TEOREMA DE LA CORONA

RONALD GABRIEL GUTIÉRREZ RIVERO

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL 'LISANDRO ALVARADO'
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

BARQUISIMETO 2008

TEOREMA DE LA CORONA

Por

Ronald Gabriel Gutiérrez Rivero

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría de Asistente en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL 'LISANDRO ALVARADO'
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Barquisimeto 2008

AGRADECIMIENTOS

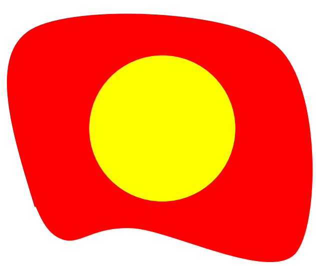
Mis agradecimientos más sinceros al Dr. José Giménez por todo su apoyo y ayuda, también agradezco a las profesoras Jurancy Ereú y Mireya Bracamonte cuyos comentarios y sugerencias se ven en el resultado final de este trabajo; por último mis agradecimientos a mi amigo Miguel Vivas por su amistad incondicional, sin su apoyo este trabajo no hubiese sido posible, gracias a todos.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de la Corona, comenzó como la conjetura de la Corona que decía:

¿ es $D = \{| z |< 1\}$ w^* denso en $\mathfrak{R}$ (el conjunto de ideales maximales en H_∞)?

Esta cojetura fue hecha por el matemático japonés Kakutani a principios de la decada de los 40 del siglo pasado. Lennart Carleson resolvió el problema en 1962 en el sentido positivo (es decir, que D es denso en el mencionado conjunto), su demostración estuvo basada en una serie de intricadas construcciones geométricas de carácter combinatorial cuyos detalles están alejados de ser fáciles de manejar, muy distintos a la prueba dada por T. Wolff en 1979, que será la que trabajaremos.
¿ De qué trata el teorema en palabras sencillas?, veamos:
Podemos situar el disco unitario complejo,D, dentro $\mathfrak{R}$; uno supondría que este conjunto es demasiado "grande" respecto al disco (ver figura), pero el teorema de la Corona nos dice que D en realidad es denso en $\mathfrak{R}$ o dicho de otra manera, puesto que $\mathfrak{R}$ es compacto en la topología w^*, $\mathfrak{R}$ es una compactificación de D.



$\overline{D}$

El disco es una superficie de Riemann abierta, existen otras de tales superficies que "satisfacen" el **teorema de la Corona**, B. Cole mostró que no toda superficie de Riemann abierta satisface el teorema.
Ahora para demostrar el teorema necesitaremos algunos conceptos y teoremas relacionados con los espacios H_P, medidas de Carleson y el espacio BMO.
Una vez demostrado el teorema, veremos algunas generalizaciones del mismo y por último algunos resultados más recientes relacionados con el teorema.
En el primer capítulo resumiremos algunos conceptos y teoremas fundamentales del analísis funcional, para ello se supondrá del lector conocimientos básicos de topología, álgebra, teoría de la medida así como del análisis

matemático y complejo, también se supondrá del lector un conocimiento básico sobre formas diferenciables. En el segundo capítulo estudiaremos las medidas de Carleson y el espacio BMO hasta dar con una relación entre ambos conceptos, finalizaremos el capítulo con el Teorema de Wolff, teorema fundamental para nuestro trabajo. En el capitulo tres entraremos de lleno al teorema así como algunas de sus generalizaciones.

Índice general

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio topológico y sea $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **semicontinua superiormente** (inferiormente) si para todo $a \in A$ y $\lambda > f(a)$ $(\lambda < f(a))$, existe una vecindad U de a con $\lambda > f(x)$ $(\lambda < f(x))$ para todo x en U.*

Observación 1.1.1 *Una función semicontinua (superiormente o inferiormente) es Lebesgue medible.*

Un **conjunto dirigido** A es un conjunto parcialmente ordenado($\geq$) tal que $\forall \alpha, \beta \in A$, existe $\gamma \in A$ con $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$. Una **red** en un conjunto X es una función $(\alpha \to \lambda_\alpha)$ de un conjunto dirigido a X. Si los λ_α yacen en un espacio topológico X, entonces la red se dice convergente a λ si para toda vecindad U de λ existe α_U en A con $\lambda_\alpha \in U$ para $\alpha \geq \alpha_U$. Una **sucesión** en un espacio topológico es así una red de los naturales al espacio.

