Núcleos Reproductivos, Espacios Sub-Hardy y Operadores de Composición

Jurancy Josefina Ereú

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Núcleos Reproductivos, Espacios Sub-Hardy y Operadores de Composición

Por

Jurancy Josefina Ereú

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Agregado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Agradacimientos

Primeramente agradezco a mi Padre Celestial dador de la vida, por haberme dado la gracia, fuerzas y luz para la realización de este trabajo.

A mi madre, ser especial que Dios me ha dado, la cual ha estado siempre conmigo dándome su amor, consejo y apoyo incondicional. Dios te bendiga mamá

A mis amigos Liliana, Lucy, Miguel y Mireya, que han estado a mi lado en todo momento, ayudándome, animándome y brindándome su incondicional amistad, GRACIAS AMIGOS han sido de gran bendición en mi vida.

Al Dr. José Giménez, tutor de mis estudios doctorales, por su amistad, apoyo incondicional y sus invaluables aportes académicos para la realización de este trabajo.

A todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en la realización de este trabajo.

A todos MIL GRACIAS que Dios les bendiga.

Resumen

Los Espacios Sub-Hardy son espacios de funciones holomorfas los cuales son subespacios lineales de $H^2(\mathbb{D})$ dotados de una norma diferente. Ellos son inducidos por una función $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ de norma a lo más uno e incluyen al espacio $\mathcal{M}(b)$ el cual es un espacio de Hilbert funcional con núcleo reproductivo

$$\frac{b(z)\overline{b(w)}}{1 - z\overline{w}}$$

y al también espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}(b)$ cuyo núcleo reproductivo es

$$\frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{1 - z\overline{w}}.$$

Los Espacios $\mathcal{H}(b)$, llamados Espacio de De Branges-Rovnjak, son espacios de Hilbert contenidos contractivamente en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ además, $\mathcal{H}(b)$ es invariante bajo el operador de traslación a la izquierda, S^*. Mostraremos como la norma de un operador de composición pesado que actúa en $H^2(\mathbb{D})$, es controlada por la norma de la función peso, en el espacio de De Branges-Rovnjak, asociada al símbolo de el operador de Composición.

Palabras y frases claves: Núcleos reproductivos, espacios de Hardy, operadores de composición, norma de un operador.

Introducción

El estudio de los operadores de composición relaciona la teoría de los operadores lineales con resultados clásicos de la teoría de una (o varias) variable(s) compleja(s), permitiendo el flujo de resultados de una teoría hacia la otra y estableciendo un campo de trabajo que es de interés tanto para investigadores de análisis funcional y teoría de operadores como para los de la teoría de funciones de variable compleja.

En este trabajo se estima la norma la norma de operadores de composición sobre espacios de Hardy haciendo uso de los núcleos reproductivos. Comenzamos presentando en el primer capítulo algunos resultados básicos de la teoría de operadores sobre espacios de Hilbert, necesario para el desarrollo de los temas subsiguientes, en el segundo capítulo se expone la teoría básica de los núcleos reproductivos que caracterizan a los espacios de Hilbert funcionales analíticos. En el capítulo tres se aborda la teoría necesaria para la definición de los espacios sub-hardy, en particular, los De branges-Rovnyak, los cuales son expuestos en el cuarto capítulo y por último en el capítulo cinco se discute la relación de los operadores de composición con los núcleos reproductivos del espacio donde actúa el operador, así como también se estima la norma para el caso particular de los operadores de composición sobre H^2 y finalmente se muestra la estimación vía núcleos reproductivos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados básicos de la teoría de operadores sobre espacios de Hilbert, es necesario que el lector esté familiarizado con muchas de las nociones dadas en este capítulo y por tal razón no damos la prueba de estos resultados las cuales pueden encontrarse en varios textos, entre los que se recomienda [7].

1.1. Geometría de Espacio de Hilbert.

Definición 1.1. *Un **producto interno** sobre un espacio lineal complejo H es una función φ de $H \times H$ a $\mathbb{C}$ tal que:*

(1) $\varphi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \varphi(f_1, g) + \alpha_2 \varphi(f_2, g)$ *para* α_1, α_2 *en* $\mathbb{C}$ *y* f_1, f_2, g *en* H*;*

(2) $\varphi(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta_1}\varphi(f, g_1) + \overline{\beta_2}\varphi(f, g_2)$ *para* β_1, β_2 *en* $\mathbb{C}$ *y* f, g_1, g_2 *en* H*;*

(3) $\varphi(f, g) = \overline{\varphi(g, f)}$ *para* f *y* g *en* H*; y*

(4) $\varphi(f, f) \geq 0$ *para* f *en* H *y* $\varphi(f, f) = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

Un espacio lineal dotado de un producto interno es llamado un **espacio con producto interno**.

Definición 1.2. *Si H es un espacio con producto interno digamos φ, entonces para f y g en H se tiene que*

$$\varphi(f,g) = \frac{1}{4}\{\varphi(f+g,f+g)-\varphi(f-g,f-g)+i\varphi(f+ig,f+ig)-i\varphi(f-ig,f-ig)\}. \tag{1.1}$$

Definición 1.3. *Si H es un espacio con producto interno,el cual denotaremos por $\langle .,. \rangle$, se define una norma sobre H asociada con el producto interno como $||f|| := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$, para f en H.*

La siguiente desigualdad es básica en el estudio de espacios con producto interno.

Proposición 1.1. ***Desigualdad de Cauchy-Schwartz*** *Si f y g están en el espacio con producto interno H, entonces*

$$|\langle f,g\rangle| \leq ||f||||g|| \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *En un espacio con producto interno, el producto interno es continuo.*

Definición 1.4. *En el espacio con producto interno H dos vectores f y g se dice **ortogonales**, denotado por $f \perp g$, si $\langle f,g\rangle = 0$. Un conjunto S en H se dice **ortogonal** si $f \perp g$ para f y g en H y **ortonormal** si además $\|f\| = 1$ para f en S.*

Esta noción generaliza la ortogonalidad usual de espacios euclidianos.

Proposición 1.2. *Si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto ortogonal del espacio con producto interno H, entonces*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2.$$

Proposición 1.3. ***Ley del Paralelogramo*** *Si f y g están en el espacio con producto interno H, entonces*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|f\|^2$$

Definición 1.5. *Un **Espacio de Hilbert** es un espacio lineal complejo el cual es completo con la métrica inducida por la norma.*

Definición 1.6. *Si M es un subconjunto del espacio de Hilbert H, entonces el complemento ortogonal de M, denotado por $M^{\perp}$, es el conjunto de vectores en H ortogonal a cada vector de M.*

Proposición 1.4. *Si M es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H y f es un vector en H, entonces existen únicos vectores g en M y h en $M^{\perp}$ tal que $f = g + h$.*

Teorema 1.2. ***Teorema de Representación de Riesz***
Si φ es un funcional lineal acotado sobre H, entonces existe un único g en H tal que $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ para cada f en H.

1.2. Operadores sobre Espacios de Hilbert.

Definición 1.7. *Sea H y K espacios de Hilbert.*

- *Un operador $T : H \to K$ es acotado si existe una constante k positiva tal que $||Tx||_K \leq k||x||_H$ para todo $x \in H$.*
- *El espacio (álgebra) de todos los operadores acotados $T : H \to K$ es denotado por $L(H, K)$; si $K = H$ entonces convenimos denotar $L(H, H)$, simplemente por $L(H)$. Es fácil ver que un operador lineal $T : H \to K$ es continuo si y soló si este es acotado.*
- *La norma de un operador $T \in L(H, K)$ se define por:*

$$||T|| := \inf\{k : ||Tx||_K \leq k||x||_H\} = \sup\{\langle Tx, y\rangle : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}.$$

Definición 1.8. *Si T es un operador sobre el espacio de Hilbert H, entonces el* ***operador adjunto*** *de T, denotado por T^*, es el único operador sobre H que satisface $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$ para f y g en H.*

Proposición 1.5. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces*

(1) $T^{**} = (T^*)^* = T$ *para* $T \in L(H)$;

(2) $\|T\| = \|T^*\|$ *para* $T \in L(H)$;

(3) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha}S^* + \overline{\beta}T^*$ *y* $(ST)^* = T^*S^*$ *para* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $S, T \in L(H)$;

(4) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ *para* $T \in L(H)$ *invertible; y*

(5) $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ *para* $T \in L(H)$.

