

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“DINÁMICA PERTURBATIVA DE SISTEMAS GIROSCÓPICOS
CONSERVATIVOS”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. JORGE CAYAMA

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: FÍSICA-MATEMÁTICA.

TUTOR: DR. RAFAEL TORREALBA

CO-TUTOR: DR. WILMER COLMENÁREZ

Barquisimeto, Venezuela. Junio de 2008



Universidad Centroccidental
 "Lisandro Alvarado"
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"DINÁMICA PERTURBATIVA DE SISTEMAS GIROSCÓPICOS
 CONSERVATIVOS"

presentado por el ciudadano BR. JORGE CAYAMA titular de la Cédula de Identidad No. 16.387.710, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

RESUMEN

En este trabajo se estudia la dinámica del giróscopo o giróstato transverso. El giróscopo es un trompo (llamado “carrier” o caja) con un punto fijado a un sistema en reposo, que contiene un “rotor” el cual gira en su interior. El giróstato transverso es aquel en el que eje del rotor gira ortogonalmente al eje de principal de rotación de la caja que contiene el punto que hemos fijado.

Se estudia la dinámica del girostato transverso para el caso de libre de gravedad. Para ello se realiza un análisis de los puntos fijos en el espacio fase de sus ecuaciones de movimiento y se encuentra una solución exacta, la cual generaliza la clásica solución de Poinsot para el trompo, demostrando que en el caso libre de gravedad el giróstato transverso es un sistema completamente integrable, determinado completamente por las condiciones iniciales.

También se estudia la dinámica del girostato transversal en presencia de la gravedad de manera numérica mediante la ayuda de MAPLE. Usando una aproximación perturbativa de las ecuaciones de movimiento, e integrando numéricamente dichas ecuaciones se muestran órbitas con bifurcaciones que da lugar una dinámica no integrable. Esta se manifiesta por la aparición de un regimen caótico en las secciones de Poincaré.

*Gracias a Dios, y mis Padres, y a todos los
que hicieron esto posible.*

AGRADECIMIENTOS

El autor quiere Agradecer a ...

ÍNDICE

Resumen	iii
Agradecimientos	i
Introducción	1
1. Dinámica del Trompo Libre.	5
2. El Trompo Masivo.	13
3. El Giróstato Transversal Libre	21
4. El Giróstato Transversal Masivo	27
Conclusiones	38
A. Cálculo en Maple para las secciones de Poincaré	3
Referencias Bibliográficas	5

INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas giroscópicos es un problema con más de cien años de historia [7], que sin embargo, aún no ha sido resuelto completamente. Su importancia subyace en su aplicación en los sistemas de navegación inercial, como submarinos, aeroplanos, y recientemente en naves espaciales y satélites. En general los problemas reales son no integrables ya que involucran términos no lineales.

Los problemas de la mecánica pueden ser atacados de diversas maneras: numéricas, perturbativas, variacionales, etc. Los giróscopos o giróstatos son trompos con un rotor adicional y en general se consideran perturbaciones al antiguo problema del Trompo, que fue originalmente estudiado por Euler y Lagrange hace más de 200 años. El trompo es un sistema integrable para el caso simétrico (trompo de Lagrange) tanto en el caso con gravedad como sin ella. Sin embargo, el caso del trompo asimétrico [4] no es integrable en presencia de gravedad. La extensión de estos resultados al caso de los giróscopos fue realizada recientemente [6] utilizando un teorema general para sistemas con 2 grados de libertad, que fue obtenido de un reconocido trabajo [1].

El giróscopo es un trompo (llamado “carrier” o caja) con un punto fijado a un sistema en reposo, que contiene un “rotor” el cual gira en su interior. El giróstato transverso (g.t.) es aquel en el que eje del rotor gira ortogonalmente al eje de principal de rotación de la caja que contiene el punto que se ha fijado.

En un trabajo de investigación previo realizado por el tutor [9], se estudiaron dos casos: el giróstato transverso en ausencia de gravedad o libre y el giróstato transverso con gravedad o masivo. En el primer caso se encontró una dinámica integrable no trivial [5] debido al rompimiento o deformación topológica de los Toros² de KAM³ que se produce cuando la velocidad del rotor interno es suficientemente grande, esto se caracteriza por cambios en el número y tipo de puntos fijos separando el régimen dinámico en tres casos integrables. En el segundo caso, el g.t. masivo, se considera que el término gravitacional es una perturbación no lineal del caso libre. La acción del término

² Variables angulares de acción son invariantes para los sistemas no perturbados.

³ Teorema de Kolmogorov, Arnold y Moser

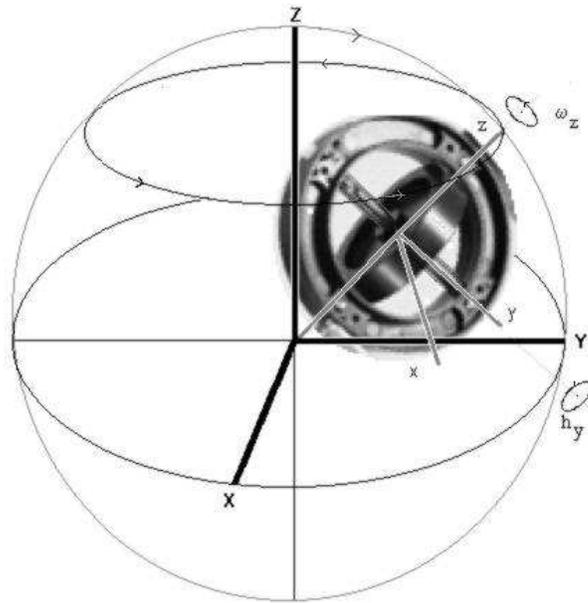


Figura 1: El Giróstato Transversal

perturbativo gravitacional permite a las trayectorias cruzar la órbita homoclínica que separa los modos de oscilación del sistema, produciendo soluciones con bifurcaciones. También en ese trabajo se demostró, utilizando el teorema de Melnikov [1], que estas bifurcaciones son sensibles con respecto a pequeños cambios en las condiciones iniciales lo que da lugar a la aparición de un régimen caótico.

El propósito principal de este trabajo es estudiar la dinámica del giroscopio o giróstato transversal tanto en el caso libre de la gravedad como en presencia de ella, usando para ello la integración numérica y graficación de las secciones de Poincaré en lugar del método de Melnikov.

En el capítulo 1 se resume la teoría clásica del Trompo para el caso libre de gravedad. Se revisa lo concerniente al planteamiento de las ecuaciones en el sistema comovil del cuerpo y sus momentos principales de inercia respecto a dicho sistema no inercial o rotante. Se construye la clásica solución de Poincaré y se estudia su cinemática basándose en las cantidades conservadas y el análisis de sus 6 puntos fijos.

En el capítulo 2 se resume la dinámica clásica para el caso del trompo simétrico en presencia de gravedad (trompo de Lagrange). Se revisa el planteamiento de las ecuaciones en el sistema de ángulos de Euler. Mediante la eliminación de las cantidades

conservadas se reduce el sistema al de una partícula en un potencial efectivo, cuyas soluciones pueden escribirse en término de cuadraturas para θ , el ángulo de inclinación del eje principal del trompo con respecto a la vertical. El análisis de puntos fijos muestra la existencia de una órbita homoclínica que separa dos regímenes dinámicos diferentes, la nutación u oscilación en torno al punto (ángulo) de equilibrio y la gironutación o rotación completa de θ en torno al punto de apoyo del trompo.

En el capítulo 3 se estudia la dinámica del giróstato transverso para el caso de libre de gravedad. Para ello se realiza un análisis de los puntos fijos, obteniéndose que su número y ubicación varía dependiendo del valor de la perturbación que produce el rotor sobre el sistema. Se identifican 3 casos: a) Perturbación pequeña con 6 puntos fijos (4 elípticos y 2 hiperbólicos) que constituye una versión deformada del Trompo de Poincot. b) Perturbación no pequeña con 4 puntos fijos (3 elípticos y 1 hiperbólico). c) Perturbación grande con 2 puntos fijos (elípticos). En el primer caso hay 4 órbitas heteroclinicas que separan las rotaciones en torno a los 4 centros elípticos en regiones bien diferenciadas del movimiento, en el segundo caso hay 2 órbitas homoclinicas que separan las rotaciones en torno a los 3 centros elípticos, mientras que en el tercer caso no hay puntos hiperbólicos y el movimiento es dominado por la rotación del rotor interno. Siguiendo [9] se integran las ecuaciones de movimiento de manera analítica, demostrando que para todo valor de la perturbación (introducida por el rotor) existe una solución exacta, por lo cual el g.t. libre de gravedad es un sistema completamente integrable.

En el capítulo 4 se obtienen el Lagrangiano, el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento para el caso del giróstato transverso, sometido a la acción de la gravedad. Usando una aproximación perturbativa de las ecuaciones de movimiento, e integrando numéricamente, dichas ecuaciones, con la ayuda de MAPLE, se obtienen secuencias de las secciones de Poincaré en función de la energía para distintos valores del parámetro perturbativo. Debido a que el sistema presenta órbitas con bifurcaciones, da lugar a una dinámica no integrable. Esta se manifiesta por la aparición de un régimen caótico en las secciones de Poincaré.

Finalmente se presenta una discusión de alcances y limitaciones y las conclusiones. Los resultados gráficos y numéricos de los capítulos 3 y 4 son originales y complementan los resultados de [9].

CAPÍTULO 1

DINÁMICA DEL TROMPO LIBRE.

El giróstato transversal es un sistema formado por dos cuerpos rígidos, el primero de ellos es un trompo simple, llamado “caja”, como se muestra en la Figura 1 con momentos de inercia I_1 , I_2 y I_3 con respecto a sus ejes principales de simetría identificados como x , y , z centrados en el centro de masa (coincidentemente), y con un punto del eje z fijo (o anclado) en el origen del sistema X, Y, Z , el cual es un esquema de referencia fijo. El segundo cuerpo rígido (c.r.) es el “rotor” y tiene dos puntos unidos al primer c.r., de manera que puede rotar solamente alrededor del eje definido por esos dos puntos. Se considera el caso donde ese eje de rotación coincide con el eje principal de simetría y y es ortogonal al eje de rotación z de la caja.