Definición 1.1.2 *Una red $\{f_\alpha\}_\alpha \in A$ en un espacio topológico X se dice **red de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$ implica que $|| f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2} || < \epsilon$.*

Definamos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Así $\quad \triangle := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$. A $\triangle$ se le conoce como **operador laplaciano**
Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con Ω abierto, es **diferenciable** en un punto a si $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \overline{z}} = 0$, denotamos la derivada en a como $f^{'}(a)$. En tal caso

$$f^{'}(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial z}$$

Si f es diferenciable en un punto a y lo es en toda una vecindad de a, decimos que f es **analítica** en a. Por otro lado diremos que f es **analítica en un conjunto** A si lo es en todo punto de A.

Teorema 1.1.1 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en A y f una función continua definida en A. Si $f_n \to f$ (convergencia uniforme), entonces f es analítica en A y además $f_n^k \to f^k$ (convergencia uniforme) para k entero positivo.*

Teorema 1.1.2 (*Integración bajo el signo integral*) *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida Banach y sea Y un espacio métrico.*
Sea $k : X \times Y \to \mathbb{R}$ y sea $u : Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(y) = \int_X k(x, y) d\mu(x)$$

Supongamosla bien definida (por ejemplo que para cada y $k(x, y) \in L_1(X)$). Supongamos además que $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x, y)$ existe c.s., para cada $y \in Y$, y que es una función continua en y_0. Supongamos por último que existe $g \in L_1(X)$ tal que c.s se cumpla con

$$\mid \frac{\partial k}{\partial y}(x, y) \mid \leq g(x), y \in Y$$

Entonces u es diferenciable en y_0 y se cumple que

$$u'(y_0) = \int_X \frac{\partial k}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x)$$

Observación 1.1.2 *Recordemos que si X es un localmente compacto y μ una medida borel regular sobre X, entonces para todo boreliano A se cumple que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A\}$$

Definición 1.1.3 *Sea X un espacio de Hausdorff y Ω su σ-álgebra de Borel. Sea (X, Ω, μ) un espacio medible. A μ se le llama* ***medida Radon*** *si*

- *Cada punto de X tiene una vecindad de medida finita (localmente finita)*

- *Para cada conjunto de Borel B se cumple que*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset B\}$$

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible y sea p un número real positivo. Llamaremos L_p al conjunto de funciones de X a $\mathbb{C}$ tales que $\mid f \mid^p$ es medible. Tal L_p es un espacio vectorial complejo (real) bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar; más aún es un espacio Banach si $p > 1$ con la norma $\mid\mid f \mid\mid_p = (\int \mid f \mid^p d\mu)^{1/p}$ y el producto usual de funciones. Por otro lado L_∞ será el conjunto de todas las funciones medibles que están acotadas casi siempre (c.s.). Este conjunto es también espacio vectorial complejo con las operaciones ya mencionadas y es Banach bajo la norma

$$\mid\mid f \mid\mid_\infty = \ inf\{M : \mu\{x :\mid f(x) \mid > M\} = 0\}$$

y el producto usual de funciones.
Si $A \subset \mathbb{C}$, el conjunto de funciones continuas de A a $\mathbb{C}$ será denotado por $C(A)$
Dos resultados muy importantes del álgebra para nosotros serán los siguientes

Teorema 1.1.3 *Si R es un anillo conmutativo con unidad, entonces, un ideal M será maximal si y sólo si R/M es un cuerpo. Por otro lado si R es un anillo conmutativo con identidad, todo ideal propio está contenido en un ideal maximal*

$R/M = \{[x] : y \in [x] \text{ si } x - y \in M\}$
Ahora repasemos formas del teorema de Green, así como resultados básicos de las funciones armónicas.
Sea C una curva en $\mathbb{C}$ parametrizada por $R : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si $R'(t) \neq 0$, definimos como **vector unitario tangente** de C en P, denotado por $T(t)$ a

$$T(t) := \frac{R'(t)}{\mid\mid R'(t) \mid\mid}$$

Por otro lado definimos el **vector unitario normal** de C en P denotado por $\eta(t)$ a

$$\eta(t) := \frac{T'(t)}{\| T'(t) \|}$$

En ocasiones, en vez de un parámetro t conviene usar como parámetro el número de unidades de la **longitud de arco** s desde un punto arbitrario P_0 a P en C de manera que s aumente si t aumenta, en tal caso $\frac{ds}{dt} > 0$ y se cumple que $\| R'(t) \| = \frac{ds}{dt}$.

