$ donde $\alpha = \text{máx}\{\delta, r/M\}$ y $M \geq \text{máx}\{\|F(t,x)\| :\ (t,x) \in R\}$

Demostración. Ver [6] capítulo 4 página 70.

Teorema 2.3. *Sea $u : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ una solución de (2.4) tal que $\beta < \infty$. Supongamos también que existe una sucesión (t_m) en (α, β) convergiendo a β, tal que $(u(t_m))$ converge a un punto $x_\star$ de $\mathbb{R}^n$. Si $(\beta, x_\star) \in W$ entonces u es prolongable a derecha; es decir, (2.4) posee una solución $w : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $(\alpha, \beta] \subset I$.*

Demostración. Ver [6] capítulo 4 página 72.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Sea $u : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ una solución de la ecuación diferencial $x' = F(t,x)$ y supongamos que existe $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y un conjunto $K \subset W$ tal que $(t, u(t)) \in K$ si $t \in [t_0, \beta)$. Entonces u es prolongable a derecha.*

Demostración. Ver [6] capítulo 4 página 72.

Teorema 2.4 (Teorema del Valor Medio de Lagrange)**.** *Sea f una función tal que:*

1. *f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$*

2. *f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)*

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Ver [4] capítulo 5 página 289.

Teorema 2.5 (Teorema del Valor Intermedio)**.** *Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y k es un número que está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir*

$$f(a) < k < f(b) \qquad ó \qquad f(b) < k < f(a)$$

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = k$$

Demostración. Ver [4] capítulo 2 página 116.

Teorema 2.6. *Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Ver [2] capítulo 4 página 96.

Teorema 2.7. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ entonces toda subsucesión de (x_n) converge al limite a.*

Demostración. Ver [2] capítulo 4 página 85.

Teorema 2.8. *Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{E}$, $n = 0, 1, \ldots$ una sucesión de funciones sobre el abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ tal que f_n converge a f_0 uniformemente sobre cada compacto de Ω. Sea (t_n, x_n) una sucesión de puntos de Ω que convergen a (t_0, x_0). Suponga que*

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_n) = x_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

tiene una solución maximal φ_n sobre el intervalo máximo $I_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$. Sea $[a, b] \subset I_0 = (\omega_-(0), \omega_+(0))$. Entonces existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que para $n > n_0$, $I_n \supset [a, b]$ y $\varphi_n|[a, b] \to \varphi_0|[a, b]$ uniformemente.

Demostración. Ver [5] capítulo 1 página 35.

Capítulo 3

Modelo Logístico

Consideremos la ecuación diferencial $x' = x[a - bx]$ donde a, b son constantes, $b > 0$. Esta ecuación modela la evolución temporal del número de individuos de una especie $x(t)$, la cual tiene un crecimiento limitado en el sentido que al sobrepasar el número de individuos una cantidad determinada, la tasa de crecimiento $x'(t)$ se hace negativa.

Observación 3.1. Si w es una solución de la ecuación logística y $w(t_0) = 0$ para algún t_0, entonces $w \equiv 0$.

Demostración. Para cada t en el dominio de la solución, hagamos
$Q(t) = a - bw(t)$. Observe que w es solución de $x' = Q(t)w(t)$ y viene dada por

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Q(s)\,ds} \qquad \forall t \in dom(w)$$

esto se obtiene aplicando el método de separación de variables. Pero como $w(t_0) = 0$ se sigue que $w \equiv 0$ □

De la observación anterior se tiene que si $w(t_0) > 0$ para algún t_0, entonces $w(t) > 0$ para todo t en el dominio de la solución.

Proposición 3.1. *Si w es una solución de la ecuación logística tal que $w(t_0) = x_0$ y si a es positivo, entonces*

$$w(t + t_0) = \frac{ax_0e^{at}}{a - bx_0 + bx_0e^{at}} \tag{3.1}$$

Demostración. Basta con aplicar el método de separación de variables y darse cuenta que

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dw(\tau)}{aw(\tau) - bw(\tau)^2} = \left.\frac{\ln(w(\tau)) - \ln(-a + bw(\tau))}{a}\right|_{t_0}^{t}$$

luego agrupando de manera conveniente y recordando que $w(t_0) = x_0$ se tiene lo que se quiere. □

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.

1. *$w(t) \to a/b$ si $t \to \infty$*

2. *$w(t)$ esta acotada en $[t_0, \infty)$*

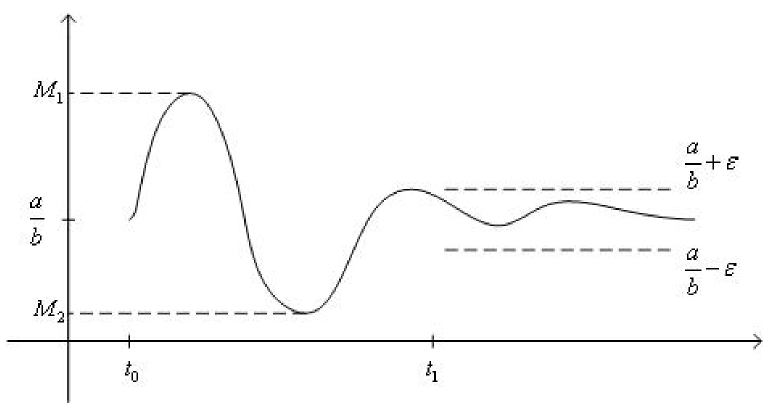
3. *$0 < x_0 < a/b \Rightarrow w$ esta definida en todo $\mathbb{R}$*

4. *$w(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$*

Demostración.

1. Basta multiplicar y dividir por e^{-at} en (3.1) y luego tomar limite cuando $t \to \infty$, para obtener el resultado.

2. Como $\lim_{t\to\infty} w(t) = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists t_1 > 0\ t.q.\ t > t_1 \Rightarrow |w(t) - a/b| < \varepsilon$, esto es $-\varepsilon + a/b < w(t) < \varepsilon + a/b$ y como w es continua en $[t_0, t_1]$ entonces w alcanza un máximo y un mínimo allí, digamos M_1, así basta tomar $M = \max\{M_1, \varepsilon + a/b\} > 0$



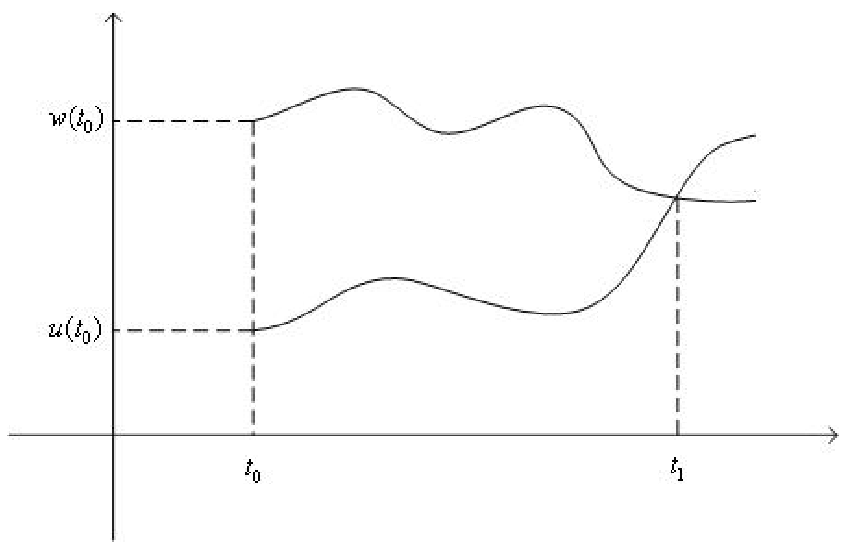
3. Como $0 < x_0 < a/b \Rightarrow 0 < bx_0 < a \Rightarrow a - bx_0 > 0$. Ahora bien, $t \geq t_0 \Rightarrow at \geq at_0 \Rightarrow e^{at} \geq e^{at_0} \Rightarrow be^{at} \geq be^{at_0} \Rightarrow a - bx_0 + be^{at} \geq a - bx_0 + be^{at_0} > 0$ por tanto de (3.1), concluimos que w esta definida para todo $\mathbb{R}$.