Definición 1.9. *Si* T *es un operador sobre el espacio de Hilbert* H, *entonces el **núcleo de*** T, *denotado* $Kern(T)$, *es el subespacio cerrado* $\{f \in H : Tf = 0\}$ *y el **rango de*** T, *denotado por* $Ran(T)$, *es el subespacio* $\{Tf : f \in H\}$.

Proposición 1.6. *Si* T *es un operador sobre el espacio de Hilbert, entonces* $Kern(T) = Ran(T^*)^\perp$ *y* $Kern(T^*) = Ran(T)^\perp$.

Definición 1.10. *Un operador* T *sobre un espacio* H *es **acotado inferiormente** si existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\|Tf\| \geq \epsilon\|f\|$ *para* f *en* H.

Proposición 1.7. *Si* T *es un operador sobre un espacio de Hilbert* H, *entonces* T *es invertible si y sólo si* T *es acotada inferiormente y tiene rango denso.*

Corolario 1.3. *Si* T *es un operador sobre el espacio de Hilbert* H *donde* T *y* T^* *son acotados inferiormente, entonces* T *es invertible.*

Teorema 1.4. *Si* T *es un operador sobre el espacio de Hilbert* H, *entonces:*

(1) T *es Normal si* $TT^* = T^*T$;

(2) T *es Autoadjunto o Hermitiano si* $T = T^*$;

(3) T *es Positivo si* $\langle Tf, f\rangle \geq 0$ *para* f *en* H*; y*

(4) T *es Unitario si* $TT^* = T^*T = I$, *donde* I *es el operador Identidad.*

Proposición 1.8. *Un operador* T *sobre un espacio de Hilbert* H *es Autoadjunto, si y sólo si* $\langle Tf, f\rangle$ *es real para* f *en* H.

Corolario 1.5. *Si* P *es un operador positivo sobre el espacio de Hilbert* H, *entonces* P *es Autoadjunto.*

Proposición 1.9. *Si* T *es un operador sobre el espacio de Hilbert* H, *entonces* TT^* *es un operador positivo.*

Definición 1.11. *Un operador* P *sobre el espacio de Hilbert* H *es una **proyección** si* P *es idempotente* ($P^2 = P$) *y autoadjunto.*

Definición 1.12. *Sea M un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H. Definimos P_M a la aplicación $P_M f = g$, donde $f = g + h$ con $g \in M$ y $h \in M^{\perp}$.*

Teorema 1.6. *Si M es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H, entonces P_M es una proyección que tiene como rango a M. Más aún, si P es una proyección sobre H, entonces existe un subespacio cerrado $M(= Ran(P))$ tal que $P = P_M$.*

Proposición 1.10. *Si P es un operador positivo sobre el espacio de Hilbert H, existe un único operador positivo Q tal que $Q^2 = P$, además, Q conmuta con todo operador que conmute con P.*

Corolario 1.7. *Si T es un operador sobre H, entonces T es positivo si y sólo si existe un operador S sobre H tal que $T = S^*S$.*

Definición 1.13. *Un operador T sobre un espacio de Hilbert H es una **isometría parcial** si $\|Tf\| = \|f\|$ para f en ortogonal del núcleo de T; si además, el núcleo de T es $\{0\}$, entonces T es una **isometría**.*

Teorema 1.8. *Sea $T \in L(H)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es una isometría parcial;*

2. *T^* es una isometría parcial;*

3. *TT^* es una proyección; y*

4. *T^*T es una proyección*

Definición 1.14. *si T es un operador sobre el espacio de Hilbert H y M es un subespacio cerrado de H, entonces M es un **subespacio invariante** para T si $T(M) \subset M$ y es un **subespacio que reduce** si además, $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$.*

Capítulo 2

Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos y Núcleos Reproductivos

En lo que sigue $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, E es un conjunto no vacío, $\mathbb{F}^E = \{f : E \to \mathbb{F}\}$ y $\mathcal{H} \subset \mathbb{F}^E$ es un espacio de Hilbert. La norma de un elemento en $\mathcal{H}$ será denotado por $\|f\|$, y el producto interior mediante $\langle\, f_1, f_2 \,\rangle$.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Diremos que $\mathcal{H}$ es un* ***espacio de Hilbert funcional****, si para todo $y \in E$, el funcional de evaluación es acotado en $\mathcal{H}$, es decir, para $y \in E$, $\quad \delta_y : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$, definido por*

$$\delta_y(f) = f(y)$$

es continuo.

En este caso para cada $y \in E$, el Teorema de Representación de Riesz, garantiza la existencia de un único elemento, $K_y \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle f, K_y \rangle = f(y) \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Estos elementos K_y son llamados núcleos reproductivos del punto y de $\mathcal{H}$.

Definición 2.2. *La función de dos variables, definida por $K(x, y) = K_y(x)$, se denomina* ***núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$****.*

Obsérvese que:

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle\, K_y, K_x \,\rangle.$$

A los espacios de Hilbert funcional se les acostumbra llamar espacios de Hilbert con núcleos reproductivos. Si los elementos del espacio de Hilbert funcional son funciones analíticas definidas sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, se dice que $\mathcal{H}$ es un **Espacio de Hilbert funcional analítico, (HFA).**

2.1. Propiedades Básicas de los Núcleos Reproductivos

- El espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$, admite a lo sumo un núcleo reproductivo.

  Demostración.
  Supongamos que K y $\hat{K}$ son núcleos reproductivos de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|K_y - \hat{K}_y\|^2 &= \langle K_y - \hat{K}_y, K_y - \hat{K}_y \rangle \\ &= \langle K_y - \hat{K}_y, K_y \rangle - \langle K_y - \hat{K}_y, \hat{K}_y \rangle \\ &= \langle\, K_y, K_y \,\rangle - \langle\, \hat{K}_y, K_y \,\rangle - \langle\, K_y, \hat{K}_y \,\rangle + \langle\, \hat{K}_y, \hat{K}_y \,\rangle \\ &= K(y,y) - \hat{K}(y,y) - K(y,y) + \hat{K}(y,y) = 0. \end{aligned}$$

  Lo que implica que $K = \hat{K}$.

- Si K es el núcleo reproductivo de un espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$, entonces para todo par x, y en E se tiene,

  a) $K(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in E$.
  Demostración.
  Consideremos $x \in E$

$$0 \leq \|\, K_x \,\|^2 = \langle K_x, K_x \rangle = K(x,x).$$

  b) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.
  Demostración.

$$K(x,y) = \langle\, K_y, K_x \,\rangle = \langle \overline{K_x, K_y} \rangle = \overline{K(y,x)}.$$

c) $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)\,K(y,y)$

Demostración.

$$|K(x,y)|^2 = |\langle K_y, K_x \rangle| \leq \|K_y\|^2 \, \| K_x \|^2 = K(y,y)\,K(x,x).$$

- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K, el espacio generado por $K(E) = \{K_x \diagup x \in E\}$ es denso en $\mathcal{H}$.

  Demostración.
  Sea $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} f \perp \mathrm{span} K(E) \;&\Leftrightarrow\; \langle f, K_y \rangle = 0 \qquad \forall\, y \in E \\ &\Leftrightarrow\; f(y) = 0 \qquad \forall\, y \in E. \end{aligned}$$

  Así, $f = 0$, y por tanto el espacio generado por $K(E)$ es denso en $\mathcal{H}$.

- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K, y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy (respecto a la norma) en $\mathcal{H}$, y f límite de dicha sucesión, entonces,

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$$

  para toda $y \in E$.

  Demostración.
  Por hip´otesis, $\|f_n - f\| \to 0$ si $n \to +\infty$. Sea $y \in E$

$$|\,(f_n - f)(y)| = |\,\langle f_n - f, K_y \rangle| \leq \|f_n - f\| \; \|K_y\| \to 0.$$

  por tanto, $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$ para toda $y \in E$.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K. Si $\{e_j : j \in J\}$,J conjunto de índices, es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces el núcleo reproductivo K, está dado por:*

$$K(x,y) = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j(x),$$

donde la serie converge puntualmente

Demostración.
Sea $y \in E$, entonces,

$$\langle K_y, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, K_y \rangle} = \overline{e_j(y)}.$$

Así

$$K_y = \sum_{j \in J} \langle K_y, e_j \rangle \, e_j = \sum_{j \in J} \overline{e_j(y)} e_j;$$

esta suma converge en norma en $\mathcal{H}$, por lo tanto, la serie converge puntualmente.

$$K(x,y) = K_y(x) = \sum_{j \in J} \overline{e_j(y)} e_j(x).$$

■

2.2. Caracterización de los Núcleos Reproductivos

En esta sección obtendremos condiciones necesarias y suficientes para que la función $K(x,y)$ sea el núcleo reproductivo para algún espacio de Hilbert funcional. Recordaremos primero algunos resultados de matrices necesarios en este trabajo.