Teorema 1.1.4 (*Teorema de Green*) *Sea D un dominio con frontera suave y sean u, v funciones C^2 en $\overline{D}$. Entonces*

$$\int_D (v\triangle u - u\triangle v)dxdy = \int_{\partial D} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds$$

Un dato importante es que $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \nabla f.\eta$, donde $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ es el operador gradiente.
Otra forma del teorema de Green que utilizaremos es la que sigue:

Teorema 1.1.5 *Sean $M, N : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 y con frontera suave. Entonces*

$$\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Una función $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice **armónica** si $\Delta u = 0$
Si A es un dominio simplemente conexo, entonces u es la parte real (compleja) de una función analítica con dominio A. De igual manera si f es analítica en A, entonces tanto su parte real como su imaginaria son funciones armónicas.

Teorema 1.1.6 (*Teorema del valor medio de Gauss*) *Sea f analítica en un dominio simplemente conexo. Consideremos un círculo cualquiera en dicho dominio. Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

Si u es continua en $\overline{D}$ y armónica en D, entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(\theta)u(\theta)d\theta$$

donde $P_z(\theta)$ es $Re\left(\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$. A tal P_z se le conoce como **núcleo de Poisson**.
Reciprocamente si $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(\theta)f(\theta)d\theta$ para $f \in L_1(\partial D)$, entonces u es armónica en $\overline{D}$. A esta función u se le conoce como **integral de Poisson de** f.
Denotemos por $\mathcal{H}$ al semiplano superior. La transformación $\tau : D \to \mathcal{H}$ definida por

$$\tau(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

transforma conformemente D en $\mathcal{H}$ y en este caso los núcleos de Poisson toman la forma

$$P_z = \frac{1}{\pi}Im(\frac{1}{t-z})$$

se muestra sin mucha complicación que

$$P_z(t) \leq \frac{c_z}{1+t^2}$$

donde c_z es una constante que depende de z. Esto implica que $P_z \in L_q(\mathbb{R})$ para $1 \leq q \leq \infty$ y que para $f \in L_p(\mathbb{R})$

$$u(z) = \int P_z(t)f(t)dt$$

es armónica en $\mathcal{H}$. A $u(z)$ también se le llama **integral de Poisson** de f.
Un cálculo rutinario nos muestra que

$$\int P_z(t)dt = 1$$

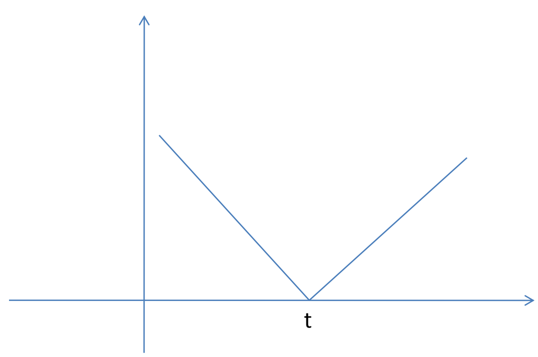
Lema 1.1.1 *Si $v(z)$ es subarmónica en D, esto es $\Delta u \geq 0$ en D, entonces*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int v(re^{i\theta})d\theta$$

es una función creciente

Para terminar con la sección, estudiremos funciones especiales que son necesarias para empezar a estudiar en profundidad tipos de crecimiento de las funciones analíticas.
Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente integrable** ($\varphi \in l^1_{loc}$) si $\mid \varphi \mid$ es integrable sobre cualquier compacto.
Para tal función definimos $Mf(x) := \sup_{x \in I} \dfrac{1}{\mid I \mid} \int_I \mid f(t) \mid dt$, llamada la **función Maximal de Hardy-Littlewood** de f. Más adelante veremos condiciones para las cuales esta función es finita c.s.; mencionamos sin demostración (para esto ver [6]) que si $f \in L_1$ entonces Mf es semicontinua inferiormente.
A continuación veremos que Mf mayoriza a otra función relacionada con la misma f.
Definamos el **cono** en $\mathcal{H}$ con vertice t y ángulo $2tan^{-1}(\alpha)$ como

$$\Gamma_\alpha(t) = \{(x, y) : \mid x - t \mid < \alpha y, 0 < y < \infty\}$$



Teorema 1.1.7 *Para u armónica en el semiplano superior $\mathcal{H}$ se cumple que*

$$\sup \mid u(x, y) \mid_{\Gamma_\alpha(t)} \leq AMf(t)$$

con t en los reales y A dependiendo sólo de α (u es la integral de Poisson de f).

Demostración
Lo haremos primero para $t = 0$.
Sabemos que $\mid u(z) \mid \leq (\dfrac{1}{\pi}) \int \dfrac{y}{(x-t)^2 + y^2} \mid f(t) \mid dt$.