4. De (3.1) es claro que $w(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$.

$\square$

Proposición 3.2. *Sea* $u : I \longrightarrow (0, \infty)$ *una función de clase* C^1 *definida en un intervalo abierto* I*, tal que* $u' < u[a - bu]$*. Si* $w(t_0) > u(t_0)$ *para algún* t_0 *en* I*, entonces* $w > u$ *en* $I \cap [t_0, \infty)$

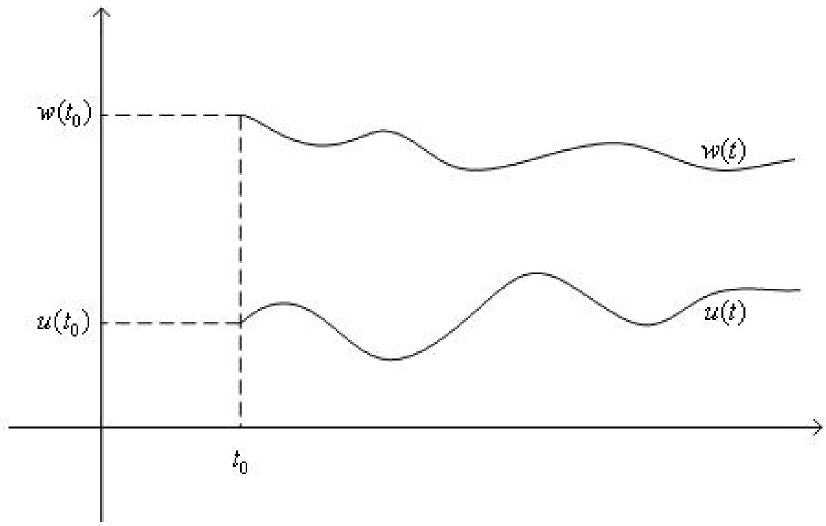
Demostración. Se desea probar que $w(t_0) > u(t_0) \Rightarrow w(t) > u(t)$, $\forall t \in I \cap [t_0, \infty)$, para ello supongamos que $\exists t_1 \in I \cap [t_0, \infty)$ con $t_1 > t_0$ tal que $w(t) > u(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ y $w(t_1) = u(t_1)$. Ahora bien, $\forall t \in [t_0, t_2)$ se tiene



$$
\begin{aligned}
w(t) > u(t) &\Rightarrow w(t) - w(t_1) > u(t) - u(t_1) \\
&\Rightarrow \frac{w(t) - w(t_1)}{t - t_1} < \frac{u(t) - u(t_1)}{t - t_1} \\
&\Rightarrow \lim_{t \to t_1^-} \frac{w(t) - w(t_1)}{t - t_1} \leq \lim_{t \to t_1^-} \frac{u(t) - u(t_1)}{t - t_1} \\
&\Rightarrow w'_-(t_1) \leq u'_-(t_1) \\
&\Rightarrow w'(t_1) \leq u'(t_1) < u(t_1)[a - bu(t_1)] \\
&\Rightarrow w'(t_1) < w(t_1)[a - bw(t_1)] \\
&\Rightarrow w'(t_1) < w'(t_1)
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción.

Gráficamente ocurre lo siguiente: □



Capítulo 4

Modelo Competitivo con coeficientes constantes

En este capítulo estudiaremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= x[a - bx - cy] \\ y' &= y[d - ex - fy] \end{cases} \tag{4.1}$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales positivos. Este sistema modela la interacción que se produce entre dos especies biológicas cuya población (o densidad de población) en el tiempo t es expresada por $x(t)$ y $y(t)$. El modelo postula lo siguiente:

- Cada una de las poblaciones en ausencia de la otra, tiene un crecimiento determinado por una ecuación logística.

- Cada población compite por un recurso compartido y por lo tanto infiere en el crecimiento de la otra especie de manera negativa.

El dominio de una solución maximal (u, v) de (4.1) será denotado por $dom(u, v)$.

Definición 4.1. Un ***Punto de Equilibrio o Crítico*** es un punto $x_\star \in U$ tal que $f(x_\star) = 0$, donde $x' = f(x)$.

Nota 1. En nuestro caso los únicos puntos de equilibrio del sistema (4.1) en la frontera del primer cuadrante del plano xy son: $(0, 0)$, $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{d}{f}\right)$.

Observación 4.1. Sea $(x_\star, y_\star)$ el único punto critico de (4.1), entonces $(x_\star, y_\star)$ es positivo, si, y solo si $\left(\frac{a}{b} - \frac{d}{e}\right)\left(\frac{d}{f} - \frac{a}{c}\right) > 0$

Demostración. ($\Rightarrow$) Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= x[a - bx - cy], \\ y' &= y[d - ex - fy], \end{cases}$$

y hagamos $f(x,y) = x[a - bx - cy]$ y $g(x,y) = y[d - ex - fy]$, como $(x_\star, y_\star)$ es el único punto critico de (4.1), entonces por la regla de Cramer se tiene que el sistema

$$\begin{cases} bx_\star + cy_\star &= a, \\ ex_\star + fy_\star &= d, \end{cases}$$

tiene solución única y viene dada por

$$0 < x_\star = \frac{af - cd}{bf - ec} \quad \text{y} \quad 0 < y_\star = \frac{bd - ea}{bf - ec} \quad \text{con} \quad bf - ec \neq 0.$$

Así $af - cd > 0$ y por lo tanto $\left(\frac{d}{f} - \frac{a}{c}\right) < 0$ y como $bd - ea > 0$ se tiene que $\left(\frac{a}{b} - \frac{d}{e}\right) < 0$, de lo anterior se sigue que:

$$\left(\frac{d}{f} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{d}{e}\right) > 0.$$

($\Leftarrow$) Sabemos que $x_\star = \frac{af - cd}{bf - ec}$ y $y_\star = \frac{bd - ea}{bf - ec}$ con $bf - ec \neq 0$, esto implica que

$$x_\star(bf - ec) = af - cd \quad \text{y} \quad y_\star(bf - ec) = bd - ea,$$

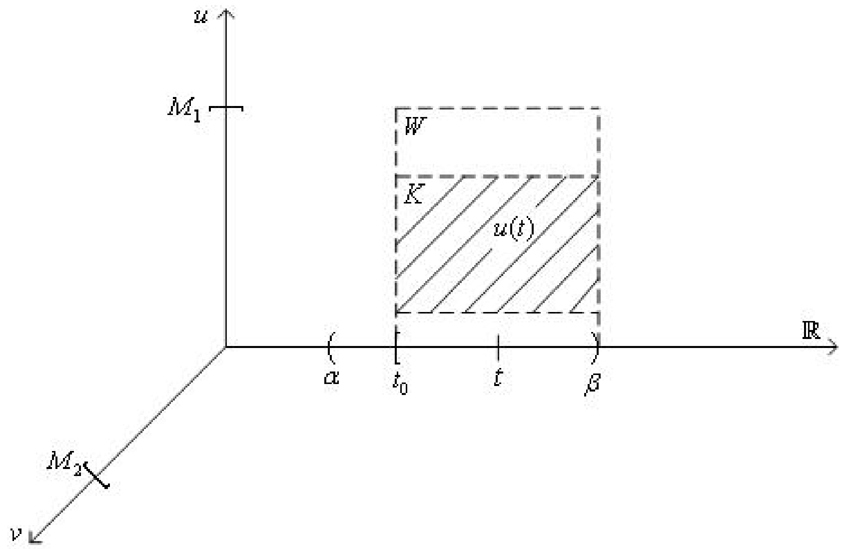
Por lo tanto

$$x_\star y_\star (bf - ec)^2 = afbd - a^2 fe - d^2 cb + cdae > 0 \quad \text{(por hipótesis)}$$

Así, $x_\star y_\star > 0$. Supongamos que $x_\star < 0$ y $y_\star < 0$, esto implica de la ecuación $bx_\star + cy_\star = a$ que a es negativo lo cual es una contradicción, por lo tanto $x_\star > 0$ y $y_\star > 0$. □

Proposición 4.1. *Si $t_0 \in dom(u,v)$, entonces (u,v) esta definida y acotado en $[t_0, \infty)$*

Demostración. Si $v > 0$ entonces $u' < u[a - bu]$.
Sea w una solución de la ecuación logística $x' = x[a - bx]$ tal que $w(t_0) > u(t_0)$. Por la proposición anterior (3.2) se tiene que $u < w$ en $J := dom(u,v) \cap [t_0, \infty)$, así u esta acotada en J, de manera análoga se prueba que v también esta acotada en J. Luego, como por el teorema (2.1) la solución (u,v) es prolongable a derecha se puede concluir que (u,v) esta definida en $[t_0, \infty)$ □



Teorema 4.1. *Si (u, v) no es constante y $u'(t_0)v'(t_0) \leq 0$ para algún t_0, entonces $u'v' < 0$ sobre (t_0, ∞)*

Demostración. Supongamos primero que $u'(t_0)v'(t_0) < 0$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $v'(t_0) < 0 < u'(t_0)$, se quiere probar que $v' < 0 < u'$ en (t_0, ∞). Supongamos por reducción al absurdo que, existe $t_1 > t_0$ tal que

$$u'(t) > 0 > v'(t) \quad \forall t \in (t_0, t_1) \quad \text{y} \quad u'(t_1)v'(t_1) = 0. \tag{4.2}$$