El Lagrangiano para los cuerpos rígidos libres es simplemente su energía cinética con respecto al eje principal de simetría fijo sobre el cuerpo

$$L_{tl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2]. \quad (1.1)$$

A pesar de su simple apariencia no es fácil de resolver, debido al hecho de que los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_3$ no son formas exactas de tal modo que los ángulos de giro alrededor de los ejes simétricos principales x , y , z no son coordenadas de un vector que preserve su norma bajo transformaciones de $SO(3)$, el grupo de rotaciones ortogonales en tres dimensiones. De hecho, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_3$ no cumplen con las reglas de adición de vectores. El Lagrangiano (1.1) está únicamente en función de las velocidades angulares $\dot{\theta}_i = \omega_i$ y así se definen los momentos angulares como

$$m_i = I_i \omega_i = \frac{\partial L_{tl}}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial L_{tl}}{\partial \omega_i}, \quad \text{donde } i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Se considera $I_1 > I_2 > I_3$. Con el formalismo lagrangiano se hace uso de la ecuación de Euler-Lagrange para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema que se está estu-

diando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{tl}}{\partial \omega_i} \right) = 0,$$

de esta forma

$$\frac{dm_i}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

Por otra parte, el cambio en un tiempo dt de las componentes de un vector general \mathbf{A} visto por un observador en el sistema de ejes en el cuerpo difiere del cambio correspondiente visto por un observador en el sistema del espacio. Se puede escribir que la única diferencia entre éstos es el efecto de rotación de los ejes del cuerpo

$$(d\mathbf{A})_{\text{espacio}} = (d\mathbf{A})_{\text{cuerpo}} + (d\mathbf{A})_{\text{rotación}}.$$

Ahora si se toma un vector fijo en un cuerpo, cuando el cuerpo rota, por supuesto no hay cambios en las componentes de este vector, visto por un observador en el cuerpo. Dado que el vector está fijado en el sistema del cuerpo, éste rota en sentido antihorario y el cambio en el vector cuando es observado desde el espacio viene dado por:

$$(d\mathbf{A})_{\text{rotación}} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}.$$

Por lo tanto,

$$(d\mathbf{A})_{\text{espacio}} = (d\mathbf{A})_{\text{cuerpo}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (1.4)$$

Luego, la tasa de cambio del vector \mathbf{A} visto por los dos observadores se obtiene dividiendo los términos de la ecuación (1.4) por el elemento diferencial de tiempo dt :

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{espacio}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}, \quad (1.5)$$

aquí, $\boldsymbol{\omega}$ es el vector velocidad angular instantánea del cuerpo definida por la relación $\boldsymbol{\omega} dt = d\boldsymbol{\Omega}$ y permanece a lo largo del eje de rotación infinitesimal. En magnitud, $\boldsymbol{\omega}$ mide la tasa de rotación instantánea del cuerpo.

Entonces, para este caso

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{m}}{dt} \right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \quad (1.6)$$

y considerando (1.3) se tiene que

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}.$$

Así, la ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= \omega_2 m_3 - \omega_3 m_2 = \frac{m_2}{I_2} m_3 - \frac{m_3}{I_3} m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= \omega_3 m_1 - \omega_1 m_3 = \frac{m_3}{I_3} m_1 - \frac{m_1}{I_1} m_3, \\ \frac{dm_3}{dt} &= \omega_1 m_2 - \omega_2 m_1 = \frac{m_1}{I_1} m_2 - \frac{m_2}{I_2} m_1. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones también se obtienen con la definición de corchetes de Poisson-Lie [4], pues como se sabe, los ángulos θ_1 , θ_2 , y θ_3 no forman un espacio vectorial, por lo cual no pueden ser usados para hallar las ecuaciones de Hamilton de forma usual. El sistema de referencia escogido sobre el trompo es rotante y no constituye un sistema de referencia inercial. Para obtener las ecuaciones de movimiento correctas es necesario introducir la derivada temporal como

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A}{\partial m_i} \frac{\partial H}{\partial m_j} \right) m_k, \quad (1.7)$$

donde $A = A(m_i)$ es una función de los momentos canónicos m_i ($i=1,2,3$) y H es el Hamiltoniano del sistema, el cual se define utilizando la transformación de Legendre

$$H = [m_i \omega_i - L(m_i)]_{m_i = \frac{\partial L}{\partial \omega_i}} = H(m_i). \quad (1.8)$$

Luego, para este caso:

$$H_{tl} = \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2] \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} \right]. \quad (1.10)$$

Es fácil ver que (1.5) y (1.7) son equivalentes, por ejemplo, para $\frac{dm_1}{dt}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= \{m_1, H_{tl}\} \\
&= \left\{ m_1, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{I_i} m_i^2 \right\} \\
&= \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial m_1}{\partial m_i} \frac{\partial H_{tl}}{\partial m_j} \right) m_k \\
&= \epsilon_{1jk} \left(\frac{\partial H_{tg}}{\partial m_j} \right) m_k \\
&= \epsilon_{1jk} \frac{m_j}{I_j} m_k \\
&= \epsilon_{123} \left(\frac{m_2 m_3}{I_2} \right) + \epsilon_{132} \left(\frac{m_3 m_2}{I_3} \right) \\
&= \frac{m_2 m_3}{I_2} - \frac{m_3 m_2}{I_3} \\
&= \frac{I_3 m_2 m_3 - I_2 m_3 m_2}{I_3 I_2},
\end{aligned}$$

así, calculando los corchetes de Poisson-Lie para m_1 , m_2 , y m_3 , se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dm_1}{dt} = a_1 m_2 m_3, \quad \text{donde} \quad a_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_3 I_2} < 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = a_2 m_3 m_1, \quad \text{donde} \quad a_2 = \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} > 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{dm_3}{dt} = a_3 m_1 m_2, \quad \text{donde} \quad a_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_2 I_1} < 0. \quad (1.13)$$

Las soluciones para estas ecuaciones son muy bien conocidas [3], y consisten de rotaciones elípticas de los momentos totales $m = (m_1, m_2, m_3)$ sobre $S^2(l)$, la esfera con radio $l = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$ centrada en el origen del espacio fase, llamada construcción de Poincaré. Estas órbitas elípticas dan vueltas alrededor de los cuatro puntos fijos estables (conocidos como nodos o centros) $(\pm l, 0, 0)$, $(0, 0, \pm l)$, o se centran en ellos. Mientras que las órbitas restantes pasan por los puntos hiperbólicos $(0, \pm l, 0)$, dividiendo la esfera en cuatro regiones debido a la trayectoria de dos círculos mayores sobre ella (un círculo ecuatorial y otro meridional).

La órbita heteroclínica está explícitamente dada por [6] [4]:

$$m_1^{het} = \pm l \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \operatorname{sech}(-l\sqrt{a_1 a_3} t), \quad (1.14)$$

$$m_3^{het} = \pm l \sqrt{\frac{a_3}{-a_2}} \operatorname{sech}(-l\sqrt{a_1 a_3} t), \quad (1.15)$$

$$m_2^{het} = \pm l \tanh(-l\sqrt{a_1 a_3} t). \quad (1.16)$$

Esta descripción se puede observar en la Figura 1.1; se tocará este punto más adelante.

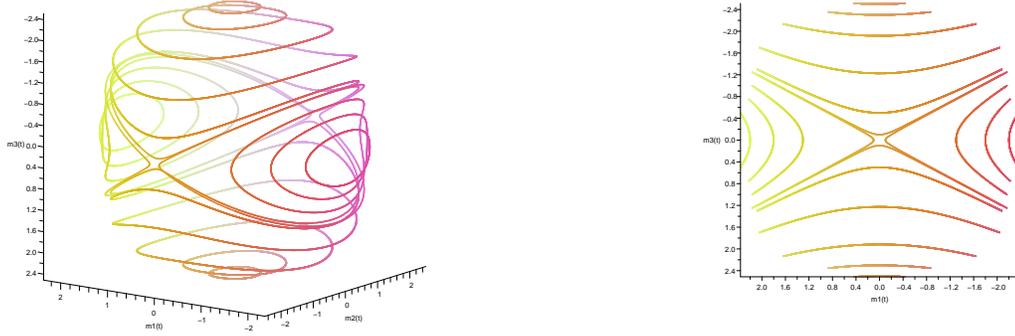


Figura 1.1: Puntos fijos sobre la esfera de Poincaré.

Se puede ver que, en efecto, $(\pm l, 0, 0)$ son centros elípticos. Para ello se toma $(m_1, m_2, m_3) = (l, 0, \epsilon_3)$, donde ϵ_3 es una constante positiva, luego se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1.12) y (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{dm_2}{dt} &= a_2 \epsilon_3 l > 0, \\ \frac{dm_3}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Así, se tiene un vector velocidad anclado en $(l, 0, \epsilon_3)$ paralelo al eje m_2 con sentido positivo (ver Figura (1.2)). Si se escogiese $m_1 = -l$, se obtendría un vector anclado en $(-l, 0, \epsilon_3)$ paralelo al eje m_2 con sentido negativo. Ahora, se escoge $(m_1, m_2, m_3) =$

$(l, \epsilon_2, 0)$ ($\epsilon_2 > 0$ constante) y se sustituye nuevamente estos valores en las ecuaciones (1.12) y (1.13):

$$\begin{aligned}\frac{dm_2}{dt} &= 0, \\ \frac{dm_3}{dt} &= a_2 \epsilon_3 l < 0.\end{aligned}$$

En este caso se tiene un vector velocidad anclado en $(l, \epsilon_2, 0)$ paralelo al eje m_3 con sentido negativo y si escogiese $m_1 = -l$, se encontraría un vector anclado en $(-l, \epsilon_2, 0)$ paralelo al eje m_3 con sentido positivo. Así, se puede notar movimientos elípticos cercanos a $(\pm l, 0, 0)$, cuyo centro es ese mismo punto. Procediendo de forma similar se puede probar que $(0, 0, \pm l)$ son centros.

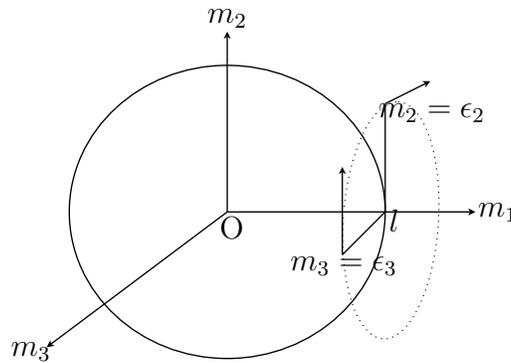


Figura 1.2: Clasificación de un punto fijo del trompo de Poincaré.