Sea $A = \big(a_{i,j}\big)$ una matriz compleja n x n. Entonces A es positiva $\big(A \geq 0\big)$ si y sólo si para todo α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}$ se cumple $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \, a_{i,j} \geq 0.$

Si $\langle \, , \, \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$, entonces en términos del producto interno, $A \geq 0$ si y sólo si $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$. De hecho, la suma en la definición es $\langle Ax, x \rangle$ para el vector x cuya i-ésima componente es el número α_i.

También, $A \geq 0$, si y sólo si $A = A^*$ y todo autovalor λ de A es no negativo. Por esta razón, algunas autores prefieren llamar tal matriz semidefinida positiva o no negativa. En el caso que $A = A^*$ y todo autovalor λ de A, que satisfaga $\lambda > 0$ entonces diremos que A es estrictamente positiva $\big(A > 0\big)$. Como A es una matriz, $A > 0$ es equivalente a $A \geq 0$ y A invertible.

Definición 2.3. *Sea E un conjunto y $K : E \times E \to \mathbb{C}$ una función de dos variables. Entonces K es una función núcleo $\big(K \geq 0\big)$ siempre que, para todo n y para toda escogencia de n puntos distintos, $\{ x_1, \ldots x_n \} \subset E$, la matriz $\big(K(x_i, x_j)\big) \geq 0$.*

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{H}$ en espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K. Entonces K es una función núcleo.*

Demostración.
Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \in \mathbb{C}$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ elementos de $\mathcal{H}$, entonces, para la función $x \to \sum\limits_{j=1}^{n} K(x, y_j)\xi_j$ de $\mathcal{H}$ se tiene,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}\xi_j \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}\xi_j, \sum_{i=1}^{n} K_{y_i}\xi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i \xi_j \left\langle K_{y_j}, K_{y_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i\, \xi_j\, K(y_i, y_j) \end{aligned}$$

■

Generalmente para núcleos reproductivos, $\big(K(x_i, x_j)\big) > 0$. Cuando esto no sucede, debe existir algún vector $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ diferente de 0 tal que $\| \sum\limits_{j=1}^{n} K_{y_j}\xi_j \| = 0$. Por lo tanto para $f \in \mathcal{H}$ tenemos $\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\xi_j}\, f(y_j) = \langle f, \sum\limits_{j=1}^{n} K_{y_j}\xi_j \rangle = 0$. Así, en este caso existe una ecuación de dependencia lineal entre los valores de todas las funciones en $\mathcal{H}$ para algún conjunto finito de puntos.

Teorema (E.G. Moore-N. Aronzajn)
Sea E un conjunto y $K : E \times E \to \mathbb{F}$ una función. Si K es una función núcleo, entonces existe un único espacio de Hilbert funcional, tal que K es el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$.

Demostración.
Sea H_0 el espacio generado por el conjunto $\{K_x/x \in E\}$. Definimos un producto interno en H_0 de la siguiente manera:

Para $f = \sum_{i\in J} \alpha_i K_{x_i}$ y $g = \sum_{j\in J} \beta_j K_{t_j}$, entonces,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j}\, K(t_j, x_i).$$

donde J es un subconjunto finito de índices.

Sea $f \in H_0$, entonces, para $y \in E$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle f, K_y\rangle &= \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j\, K_{y_j}, K_y \right\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \alpha_j \langle\, K_{y_j}, K_y\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \alpha_j\, K(y, y_j) \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ la completación de H_0 con la norma asociada. Solamente necesitamos probar que es único. Supongamos que H es otro espacio de Hilbert que admite a K como núcleo reproductivo, entonces $H_0 \subset \mathcal{H}_{\mathcal{K}}$, pues los elementos de de H_0 son combinaciones lineales de las funciones K_y pertenecientes a H.

Queremos ver que:

$$H = \mathcal{H}_{\mathcal{K}} \qquad y \quad \langle\ ,\ \rangle_H = \langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}.$$

Para cualquier $x, y \in E$, $\langle\, K_y, K_x\rangle_H = K(x, y) = \langle K_y, K_x\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$. Por linealidad, para $f, g \in H_0$ tenemos $\langle\, f, g\,\rangle_H = \langle\, f, g\,\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$. Ya que H y $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ son completaciones de H_0, se sigue de la unicidad de la completación que $H = \mathcal{H}_{\mathcal{K}}$.

$\blacksquare$

Dada una función núcleo $K : E \times E \to \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ denota el único espacio de Hilbert funcional, con núcleo reproductivo K.

Proposición 2.2. *Sea E un conjunto, f una función diferente de cero en E y $K(x,y) = f(x)\overline{f(y)}$. Entonces K es positiva, $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ es es espacio generado de f y $\| f \| = 1$.*

Demostración.

Notemos que K_y se puede escribir de la forma, $K_y = \overline{f(y)}f$. De acá

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j}\, K(y_i, y_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j} \langle K_{y_j}, K_{y_i} \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j}\, \langle \overline{f(x_j)} f, \overline{f(x_i)} f \,\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j} \overline{f(x_j)}\, f(x_i)\, \langle f, f \,\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j} \overline{f(x_j)}\, f(x_i)\, \|f\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(x_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j f(x_j)} \right) \|f\|^2 \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(x_i) \right|^2 \|f\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Por lo tano K es positiva.

Ahora por ser $K_y = \overline{f(y)}f$, W es justamente el espacio uni-dimensional generado por f, y ya que los espacios de dimensión uno son completo se tiene que $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ es justamente el espacio generado por f.

Finalmente, consideremos y tal que $f(y) \neq 0$. Entonces,

$$|f(y)|^2 \|f\|^2 = \|\overline{f(y)}f\|^2 = \|k_y\|^2 = \langle k_y, k_y \rangle = K(y,y) = |f(y)|^2 \Longrightarrow \|f\|^2 = 1,$$

Así,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\bar{\xi_j}\, K(y_i, y_j) = \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(x_i) \right|^2 .$$

■

Capítulo 3

Espacios de Hilbert dentro de Espacios de Hilbert

En este capítulo presentamos algunos espacios contenidos en un espacio de Hilbert H, los cuales se definen a través del rango de un operador y poseen estructura de espacios de Hilbert.

Definición 3.1. *Sea H un espacio de Hilbert, diremos que un espacio de Hilbert K está contenido acotadamente en H si este es un subespacio vectorial de H y si la aplicación inclusión es acotada. Si la aplicación inclusión es una contracción diremos que el espacio de Hilbert K esta contenido contractivamente en H.*

Es bien claro que todo subespacio de H está contenido contractivamente en éste.

Definición 3.2. ***(Espacio Rango)*** *Si A es un operador acotado del espacio de Hilbert H_1 en el espacio de Hilbert H, definimos el espacio $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ como el rango de A con la estructura de espacio de Hilbert que hace a A una coisometría de H_1 sobre $\mathcal{M}(A)$. Así, si x e y están en H_1 y si ellos son ortogonales al núcleo de A (o si uno de ellos es ortogonal al núcleo de A), entonces*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle_{H_1}.$$

El espacio $\mathcal{M}(A)$ está contenido acotadamente en H y si A es una contracción, este está contenido contractivamente en H.

Si A es un operador acotado del espacio de Hilbert H_1 en el espacio de Hilbert H y y un vector en H, entonces el funcional lineal sobre H, inducido por y, $(F_y(x) = \langle x, y\rangle_H)$, restringido al espacio $\mathcal{M}(A)$ es acotado, en efecto,

$$\begin{aligned} |F_y(Ax)| = |\langle Ax, y\rangle_H| &\leq \|Ax\|\|y\| \\ &\leq K\|x\|\|y\| \\ &\leq K\|Ax\|_{\mathcal{M}(A)}\|y\| \end{aligned}$$

F_y es inducido, relativo al producto interno en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, por un vector en $\mathcal{M}(A)$. Este vector es AA^*y como se ve a continuación

$$F_y(Ax) = \langle Ax, y\rangle_H = \langle x, A^*y\rangle_{H_1} = \langle Ax, AA^*y\rangle_{\mathcal{M}(A)}$$

Teorema 3.1. ***Criterio de Douglas***
Sean H, H_1 y H_2 espacios de Hilbert, y sean A y B operadores acotados de H_1 y H_2, respectivamente en H. Entonces la desigualdad de operadores

$$AA^* \leq BB^* \tag{3.1}$$

es necesaria y suficiente para la existencia de una factorización $A = BR$ con R una contracción de H_1 en H_2.