Estudiemos el caso cuando $v'(t_1) = 0$, el otro es análogo. Como (u, v) no es constante, entonces $u'(t_1) \neq 0$ y por (4.2) $u'(t_1) > 0$. De igual forma se tiene que $v'' \geq 0$. Por otra parte de (4.1) se tiene que $v''(t_1) = -eu'(t_1)v(t_1) < 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $u'(t_0)v'(t_0) = 0$. Sin perdida de generalidad consideremos que $v'(t_0) = 0$ y razonando como antes tenemos que $u'(t_0) \neq 0$ y $v''(t_0) = -eu'(t_0)v(t_0)$. Nos ocuparemos solo del caso $u'(t_0) > 0$, en este caso $v''(t_0) < 0$ y por tanto $v' < 0$ en (t_0, t_1) para algún $t_1 > t_0$. Como $u'(t_0) > 0$ podemos disminuir el tamaño de t_1 si fuera necesario hasta tener que $u' > 0$ en (t_0, t_1). Luego $u'(\tau)v'(\tau) < 0$ para todo $\tau \in (t_0, t_1)$ y por el primer caso se sigue que $u'v' < 0$ en $[\tau, \infty)$. □

Corolario 4.1. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 con derivadas parciales negativas y sea (u, v) una solución positiva del sistema $x' = xf(x, y)$; $y' = yg(x, y)$ tal que $u'(t_0)v'(t_0) \leq 0$ para algún t_0, entonces $u'v' < 0$ en $dom(u, v) \cap [t_0, \infty)$.*

Demostración. Como u y v son soluciones positivas y f y g tienen derivadas parciales negativas, entonces

$$\begin{array}{rcl} 0 \geq u'(t_0)v'(t_0) & = & u(t_0)v(t_0)f(u(t_0),v(t_0))g(u(t_0),v(t_0)) \\ 0 & \geq & f(u(t_0),v(t_0))g(u(t_0),v(t_0)) \\ 0 & > & f(u(t_0),v(t_0))g(u(t_0),v(t_0)) \end{array}$$

por lo tanto $u'(t_0) = u(t_0)f(u(t_0),v(t_0)) \neq 0$, esto es, $u'(t_0) \neq 0$ y esto implica que $u(t_0)$ no es constante y por la continuidad de u se sigue que esta no es constante en un entorno de t_0. Análogamente para v. Luego, por el Teorema (4.1) se tiene que $u'v' < 0$ sobre $dom(u,v) \cap [t_0, \infty)$. □

Corolario 4.2. *Si (u,v) no es constante, entonces $u'v' > 0$ ó existe $t_0 \geq 0$ tal que $u'v' < 0$ en (t_0, ∞).*

Demostración. Supongamos que existe $t_0 \geq 0$ tal que $u'(t_0)v'(t_0) \leq 0$. Así (u,v) no es constante y $u'(t_0)v'(t_0) \leq 0$ para algún $t_0 \geq 0$, entonces por el teorema (4.1) se tiene que $u'v' < 0$ sobre (t_0, ∞). □

Teorema 4.2. *Si (u,v) es una solución positiva de (4.1), entonces $(u(t),v(t)) \to (x_0,y_0)$ cuando $t \to \infty$ para algún punto critico (x_0,y_0) de (4.1) en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Si (u,v) es constante no hay nada que probar.
Si (u,v) no es constante, entonces por el corolario (4.2) se tiene que u y v son monótonas en un intervalo de la forma $[t_0, \infty)$. Luego, por la proposición (4.1) estas son acotadas, por lo tanto $u(t) \to x_0$ y $v(t) \to y_0$ cuando $t \to \infty$ para algún par de puntos x_0 y y_0. Veamos ahora que x_0 y y_0 son puntos críticos, en efecto
Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, como $u(t)$ es continua en $[n, n+1]$ y diferenciable en $(n, n+1)$ entonces por el Teorema 2.4 existe $\theta_n \in (n, n+1)$ tal que $u'(\theta_n) = u(n+1) - u(n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} u'(\theta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(u(n+1) - u(n)) = 0$. Este argumento también vale para $v(t)$. Así

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u'(\theta_n) \\ v'(\theta_n) \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f(u(\theta_n),v(\theta_n)) \\ g(u(\theta_n),v(\theta_n)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} f(u(\theta_n),v(\theta_n)) \\ \lim\limits_{n\to\infty} g(u(\theta_n),v(\theta_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lim\limits_{n\to\infty} u(\theta_n), \lim\limits_{n\to\infty} v(\theta_n)) \\ g(\lim\limits_{n\to\infty} u(\theta_n), \lim\limits_{n\to\infty} v(\theta_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$\square$

Teorema 4.3. *Sea (u,v) una solución positiva de (4.1), entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u(t) > 0 \quad o \quad \lim_{t\to\infty} v(t) > 0$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{t\to\infty} u(t) \leq 0$ y $\lim_{t\to\infty} v(t) \leq 0$, como (u,v) es positiva, entonces $u(t) \to 0$ y $v(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$a - bu(t) - cv(t) > \frac{a}{2},$$

sobre (t_0, ∞), ya que $\lim_{t\to\infty}[a - bu(t) - cv(t)] = a$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, particular para $\varepsilon = \frac{a}{2}$, existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$, se tiene que $|a - bu(t) - cv(t) - a| < \varepsilon$, esto es, $-\varepsilon < -bu(t) - cv(t) < \varepsilon$ es decir,

$$-\frac{a}{2} < -bu(t) - cv(t) < \frac{a}{2},$$

y al sumar a se tiene que

$$\frac{a}{2} < a - bu(t) - cv(t)$$

multiplicando por $u(t)$ se sigue que

$$u'(t) = u(t)[a - bu(t) - cv(t)] > \frac{u(t)a}{2},$$

sobre (t_0, ∞)

Ahora bien, como

$$\begin{aligned}
u'(t) > \frac{u(t)a}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{u'(t)}{u(t)} > \frac{a}{2} \\
&\Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{u'(\tau)}{u(\tau)} > \int_{t_0}^{t} \frac{a}{2}\, d\tau \\
&\Rightarrow \quad \ln u(t) - \ln u(t_0) > (t - t_0)\frac{a}{2} \\
&\Rightarrow \quad \ln u(t) > \ln u(t_0) + (t - t_0)\frac{a}{2} \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \ln u(t) \geq \lim_{t\to\infty} \left(\ln u(t_0) + (t - t_0)\frac{a}{2}\right) = \infty \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \ln u(t) = \infty \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = \infty
\end{aligned}$$

esto es una contradicción, ya que de la proposición (4.1) se tiene que $u(t)$ es acotada. $\square$

Teorema 4.4.

(a) *Si* $\frac{a}{c} > \frac{d}{f}$, *entonces* $\lim_{t\to\infty} u(t) > 0$

(b) *Si* $\frac{d}{e} > \frac{a}{b}$, *entonces* $\lim_{t\to\infty} v(t) > 0$

Demostración. Hagamos $k = \frac{1}{2}\left(d - \frac{ae}{b}\right) > 0$
Fijemos $t_0 \in dom(u,v)$ y sea w una solución de la ecuación logística tal que $w(t_0) > u(t_0)$, por la proposición (3.2) se tiene que $u < w$ en (t_0, ∞)
Afirmación: $u(t) < \frac{a}{b} + \frac{k}{e}$ en $[t_1, \infty)$, para algún $t_1 > t_0$.
en efecto, como $\lim_{t\to\infty} w(t) = \frac{a}{b}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = \frac{k}{e} > 0$ se tiene que, existe $t_1 > t_0$ tal que si $t > t_1$, entonces $\left|w(t) - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$ esto es, $-\varepsilon < w(t) - \frac{a}{b} < \varepsilon$ es decir, $\frac{a}{b} - \varepsilon < w(t) < \frac{a}{b} + \varepsilon$, por lo tanto $u(t) < w(t) < \frac{a}{b} + \frac{k}{e}$.
De acá se tiene que

$$v'(t) > fv(t)\left[\frac{k}{f} - v(t)\right]$$

en (t_1, ∞), esto ya que

$$v'(t) = v(t)[d - eu(t) - fv(t)] > v(t)\left[d - \frac{ea}{b} - k - fv(t)\right]$$

esto implica que

$$v'(t) > v(t)[k - fv(t)] = fv(t)\left[\frac{k}{f} - v(t)\right]$$

Sea ahora $z(t)$ una solución positiva de la ecuación

$$y'(t) = fy(t)\left[\frac{k}{f} - y(t)\right]$$

tal que $z(t_1) < v(t_1)$, por la proposición (3.2) se tiene que $z < v$ en $[t_1, \infty)$ y como $\lim_{t\to\infty} z(t) = \frac{k}{f}$ entonces