Y para $(0, \pm l, 0)$, se toma $(m_1, m_2, m_3) = (\epsilon_1, l, 0)$ y nuevamente sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1.11) y (1.13):

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{dt} &= 0, \\ \frac{dm_3}{dt} &= a_3 \epsilon_1 l < 0.\end{aligned}$$

Aquí, el vector velocidad anclado en $(\epsilon_1, l, 0)$ es paralelo al eje m_3 con sentido negativo y para $(m_1, m_2, m_3) = (0, l, \epsilon_3)$ las ecuaciones (1.11) y (1.13) tienen la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dm_2}{dt} &= a_1 \epsilon_3 l < 0, \\ \frac{dm_3}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Entonces, bajo los argumentos antes mencionados, $(0, \pm l, 0)$ son puntos hiperbólicos.

CAPÍTULO 2

EL TROMPO MASIVO.

Se considera el movimiento de un trompo simétrico respecto a los ejes x e y , el cual se encuentra en un campo gravitacional, donde un punto del eje de simetría (z) del cuerpo permanece fijo en el origen del sistema de referencia espacial. Así que se puede hacer uso de los ángulos de Euler: θ que representa la inclinación del eje z respecto al eje vertical Z , ϕ mide la acimutal del trompo respecto a Z , mientras que ψ es el ángulo de rotación del trompo respecto a su propio eje z (ver Figura (2.1)). La distancia del centro de gravedad (localizado en el eje de simetría z) al punto fijo se denota por z_0 . La tasa de cambio de los tres ángulos dan las características del movimiento del trompo

- $\dot{\psi}$: rotación del trompo alrededor del eje z ,
- $\dot{\phi}$: precesión del trompo alrededor del eje Z ,
- $\dot{\theta}$: nutación u oscilación del eje z relativo a la vertical espacial Z .

Para el trompo masivo se toma $I_1 = I_2 = I$, con $I \neq I_3$, y la energía cinética viene dada como

$$T_{tm} = \frac{1}{2}[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2],$$

donde las velocidades angulares se expresan como

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \tag{2.1}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \tag{2.2}$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta, \tag{2.3}$$

respecto a los ejes principales de simetría x , y , z . De esta forma, la energía cinética se puede expresar como

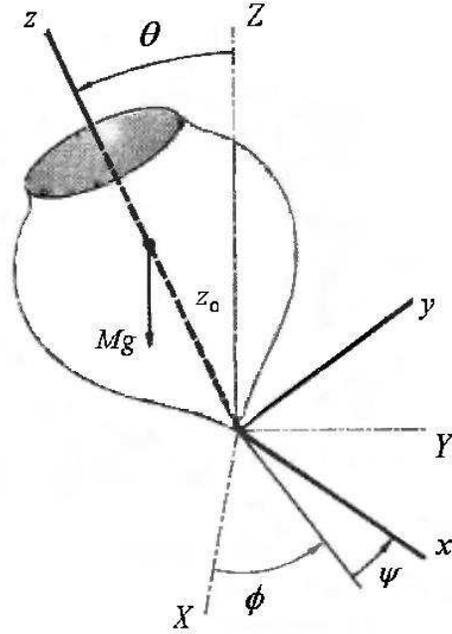


Figura 2.1: Ángulos de Euler especificando la orientación del trompo masivo.

$$T_{tm} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (2.4)$$

Por otra parte, el potencial gravitacional del trompo viene dado por:

$$U = Mg z_o \cos \theta. \quad (2.5)$$

Este potencial es axisimétrico y no preserva las invarianzas del caso del trompo libre.

El Lagrangiano en este caso se define como

$$L_{tm} = T_{tm} - U, \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.4) y (2.5) en (2.6) nos da

$$L_{tm} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mg z_o \cos \theta. \quad (2.7)$$

Nóte que ϕ y ψ no aparecen explícitamente en el Lagrangiano, es decir, son coordenadas cíclicas, por tanto, aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sin vínculos, los momentos canónicos p_ψ y p_ϕ son constantes (se conservan) y vienen expresados como

$$p_\psi = \frac{\partial L_{tm}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = Ia, \quad (2.8)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L_{tm}}{\partial \dot{\phi}} = (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = Ib. \quad (2.9)$$

Y en cuanto al momento p_θ , su expresión es

$$p_\theta = \frac{\partial L_{tm}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}. \quad (2.10)$$

Las dos constantes de movimiento, p_ψ y p_ϕ , se han expresado en términos de las dos nuevas constantes a y b ; y dado que el sistema que se está estudiando es conservativo, la energía total E del sistema es una constante en el tiempo igual a la suma de la energía cinética con la energía potencial:

$$E = T_{tm} + U = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgz_o \cos \theta. \quad (2.11)$$

Ahora, con el propósito de obtener una expresión para $\dot{\phi}$, observe que de la ecuación (2.8), ψ está dada en términos de ϕ

$$I_3 \dot{\psi} = Ia - I_3 \dot{\phi} \cos \theta, \quad (2.12)$$

y este resultado se sustituye en (2.9) para eliminar ψ :

$$I\dot{\phi} \sin^2 \theta + Ia \cos \theta = Ib. \quad (2.13)$$

Así,

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (2.14)$$

Luego, si θ fuese conocido como función del tiempo, (2.14) podría integrarse con el propósito de obtener la dependencia del tiempo de ϕ . Sustituyendo (2.14) en (2.12) se encuentra una expresión para $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{Ia}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (2.15)$$

la cual se puede integrar si se conoce θ . Por otro lado, note que de (2.8) $\omega_3 = (I/I_3)a$ es otra constante. Por lo tanto,

$$E - \frac{1}{2}I_3 \omega_3^2 = E' \quad (2.16)$$

es otra constante de movimiento y haciendo uso de (2.14), la ecuación de energía se puede escribir como

$$E' = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\frac{(b - a \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta} + Mgz_o \cos \theta = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta). \quad (2.17)$$

Esta ecuación tiene la forma equivalente a problemas de dimensión 1 en la variable θ , con el potencial efectivo $U_{eff}(\theta)$ dado por:

$$U_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}I\left(\frac{b - a \cos \theta}{\text{sen} \theta}\right)^2 + Mgz_o \cos \theta. \quad (2.18)$$

Con E' se puede hallar la dependencia del tiempo del ángulo θ . Esto permite determinar la dependencia del tiempo de ϕ y ψ por medio de la integración de las ecuaciones (2.14) y (2.15). Entonces, de la ecuación (2.17) resulta

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \left[\frac{2}{I}(E' - U_{eff}(\theta)) \right]^{\frac{1}{2}},$$

luego,

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{1}{\left[\frac{2}{I}(E' - U_{eff}(\theta)) \right]^{\frac{1}{2}}} d\theta. \quad (2.19)$$

Esta integral puede invertirse para obtener $\theta(t)$, que a su vez puede sustituirse en (2.14) y (2.15), lo cual nos dará $\phi(t)$ y $\psi(t)$.

Por otro lado, observe que el movimiento de θ es simétrico con respecto al eje de simetría z fijado en el trompo, es decir, el estudio sobre los dominios de valores para θ : $0 \leq \theta \leq \pi$ y $-\pi \leq \theta \leq 0$ es similar, por lo que se hará un estudio sobre el primer dominio mencionado. Aquí θ posee un movimiento limitado, comprendido entre los dos valores θ_1 y θ_2 de θ , que son las raíces de la ecuación (2.18). En la Figura (2.2) se puede ver que para todo valor de E' (por ejemplo, el representado por E'_1) el movimiento está limitado por θ_1 y θ_2 , que corresponden a los puntos de inversión del problema de fuerzas centrales. Además, cuando $E' = E'_2 = U_{min}$, θ adquiere el valor único θ_0 , siendo el movimiento una precesión estacionaria bajo un ángulo e inclinación constante; esta situación es similar a la aparición de órbitas concéntricas en el problema de fuerzas centrales. El valor de θ_0 puede obtenerse derivando $U_{eff}(\theta)$ e igualando a cero. Es decir

$$\left. \frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{-\cos \theta_0 (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)^2 + p_\psi \sin^2 \theta_0 (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)}{I \sin^3 \theta_0} - Mgz_0 \sin \theta_0 = 0. \quad (2.20)$$

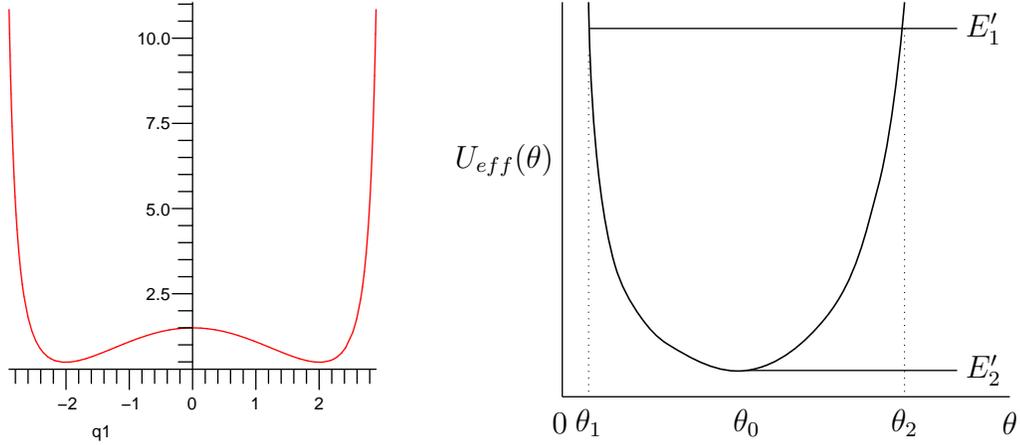


Figura 2.2: Función energía potencial efectiva para el movimiento de $\theta = q_1$ en el trompo masivo. A la derecha se muestra en detalle la gráfica de la misma función cerca del punto de equilibrio θ_0 .

Es común definir las siguientes constantes

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2E - I_3 \omega_3^2}{I}, \\ \beta &= \frac{2Mgz_0}{I}, \\ a &= \frac{p_\psi}{I}, \\ b &= \frac{p_\phi}{I}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

En términos de estas constantes, la ecuación de energía (2.11) se puede escribir como

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \beta \cos \theta. \quad (2.22)$$

Haciendo el cambio de variable $u = \cos \theta$, se reescribe la ecuación anterior como

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2, \quad (2.23)$$

la cual se puede reducir a una cuadratura:

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) + (b - au)^2}}, \quad (2.24)$$

la cual se resuelve en términos de las funciones elípticas de Jacobi [3] [10].