Demostración.

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que A tiene una facrtorización de la forma $A = BR$ con R una contracción de H_1 en H_2, luego $\|A^*\| \leq \|R^*\|\|B^*\|$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle (BB^* - AA^*)x, x\rangle &= \langle BB^*x, x\rangle - \langle AA^*x, x\rangle \\ &= \langle B^*x, B^*x\rangle - \langle A^*x, A^*x\rangle \\ &= \|B^*x\| - \|A^*x\| \\ &\geq \|B^*x\| - \|R^*\|\|B^*\| \\ &= \|B^*x\|(1 - \|R^*\|) \geq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $AA^* \leq BB^*$.
($\Longrightarrow$) Supongamos que se cumple $AA^* \leq BB^*$.
Definamos el operador Q desde el rango de B^* al rango de A^* como

$$QB^*x = A^*x \quad (x \in H).$$

Por la desigualdad 3.1 se tiene que el operador Q es acotado, luego Q se extiende continuamente a una contracción desde la clausura de el rango de B^* en H_1 y finalmente se puede extender a una contracción desde H_2 en H_1 colocando el operador nulo sobre el complemento ortogonal de la clausura del rango de B^*, entonces el operador $R = Q^*$ es una contracción y cumple que $A = BR$, pues

$$\begin{aligned} QB^*x = A^*x &\Longrightarrow (QB^*)^* = (A^*)^* \\ &\Longrightarrow BQ^* = A \\ &\Longrightarrow A = BR. \end{aligned}$$

Observación: El espacio $\mathcal{M}(A)$ es un subespacio ordinario si y sólo si A es una isometría parcial.

3.1. Espacios Complementarios

Si A es una contracción de espacios de Hilbert, entonces el espacio

$$\mathcal{M}(I - AA^*)^{1/2}$$

es llamado el **espacio complementario** de $\mathcal{M}(A)$ y lo denotaremos por $\mathcal{H}(A)$. Si $\mathcal{M}(A)$ es un subespacio ordinario, es decir, A es una isometría parcial, entonces AA^* y $I - AA^*$ son proyecciones complementarias y $\mathcal{H}(A)$ es el complemento ortogonal ordinario de $\mathcal{M}(A)$.

3.2. Relación de entrelazamiento

Si A es una contracción de espacios de Hilbert, entonces

$$A(I - A^*A)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2}A$$

Usando inducción sobre n tenemos $A(I-A^*A)^n = (I-AA^*)^n A$ para todo entero positivo n. Así, si p es cualquier polinomio, entonces $Ap(I-A^*A) = p(I-AA^*)$. Tomando ahora sucesiones $(p_n)_1^\infty$ de sucesiones que convergen uniformemente sobre el intervalo $[0,1]$ a la función raíz cuadrada. Entonces $p_n(I-A^*A) \to (I-A^*A)^{1/2}$ en norma y $p_n(I-AA^*) \to (I-AA^*)^{1/2}$ en norma, teniéndose que

$$A(I-A^*A)^{1/2} = (I-AA^*)^{1/2}A.$$

3.3. Relación entre $\mathcal{H}(A)$ y $\mathcal{H}(A^*)$

Teorema 3.2. *Sea A una contracción del espacio de Hilbert H_1 en el espacio de Hilbert H. Entonces el vector $x \in H$ pertenece a $\mathcal{H}$ si y sólo si A^*x pertenece a $\mathcal{H}(\mathcal{A}^*)$. Si x_1 y x_2 son dos vectores en $\mathcal{H}(A)$, entonces*

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{\mathcal{H}(A^*)}$$

Demostración.
De la relación de entrelazamiento se sigue inmediatamente que $A^*\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(A^*)$, supongamos ahora que x es un vector en H tal que $A^*x \in \mathcal{H}(\mathcal{A}^*)$, entonces:

$$A^*x = (I-A^*A)^{1/2}y$$

donde y está en H_1, la identidad

$$x = (I-AA^*)x + AA^*x$$

en virtud de la relación de entrelazamiento se puede reescribir como

$$x = (I-AA^*)^{1/2}[(I-AA^*)^{1/2}x + Ay], \tag{3.2}$$

la cual muestra que $x \in \mathcal{H}(A)$.

Para obtener la expresión del producto interno, sean x_1 y x_2 dos vectores en $\mathcal{H}(A)$ y sean y_j vectores en H_1,para $j = 1, 2$, que son ortogonales al núcleo de $I - A^*A$ y satisfacen $A^*x_j = (I-A^*A)^{1/2}y_j$. Para cada j

$$x_j = (I-AA^*)^{1/2}[(I-AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j],$$

y $(I - AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j$ es ortogonal al núcleo $I - AA^*$, pues para $w \in Kern(I - AA^*)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle (I - AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j, w\rangle &= \langle (I - AA^*)^{1/2}x_j, w\rangle + \langle Ay_j, w\rangle \\
&= \langle x_j, (I - AA^*)^{1/2}w\rangle + \langle Ay_j, w\rangle \\
&= \langle (I - AA^*)^{1/2}z_j, (I - AA^*)^{1/2}w\rangle + \langle Ay_j, w\rangle \\
&= \langle z_j, (I - AA^*)^{1/2}(I - AA^*)^{1/2}w\rangle + \langle Ay_j, w\rangle \\
&= \langle z_j, (I - AA^*)w\rangle + \langle Ay_j, w\rangle \\
&= 0 + \langle Ay_j, w\rangle \ \ (w \in Kern(I - AA^*)) \\
&= \langle y_j, A^*w\rangle
\end{aligned}$$

por la relación de entrelazamiento se garantiza que A^*w está en el núcleo de $I - A^*A$ por lo tanto $\langle (I - AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j, w\rangle = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A})} &= \langle (I - AA^*)^{1/2}x_1 + Ay_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2 + Ay_2\rangle_H \\
&= \langle (I - AA^*)^{1/2}x_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2\rangle_H + \langle (I - AA^*)^{1/2}x_1, Ay_2\rangle_H \\
&\quad + \langle Ay_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2\rangle_H + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H
\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
\langle (I - AA^*)^{1/2}x_1 + Ay_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2 + Ay_2\rangle_H &= \langle x_1, (I - AA^*)x_2\rangle \\
&= \langle x_1, x_2 - AA^*)x_2\rangle \\
&= \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_1, AA^*)x_2\rangle \\
&= \langle x_1, x_2\rangle - \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle (I - AA^*)^{1/2}x_1, Ay_2\rangle_H + \langle Ay_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2\rangle_H &= \langle x_1, (I - AA^*)^{1/2}Ay_2\rangle_H + \\
&\quad \langle (I - AA^*)^{1/2}Ay_1, x_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, A(I - A^*A)^{1/2}y_2\rangle_H + \\
&\quad \langle A(I - A^*A)^{1/2}y_1, x_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, AA^*x_2\rangle_H + \langle AA^*x_1, x_2\rangle_H \\
&= \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{H_1} + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{H_1} \\
&= 2\langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{H_1}
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye

$$
\begin{aligned}
\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A})} &= \langle (I-AA^*)^{1/2}x_1, (I-AA^*)^{1/2}x_2\rangle_H + \langle (I-AA^*)^{1/2}x_1, Ay_2\rangle_H \\
&\quad +\langle Ay_1, (I-AA^*)^{1/2}x_2\rangle_H + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle - \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle + 2\langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle (I-A^*A)^{1/2}y_1, (I-A^*A)^{1/2}y_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, (I-A^*A)^{1/2}(I-A^*A)^{1/2}y_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, (I-A^*A)y_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, (y_2-A^*A)y_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle - \langle y_1, A^*A)y_2\rangle_{H_1} + \langle Ay_1, Ay_2\rangle_H \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle_{H_1} \\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}^*)}
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

■

Capítulo 4

Espacios de Hardy y Sub-Hardy

Los espacios de Hardy son espacios vectoriales de funciones analíticas que satisfacen una cierta condición de crecimiento. Dicha condición viene dada en términos de las siguientes medias integrales: Si f es una función analítica en $\mathbb{D}$, (disco unitario en $\mathbb{C}$), y $0 < p < \infty$ definimos las **medias integrales:**

$$M_p(r, f) := \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

y

$$M_\infty(r, f) := \max_{0\leq\theta<2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

Definición 4.1. *Sea $0 < p < \infty$, el* ***espacio de Hardy*** *$H^p = H^p(\mathbb{D})$ es el espacio vectorial de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ para los cuales la norma*

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(r, f)$$

es finita.