$$0 < \frac{k}{f} = \lim_{t\to\infty} z(t) \leq \lim_{t\to\infty} v(t)$$

esto quiere decir que $\lim_{t\to\infty} v(t) > 0$. $\square$

Capítulo 5

Modelo Competitivo con coeficientes variables

En este capítulo estudiaremos el sistema

$$\begin{cases} u'(t) &= u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)v(t)] \\ v'(t) &= v(t)[d(t) - e(t)u(t) - f(t)v(t)] \end{cases} \tag{5.1}$$

bajo la siguiente suposición:[1]

$$a_L f_L > c_M d_M \quad \text{y} \quad b_M d_M \leq a_L e_L \tag{5.2}$$

Lema 5.1. *Supongamos que $a(t), \ldots, f(t)$ son funciones continuas y acotadas por encima y por debajo por constantes positivas sobre $(-\infty, \infty)$, entonces el primer cuadrante del plano u, v es invariante bajo el sistema (5.1), es decir si $(u(t), v(t))$ denota una solución de (5.1), entonces se cumple lo siguiente: Si $u(t_0) \geq 0$ y $v(t_0) \geq 0$, entonces $u(t) \geq 0$ y $v(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$.*

Demostración. Existen cuatro posibles casos.

(*i)* $u(t_0) = v(t_0) = 0$

(*ii)* $u(t_0) = 0$ y $v(t_0) > 0$

(*iii)* $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) = 0$

(*iv)* $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$

Caso (i) Es claro que $col(u(t), v(t)) = col(0, 0)$ es una solución del sistema (5.1) con las condiciones iniciales $u(t_0) = 0$ y $v(t_0) = 0$, así por el Teorema de existencia y unicidad

[1] Dada una función $h(t)$, h_L denotará $\inf\{h(t) : -\infty < t < \infty\}$, y h_M denotará $\sup\{h(t) : -\infty < t < \infty\}$

(Teoremas 2.2 y 2.1) $u(t) = 0$ y $v(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$.
Caso (ii) Si $u(t_0) = 0$ y $v(t_0) > 0$ entonces el sistema (5.1) se convierte en

$$\begin{cases} u'(t_0) &= 0 \\ v'(t_0) &= v(t_0)[d(t_0) - f(t_0)v(t_0)] \end{cases}$$

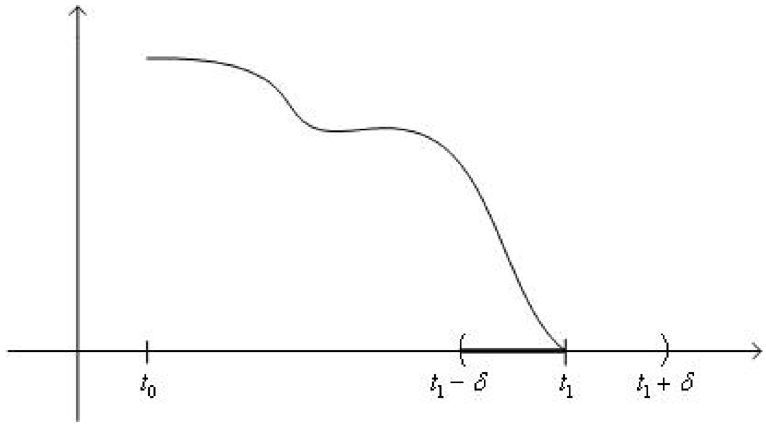
cuya solución tiene la forma $col(u(t), v(t)) = col(0, w(t))$, donde $w(t)$ es la solución de la ecuación logística $w'(t) = w(t)[d(t) - f(t)w(t)]$ con $w(t_0) = v(t_0) > 0$, así por la observación (3.1) $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$, por lo tanto $u(t) = 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. En otras palabras la órbita permanece en la parte positiva del eje v, es decir en el primer cuadrante.
Caso (iii) Similar al caso anterior.
Caso (iv) Se desea probar que si $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$, entonces $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. Supongamos lo contrario, es decir que existe $t_1 > t_0$ tal que $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ y $u(t_1) = 0$ o $v(t_1) = 0$, (t_1 es el primer tiempo con esa propiedad).
Ahora si $u(t_1) = 0$, entonces por el teorema de existencia y unicidad, existe $\delta > 0$ tal que $u(t) = 0$ pata todo $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ es decir para $t > t_1 - \delta$ se tiene que $col(u(t), v(t)) = col(0, z(t))$, donde $z(t)$ es la solución del problema con valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) &= z(t)[d(t) - f(t)z(t)] \\ z(t_1) &= v(t_1) \end{cases}$$

Así tenemos que t_1 no es el primer tiempo con la propiedad de que $u(t_1) = 0$, esto es una contradicción, por lo tanto lo supuesto es falso y en consecuencia $u(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. De manera similar se prueba que $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. □

Lema 5.2. *Si las funciones $a(t), \ldots, f(t)$ son continuas y acotadas por encima y por debajo por constantes positivas en $(-\infty, \infty)$, entonces las soluciones de (5.1) con las condiciones iniciales positivas en t_0, son acotadas en el intervalo $[t_0, \infty)$.*

Demostración. Sea $col(u(t), v(t))$ una solución del sistema (5.1) con $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$, por el lema (5.1) $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. Falta probar que están acotadas superiormente. Hagamos $M_1 > \max\left\{\frac{a_M}{b_L}, u(t_0)\right\} > 0$ y $M_2 > \max\left\{\frac{d_M}{f_L}, v(t_0)\right\} > 0$, como $M_1 > u(t_0)$, entonces por la continuidad de u existe un entorno de t_0 de la forma



$[t_0, t_0+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ donde $M_1 > u(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0+\varepsilon)$.
Afirmación: $u(t) < M_1$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.
En efecto: Supongamos lo contrario, es decir que existe $t_1 > t_0$ tal que $u(t) < M_1$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ y $u(t_1) = M_1$, luego

$$u'(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} \frac{u(t) - u(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t \to t_1^-} \frac{u(t) - M_1}{t - t_1} \geq 0$$

es decir $u'(t_1) \geq 0$, por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} u'(t_1) &= u(t_1)[a(t_1) - b(t_1)u(t_1) - c(t_1)v(t_1)] \\ &= M_1[a(t_1) - b(t_1)M_1 - c(t_1)v(t_1)] \\ &\leq M_1[a(t_1) - b(t_1)M_1] \\ &\leq M_1[a_M - b_L M_1] \\ &= M_1 b_L \left[\frac{a_M}{b_L} - M_1\right] < 0 \end{aligned}$$

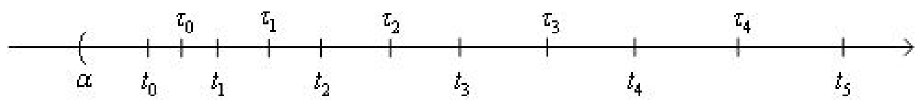
por lo tanto $0 \leq u'(t_1) < 0$, esto es una contradicción y en consecuencia $u(t) < M_1$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.
Análogamente se prueba que $v(t) < M_2$ para todo $t \in [t_0, \infty)$. □

Lema 5.3. *Supongamos que la función $f : (\alpha, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y acotada en (α, ∞), entonces existen sucesiones $(\tau_n) \nearrow \infty$ y $(\theta_n) \nearrow \infty$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f(\tau_n) = \lim_{t\to\infty} \sup f(t) = \overline{f}, \qquad \lim_{n\to\infty} f'(\tau_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\theta_n) = \lim_{t\to\infty} \inf f(t) = \underline{f}, \qquad \lim_{n\to\infty} f'(\theta_n) = 0$$

Demostración. Siempre se cumple que $\underline{f} = \lim_{t\to\infty} \inf f(t) \leq \lim_{t\to\infty} \sup f(t) = \overline{f}$. Hagamos un estudio por casos. Supongamos primero que $\underline{f} = \overline{f}$, en este caso $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe y $\lim_{t\to\infty} f(t) = \underline{f} = \overline{f}$, tomemos ahora una sucesión (t_n) en (α, ∞) tal que
$\lim_{n\to\infty} t_{n+1} - t_n = \infty$