De hecho no se necesita resolver explícitamente la integral elíptica mostrada arriba, mucho de lo que se entiende de las dinámicas se obtienen del análisis de puntos fijos cualitativos de la ecuación (2.23). Es conveniente designarle a la parte derecha de la ecuación (2.23) una función $f(u)$ la cual es un polinomio de tercer grado:

$$f(u) = \beta u^3 + (\alpha + a^2)u^2 + (2ab - \beta)u + (\alpha - b^2). \quad (2.25)$$

Las raíces de este polinomio nos indica los ángulos en los cuales $\dot{\theta}$ cambia de signo. Conociendo estos ángulos se dará una pequeña información cualitativa. Existen tres raíces y tres posibles combinaciones de soluciones. Puede haber una raíz y un par de raíces complejas conjugadas; pueden haber tres raíces, de las cuales dos son iguales; y pueden haber tres raíces todas distintas. Estas posibilidades dependen del signo y de las magnitudes de las cuatro constantes en (2.21). También existe la condición de que la solución u debe satisfacer $-1 < u \leq 1$. En la Figura (2.3) se muestra un bosquejo de tal situación, considerano $u > 0$, que corresponde al caso en que el trompo está puesto sobre una superficie horizontal.

También se tiene que los puntos de equilibrios se obtienen de $\ddot{u} = 0$, el cual es un polinomio de segundo grado, así existen dos raíces [3]:

$$u_{\pm} = \frac{(p_{\psi}^2 + p_{\phi}^2) \pm \sqrt{(p_{\psi}^2 - p_{\phi}^2)^2 + 4Mgz_o I}}{2(p_{\psi} p_{\phi} + Mgz_o I)} \quad \text{y} \quad p_{\theta} = 0, \quad (2.26)$$

con lo cual existen dos puntos fijos en $(\cos\theta = u_{\pm}, p_{\theta} = 0)$. De acá se tiene que uno de los dos puntos fijos es hiperbólico, mientras que el otro es un centro elíptico [2].

Debido a la simetría del Lagrangiano (2.7) y las ecuaciones de movimiento (2.14), (2.15) y (2.17) con respecto al cambio de signo de θ ($\theta \rightarrow -\theta$), en la Figura (2.4)

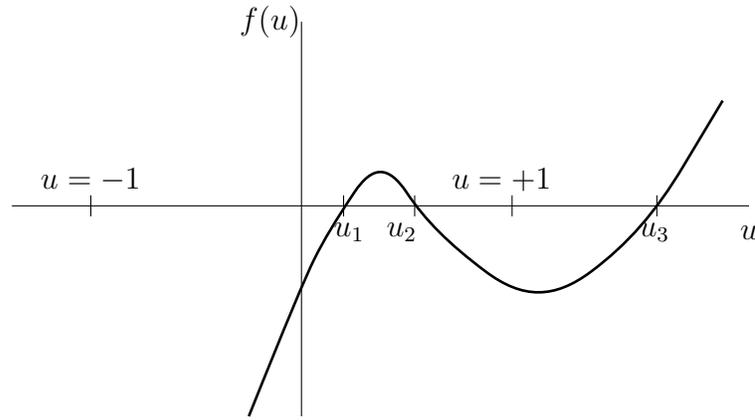


Figura 2.3: Gráfico de la función $f(u)$ mostrando las raíces en las cuales θ cambia de signo.

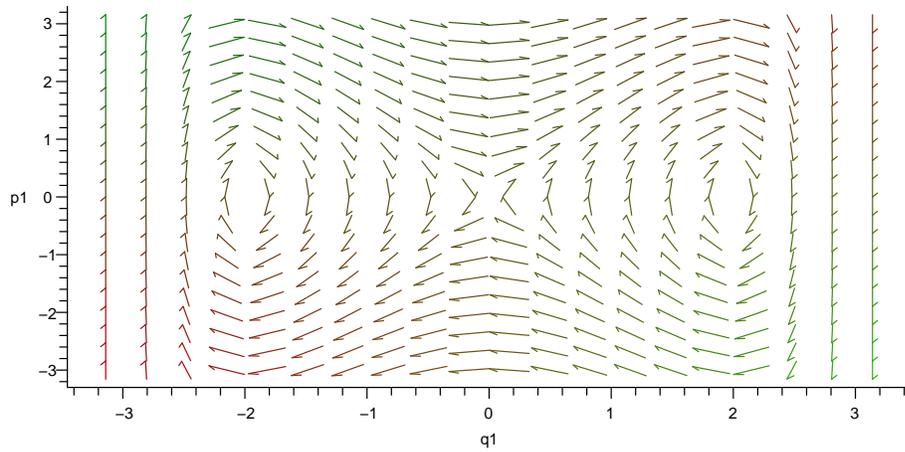


Figura 2.4: Campo de vectores tangentes a las trayectorias del Trompo de Lagrange obtenido usando $q_1 = \theta$, $p_1 = p_\theta$, $J = L = 1$, $I_1 = I_2 = 3$, $I_3 = 1$ y $Mgz_0 = 1$.

solamente hay un centro elíptico en lugar de los dos que parece haber en la figura. El lado izquierdo ($\theta \leq 0$) de la figura físicamente es indistinguible del lado derecho ($\theta \geq 0$) y constituye sólo una imagen espejo. Claramente se evidencia una órbita homoclínica que se inicia en el punto hiperbólico y termina en él (el lado izquierdo es su imagen especular), esta órbita separa el espacio de fase en dos regiones dinámicas diferentes. El interior de la homoclínica y su región exterior. En el interior de la órbita homoclínica encontramos órbitas elípticas entorno a un centro, el punto de equilibrio o punto fijo

elíptico. Como en el caso del oscilador armónico, estas trayectorias elípticas corresponden a la oscilación del ángulo θ con respecto al punto de equilibrio θ_0 , este movimiento del trompo es conocido con el nombre de nutación tal como fue explicado anteriormente. Sin embargo, en el exterior de la órbita homoclínica encontramos órbitas que giran en torno a dicha órbita, con θ tomando valores positivos o negativos. Este movimiento es una especie de precesión vertical que llamaremos “gironutación”. En resumen, el movimiento del trompo masivo está conformado por la rotación del trompo sobre sí mismo determinado por (2.15), la precesión del trompo en torno al eje vertical determinado por la ecuación (2.14) y el movimiento del eje del trompo con respecto al eje vertical que puede ser nutación o gironutación y viene determinada por la inversión de la ecuación (2.19) que permite obtener $\theta(t)$.

CAPÍTULO 3

EL GIRÓSTATO TRANSVERSAL LIBRE

La energía cinética es la suma de las energías cinéticas rotacionales de la caja y del rotor con respecto al eje principal de simetría fijo sobre el cuerpo de la caja (ver Figura (1)):

$$T = \frac{1}{2}\omega^T I_{caja}\omega + \frac{1}{2}\omega^T I_{rotor}\omega.$$

Recuerde que el eje principal z de la caja coincide con el del rotor ($z_{caja} = z_{rotor}$) y que el eje y de la caja (y_{caja}) es paralelo a y_{rotor} , y similarmente $x_{caja} \parallel x_{rotor}$. Entonces se denota por z_o a la distancia de desplazamiento que tiene $\mathbf{x}_{rotor} \times \mathbf{y}_{rotor}$ con respecto al origen del sistema de referencia de la caja. Obsérvese que, como el rotor gira con la caja pero adicionalmente gira sobre sí mismo, las velocidades angulares en la dirección y deben sumarse, así la velocidad angular del rotor es h_y más ω_2 , la velocidad angular de la caja en esa dirección. De esta manera la energía cinética se expresa como:

$$T = \frac{1}{2}[A_1\omega_1^2 + B_1\omega_2^2 + C_1\omega_3^2] + \frac{1}{2}[(A'_2 + mz_o^2)\omega_1^2 + (B'_2 + mz_o^2)(\omega_2 + h_y)^2 + C'_2\omega_3^2] \quad (3.1)$$

donde los factores con supraíndice prima y mz_o^2 se consideran como en el teorema de Steiner [3], y así se escribe el Lagrangiano como:

$$L_{gl} = \frac{1}{2}[I_1\omega_1^2 + I_2(\omega_2 + h)^2 + I_3\omega_3^2], \quad (3.2)$$

donde $I_1 = A_1 + A'_2 + mz_o^2$, $I_2 = B_1 + B'_2 + mz_o^2$, $I_3 = C_1 + C'_2$, y $h = \frac{B'_2}{I_2}h_y$, y un factor constante ha sido excluído.

Éste coincide con el aspecto de la energía cinética del trompo libre, el cual puede ser encontrado en cualquier texto [3], excepto que el segundo término que podrían ser

considerado como un término perturbativo cuando h es pequeño.

También en este caso el Lagrangiano (3.2) es únicamente función de las velocidades angulares $\theta_i = \omega_i$. Si se define los momentos angulares como en (1.2) y el Hamiltoniano como en (1.8), se tiene

$$H_{gl} = \frac{1}{2}[I_1\omega_1^2 + I_2(\omega_2 + h)^2 + I_3\omega_3^2] \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{(m_2 + hI_2)^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} \right]. \quad (3.4)$$

Como en el estudio del trompo libre, se expresan las ecuaciones de movimiento tal como se obtuvieron las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13):

$$\dot{m}_1 = a_1 m_2 m_3 + h m_3, \quad (3.5)$$

$$\dot{m}_2 = a_2 (m_3 m_1), \quad (3.6)$$

$$\dot{m}_3 = a_3 (m_1 m_2) - h m_1, \quad (3.7)$$

donde

$$a_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_3 I_2} < 0,$$

$$a_2 = \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} > 0,$$

$$a_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_2 I_1} < 0.$$

Lo cual está en correspondencia con el resultado (1.11), (1.12) y (1.13) para el tiempo cuando $h = 0$. Si se divide (3.5) y (3.7) por la ecuación (3.6) queda:

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right) + \frac{h}{a_2} \left(\frac{1}{m_1} \right), \quad (3.8)$$

$$\frac{dm_3}{dm_2} = \frac{a_3}{a_2} \left(\frac{m_2}{m_3} \right) - \frac{h}{a_2} \left(\frac{1}{m_3} \right). \quad (3.9)$$

Estas ecuaciones se pueden integrar [9], resultando que

$$\frac{m_1^2}{2} = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{m_2^2}{2} + \frac{hm_2}{a_1} - \frac{K_1}{2} \right), \quad (3.10)$$

$$\frac{m_3^2}{2} = \frac{a_3}{a_2} \left(\frac{m_2^2}{2} - \frac{hm_2}{a_3} - \frac{K_2}{2} \right), \quad (3.11)$$

donde K_1 y K_2 son constantes de integración. Así, se puede resolver m_1 y m_3 como una función de m_2 . El momento angular m_2 se puede obtener convirtiendo (3.6) en una cuadratura

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_3}} \int_0^{m_2} \frac{dx}{\sqrt{(K_1 - x^2 - \frac{2h}{a_1}x)^2 (K_2 - x^2 + \frac{2h}{a_3}x)^2}}. \quad (3.12)$$

Esta integral se resuelve en términos polinomiales en m_2 y la integral elíptica incompleta F del primer tipo, lo que prueba que el sistema es integrable y es una solución exacta al sistema formal.