Denotamos por H^∞ al espacio de las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$ con la norma:

$$\|f\|_\infty := \sup_{0<r<1} M_\infty(r, f) = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$$

El funcional $\|.\|_{H^p}$ es una norma si $p \geq 1$.

Para cada $p \geq 1$, $M_p(r, f)$ es creciente como función de r y por lo tanto, podemos escribir

$$\|f\|_{H^p} := \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f) < \infty.$$

Cada función $f \in H^p$ posee límite radial

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$$

para casi todo $\theta \in \partial\mathbb{D}$.

Las *funciones frontera* f^* pertenecen al espacio $L^p = L^p(\partial\mathbb{D})$ y

$$\int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| > -\infty$$

a menos que f sea idénticamente igual a cero. En particular, el límite radial de una función en H^p no se puede anular en un conjunto de medida de arco positiva.

La norma de una función $f \in H^p$ puede también ser definida equivalentemente como la norma en L^p de su función frontera f^*. Luego H^p puede ser identificado con un subespacio cerrado de L^p y por lo tanto es un espacio de Banach.

Si para cada $0 < r < 1$ definimos $f_r : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como

$$f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta}),$$

entonces se tiene que $\lim_{r \to 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^p} = 0$.

4.1. El Espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

$H^2(\mathbb{D})$ se define como el conjunto de todas las funciones f analíticas en $\mathbb{D}$ para las cuales

$$\|f\| \;=\; \sup_{0<r<1} \|f_r\|_2 < \infty. \tag{4.1}$$

Es decir,

$$H^2 := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \text{ analítica } \quad : \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

Este conjunto es diferente de vacío, pues contiene a los polinomios.

$H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\overline{g(re^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Es fácil chequear que $\langle .,.\rangle$ define un producto interno, y que $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ para cualquier $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Como f es una función analítica en $\mathbb{D}$, f tiene una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \ \ \forall \ \ z \in \mathbb{D}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\| f_r \|_2^2 &= \int_0^{2\pi} f_r(\theta)\overline{f_r(\theta)}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_k\overline{a_m} r^{k+m} e^{i(k-m)\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{k=o}^{\infty} | a_k |^2 r^{2k}.
\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que la función $r \mapsto \|f_r\|_2$ es creciente en $(0,1)$. En consecuencia, el supremo en 4.1 puede ser reemplazado por $\lim_{r\to 1}$. Así

$$\|f\|^2 = \lim_{r\to 1} \sum_{k=o}^{\infty} | a_k |^2 r^{2k} = \sum_{k=o}^{\infty} |a_k|^2.$$

De manera similar para $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ obtenemos

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \overline{b_k},$$

donde los b_k son coeficientes de Fourier de g.
Supongamos que f_n es una sucesión de Cauchy en $H^2(\mathbb{D})$. Definimos la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ por $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. Mostraremos que $f \in H^2(\mathbb{D})$, y $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Lema 4.1. *Sea $\{f_n\} \subset H^2(D)$ una sucesión de Cauchy. Si*

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \ \ z \in \mathbb{D}.$$

Entonces $f \in H^2(\mathbb{D})$, y $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$.

Demostración.
Veamos que f es analítica.

En efecto, si Γ es una curva rectificable cerrada en $\mathbb{D}$, entonces $\int_\Gamma f_n(z)dz = 0$ para todo n, $f_n \to f$ uniformemente en Γ. Por lo tanto,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = 0,$$

por teorema de Morera, concluimos que f es analítica en $\mathbb{D}$.

Notemos que $\{\|f_n\|\}$ es una sucesión de Cauchy de números no negativos, puesto que por la desigualdad triangular,

$$|\,\|f_n\| - \|f_m\|\,| \ \leq \ \|f_n - f_m\|,$$

así que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ existe.

Fijemos $C > \lim_{n\to\infty} \|f_n\|$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{r_n}\| < C$ para todo $n > N$, y $r_n \in (0,1)$. Sin embargo, para cualquier $r \in (0,1)$, $f_{r_n} \to f_r$ uniformemente, luego

$$\|f_r\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq C^2.$$

De esta manera, $\|f\| = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_2 \leq C$.

■

Lema 4.2. *Supongamos que $f \in H^2(\mathbb{D})$ y que $\lambda \in \mathbb{D}$. Entonces*

$$|f(\lambda)| \leq \|f\|\sqrt{1 - |\lambda|^2}.$$

Demostración.
Para λ en $\mathbb{D}$, consideremos la función $k_\lambda(z) = \dfrac{1}{1-\overline{\lambda} z}$ donde $|z|<1$. Notemos que $k_\lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\lambda}^m z^m$, de esta manera $k_\lambda \in H^2(D)$, y

$$\|k_\lambda\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\overline{\lambda}^{\,m}|^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2}.$$

La clave de esta afirmación, está en que para cualquier $f \in H^2(\mathbb{D})$,

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle.$$

En efecto, para $r \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{k_\lambda(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m r^m e^{-im\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n r^{2n} \\
&= f(\lambda r^2).
\end{aligned}$$

f es analítica en $\mathbb{D}$, de manera que

$$\langle f, k_\lambda \rangle = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{k_\lambda(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 1} f(\lambda r^2) = f(\lambda)$$

Luego

$$|f(\lambda)| = |\langle f, k_\lambda \rangle| = \|f\|\|k_\lambda\| = \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}.$$

∎

De acá el funcional de evaluación es acotado y por tanto continuo, admitiendo H^2 núcleos reproductivos $k_\lambda(z) = \dfrac{1}{1-\overline{\lambda} z}$ donde $|z|<1$.

Proposición 4.1. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^2(D)$, y $\lambda \in \mathbb{D}$. Entonces la sucesión $\{f_n(\lambda)\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.*

Demostración.

Si R es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces

$$c = \sup\{|\lambda| : \lambda \in R\} < 1.$$

Por lema 4.1, $|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \dfrac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{1-c^2}}$. Además,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{\lambda \in R} | f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m\| = 0$$

■

4.2. Espacios de Hilbert dentro de $H^2(\mathbb{D})$

4.2.1. Espacios Sub-Hardy

Los Espacios Sub-Hardy son espacios de funciones analíticas los cuales son subespacios lineales de $H^2(\mathbb{D})$ dotados con otra norma.

4.2.2. Operadores de Toeplitz

Definición 4.2. *Si $\varphi \in L^\infty$, $T_\varphi : H^2 \to H^2$ es el operador de* Toeplitz *definido por:*

$$T_\varphi := P(\varphi f)$$

donde P es la proyección ortogonal de L^2 sobre H^2.

Las siguientes son propiedades bien conocidas de T_φ:

- $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$
- $T_\varphi^\star = T_{\overline{\varphi}}$
- $T_\varphi T_\phi = T_{\varphi\phi}$
- $T_\varphi^\star k_w = \overline{\varphi(w)}\, k_w, \ \forall\ w \in \mathbb{D}.$ $(k_w \in H^2$ es un n.r.).[1]

Si $\varphi \in B(H^\infty)$, (la bola unitaria en H^∞), entonces

- $\|T_\varphi\| \leq 1$

[1] n.r núcleo reproductivo

- $\|T_\varphi T_{\overline{\varphi}}\| \leq 1$

Luego, $(I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})$, es una contracción positiva y en consecuencia, el operador

$$\mathcal{T}_\varphi := (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{1/2}$$

está bien definido.

Pongamos $\mathcal{H}(\varphi) := \mathcal{T}_\varphi(H^2) = \mathcal{H}(T_\varphi)$.

Dado $w \in \mathbb{D}$, se sigue para el funcional de evaluación F_w que

$$\begin{aligned} |F_w((1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} f)| &\leq K\|(1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} f\|_{H^2} \\ &\leq K_1\|f\|_{H^2} \\ &= K_1\|(1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} f\|_{\mathcal{H}(\varphi)} \end{aligned}$$

Por lo que F_w es un funcional lineal acotado con la norma dada en $\mathcal{H}(\varphi)$, siendo así, $\mathcal{H}(\varphi)$ un espacio HFA.