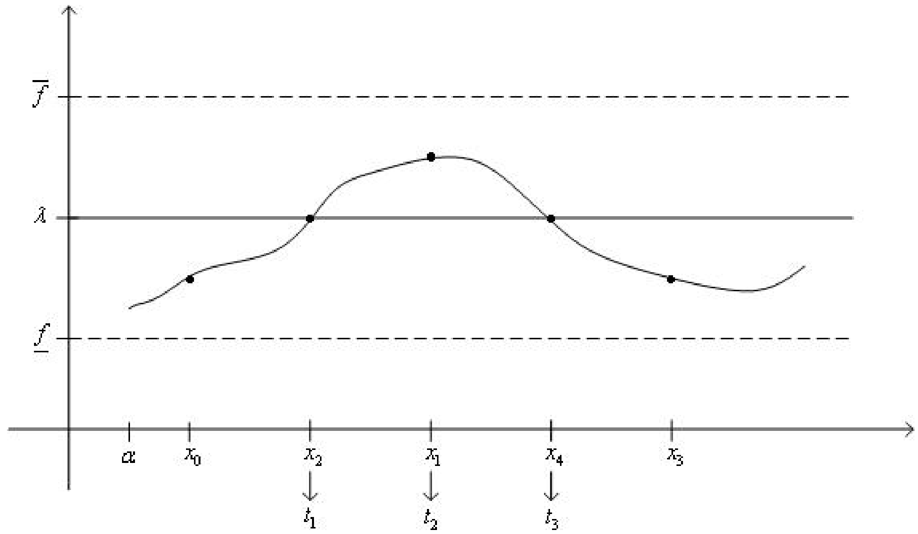


Ahora bien, por el Teorema del valor medio de Lagrange (Teorema 2.4) existe una sucesión (τ_n) tal que $\tau_n \in (t_n, t_{n+1})$ y

$$f'(\tau_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n},$$

Además, como f es acotada y dado que $\lim_{n\to\infty} t_{n+1} - t_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{t_{n+1} - t_n} = 0$ y así $\lim_{n\to\infty} f'(\tau_n) = 0$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f(\tau_n) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \overline{f} = \underline{f}$ y $\lim_{n\to\infty} f'(\tau_n) = 0$. En este caso las sucesiones (τ_n) y (θ_n) coinciden.

Si $\underline{f} < \overline{f}$, entonces para cada $\lambda \in (\underline{f}, \overline{f})$, existen t_1, t_2 y t_3 tales que $\alpha < t_1 < t_2 < t_3$ y satisfacen que $f(t_1) = \lambda$, $f(t_2) > \lambda$ y $f(t_3) = \lambda$.
En efecto: recordemos primero que si $\lambda < \lim_{x\to\infty} \sup f(x) = \inf_{M>0} \sup_{x>M} f(x)$, entonces existe $M > 0$ y existe un $x_0 > M$ tal que $f(x_0) > \lambda$. En nuestro caso si $\lambda > \underline{f}$ entonces existe $x_0 > M > 0$ $(M > \alpha)$ tal que $f(x_0) < \lambda$. Ahora veamos $\lim_{x\to\infty} \sup f(x) = \inf_{x_0>0} \sup_{x>x_0} f(x)$, luego si $\lambda < \overline{f}$ entonces existe $x_1 > x_0 > 0$ tal que $f(x_1) > \lambda$ y por el Teorema del Valor Intermedio (Teorema 2.5) existe $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $f(x_2) = \lambda$. miremos ahora $\lim_{x\to\infty} \inf f(x) = \sup_{x_1>0} \inf_{x>x_1} f(x)$, ahora si $\lambda > \underline{f}$ entonces existe $x_3 > x_1 > 0$ tal que $f(x_3) < \lambda$ nuevamente por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_4 \in (x_1, x_3)$ tal que $f(x_4) = \lambda$. Hagamos $t_1 = x_2$, $t_2 = x_1$ y $t_3 = x_4$ así existe $t_1 < t_2 < t_3$ tales que $f(t_1) = \lambda$, $f(t_2) > \lambda$ y $f(t_3) = \lambda$.
Ahora como f es continua y $f(t_2) > \lambda = f(t_1) = f(t_3)$, entonces existe $\tau_1 \in (t_1, t_3)$ de tal manera que $f(\tau_1)$ es un máximo de f y como f es diferenciable se tiene que



$f'(\tau_1) = 0$. Ahora consideremos una sucesión creciente $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, tal que $\overline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$ y $\underline{f} < \lambda_n < \overline{f}$, por lo anterior existen sucesiones crecientes (t_n) y (τ_n) tales que $\tau_n > t_n \nearrow \infty$, $f(\tau_n) > f(t_n) = \lambda_n$. Luego,

$$\begin{aligned} \overline{f} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} f(t_n) &= \liminf_{n\to\infty} f(t_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} f(\tau_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} f(\tau_n) \\ &\leq \overline{f} \end{aligned}$$

esto es una sucesión creciente (τ_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tau_n) = \overline{f}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\tau_n) = 0$.
Para encontrar la sucesión (θ_n) basta con hacer el mismo análisis anterior pero para $F(t) = -f(t)$ $\square$

Lema 5.4. *Sea $col(u(t), v(t))$ una solución de (5.1) tal que $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$. Si $u(t) \geq \varepsilon$ en $[t_0, \infty)$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.*

Demostración. Por el lema (5.2) $u(t)$ y $v(t)$ son acotadas para todo $t \geq t_0$ y como $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$ entonces $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. Sean $\underline{u} = \liminf\limits_{t\to\infty} u(t)$ y $\overline{v} = \limsup\limits_{t\to\infty} v(t)$, como $v(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$ entonces, $\overline{v} \geq \underline{v} = \liminf\limits_{t\to\infty} v(t) \geq 0$, es decir $0 \leq \underline{v} \leq \overline{v}$. Basta con probar que $\overline{v} = 0$ ya que $0 \leq \underline{v} \leq \overline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \overline{v} = 0$ de acá que, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Probemos que $\overline{v} = 0$, para ello supongamos lo contrario, es decir que[2] $\overline{v} > 0$.
Como $u(t)$ y $v(t)$ son funciones acotadas y diferenciables para todo $t \geq t_0$, entonces por el lema (5.3) existen sucesiones (τ_n) y (θ_n) tales que

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty, & \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} u'(\tau_n) = 0, & \lim\limits_{n\to\infty} v'(\theta_n) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u(\tau_n) = \underline{u}, & \lim\limits_{n\to\infty} v(\theta_n) = \overline{v} \end{array}$$

Como $u(\theta_n)$ es una sucesión acotada, entonces por el Teorema 2.6 $u(\theta_n)$ posee una subsucesión convergente digamos $u(\theta_{n_k})$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} u(\theta_{n_k}) = \theta_1$, y por el mismo argumento $v(\tau_n)$ posee una subsucesión convergente digamos $v(\tau_{n_k})$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} v(\tau_{n_k}) = \theta_2$, ahora como $\lim\limits_{n\to\infty} u(\tau_n) = \underline{u}$, entonces toda subsucesión de ella converge al mismo límite (por el Teorema 2.7), es decir $\lim\limits_{k\to\infty} u(\tau_{n_k}) = \underline{u}$, de igual forma $\lim\limits_{k\to\infty} v(\theta_{n_k}) = \overline{v}$, $\lim\limits_{k\to\infty} u'(\tau_{n_k}) = 0$ y $\lim\limits_{k\to\infty} v'(\theta_{n_k}) = 0$. Luego, de la definición de límite superior e inferior se tiene que $\underline{u} \leq \theta_1 \leq \overline{u}$ y $\underline{v} \leq \theta_2 \leq \overline{v}$. Así

$$\begin{aligned} u'(\tau_n) &= u(\tau_n)[a(\tau_n) - b(\tau_n)u(\tau_n) - c(\tau_n)v(\tau_n)] \\ u'(\tau_n) &\geq u(\tau_n)[a_L - b_M u(\tau_n) - c_M v(\tau_n)] \end{aligned}$$

tomando límite cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$0 \geq \underline{u}[a_L - b_M\underline{u} - c_M\theta_2] \geq \underline{u}[a_L - b_M\underline{u} - c_M\overline{v}],$$

como $\underline{u} \geq \varepsilon > 0$, entonces $0 \geq a_L - b_M\underline{u} - c_M\overline{v}$ y así $a_L \leq b_M\underline{u} + c_M\overline{v}$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} v'(\theta_n) &= v(\theta_n)[d(\theta_n) - e(\theta_n)u(\theta_n) - f(\theta_n)v(\theta_n)] \\ v'(\theta_n) &\leq v(\theta_n)[d_M - e_L u(\theta_n) - f_L v(\theta_n)] \end{aligned}$$

tomando límite cuando $n \to \infty$ resulta

$$0 \leq \overline{v}[d_M - e_L\theta_1 - f_L\overline{v}] \leq \overline{v}[d_M - e_L\underline{u} - f_L\overline{v}],$$

y como $\overline{v} > 0$, entonces $d_M - e_L\underline{u} + f_L\overline{v} \geq 0$, es decir $d_M \geq e_L\underline{u} + f_L\overline{v}$, así tenemos que

$$a_L \leq b_M\underline{u} + c_M\overline{v} \tag{5.3}$$

$$d_M \geq e_L\underline{u} + f_L\overline{v} \tag{5.4}$$

[2] Como $v(t)$ representa población, esta no puede ser negativa.