Con la finalidad de recobrar la dependencia completa se debe especificar los valores de K_1 y K_2 . Estos valores se pueden obtener de la sustitución de (3.10) y (3.11) en las constantes conservadas de movimiento.

$$l^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (3.13)$$

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{(m_2 - hI_2)^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} \right]. \quad (3.14)$$

Como este sistema ha sido integrado completamente por (3.12) debe existir una tercera constante de movimiento, que no se tomará en cuenta.

Al igual que antes, mucho de lo que se conoce viene del estudio cualitativo de las soluciones, en lugar de la expresión complicada de la integral (3.12). Este sistema tiene seis puntos fijos, como el trompo libre, y éstos están localizados en:

$$(0, \pm l, 0), \quad (3.15)$$

$$\left(0, +\frac{h}{a_1}, \pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{h}{a_1}\right)^2} \right), \quad (3.16)$$

$$\left(\pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{h}{a_3}\right)^2}, +\frac{h}{a_3}, 0 \right). \quad (3.17)$$

Cuando $h = 0$ estos puntos fijos corresponden al caso del trompo libre y se siguen manteniendo mientras h sea lo suficientemente pequeño para que las raíces presentes en (3.16) y (3.17) sean reales. Es decir, para valores de h bajo la condición antes mencionada, el espacio fase de movimiento de las soluciones para el giróstato transversal libre puede verse como una versión “deformada” del trompo libre pero esencialmente con las mismas dinámicas cualitativas (ver Figura(3.1)). En este caso se obtiene que las variables angulares de acción y por tanto los toros de KAM son preservados y hay una órbita heteroclínica que une los dos puntos hiperbólicos que separa claramente las cuatro regiones de rotación que puede ser interpretada como un 4-Toro ($S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$) tal como en el caso libre de Poincot.

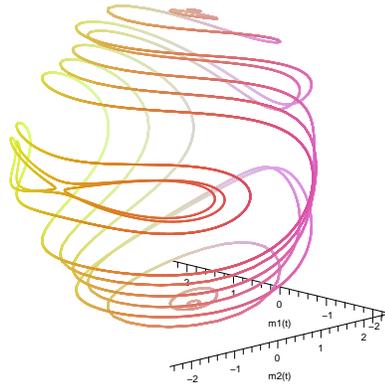


Figura 3.1: Órbitas en el Espacio Fase del Giróstato Transversal con $|h| \leq la_1$.

Sin embargo, esto cambia enormemente cuando $|h| > la_1$ (suponga $a_1 < a_3$ o $|a_1| < |a_3|$), ya que los puntos fijos (3.16) comenzarán a tomar valores imaginarios, reduciéndose la cantidad de los mismos a cuatro. La Figura (3.2) muestra una idea de este comportamiento. En este caso el 4-Toro de KAM se pierde y la dinámica sufre un brusco cambio. Hay una órbita homoclínica que separa tres regiones de rotación que podría ser interpretado como un 3-Toro ($S^1 \times S^1 \times S^1$).

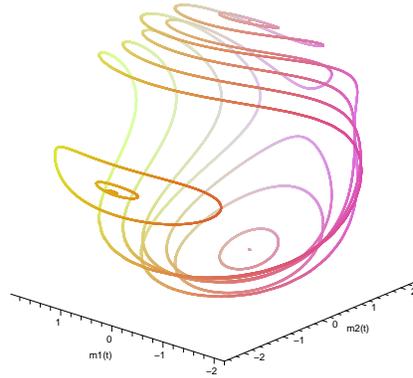


Figura 3.2: Órbitas en el Espacio Fase del Giróstato Transversal con $|h| \geq la_1$.

Finalmente, cuando h es tal que $|h| > la_3$ existirán solamente dos puntos fijos, $(0, \pm l, 0)$, los cuales son puntos hiperbólicos cuando $h = 0$, pero a medida que h crezca se convierte en puntos elípticos (ver Figura (3.3)). En este caso el valor de h es tan grande que el momento total tiende a alinearse en la dirección de ω_2 .

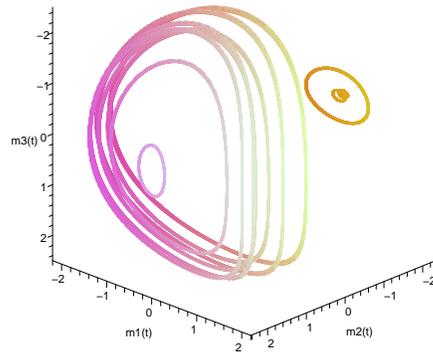


Figura 3.3: Órbitas en el Espacio Fase del Giróstato Transversal con $|h| \geq la_3$.

El espacio de fases puede ser identificado con un cilindro: $S^1 \times R$. La expresión explícita de los homeomorfismos no ha sido establecida aún y va más allá de los objetivos

de este trabajo por lo que se requiere un estudio profundo de la dinámica topológica del giróstato masivo en el futuro.

CAPÍTULO 4

EL GIRÓSTATO TRANSVERSAL MASIVO

Primero se hará una definición del Lagrangiano de este sistema, tal como se hizo en (2.6), considerando al término de la energía potencial como en (2.5).

$$L_{gm} = \frac{1}{2}[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2] + hI\omega_2 - Mgz_o \cos \theta,$$

donde las velocidades angulares ω_1 , ω_2 , ω_3 se expresan como en (2.1), (2.2) y (2.3), respectivamente, en términos de ángulos de Euler. Similarmente $I_1 = I_2 = I$, con $I \neq I_3$. Obsérve que la ecuación del Lagrangiano del giróstato transversal masivo, L_{gm} , difiere de la ecuación correspondiente a la del trompo masivo en el término $hI\omega_2$. Y este término junto al del potencial gravitatorio, $U = Mgz_o \cos \theta$, se consideran como un nuevo potencial $U'(\theta, \omega_2)$. Luego, otra forma de expresar el Lagrangiano L_{gm} es

$$L_{gm} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + hI_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) - Mgz_o \cos \theta. \quad (4.1)$$

Se calculan los momentos canónico como se hizo con el trompo masivo:

$$p_\psi = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \quad (4.2)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \dot{\phi}} = (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi} \cos \theta + hI \sin \theta \cos \psi, \quad (4.3)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta} - Ih \sin \psi. \quad (4.4)$$

Ahora, para este sistema, se expondrá su correspondiente Hamiltoniano H_{gm} generado por la transformación de Legendre:

$$H_{gm} = \dot{\psi}p_\psi + \dot{\phi}p_\phi + \dot{\theta}p_\theta - L_{gm}. \quad (4.5)$$

Para ello se sustituye el Lagrangiano L_{gm} y las ecuaciones de los momentos canónicos p_ψ , p_ϕ y p_θ , dadas por (4.2) (4.3) y (4.4), respectivamente, en (4.5) y mediante algunas operaciones algebraicas se simplifica la expresión del Hamiltoniano H_{gm} como

$$H_{gm} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgz_0 \cos \theta.$$

Por otra parte, de la ecuación (4.2) se puede ver que

$$I_3\dot{\psi} = p_\psi - \dot{\phi}I_3 \cos \theta$$

y este resultado se sustituye en (4.3) para eliminar ψ :

$$p_\phi = \dot{\phi}I \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta + hI \sin \theta \cos \psi,$$

de esta forma

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta - hI \sin \theta \cos \psi}{I \sin^2 \theta}. \quad (4.6)$$

Además, de la ecuación (4.4) se puede observar que $\dot{\theta}$ viene dada como

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I} + h \sin \psi. \quad (4.7)$$

Entonces, si se sustituye (4.6) y (4.7) en la última expresión que se había obtenido del Hamiltoniano H_{gm} y después de básicas operaciones algebraicas, nos queda que

$$H_{gm} = \frac{1}{2I} \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2I} p_\theta^2 + \frac{1}{2I_3} p_\psi^2 + Mgz_0 \cos \theta - h \left(\frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \sin \psi}{\sin \theta} \right), \quad (4.8)$$

donde un factor constante ha sido excluido. Nóte que ϕ no aparece explícitamente en este Hamiltoniano, por lo tanto es una coordenada cíclica la cual indica que el momento canónico p_ϕ es constante, así, se puede igualar al valor real L . Por otro lado, se observa que el Hamiltoniano para el giróstato transversal masivo H_{gm} tiene la forma de un sistema perturbativo, donde esta perturbación es lineal en los momentos canónicos y no en las variables del espacio. Entonces, considerando $h > 0$ como el parámetro de perturbación, se escribe

$$H_{gm} = H_0 + hH_1, \quad (4.9)$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2I} \left(\frac{L - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2I} p_\theta^2 + \frac{1}{2I_3} p_\psi^2 + Mg z_o \cos \theta, \quad (4.10)$$

el cual es el Hamiltoniano de orden cero y este coincide con el Hamiltoniano del trompo masivo (cuando $I_1 = I_2$). Junto a esto, $p_\psi = J$ también es un valor constante cuando H_{gm} es de orden cero. Y H_1 , viene dado como

$$H_1 = \left(\frac{(L - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \sin \psi}{\sin \theta} \right). \quad (4.11)$$

Además, se reescribirá al término potencial como

$$V_1(\theta) = \frac{1}{2I} \left(\frac{L - J \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2I_3} J^2 + Mg z_o \cos \theta. \quad (4.12)$$

Las ecuaciones de Hamilton para H_{gm} proveen interesante información para el estudio del giróstato transversal. Para $0 \leq \theta \leq \pi$, existen dos puntos fijos, el primero es un punto fijo estable y alrededor de éste hay movimientos elípticos (que corresponde a la nutación del giróstato a lo largo de ϕ) y el segundo punto fijo inestable (hiperbólico) con una trayectoria cerrada que se conecta a sí mismo, esta es una órbita homoclínica; la misma separa dos regiones del espacio, la región que está adentro de la órbita, donde hay órbitas elípticas y la región que está afuera de la trayectoria homoclínica, donde hay movimientos hiperbólicos. La órbita homoclínica está dada por:

$$\cos(\theta) = 1 - \gamma \sec h^2(\sqrt{\beta\gamma}t), \quad (4.13)$$

donde $\gamma = 2 - \frac{J^2}{I_1^2\beta}$ y $\beta = \frac{2Mgz_o}{I_1}$. Para las soluciones físicas reales se debe tener $0 < \gamma < 2$, y la energía

$$E = Mg z_o + J^2/2I_3, \quad (4.14)$$

con $0 < J = L < \sqrt{Mgz_o I}$. En la siguiente ilustración se muestra cómo la órbita homoclínica divide al espacio face en dos regiones.