Si $H(\Omega)$ es un espacio HFA, entonces por el Teorema de Representación de Riesz, para cada $w \in \Omega$, existe un único $k_w \in H(\Omega)$ tal que

$$f(w) = \langle f, k_w \rangle.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} g(w) &= \langle (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} g, k_w \rangle_{H^2} \\ &= \langle g, (1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} k_w \rangle_{H^2} \\ &= \langle (1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} g, (1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} (1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} k_w \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} \\ &= \langle (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})^{\frac{1}{2}} g, (1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}}) k_w \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} \end{aligned}$$

Por la unicidad del teorema de representación de Riesz $(1 - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})k_w$ son los núcleos reproductivos de $\mathcal{H}(\varphi)$.

Ahora, para $k_w \in H^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})k_w &= k_w - T_\varphi T_{\overline{\varphi}} k_w \\ &= k_w - T_\varphi(\overline{\varphi(w)} k_w) \\ &= k_w - \varphi \overline{\varphi(w)} k_w \end{aligned}$$

Así, definimos los núcleos reproductivo para $\mathcal{H}(\varphi)$ como

$$k_w^{\varphi} := k_w - \varphi\overline{\varphi(w)}k_w$$

$$k_w^{\varphi}(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z} - \frac{\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{1-\overline{w}z} = \frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{1-\overline{w}z}$$

4.3. Espacios de de Branges- Rovnyak

Definición 4.3. *Para $\varphi \in B(H^{\infty})$, al espacio $\mathcal{H}(\varphi)$ dotado con el producto interno de espacio rango: $\langle \mathcal{T}_{\varphi} f, \mathcal{T}_{\varphi} f\rangle_{\mathcal{H}}(\varphi) := \langle f, f\rangle_{H^2}$, se le llama **Espacio de De Branges-Rovnyak**.*

Así pues, el espacio $\mathcal{H}(\varphi)$ es un subespacio contractivo de H^2 dotado con un producto interno diferente. De hecho, $\mathcal{H}(\varphi)$ es un espacio HFA, y sus núcleos reproductivos están definidos según la fórmula:

$$k_w^{\varphi}(z, w) = \frac{1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)}{1-\overline{w}z}$$

Si φ es una función interior, T_{φ} es una isometría y $\mathcal{H}(\varphi)$ es un subespacio ordinario de H^2.

En este caso, el complemento ortogonal de $\mathcal{H}(\varphi)$ es φH^2, un subespacio invariante del operador Shift $(Sf(z) := zf(z))$.[2]

En consecuencia, si φ es una función interior $\mathcal{H}(\varphi)$ es un típico subespacio invariante del shift de retroceso, S^*, también llamados **Espacios Modelos**.

[2]Renombrado Teorema de Beurling

Capítulo 5

Operadores de Composición sobre H^2

En este capítulo relacionamos el estudio de los operadores de composición con la teoría de los núcleos reproductivos y finalmente se muestra que la norma del operador de composición sobre el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ es controlada por la norma de una función peso del espacio sub-Hardy llamado De Branges-Rovnyak.

5.1. Operadores de Composición

Sea X un conjunto arbitrario no vacío.

Supóngase que, $x \in X$, F_x es un espacio vectorial sobre el cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces, el producto cartesiano

$$\prod_{x \in X} F_x$$

es un espacio vectorial, cuando definimos las operaciones lineales puntualmente.

Cada elemento de $\prod\limits_{x \in X} F_x$ se conoce como una ***sección*** y a la familia $\prod\limits_{x \in X} F_x$, se le llama un **fibrado vectorial** sobre X.

Ejemplo 1

Si $F_x = \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces

$$\prod_{x \in X} F_x \quad = \quad \{f : X \mapsto \mathbb{C}\}.$$

Sea $L(X)$ un subespacio vectorial topológico de $\prod_{x\in X} F_x$.
Si $\varphi : X \mapsto X$ es una aplicación tal que

$$(f\circ\varphi) \in \prod_{x\in X} F_x \quad \text{para toda} \quad f \in L(X)\,,$$

entonces la correspondencia

$$f \mapsto f\circ\varphi$$

define una transformación lineal de $L(X)$ a $\prod_{x\in X} F_x$ llamada ***Operador de Composición con símbolo*** φ, y denotada como C_φ.

Si $\psi : X \to \mathbb{C}$, el **operador de composición con peso** $W_{\varphi,\psi}$ es definido por

$$W_{\varphi,\psi} f = \psi(f\circ\varphi)$$

a la función ψ se le llama función peso.

Hasta el momento se conoce que la primera aparición de Operadores de Composición data de 1871, cuando, Schroeder [19] estudió el *problema espectral* siguiente, dada una función φ, hallar funciones f y escalares α tales que

$$(f\circ\varphi)(z) = \alpha f(z) \quad \forall\, z \quad \text{en un dominio apropiado}$$

En las últimas décadas, su estudio tomó nuevo impulso a raíz de la publicación del artículo " Composition Operators" de E. A. Nordgren [14] en 1968, asi como la publicación de la tesis doctoral *Composition operators on* H^p (University of Toledo, 1969), de H. J. Schwartz [20].

Nos interesa, en particular, el caso en que $C_\varphi : L(X) \mapsto L(X)$; especialmente, el caso en que

- X es un dominio de $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^n$,
- $\varphi : X \mapsto X$ es una función holomorfa y
- $L(X)$ es un espacio vectorial topológico cuyos elementos son funciones holomorfas definidas en X.

Consideremos $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, disco unitario en $\mathbb{C}$, y $\mathcal{H} \subset \mathbb{F}^{\mathbb{D}}$ un Espacio de Hilbert Funcional. Si $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow, \mathbb{D}$ es una aplicación tal que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}$, siempre que $f \in H$, entonces $C_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ es un operador de composición de simbolo φ.

Proposición 5.1. *Cualquier operador de composición de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, es acotado.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesición de funciones en $\mathcal{H}$ convergiendo en norma a f; supongamos también que $\{C_\psi(f_n)\}$ converge a algún elemento g. Como cada función de evaluación es acotada, las funciones f_n convergen puntualmente a f; en consecuencia $C_\psi(f_n) = f_n \circ \psi$ converge puntualmente a $C_\psi(f) = f \circ \psi$. Por unicidad de límite C_ψ(f) = g.

■

Mientras que es fácil describir un operador de composición C_ψ, es frecuentemente difícil representar el adjunto C_ψ^* explicitamente el adjunto sin embargo tiene una propiedad particularmente útil.

Teorema 5.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert Funcional y A un operador sobre $\mathcal{H}$. Entonces A es un operador de composición si y solo si el conjunto $K(\mathbb{D}) = \{K_x / \, x \in \mathbb{D}\}$ es invariante bajo A^*. En este caso ψ es determinado por $A^* K_x = K_{\psi(x)}$.*

Demostración.

Supongamos que A es un operador de composición, digamos $A = C_\psi$ para algún ψ.
Sea $K_x \in K(\mathbb{D})$ entonces para $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle f, A^* K_x \rangle &= \langle Af, K_x \rangle \\ &= \langle C_\psi(f), K_x \rangle \\ &= \langle f \circ \psi, K_x \rangle \\ &= (f \circ \psi)(x) \\ &= f(K(x)) \\ &= \langle f, K_{\psi(x)} \rangle. \end{aligned}$$

Asi $A^* K_x = K_{\psi(x)}$. Por lo tanto $K(\mathbb{D})$ es invariante bajo A^*.
Consideremos ahora $K(\mathbb{D})$ invariante bajo A^*. $A^* f_x = K_{\psi(x)}$.

Sea $f \in \mathcal{H}$, $x \in E$

$$A(f(x)) = \langle Af, K_x \rangle = \langle f, A^* K_x \rangle = \langle f, K_{\psi(x)} \rangle = f(\psi(x)) = (f \circ \psi)(x)$$

Así existe $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f \circ \psi = A$. Por lo tanto A es un operador de composición.