Ahora bien multiplicando (5.3) por f_L y (5.4) por $-c_M$ se tiene

$$\begin{aligned} a_L f_L &\leq b_M f_L \underline{u} + f_L c_M \overline{v} && (5.5)\\ -c_M d_m &\leq -c_M e_L \underline{u} - f_L c_M \overline{v} && (5.6) \end{aligned}$$

sumando ahora (5.5) y (5.6) se tiene que

$$a_L f_L - c_M d_M \leq \underline{u}(b_M f_L - c_M e_L)$$

O equivalentemente multiplicando y dividiendo por $\dfrac{1}{f_L}$ tenemos

$$\begin{aligned} f_L\left(a_L - \frac{c_M d_M}{f_L}\right) &\leq \underline{u}(b_M f_L - c_M e_L)\\ \left(a_L - \frac{c_M d_M}{f_L}\right) &\leq \underline{u}\left(b_M - \frac{c_M e_L}{f_L}\right) \end{aligned}$$

Pero

$$a_L - \frac{c_M d_M}{f_L} = \frac{a_L f_L - c_M d_M}{f_L} > 0$$

ya que $a_L f_L - c_M d_M > 0$ y como $\underline{u} \geq \varepsilon > 0$ entonces

$$b_M - \frac{c_M e_L}{f_L} > 0$$

o bien $b_M f_L - c_M e_L > 0$. Por otro lado, si multiplicamos (5.3) por $-e_L$ y (5.4) por b_M se tiene que

$$\begin{aligned} -e_L a_L &\geq -e_L b_M \underline{u} - e_L c_M \overline{v} && (5.7)\\ b_M d_M &\geq e_L b_M \underline{u} + b_M f_L \overline{v} && (5.8) \end{aligned}$$

ahora sumando (5.7) y (5.8) se tiene que $b_M d_M - e_L a_L \geq \overline{v}(b_M f_L - e_L c_M)$ pero $b_M d_M - e_L a_L \leq 0$ por (5.2), así $\overline{v}[b_M f_L - e_L c_M] \leq 0$, y como $b_M f_L - c_M e_L > 0$, entonces $\overline{v} \leq 0$ esto contradice el hecho de que $\overline{v} > 0$, en consecuencia lo supuesto es falso y por lo tanto $\overline{v} = 0$. Esto prueba que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. □

Lema 5.5. *Sea k y ε números tales que $k > \dfrac{d_M}{f_L}$, $\varepsilon > 0$ y $a_L - b_M\varepsilon - c_M k > 0$. Si col$(\widehat{u}(t), \widehat{v}(t))$ es solución de (5.1) tal que $\widehat{u}(t_0) = \varepsilon$ y $\widehat{v}(t_0) = k$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \widehat{v}(t) = 0$*

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}'(t_0) &= \widehat{u}(t_0)[a(t_0) - b(t_0)\widehat{u}(t_0) - c(t_0)\widehat{v}(t_0)] \\
&= \varepsilon[a(t_0) - b(t_0)\varepsilon - c(t_0)k] \\
&\geq \varepsilon[a_L - b_M\varepsilon - c_M k] > 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\widehat{v}'(t_0) &= \widehat{v}(t_0)[d(t_0) - e(t_0)\widehat{u}(t_0) - f(t_0)\widehat{v}(t_0)] \\
&= k[d(t_0) - e(t_0)\varepsilon - f(t_0)k] \\
&\leq k[d_M - e_L\varepsilon - f_L k] \\
&< k[d_M - e_L\varepsilon - d_M] \\
&= k[-e_L\varepsilon] = -ke_L\varepsilon < 0
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\widehat{u}'(t_0) > 0$ y $\widehat{v}'(t_0) < 0$. Observe que $\widehat{u}(t) > \varepsilon$ y $\widehat{v}(t) < k$ para $t > t_0$ y suficientemente cerca, en efecto, como $\widehat{u}'(t_0) > 0$, entonces $\widehat{u}'(t) > 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$, para algún $\delta_1 > 0$, es decir $\widehat{u}(t)$ es estrictamente creciente sobre $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ y como $\widehat{u}(t_0) = \varepsilon$, entonces para $t > t_0$ se tiene que $\widehat{u}(t) > \widehat{u}(t_0) = \varepsilon$, por lo tanto $\widehat{u}(t) > \varepsilon$ sobre $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$.
Análogamente, $\widehat{v}'(t_0) < 0$, entonces $\widehat{v}'(t) < 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2)$, para algún $\delta_2 > 0$, es decir $\widehat{v}(t)$ es estrictamente decreciente sobre $(t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2)$ y como $\widehat{v}(t_0) = k$, entonces para $t > t_0$ se tiene que $\widehat{v}(t) < \widehat{v}(t_0) = k$, por lo tanto $\widehat{v}(t) < k$ sobre $(t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2)$.
Afirmación: $\widehat{u}(t) > \varepsilon$ y $\widehat{v}(t) < k$ para todo $t > t_0$.
En efecto, supongamos lo contrario, es decir que existe $\bar{t} > t_0$ tal que $\widehat{u}(t) > \varepsilon$ y $\widehat{v}(t) < k$ para todo $t \in (t_0, \bar{t})$ y

(a) $\widehat{u}(\bar{t}) = \varepsilon$

(b) $\widehat{v}(\bar{t}) = k$

Supongamos primero que *(a)* vale, de acá se tiene que $\widehat{u}'(\bar{t}) \leq 0$, en efecto,

$$\widehat{u}'(\bar{t}) = \lim_{t \to \bar{t}^-} \frac{\widehat{u}(t) - \widehat{u}(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \lim_{t \to \bar{t}^-} \frac{\widehat{u}(t) - \varepsilon}{t - \bar{t}} \leq 0$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 \geq \widehat{u}'(\bar{t}) &= \widehat{u}(\bar{t})[a(\bar{t}) - b(\bar{t})\widehat{u}(\bar{t}) - c(\bar{t})\widehat{v}(\bar{t})] \\ &= \varepsilon[a(\bar{t}) - b(\bar{t})\varepsilon - c(\bar{t})\widehat{v}(\bar{t})] \\ &\geq \varepsilon[a_L - b_M\varepsilon - c_M\widehat{v}(\bar{t})] \\ &> \varepsilon[a_L - b_M\varepsilon - c_M k] > 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Ahora si *(b)* vale se cumple que $\widehat{v}'(\bar{t}) \geq 0$, ya que

$$\widehat{v}'(\bar{t}) = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{\widehat{v}(t) - \widehat{v}(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{\widehat{v}(t) - \widehat{v}(\bar{t})}{t - \bar{t}} \geq 0$$

Pero, por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \widehat{v}'(\bar{t}) &= \widehat{v}(\bar{t})[d(\bar{t}) - e(\bar{t})\widehat{u}(\bar{t}) - f(\bar{t})\widehat{v}(\bar{t})] \\ &< k[d(\bar{t}) - e(\bar{t})\varepsilon - f(\bar{t})k] \\ &\leq k[d_M - e_L\varepsilon - f_L k] \\ &< k[d_M - e_L - d_M] = -ke_L\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Y en consecuencia $\widehat{u}(t) > \varepsilon$ para todo $t > t_0$ y por el lema (5.4) se tiene que $\lim_{t\to\infty} \widehat{v}(t) = 0$. □

Lema 5.6. *Existe una única solución $u^\star(t)$ de la ecuación logística*

$$u'(t) = u(t)[a(t) - b(t)u(t)] \tag{5.9}$$

tal que $\delta \leq u^\star(t) \leq \Delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde δ y Δ son números cualesquiera que cumplen $0 < \delta < \dfrac{a_L}{b_M}$ y $\dfrac{a_M}{b_L} < \Delta$.