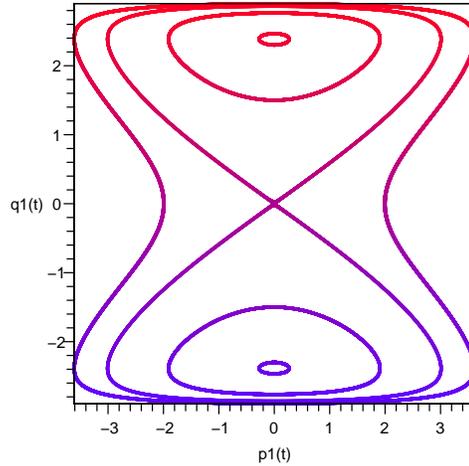


Figura 4.1: Sección del espacio de fases del Giróstato Transversal a orden cero mostrando una órbita Homoclínica que separa dos regiones, la interna (nutación) y la externa (gironutación). Debido que $\theta = -\theta$, los dos centros elípticos en realidad son uno mismo. Se ha considerado $q_1(t)=\theta(t)$ y $p_1(t)=p_\theta(t)$.

Ahora se hará un análisis numérico del efecto de la perturbación (4.11) sobre el movimiento del giróstato. Como se pudo ver en el caso libre tal término simple tendrá un efecto extraordinario sobre las dinámicas, representando un sistema caótico y por tanto no integrable.

Es conveniente reescribir H_{gm} como:

$$H_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2I} \left(\frac{L - J \cos q_1}{\sin q_1} \right)^2 + \frac{1}{2I} p_1^2 + \frac{1}{2I_3} p_2^2 + Mgz_o \cos q_1 - h \left(\frac{(L - J \cos q_1) \cos q_2 - p_1 \sin q_1 \sin q_2}{\sin q_1} \right), \quad (4.15)$$

donde se utiliza la notación $q_1 = \theta$, $q_2 = \psi$, $p_1 = p_\theta$ y $p_2 = p_\psi$, con la finalidad de facilitar el seguimiento y lectura de los cálculos en MAPLE (Apéndice A).

El Hamiltoniano de orden cero se expresa como:

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2I} \left(\frac{L - J \cos q_1}{\sin q_1} \right)^2 + \frac{1}{2I} p_1^2 + \frac{1}{2I_3} p_2^2 + Mg z_o \cos q_1. \quad (4.16)$$

Para simplificar los cálculos computacionales con el uso de MAPLE, se considera los dos primeros términos de la expansión en serie de Taylor de $\cos q_1$ y $\sin q_1$

$$\begin{aligned} \cos q_1 &= 1 - \frac{q_1^2}{2}, \\ \sin q_1 &= q_1 - \frac{q_1^3}{3!}, \end{aligned}$$

luego, con $L = J$,

$$L \left(\frac{1 - \cos q_1}{\sin q_1} \right) \cong 3L \left(\frac{-q_1}{q_1^2 - (\sqrt{6})^2} \right).$$

Así, se define un nuevo potencial V'_0 , donde

$$V'_0 = \frac{1}{2I} \left(3L \frac{-q_1}{q_1^2 - \pi^2} \right)^2, \quad (4.17)$$

pues, para lograr una gran semejanza entre V'_0 y $V_1(\theta)$ se requiere que el comportamiento de V'_0 tienda a una asíntota vertical cuando $q_1 \rightarrow \pi$ ó $q_1 \rightarrow -\pi$. Con lo cual el potencial definido $V'_0(q_1) + Mg z_o \cos q_1$ es bastante parecido a (4.12), como se puede apreciar comparando la Figura (2.2) con la Figura (4.2). Por otro lado, (4.9) se puede aproximar como

$$H_{gm} \cong G_1 + V'_0, \quad (4.18)$$

donde $L = J$ y

$$G_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2I} (p_1 - hI \sin q_2)^2 + \frac{1}{2I_3} p_2^2 + Mg z_o \cos q_1. \quad (4.19)$$

Debido a que MAPLE no trabaja con variables angulares módulo 2π sino con variables cartesianas, es necesario agregar un término $(1/2)q_2^2$ al Hamiltoniano para simular (o forzar) el retorno de dichas órbitas. Se definirá el Hamiltoniano (4.18) aproximado a primer orden como

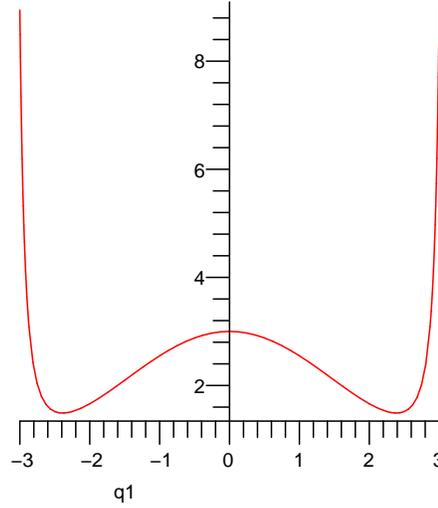


Figura 4.2: Función aproximada de la energía potencial para el movimiento de $\theta = q_1$ en el g.t. masivo.

$$H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2I}p_1^2 + \frac{1}{2I_3}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + Mg z_0 \cos q_1 + \frac{9L^2 q_1^2}{2I(q_1^2 - \pi^2)^2} - hp_1 \sin q_2 + \frac{3Lq_1 h \cos q_2}{q_1^2 + \pi^2}. \quad (4.20)$$

Utilizando los siguientes valores para los parámetros:

$$I = 3, \quad I_3 = 1, \quad M = 1, \quad g = 1, \quad z_0 = 1, \quad J = 2, \quad L = 2, \quad (4.21)$$

el Hamiltoniano $H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ toma la siguiente expresión

$$H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{6}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \cos q_1 + \frac{6q_1^2}{(q_1^2 - \pi^2)^2} - hp_1 \sin q_2 + \frac{6q_1 h \cos q_2}{q_1^2 + \pi^2}. \quad (4.22)$$

Luego, para el conjunto de condiciones iniciales dado por $h = 0$, $t = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.1$, y $q_2 = 0$, se pueden observar las secciones de Poincaré del Hamiltoniano H'_{gm} que corresponde al Hamiltoniano sin perturbar $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ (4.10) debido a que $h = 0$. En la Figura (4.3) se puede apreciar estas secciones mientras el nivel de energía varía de 0.25 a 2.50.

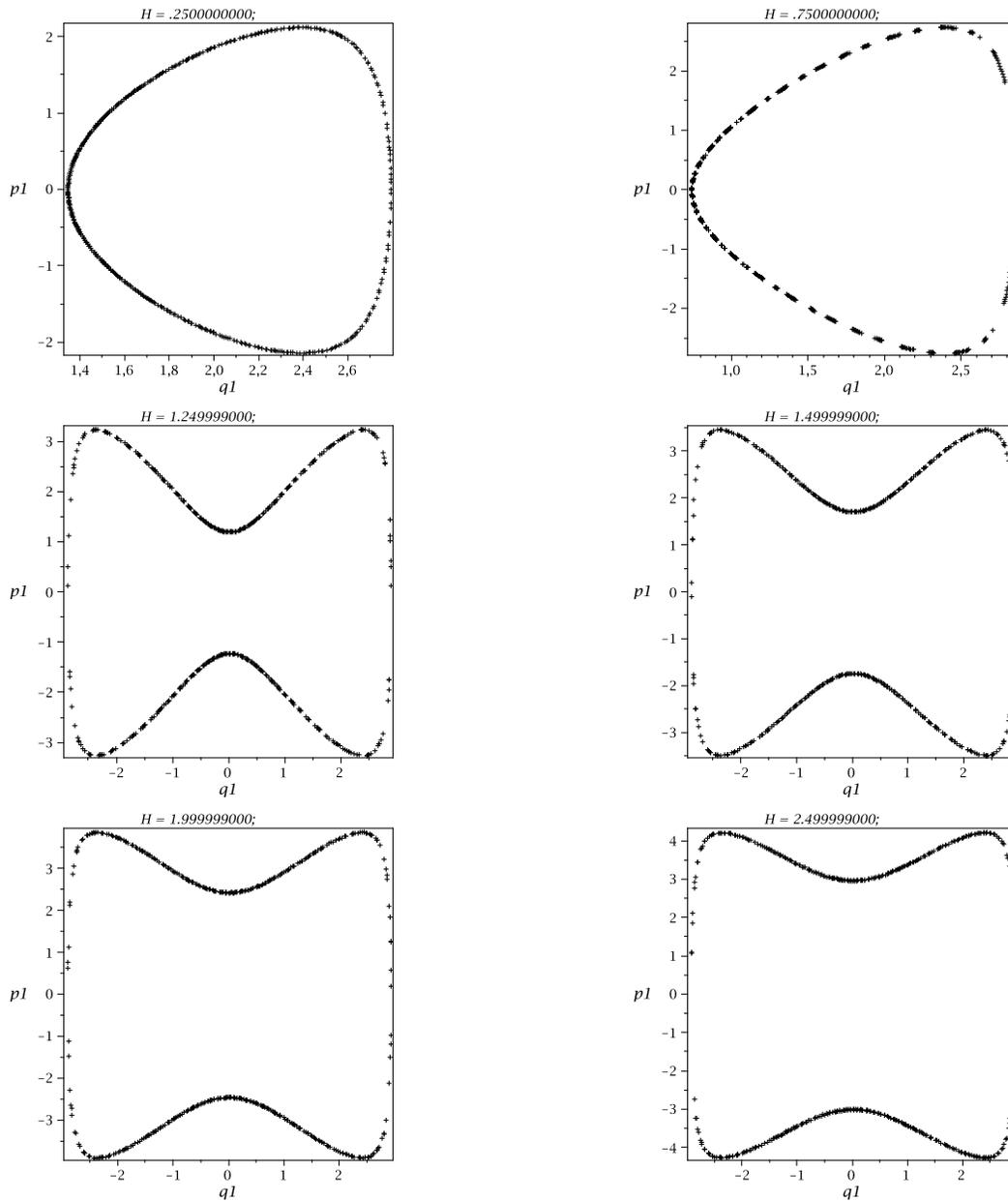


Figura 4.3: El plano transversal de Poincaré para el Hamiltoniano $H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sin término perturbativo y con diferentes niveles de energía.