■

Teorema 5.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbet funcional, cuyo núcleo reproductivo se puede escribir en la forma $K_w(z) = u(z\overline{w})$, donde u es una función $1:1$ en $\mathbb{D}$, y sea $C_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador de composición. Entonces el operador adjunto, C_φ^*, es también un operador de composición si y solo si $\varphi(z) = az$, donde $0 < |a| \leq 1$. Si este es el caso entonces $\psi(z) = \overline{a}z$.*

Demostración. Supongamos que $C_\varphi^* = C_\psi$ para alguna $\psi \in \mathbf{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Entonces

$$C_\varphi^* f(w) = f(\psi(w)) = \langle f, K_{\psi(w)} \rangle, \qquad f \in \mathcal{H}, \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Por propiedades de espacios de Hilbert funcionales se tiene,

$$\begin{aligned} K_w(\varphi(z)) &= \langle K_w, K_{\varphi(z)} \rangle \\ &= \langle K_w, C_\varphi^* K_z \rangle \\ &= \langle C_\varphi K_w, K_z \rangle \\ &= (K_w \circ \varphi)(z) \\ &= (C_\varphi K_w)(z) \\ &= (C_\psi^* K_w)(z) \\ &= K_{\psi(w)}(z) \end{aligned}$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$. Además $\overline{w}\varphi(z) = \overline{\psi(w)}z$ para todo z, w.
Fijemos un valor de w.
Entonces la función $\frac{\varphi(z)}{z}$, analítica en $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, debe ser constante allí, y en consecuencia, podemos extenderla analíticamente a todo $\mathbb{D}$, con lo que necesariamente, $\varphi(z) = az$. Por lema de Schwarz se obtiene $|a| \leq 1$. La igualdad $\psi = \bar{a}z$ es immediata.

■

Teorema 5.3. *C_φ es normal si y sólo si $\varphi(z) = az$ donde $|a| \leq 1$.*

Demostración. Supongamos que C_φ es normal. Puesto que φ es analítica, podemos escribirla como serie de potencia, $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$. La sucesión de funciones $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $H^2(\mathbb{D})$, de manera que por identidad de Parseval,

$$\begin{aligned} \|C_\varphi^* e_0\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle C_\varphi^* e_0, e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_0, \varphi^n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_0|^{2n}. \end{aligned}$$

Además

$$\|C_\varphi e_0\| = \|e_0 \circ \varphi\| = \|e_0\| = 1.$$

Como $\|C_\varphi^* f\| = \|C_\varphi f\|$ para todo $f \in \mathcal{H}$, tomando $f = e_0$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_0|^{2n} = 1.$$

Esto implica que $a_0 = 0$ o $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, aplicando nuevamente los pasos anteriores con e_1, tenemos

$$\begin{aligned} \|C_\varphi^* e_1\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle C_\varphi^* e_1, e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_1, \varphi^n\rangle|^2. \end{aligned}$$

Pero $\varphi(0) = 0$ así $\langle e_1, \varphi^n\rangle = 0$ para $n \geq 2$ lo cual implica,

$$\|C_\varphi^* e_1\|^2 = |\, a_1|^2.$$

Por otro lado
$$\| C_\varphi(e_1) \|^2 \;=\; \| \varphi \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$
De manera que
$$|\, a_1 \,|^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$
En consecuencia, $a_n = 0$ para $n \geq 2$ y $\psi(z) = a_1 z$.

Recíprocamente, si $\psi(z) = az$, por teorema anterior C_φ^* es un operador de composición, es decir , $C_\varphi^* = C_\psi$ donde $\psi(z) = \bar{a}z$. Entonces, sea $f \in H^2(\mathbb{D})$

$$\begin{aligned}
C_\varphi C_\psi f(z) = C_\varphi(f \circ \psi)(z) &= C_\varphi(f(\psi(z))) \\
&= C_\varphi f(\overline{a}z) \\
&= (f \circ \varphi)(\overline{a}z) \\
&= f(\varphi(\overline{a}z)). \\
&= f(a\overline{a}z) \\
&= C_\psi f(az) \\
&= C_\psi C_\varphi f(z)
\end{aligned}$$

Lo cual implica que C_φ conmuta con su adjunto. Por tanto C_φ es normal.
■

5.2. Norma de un operador de Composición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Recordemos que la norma de T está definida por
$$\begin{aligned}
\| T \| &= \sup\{ \|T(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\} \\
&= \sup\{ \|T^*(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}.
\end{aligned}$$

Calcular el valor exacto de la norma de un operador de composición en un espacio de Hilbert funcional analítico, es un trabajo difícil; por ejemplo, en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, la norma de un operador de composición ha sido calculada sólo en ciertos casos especiales; sin embargo, es posible estimar adecuadamente la misma.

Lema 5.4. *En $H^2(\mathbb{D})$ los núcleos reproductivos normalizados $\{k_w\}$ tienden a cero débilmente cuando $|\,w\,| \to 1^-$.*

Demostración.
Sea p un polinomio complejo. Pongamos $M = max\{|p(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$. Entonces

$$\langle\, p, k_w \,\rangle = \langle\, p, \frac{K_w}{\|\, K_w \,\|} \,\rangle = \frac{1}{\|K_w\|} \langle\, p, K_w \,\rangle = \sqrt{1-|w|^2}\, p(w);$$

consecuentemente,

$$0 \leq \lim_{|w|\to 1^-} |\langle\, p, k_w \,\rangle| \leq \lim_{|w|\to 1^-} M\sqrt{1-|w|^2} = 0.$$

Consideremos ahora $f \in H^2(\mathbb{D})$. Entonces existe una sucesion de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\| = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\|p_n - f\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, para todo $w \in \mathbb{D}$:

$$|\langle\, f, k_w \,\rangle - \langle\, p_n, k_w \,\rangle| \;\leq\; \|f - p_n\| \cdot \|k_w\| < \varepsilon \;\text{ para todo }\; n \geq N.$$

Fijemos $n_0 \geq N$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $1 - |w| < \delta$ implica $|\langle p_{n_0}, k_w\rangle| < \varepsilon$.

Luego, si $1 - |w| < \delta$,

$$|\,\langle\, f, k_w \,\rangle| \leq |\langle\, f - p_{n_0}, k_w \,\rangle\,| + |\,\langle\, p_{n_0}, k_w\rangle| < 2\varepsilon.$$

■

Teorema 5.5. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorfismo. Entonces para toda $f \in H^2(\mathbb{D})$*

$$\left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2} \|f\| \;\leq\; \|C_\psi f\| \;\leq\; \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2} \|\, f \,\|.$$

Aún más, estas desigualdades son óptimas y

$$\|C_\psi\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}.$$

Demostración. Como ψ es un automorfismo de $\mathbb{D}$, ψ es una transformación fraccional lineal de la forma

$$\psi(z) = \lambda \frac{z+u}{1+\bar{u}z}$$

donde $|\lambda| = 1$ y $|u| < 1$.

Sea f un polinomio complejo. Entonces f es acotada en $\mathbb{D}$ y por lo tanto, $f \circ \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ y su norma en H^2 es

$$\|f \circ \psi\|_{H^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Como ψ es un homeomorfismo suave sobre el círculo unitario, podemos cambiar variables en el círculo:

$$e^{it} = \psi(e^{i\theta}) = \lambda \frac{e^{i\theta}+u}{1+\bar{u}e^{i\theta}}$$

o

$$e^{i\theta} = \psi^{-1}(e^{it}) = \bar{\lambda} \frac{e^{it} - \lambda u}{1 - \overline{\lambda u} e^{it}}$$

de lo cual, al diferenciar y simplificar, se obtiene

$$e^{i\theta} d\theta = \frac{\overline{\lambda} e^{it} - \overline{\lambda} |u|^2 e^{it}}{(1 - \overline{\lambda u} e^{it})^2} dt.$$

Finalmente, tomando módulo tenemos

$$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1 - |u|^2}{|1 - \overline{\lambda u} e^{it}|^2} \frac{dt}{2\pi}.$$

Así

$$\int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1 - |u|^2}{|1 - \overline{\lambda u} e^{it}|^2} \frac{dt}{2\pi}.$$

Observemos ahora que

$$\frac{1 - |u|^2}{(1 + |u|)^2} \leq \frac{1 - |u|^2}{|1 - \overline{\lambda u} e^{it}|^2} \leq \frac{1 - |u|^2}{(1 - |u|)^2},$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|\,u|^{\,2}}{(1+|u|)^{\,2}}\frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^{\,2}\frac{1-|\,u|^{\,2}}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^{\,2}}\frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i}t)|^2 \frac{1-|\,u|^{\,2}}{(1-|u|)^{\,2}}\frac{d\theta}{2\pi}\,,\end{aligned}$$

y como $|u| = |\psi(0)|$, se concluye que

$$\left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|f\| \leq \|C_\psi f\| \leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|\,f\,\|.$$

Puesto que los polinomios son densos en $H^2(\mathbb{D})$, estas desigualdades son válidas para todo f en $H^2(\mathbb{D})$.