Demostración. Para cada entero n, sea $u_n(t)$ la solución de (5.9) satisfaciendo que $u_n(-n) = \Delta$, entonces

$$\begin{aligned} u_n'(-n) &= u_n(-n)[a(-n) - b(-n)u_n(-n)] \\ &= \Delta[a(-n) - b(-n)\Delta] \\ &\leq \Delta[a_M - b_L\Delta] < 0 \end{aligned}$$

Ahora como $u_n'(-n) < 0$, entonces para $t+n$ pequeño y positivo se tiene que $\delta < u_n(t) < \Delta$.
En efecto:

$$u_n'(-n) = \lim_{t \to -n} \frac{u_n(t) - u_n(-n)}{t - (-n)} = \lim_{t \to -n} \frac{u_n(t) - \Delta}{t + n}$$

hagamos el cambio de variable $s = t + n$, $s \to 0$ cuando $t \to -n$

$$u_n'(-n) = \lim_{s \to 0} \frac{u_n(s-n) - \Delta}{s} = l < 0$$

por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que $|s - 0| = |s| < \rho$, entonces

$$\left| \frac{u_n(s-n) - \Delta}{s} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + l < \frac{u_n(s-n) - \Delta}{s} < \varepsilon + l \tag{5.10}$$

para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño se tiene que $\varepsilon + l < 0$ ya que $l < 0$, así

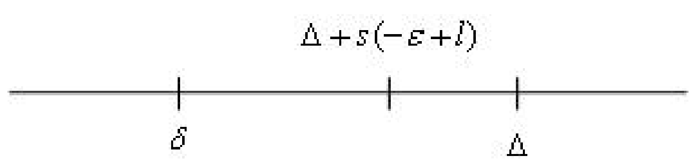
$$\frac{u_n(s-n) - \Delta}{s} < \varepsilon + l < 0 \Rightarrow u_n(s-n) < \Delta$$

y como $t = s - n$ entonces $u_n(t) < \Delta$ siempre que $|t+n| = |s| < \rho$ es decir para $t+n$ pequeño y positivo.
De la ecuación (5.10) también se tiene que

$$\Delta + s(-\varepsilon + l) < u_n(s-n) < \Delta + s(\varepsilon + l)$$

ahora para s lo suficientemente pequeño se cumple que

$$\delta < \Delta + s(-\varepsilon + l) < u_n(s-n)$$



es decir $\delta < u_n(s-n)$ y como $t = s - n$ entonces $\delta < u_n(t)$ siempre que $s = t + n$ sea lo suficientemente pequeño y positivo.

Afirmación: esta desigualdad vale para todo $t > -n$, pues si suponemos lo contrario, es decir que existe un número $\bar{t} > -n$ tal que $\delta < u_n(t) < \Delta$ para todo $t \in (-n, \bar{t})$ y ocurre uno de los siguientes casos:

(i) $u_n(\bar{t}) = \delta$

(ii) $u_n(\bar{t}) = \Delta$

(No pueden ocurrir los dos casos de manera simultanea ya que se contradice el hecho de que $\delta < \Delta$)
En el primer caso tenemos que $u_n'(\bar{t}) \leq 0$, ya que

$$u_n'(\bar{t}) = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{u_n(t) - u_n(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{u_n(t) - \delta}{t - \bar{t}} \leq 0$$

Pero, por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} u_n'(\bar{t}) &= u_n(\bar{t})[a(\bar{t}) - b(\bar{t})u_n(\bar{t})] \\ &= \delta[a(\bar{t}) - b(\bar{t})\delta] \\ &\geq \delta[a_L - b_M\Delta] > 0 \end{aligned}$$

esto es una contradicción.
En el segundo caso tenemos que $u_n'(\bar{t}) \geq 0$, ya que

$$u_n'(\bar{t}) = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{u_n(t) - u_n(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \lim_{t\to\bar{t}^-} \frac{u_n(t) - \Delta}{t - \bar{t}} \geq 0$$

Pero, por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} u_n'(\bar{t}) &= u_n(\bar{t})[a(\bar{t}) - b(\bar{t})u_n(\bar{t})] \\ &= \Delta[a(\bar{t}) - b(\bar{t})\Delta] \\ &\leq \Delta[a_M - b_L\Delta] < 0 \end{aligned}$$

esto es una contradicción. Esto prueba que $\delta < u_n(t) < \Delta$ para todo $t > -n$, en particular, $\delta < u_n(0) < \Delta$ vale para todo entero positivo n. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{u_{n_k}(0)\}_{k\geq 1}$ de $\{u_n(0)\}$ tal que $u_{n_k}(0) \to u_0$ cuando $k \to \infty$ y además $\delta \leq u_0 \leq \Delta$. Ahora sea $u^\star(t)$ solución de la ecuación logística (5.9) tal que $u^\star(0) = u_0$, entonces como cada $u_{n_k}(t)$ satisface (5.9) y $u_{n_k}(0) \to u_0$ cuando $k \to \infty$, se sigue que $u_{n_k} \to u^\star(t)$ uniformemente con respecto a t sobre sub intervalos compactos de $\mathbb{R}$, (esto lo asegura el Teorema 2.8).
Como para cada número t_1, $\delta < u_{n_k}(t_1) < \Delta$ si $-n_k < t_1$, tenemos que $\delta \leq u^\star(t_1) \leq \Delta$.

Ahora para probar la unicidad, supongamos que (5.9) tiene dos soluciones u_1 y u_2 satisfaciendo $\delta \leq u_1(t) \leq \Delta$ y $\delta \leq u_2(t) \leq \Delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como tenemos una ecuación diferencial de primer orden, podemos suponer por unicidad que
$\delta < u_1(t) < u_2(t) < \Delta$. Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ln u_1(t) - \frac{d}{dt}\ln u_2(t) &= \frac{u_1'(t)}{u_1(t)} - \frac{u_2'(t)}{u_2(t)} \\
&= \frac{u_1(t)[a(t)-b(t)u_1(t)]}{u_1(t)} - \frac{u_2(t)[a(t)-b(t)u_2(t)]}{u_2(t)} \\
&= a(t) - b(t)u_1(t) - a(t) + b(t)u_2(t) \\
&= b(t)[u_2(t) - u_1(t)] > 0 \text{ ya que } \delta < u_1 < u_2 < \Delta
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right)\right] &= \frac{d}{dt}[\ln u_1(t) - \ln u_2(t)] \\
&= \frac{d}{dt}\ln u_1(t) - \frac{d}{dt}\ln u_2(t) > 0
\end{aligned}$$

esto muestra que

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right)\right] > 0$$

y por tanto $\dfrac{u_1(t)}{u_2(t)}$ es estrictamente creciente, así para $t < 0$ se tiene que

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} < \frac{u_1(0)}{u_2(0)} < 1$$

y

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right)\right] = b(t)[u_2(t) - u_1(t)] \geq b_L u_2(t)\left[1 - \frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right] \geq b_L\delta\left[1 - \frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right] > 0$$

para $t \leq 0$, ahora integrando de T a 0, $T < 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right) - \ln\left(\frac{u_1(T)}{u_2(T)}\right) &= \int_T^0 b(t)(u_2(t) - u_1(t))\,dt \\
&\geq \int_T^0 b_L\delta\left[1 - \frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right] dt > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_1(T)}{u_2(T)}\right) &\leq \ln\left(\frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right) - \int_T^0 b_L\delta\left[\frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right] dt \\
&= \ln\left(\frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right) - b_L\delta\left[\frac{u_1(0)}{u_2(0)}\right](0 - T)
\end{aligned}$$

tomando limite cuando $T \to -\infty$ se tiene que

$$\lim_{T\to-\infty} \ln\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right) = -\infty$$

por consiguiente, como $\delta \leq u_1(t) < u_2(t) < \Delta$, concluimos que

$$\lim_{T\to-\infty} \frac{u_1(T)}{u_2(T)} = 0$$

pero

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} \geq \frac{\delta}{u_2(t)} \geq \frac{\delta}{\Delta}$$

lo cual resulta en una contradicción, por lo tanto la solución es única. □

Lema 5.7. *Sean k, ε, δ números tales que $k > \dfrac{d_M}{f_L}$, $0 < \varepsilon < \delta < \dfrac{a_L}{b_M}$ y $a_L - b_M\varepsilon - c_M k > 0$. Si $col(\widehat{u}(t), \widehat{v}(t))$ es una solución de (5.1) tal que $col(\widehat{u}(t_0), \widehat{v}(t_0)) = col(\varepsilon, k)$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} u^\star(t) - \widehat{u}(t) = 0$, donde $u^\star(t)$ es como en el lema (5.6).*

Demostración. Como mostramos en el lema (5.5), $\widehat{u}(t) \geq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, además $\widehat{u}(t)$ es acotada superiormente para todo $t \geq t_0$ (por el lema (5.2)).
Sea $w(t) = \dfrac{1}{\widehat{u}(t)}$ y $w^\star(t) = \dfrac{1}{u^\star(t)}$, para $t \geq t_0$, así tenemos

$$w'(t) = -a(t)w(t) + b(t) + c(t)\widehat{v}(t)w(t)$$

y

$$w^{\star\prime}(t) = -a(t)w^\star(t) + b(t)$$

y por lo tanto

$$w'(t) - w^{\star\prime}(t) = -a(t)[w(t) - w^\star(t)] + c(t)\widehat{v}(t)w(t) \tag{5.11}$$