Los dos primeros gráficos de la Figura (4.3) corresponden a curvas elípticas producidas por la nutación del giróstato, es decir, la variación del ángulo θ entre los valores 0 y π . Mientras que las gráficas restantes corresponden a la región de movimiento en que θ da vueltas completas, que hemos llamado gironutación.

Tomando el mismo conjunto de valores (4.21) pero con $h = 0.01$, se obtienen los gráficos correspondientes a las secciones de Poincaré de H'_{gm} con una pequeña perturbación. Los niveles de energía varían de 0.25 a 1.46.

Se puede observar de los gráficos mostrados en la Figura (4.4) que para perturbaciones pequeñas (en este caso $h = 0.01$) las órbitas permanecen cercanas una de otra a través del transcurso del tiempo. Se sabe que si la frecuencia $\dot{\theta}$ es un múltiplo de $\dot{\psi}$ es decir, $(\dot{\theta}/\dot{\psi}) = n$, entonces la órbita o trayectoria se cerrará con si misma, repitiendo el mismo comportamiento cada período $2\pi/\dot{\psi}$. En otras palabras, si n es un número racional, entonces las órbitas permanecerán cerradas, en caso contrario, si n es un número irracional, la órbita nunca se cerrará y cubrirá gradualmente la superficie del toro sin pasar exactamente por el mismo punto dos veces. Esta trayectoria pasará arbitrariamente muy cerca de cada punto de la superficie, la cual se conoce como órbita periódica densa, y eventualmente cubre toda la superficie. En el giróstato masivo, se tienen dos oscilaciones con frecuencias $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$, y el movimiento de las variables angulares θ y ψ estará confinado en una superficie bidimensional $S^1 \times S^1$ que comunmente llamada toro de KAM, la cual está inmersa en un espacio fase de cuatro dimensiones p_1, p_2, q_1, q_2 .

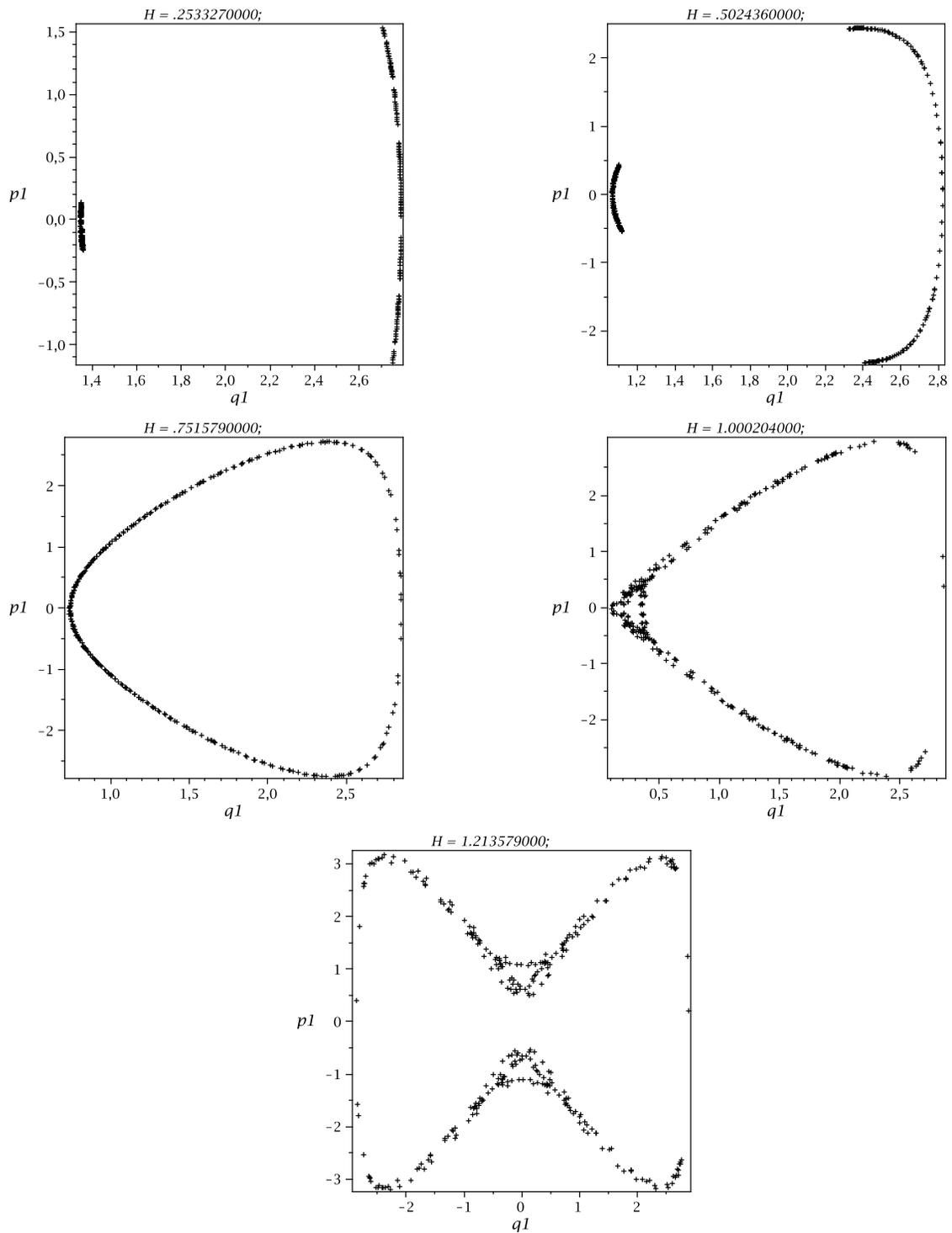


Figura 4.4: El plano transversal de Poincaré para $H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con $h = 0.01$ y diferentes niveles de energía.

Para grandes perturbaciones se distorsiona el movimiento regular de las órbitas. Un teorema conocido como el *teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)* provee las condiciones para que se rompa la regularidad. Este teorema dice que

Si el movimiento acotado de un Hamiltoniano \mathcal{H}_0 es distorsionado por una pequeña perturbación, $\Delta\mathcal{H}$, que hace al Hamiltoniano total, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H}$, ser no integrable y si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- (a) la perturbación $\Delta\mathcal{H}$ es suficientemente pequeña, y*
- (b) las frecuencias ω_i de \mathcal{H}_0 son irracionales,*

entonces el movimiento permanece confinado a un N -toro, excepto para un de conjunto condiciones iniciales (y por tanto de órbitas) de medida cero que resultan en trayectorias que vagan sobre la superficie de energía constante.

Así, las órbitas distorsionadas permanecerán estables, con una configuración muy ligeramente alterada y localizadas en la misma región en la cual se encuentran las que no se distorsionaron. En otras palabras, para una perturbación suficientemente pequeña del Hamiltoniano, la mayoría de las órbitas cuasi-periódicas experimentarán sólo cambios mínimos. Los gráficos de la Figura (4.5) muestran que a medida que el nivel de energía se acerca al valor de la energía de la órbita homoclínica (4.14), las órbitas cuasi-periódicas son reemplazadas por patrones irregulares y las secciones de Poincaré parecen estar llenas de comportamientos caóticos, esto es debido a que el término perturbativo (4.11) permite que las trayectorias se bifurquen pudiendo mantenerse en la misma región de movimiento (nutación) o cruzar a la otra región de movimiento (gironutación), lo cual hace que las órbitas cercanas a la homoclínicas sean extremadamente sensibles a pequeños cambios de su posición y/o momento. Este resultado está en concordancia con los de [9] en donde se demostró la existencia de bifurcaciones mediante el teorema de Melnikov y son muy semejantes a los resultados que muestran numericamente caos en el giróstato no transverso [6], para el hamiltoniano de Henon-Heiles [11] y el doble péndulo [8]. Este comportamiento caótico no entra en contradicción con el teorema de KAM, pues en este caso se ha escogido $h = 0.1$ que es un valor grande para h , con lo cual no se satisface la condición (a) del teorema de KAM y la mayoría de las órbitas pueden vagar fuera del toro de KAM manteniendo constante su energía.