Para mostrar que la desigualdad de la derecha es óptima, recordemos que $\forall\ w \in \mathbb{D}:\ C_\psi^*(k_w) = k_{\psi(w)}$. Pongamos $u = se^{i\theta}$ y sea $\{r_n\}$ una sucesión de números reales positivos que converge, de manera creciente, a 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $w_n := r_n\, e^{i\theta}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|C_\psi^*\|^2 &\geq \lim_{n\to\infty}\frac{\|K_{\psi(w_n)}\|^2}{\|K_{w_n}\|^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-|\,w_n|^{\,2}}{1-|\psi(w_n)|^{\,2}} \\ &= \frac{1-|\,u|^{\,2}}{1-|u|^{\,2}} \\ &= \frac{1-|\,\psi(0)|^{\,2}}{1-|\psi(0)|^{\,2}}.\end{aligned}$$

Esto prueba que la desigualdad de la derecha es óptima y que

$$\|C_\psi\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}.$$

Nótese ahora que, para toda $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\| = \|C_\psi^{-1}C_\psi f\| \leq \|C_\psi^{-1}\|\,\|C_\psi f\|\,.$$

Por lo tanto, al ser $|\psi^{-1}(0)| = |\psi(0)|$, se tiene

$$\|C_\psi f\| \geq \frac{1}{\|C_\psi^{-1}\|}\|f\| = \frac{1}{\|C_{\psi^{-1}}\|}\|f\| = \left(\frac{1-|\psi^{-1}(0)|}{1+|\psi^{-1}(0)|}\right)^{1/2}\|f\|.$$

Para mostrar que esta desigualdad también es óptima consideremos una sucesión $\{g_n\}$ tal que $\lim \|C_\psi\, g_n\| = \|C_\psi^{-1}\|$ y definamos $f_n := C_\psi^{-1}\, g_n$. Entonces

$$\lim \|C_\psi\, f_n\| = \lim \|g_n\| = \left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|f\|.$$

■

Corolario 5.6. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica, entonces en $H^2(\mathbb{D})$ tenemos*

$$\left(\frac{1}{1-|\psi(0)|^2}\right)^{1/2} \leq \|C_\psi\| \leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}. \qquad (5.1)$$

Las estimaciones 5.1, muestran que si $\psi(0) = 0$ entonces $\|\, C_\psi \,\| = 1$. La desigualdad inferior es alcanzada cuando ψ es una constante y la desigualdad superior cuando ψ es una función interior.

5.2.1. Estimación vía Núcleos

Definición 5.1. *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definimos T_f^* sobre los núcleos de Szegö de H^2, mediante*

$$T_f^* k_w := \overline{f(w)}\, k_w.$$

T_f^* se extiende como operador lineal a todo H^2.

Teorema 5.7. *Sea $\varphi \in B(H^\infty(\mathbb{D}))$. Entonces, para cualquier $f \in \mathcal{H}(\varphi)$, el operador*

$$C_\varphi^* T_f^* : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$$

es acotado y

$$\|C_\varphi^* T_f^*\| \leq \|f\|.$$

Demostración.
Supongamos que $\|f\| = 1$.

Sea $f_0 := f$ y escojamos vectores unitarios $f_1, f_2, \ldots$ tal que $(f_m)_{m\geq 0}$ sea una base ortonormal de $\mathcal{H}(\varphi)$.

Entonces

$$k_w^{\varphi}(z,w) = \frac{1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)}{1-\overline{w}z} = \sum_{m\geq 0} \overline{f_m(w)} f_m(z).$$

Lo cual implica

$$\frac{1}{1-\overline{w}z} = \sum_{m\geq 0} \frac{\overline{f_m(w)} f_m(z)}{1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)} \tag{5.2}$$

que, a su vez, puede reescribirse en la forma

$$\frac{1}{1-\overline{w}z} - \frac{\overline{f(w)} f(z)}{1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)} = \sum_{m\geq 1} \frac{\overline{f_m(w)} f_m(z)}{1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)} \tag{5.3}$$

siendo esta diferencia *positiva semi-definida* por ser una suma de núcleos positivos semi-definidos.

Notemos ahora que podemos escribir el lado izquierdo de (5.3) en la forma [1]

$$\mathcal{K}(w,z) := \langle k_w, k_z \rangle - \langle C_\varphi^* T_f^*\, k_w, C_\varphi^* T_f^*\, k_z \rangle\,.$$

Entonces, para cualquier combinación lineal de la forma

$$h(z) := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i k_{w_i}(z),$$

y la no negatividad de $\mathcal{K}(w,z)$ tenemos

[1] Aquí k_w denota al n.r. de H^2.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \, \mathcal{K}(w_i, w_j) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \, \langle k_{w_i}, k_{w_j} \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \, \langle C_\varphi^* T_f^* k_{w_i}, C_b^* T_f^* k_{w_j} \rangle \\ &\leq \langle h, h \rangle - \langle C_\varphi^* T_f^* h, C_\varphi^* T_f^* h \rangle \end{aligned}$$

o bien $\|C_\varphi^* T_f^* h\|^2 \leq \|h\|^2$.

Como tales funciones h forman un conjunto denso en $H^2(\mathbb{D})$, concluimos que

$$\|C_\varphi^* T_f^*\| \leq 1.$$

Corolario 5.8. *Para cualquier aplicación analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, el operador de composición C_φ es acotado sobre $H^2(\mathbb{D})$ y*

$$\|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.

Si φ es constante entonces el acotamiento es trivial.

Sea

$$f(z) := k_0^\varphi(z) = 1 - \overline{\varphi(0)}\varphi(z),$$

el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}(\varphi)$ en el origen.

Entonces

$$\|f\|_{\mathcal{H}(\varphi)} = \left(1 - |\varphi(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y puesto que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ y $|\varphi(0)| < 1$, tanto f como $\dfrac{1}{f}$ son analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$.

Por lo tanto, el operador de Toeplitz T_f^* es acotado e invertible, con inversa $T_{\frac{1}{f}}^*$, y

$$\|T_{1/f}^*\| = \left\| \frac{1}{f} \right\|_\infty \leq (1 - |\varphi(0)|)^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi^*\| &= \|C_\varphi^* T_f^* T_{1/f}^*\| \\
&\leq \|C_\varphi^* T_f^*\| \|T_{1/f}^*\| \\
&= \|f\|_{\mathcal{H}(\varphi)} \|1/f\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.

[2] L. Branges and J. Rovnyak, *Square Summable Power Series,* Holt, Rinehart and Winston,New York,1966.

[3] C. C. Cowen, *Linear fractional composition operators on* H^2, Integral Equations and Operator Theory 11 (1988), 151-160.

[4] C. C. Cowen, and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, New York, 1994.

[5] C. C. Cowen, *Composition operators on* H^2, J. Operator Theory 9 (1983), 77-106.

[6] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] Ronald G. Douglas. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Second Edition. Springer., 1997.

[8] P. Duren *Theory of* H^p *spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[9] F. Jafary, B. D. MacCluer, C. C. Cowen and D. Porter, *Studies on Composition Operators*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1997.

[10] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions.* Academic Press,New-York, 1981.

[11] F. Jafari et al., editors: *Studies on Composition Operators.* Comtemp. Math. Vol. 210 American Math. Soc., 1998.

[12] E. Hayashi, *Classification of nearly invariant subspace of the backward shift.* Proc. Amer. Math. Soc. 110(1990), 441-448.

[13] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer transformationen des Hilbertschen raumes*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[14] E. A. Nordgren, *Composition Operators*, Canadian J. Math. 20(1968),442-449. (MR 36-6961).

[15] N.K. Nikolski, *Tratise on the shift operator.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.ahlengthforever:

[16] A. G. Ramm,*On the theory of reproducing kernel Hilbert Space*,Jour. of Inverse and III Posed Problems, 6N5,(1990),515-520.

[17] S. Saitoh, *Integral Transforms, reproducing kernels and their applications* Pitman Res. Notes, Longman, New York, 1997.

[18] D. E. Sarason,*Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk.* Lectures Notes in The Mathematical Sciences, vol. 10, J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1994.addto doublepath

[19] E. Schroeder, *Über itierte Funktionen*, Math. Ann. 3(1871), 296-322. Springer-Verlag, New York, 1993

[20] H. J. Schwartz, *Composition Operators on H^p*, Thesis, University of Toledo, 1969.

[21] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993

[22] M. T. Jury, *Reproducing Kernels, De Branges- Rovnjak Spaces, and Norms of weighted Composition Operators*,Proc. Amer. Math. Soc. Volume 135, Number 11.

[23] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.