Consideremos las dos únicas posibilidades:

(i) Existe $t_1 \geq t_0$ tal que $(w - w^\star)'(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_1$

(ii) Existe una sucesión de números $\{s_n\}_{n\geq1}$ en $[t_0, \infty)$ tal que para $n \geq 1$, $s_n < s_{n+1}$, $(w - w^\star)'(s_n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Si *(i)* vale, entonces $\lim_{t\to\infty}(w(t) - w^\star(t))$ existe, si $\lim_{t\to\infty}(w(t) - w^\star(t)) = 0$, entonces como $\widehat{u}(t)$ y $u^\star(t)$ son acotadas y $u^\star(t) - \widehat{u}(t) = u^\star(t)\widehat{u}(t)[w(t) - w^\star(t)]$, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} u^\star(t) - \widehat{u}(t) = 0$$

Si *(i)* vale y $\lim_{t\to\infty}(w(t) - w^\star(t)) \neq 0$, entonces como $a(t) \geq a_L > 0$ y haciendo uso del lema (5.5), $\lim_{t\to\infty} \widehat{v}(t) = 0$, ahora (5.11) implica que existe un número $\alpha > 0$ y $t_2 \geq t_1$ tal que $|(w - w^\star)'(t)| \geq \alpha$ para todo $t \geq t_2$, esto contradice el hecho de que $w(t) - w^\star(t)$ sea acotada sobre $[t_0, \infty)$, así se tiene que si *(i)* vale, entonces $\lim_{t\to\infty}(u(t) - u^\star(t)) = 0$.
Si *(ii)* vale, entonces para cada $n \geq 1$ sea $\tau_n \in [s_n, s_{n+1}]$ tal que

$$|w(\tau_n) - w^\star(\tau_n)| = \max\{|w(t) - w^\star(t)| : s_n \leq t \leq s_{n+1}\} \tag{5.12}$$

como $(w - w^\star)'(s_n) = 0$ para $n \geq 1$, se sigue que $(w - w^\star)'(\tau_n) = 0$ para $n \geq 1$, por lo tanto de (5.11) se tiene que

$$w(\tau_n) - w^\star(\tau_n) = \frac{c(\tau_n)\widehat{v}(\tau_n)w(\tau_n)}{a(\tau_n)}$$

como $a(t) \geq a_L$, $w(t)$ y $c(t)$ son acotadas y $\lim_{t\to\infty} \widehat{v}(t) = 0$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(w(\tau_n) - w^\star(\tau_n)) = 0 \tag{5.13}$$

como $s_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, se tiene que (5.12) y (5.13) que

$$\lim_{t\to\infty} w(t) - w^\star(t) = 0$$

por lo tanto, si *(ii)* vale se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}(u^\star(t) - u(t)) = 0$$

como esos son los dos únicos casos, entonces el lema queda demostrado. □

Lema 5.8. *Sea $k_1 > \Delta$, donde Δ es un número como en el lema (5.6). Si $\widetilde{u}(t)$ es una solución de (5.9) satisfaciendo $\widetilde{u}(t_0) = k_1$, entonces $\lim_{t\to\infty} \widetilde{u}(t) - u^\star(t) = 0$.*

Demostración. Como $\widetilde{u}(t_0) > u^\star(t_0)$, se sigue que $\widetilde{u}(t) > u^\star(t)$ para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Sea $w^\star(t) = \dfrac{1}{u^\star(t)}$ y $\widetilde{w}(t) = \dfrac{1}{\widetilde{u}(t)}$, entonces

$$w^{\star\prime} = -a(t)w^\star(t) + b(t)$$

y

$$\widetilde{w}'(t) = -a(t)\widetilde{w}(t) + b(t)$$

así

$$\widetilde{w}(t) - w^\star(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}[\widetilde{w}(t_0) - w^\star(t_0)]$$

para $t \geq t_0$ pero

$$-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \leq -a_L(t - t_0)$$

para $t \geq t_0$, por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{w}(t) - w^\star(t) = 0$$

y así

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u^\star(t) - \widetilde{u}(t)}{u^\star(t)\widetilde{u}(t)} = 0$$

y como $\widetilde{u}(t) > u^\star(t) \geq \delta$, entonces $\lim_{t\to\infty} \widetilde{u}(t) - u^\star(t) = 0$ □

Lema 5.9. *Sean k y k_1 números definidos como antes. Si $col(u(t), v(t))$ es una solución de (5.1) tal que $0 < u(t_0) < k_1$ y $0 < v(t_0) < k$, entonces $\lim_{t\to\infty} u(t) - u^\star(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$.*

Demostración. Podemos suponer que ε en el lema (5.5) satisface las desigualdades $0 < \varepsilon < \dfrac{a_M}{b_L} < \Delta < k_1$, $\varepsilon < u(t_0)$ y $a_L - b_M\varepsilon - c_Mk > 0$, recordemos además que $col(\widehat{u}(t), \widehat{v}(t))$ es solución de (5.1) y cumple que $\widehat{u}(t_0) = \varepsilon$ y $\widehat{v}(t_0) = k$. Notemos que $col(\widetilde{u}(t), 0)$ es también una solución de (5.1), donde $\widetilde{u}(t)$ es la solución del lema (5.8) satisfaciendo la condición inicial $\widetilde{u}(t_0) = k_1$. como

$$\widehat{u}(t_0) < u(t_0) < \widetilde{u}(t_0) \quad \text{y} \quad \widehat{v}(t_0) > v(t_0) > \widetilde{v}(t_0)$$

se tiene por el lema (5.2) que

$$\widehat{u}(t) < u(t) < \widetilde{u}(t) \quad \text{y} \quad \widehat{v}(t) > v(t) > \widetilde{v}(t)$$

para todo $t \geq t_0$, donde $\widetilde{v}(t)$ denota la segunda componente de la solución $col(\widetilde{u}(t), 0)$. Como $\widetilde{v} \equiv 0$ y $\lim_{t\to\infty} \widehat{v}(t) = 0$, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

Ahora bien

$$\widehat{u}(t) - u^\star(t) < u(t) - u^\star(t) < \widetilde{u}(t) - u^\star(t)$$

y como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \widehat{u}(t) - u^\star(t) &= 0 \qquad \text{por el Lema 5.7 y} \\ \lim_{t\to\infty} \widetilde{u}(t) - u^\star(t) &= 0 \qquad \text{por el Lema 5.8} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} u(t) - u^\star(t) = 0$$

□

Con todo lo desarrollado previamente, ya estamos en capacidad de demostrar el Teorema Principal de nuestro trabajo.

Teorema 5.1. *Supongamos que $a(t), b(t), \ldots, f(t)$ son funciones continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas y satisfacen la desigualdad (5.2). Si $col(u(t), v(t))$ es cualquier solución del sistema (5.1) tal que $u(t_0) > 0$ y $v(t_0) > 0$ para algún t_0 en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} u(t) - u^\star(t) = 0$, donde $u^\star(t)$ es la solución de la ecuación logística descrita en el lema (5.6).*

Demostración. En vista del lema 5.9, es suficiente con probar que existe un número $t_1 \geq t_0$, tal que $0 < u(t_1) < k_1$ y $0 < v(t_1) < k$. Supongamos por absurdo que $u(t) \geq k_1$ para $t \geq t_0$, (recordemos que $k_1 > \Delta > \frac{a_M}{b_L}$), entonces

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)[a(t) - b(t)u(t) - c(t)v(t)] \\ &\leq u(t)[a(t) - b(t)k_1] < 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq a(t) - b(t)k_1 < a_M - b_L k_1 < 0$$

pero esto implica que $\lim_{t\to\infty} \ln u(t) = -\infty$ y por tanto $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que existe $\bar{t}_1 \geq t_0$ tal que $u(\bar{t}_1) < k_1$.
Análogamente, existe un número $\bar{t}_2 \geq t_0$ tal que $v(\bar{t}_2) < k$. Basta con tomar $t_1 = \max\{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}$ y aplicar el Lema 5.9 y así el teorema queda demostrado. □

REFERENCIAS

[1] Shair Ahmad. On the nonautonomous volterra-lotka competition equations. *American Mathematical Society*, Volumen 117, Número 1, Páginas:199–204, 1993.

[2] Elon Lima. *Curso de Análise*. Volumen 1, IMPA-Brasil, Décima Edição, 2002.

[3] Rafael Restrepo. *Extinción y sobrevivencia en un sistema Lotka-Volterra*. UCLA-IUPEB-IUP, 1997.

[4] Jorge Sáenz. *Cálculo Diferencial*. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Segunda Edición, 2005.

[5] Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA-Brasil, 1979.

[6] Antonio Tineo y Jesús Rivero. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad de los Andes, 2002.