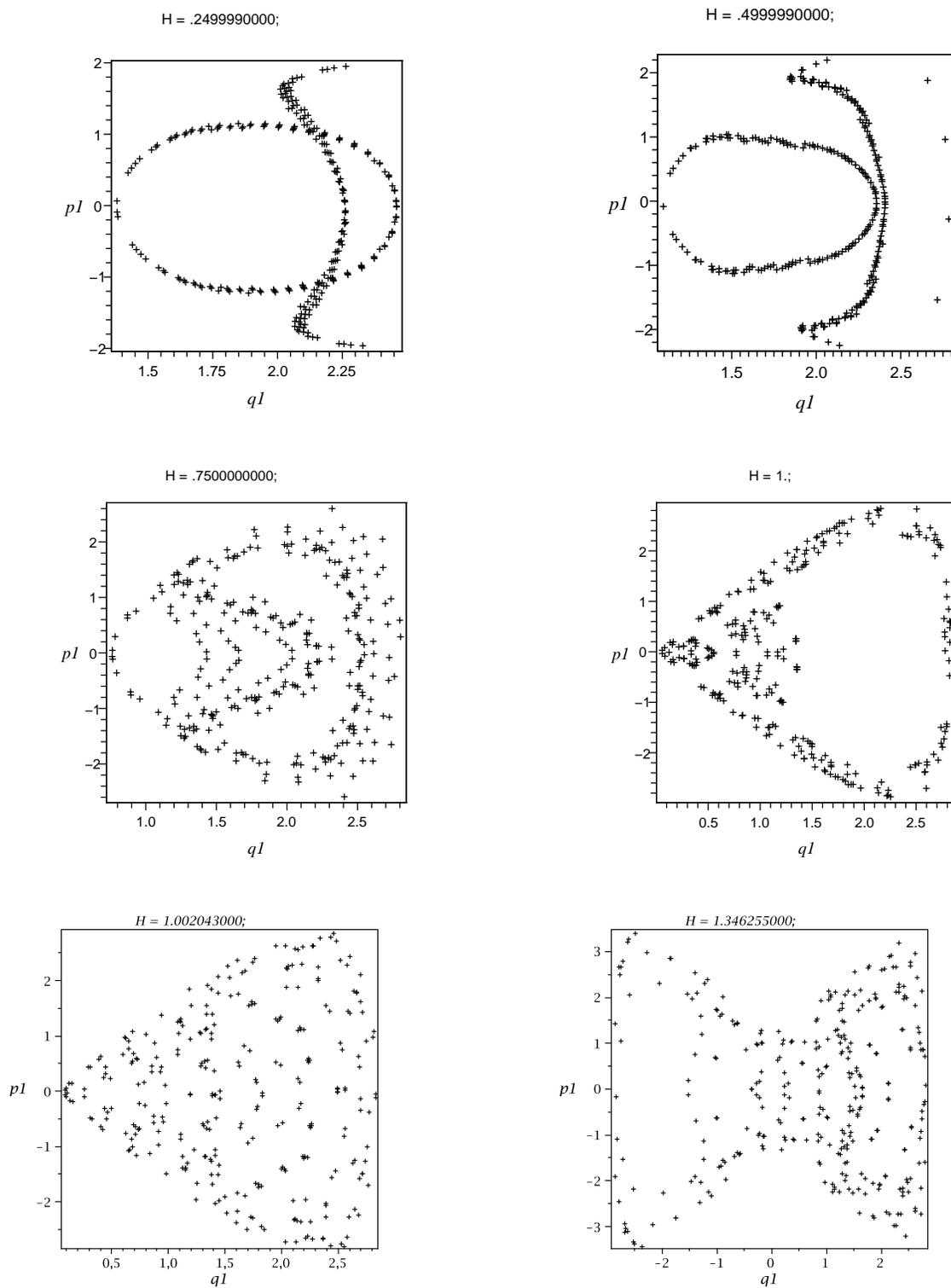


Figura 4.5: El plano transversal de Poincaré para $H'_{gm}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con $h = 0.1$ y diferentes niveles de energía.

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un estudio de la dinámica del giróstato o giróscopo con un rotor interno colocado en posición perpendicular al eje de simetría, que es conocido como giróstato transverso (g.t.). Este sistema rotante en 3 dimensiones espaciales se puede considerar como un trompo sometido a una perturbación no lineal. Por ello se revisó la dinámica del trompo tanto en el caso en que hay gravedad (trompo de Poincaré) como para el caso masivo simétrico (trompo de Lagrange) y posteriormente se procedió a analizar el g.t. tanto en el caso libre de gravedad como en presencia de ella.

Se hizo un estudio del trompo libre o de Poincaré, el cual tiene la particularidad de estar basada en el uso de los corchetes de Poisson-Lie tal como fue presentado en las referencias [4], [9] y [6], y se presenta una detallada clasificación de los puntos fijos del sistema de ecuaciones de movimiento. Se reprodujo un estudio clásico del formalismo lagrangiano para el trompo simétrico en presencia de torque gravitacional. Se amplió el estudio dinámico de las referencias [3], [2] y [10] para incluir la “gironutación” tal como se hace en [9] y [6]. La presentación y redacción que se hace en este trabajo de grado de ambos capítulos es original.

Se estudió la dinámica del giróstato transverso, que como se ha dicho antes es un trompo perturbado. Siguiendo [9] se integraron las ecuaciones de movimiento de manera analítica, demostrando que para todo valor de la perturbación (introducida por el rotor) existe una solución exacta, por lo cual el g.t. libre de gravedad es un sistema completamente integrable. Mediante la graficación e integración numérica de las ecuaciones de movimiento utilizando MAPLE, se clasificaron los puntos fijos reportados en [9]. Se encontraron 3 casos que corresponden a 3 topologías distintas de los Toros de KAM dependiendo del valor de tamaño de la perturbación:

1. Perturbación pequeña ($|h| < la_1$ y $|h| < la_3$) que resulta en un diagrama del espacio de los momentos con 6 puntos fijos (4 elípticos y 2 hiperbólicos) y constituye una versión deformada del Trompo de Poincaré.
2. Perturbación no pequeña con 4 puntos fijos ($|h| > la_1$ y $|h| < la_3$) que resulta

en un diagrama del espacio de los momentos con 4 puntos fijos (3 elípticos y 1 hiperbólico).

3. Perturbación grande ($|h| > la_1$ y $|h| > la_3$) con 2 puntos fijos elípticos.

En el primer caso hay 4 órbitas heteroclínicas que separan las rotaciones en torno a los 4 centros elípticos en regiones bien diferenciadas del movimiento, de forma “naive” se propone que las rotaciones entorno a estos 4 puntos fijos sean identificadas (homeomorfas) con un 4-Toro: $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. En el segundo caso hay 2 órbitas homoclínicas que separan las rotaciones en torno a los 3 centros elípticos, que pueden ser identificadas con un 3-Toro: $S^1 \times S^1 \times S^1$. Mientras que en el tercer caso no hay puntos hiperbólicos y el movimiento es dominado por la rotación del rotor interno y el espacio de fases puede ser identificado con un cilindro: $S^1 \times R$. La expresión explícita de los homeomorfismos no ha sido establecida aún y va más allá de los objetivos de este trabajo por lo que se requiere un estudio profundo de la dinámica topológica del giróstato masivo en el futuro.

Se obtuvo el Lagrangiano, el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento para el caso del giróstato transverso, sometido a la acción de la gravedad. Usando una aproximación perturbativa de las ecuaciones de movimiento, e integrando numéricamente, dichas ecuaciones, con la ayuda de MAPLE, se obtuvo secuencias de las secciones de Poincaré en función de la energía para distintos valores del parámetro perturbativo. Debido a que el sistema presenta órbitas con bifurcaciones, da lugar a una dinámica no integrable. Esta se manifiesta por la aparición de un régimen caótico en las secciones de Poincaré. Debido a las limitaciones del MAPLE para trabajar con variables angulares, se recurrió a una aproximación regularizada del potencial efectivo del giróstato transverso.

Los resultados obtenidos en este trabajo complementan los obtenidos para el giróstato transverso usando el teorema de Melnikov en [9] y el giróstato no transverso en [6].

APÉNDICE A

HOJA DE CÁLCULO DE MAPLE PARA GENERAR LAS SECCIONES DE POINCARÉ DEL GIRÓSTATO.

```
> with(DEtools):
> with(plots):
>
> I1:=3;I3:=1;M:=1;g:=1,z:=1;J:=2;L:=2;
>
> H0:=(1/2)*(p1^2/I1)+(1/2)*(p2^2/I3)+M*g*z*cos(q1)
> +(1/2)*(L^2*q1^2/(I1*(q1^2-Pi^2)^2));
>
> H1:=(1/(2*I1))*p1^2+(1/(2*I3))*p2^2+(1/2)*q2^2+M*g*z*cos(q1)
> +9*L^2*q1^2/((2*I1)*(q1^2-Pi^2)^2)-h*p1*sin(q2)
> +3*L*h*q1*cos(q2)/(q1^2+Pi^2);
>
> for n from 1 to 10 do
> ics[n] := generate_ic(H0,{t=0,p1=0,p2=.1,q2=0,energy=(n/4)},1)
> end do;
>
> for n from 1 to 10 do
> poincare(H0+q2*q2,t=-500..500,ics[n],stepsize=.1,iterations=3,
> scene=[q1,p1]);
> end do;
> #Ver Figura 4.3#
>
```

```
> h=0.01;
>
> for n from 1 to 10 do
> ics[n] := generate_ic(H1,{t=0,p1=0,p2=.1,q2=0,energy=(n/4)},1)
> end do;
>
> for n from 1 to 10 do
> poincare(H1,t=-500..500,ics[n],stepsize=.1,iterations=3,scene=[q1,p1]);
> end do;
> #Ver Figura 4.4#
>
> h=0.1;
>
> for n from 1 to 10 do
> poincare(H1,t=-500..500,ics[n],stepsize=.1,iterations=3,scene=[q1,p1]);
> end do;
> #Ver Figura 4.5#
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. Abraham y J. E. Marsden. **Foundations of Mechanics**. *Benjamin/Cummings Publishing Inc.* (1978)
- [2] V. I. Arnold. **Ordinary Differential Equations**. *Halliday Lithograph Corporation*. Massachusetts (1985).
- [3] H. Goldstein. **Classical Mechanics**. *Addison Wesley* (2002).
- [4] P. J. Holmes y J. E. Marsden. **Indiana University Math. J.** **32**, (1983) 273–309.
- [5] M. Tabor. **Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics**. *Wiley*. (1989)
- [6] X. Tong, B. Tabarrok y F. P. J. Rimrott. **Int. J. Non-Linear Mechanics** **30. 3**, (1995) 191–203.
- [7] A. Volterra. **Acta Math.** **22**, (1898) 201–357.
- [8] A. V. Ivanov. **Study of the double mathematical pendulum. Numerical Investigation of Homoclinic Transversal Intersections**. *Regular and Chaotic Dynamics*. **1**, (1999).
- [9] R. Torrealba S. **Homoclinic Intersections in the Dynamics of the Transversal Gyrostat**. Preprint.
- [10] J. V. José y E. J. Saletan. **Classical Dynamics, a contemporary approach**. *Cambridge University Press* (1998).
- [11] S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using MAPLE**. *Birkhäuser*. (2001).