Ahora al integrar por parte se tendrá que $\mid u(z) \mid$ es menor o igual a

$$\left[\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\int_0^t \mid f(s)\mid ds\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2y\mid t-x\mid}{((x-t)^2+y^2)^2}\int_0^t \mid f(s)\mid ds\right)dt$$

que a su vez menor o igual a

$$\left[\frac{1}{\pi}\frac{yt}{(x-t)^2+y^2}Mf(0)\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2y\mid t-x\mid t}{((x-t)^2+y^2)^2}Mf(0)\right)dt$$

La primera expresión es 0 (L' Hopital) la segunda es menor o igual a

$$\frac{2y}{((x-t)^2+y^2)}+\frac{\mid x\mid t}{((x-t)^2+y^2)}$$

debido a las identidades

$$\frac{a}{(a+b)^2}\leq\frac{1}{a+b}; a,b>0$$

$$\frac{2cd}{(c^2+d^2)^2}\leq\frac{1}{c^2+d^2}; a\neq b$$

Como $\int P_z(t)dt=1$, concluimos que

$$\mid u(z)\mid\leq(2+\frac{\mid x\mid}{y})Mf(0)$$

Pero para $z\in\Gamma_\alpha(0)$ se tendrá

$$\sup_{\Gamma_\alpha(t)}\mid u(x,y)\mid\leq(2+\alpha)Mf(0)$$

Sea $t\in\mathbb{R}$. Si definimos $v^*(s)=u^*(t-s)$, entonces

$$v^*(s)=\sup_{z\in\Gamma_\alpha(s)}\mid u(x-t,y)\mid=\sup_{z\in\Gamma_\alpha(s)}\mid v(z)\mid$$

Luego

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= v^*(0)\\
&\leq A_\alpha Mv(0)\\
&= A_\alpha\sup_{0\in I}\frac{1}{\mid I\mid}\int_I v(t)dx\\
&= A_\alpha\sup_{t\in I}\frac{1}{\mid I\mid}\int_I u(t)dx\\
&= A_\alpha Mu(t)
\end{aligned}$$

□

Por supuesto en la demostración se supuso que $Mf(0)$ es finita pues en caso contrario no habría nada que probar.
Este teorema vale para integrales de Poisson en ∂D reemplazando al cono por la región

$$\Gamma_\alpha(e^{i\varphi}) = \{z : \frac{\mid e^{i\varphi} - z \mid}{1 - \mid z \mid} < \alpha < 1, \mid z \mid < 1\}$$

Definición 1.1.4 *Sea $\alpha > 0$ y u armónica en $\mathcal{H}$. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos la* ***función maximal no tangencial de*** *u como $u^*(t) = \sup_{\Gamma_\alpha(t)} \mid u(z) \mid$*

Notemos que el valor de u^* va a depender del parámetro α, así por el teorema anterior $u^*(t)$ esta mayorizada por $Mu(t)$. Ahora daremos unos lemas sin demostración que nos serán utiles para probar el importante teorema maximal de Hardy-Littlewood. Para la demostración de los mismos el lector puede consultar [6]

Lema 1.1.2 (*Cubrimiento de tipo Vitali*) *Sea μ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ y sea $\{I_1, ..., I_n\}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Existe entonces una subfamilia $\{J_1, ..., J_m\}$ disjunta tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(J_i) \geq \frac{1}{2}\mu(\bigcup_{j=1}^{n} I_j)$$

Lema 1.1.3 (*Calderón-Zygmund*) *Sea I un intervalo acotado, $u \in L_1(I)$ con*

$$\alpha > \frac{1}{\mid I \mid} \int_I \mid u \mid dt$$

Entonces existe una una sucesión $\{I_j\}$ de intervalos disjuntos abiertos de I tales que

$$\mid u \mid \leq \alpha \ \ en \ I - \bigcup I_{j_1} \ \ c.s$$

$$\alpha < \tfrac{1}{|I_j|} \textstyle\int_{I_j} \mid u \mid dt \leq 2\alpha$$

$$\textstyle\sum_{j_1} \mid I_{j_1} \mid \leq \dfrac{1}{\alpha} \textstyle\int_I \mid u \mid dt$$

Lema 1.1.4 (*Teorema de interpolación de Marcinkiewicz*)
Sean (X, μ), (Y, ν) *espacios medibles, y sea* $1 < p_1 \leq \infty$. *Supongamos* T *una función de* $L_1(X, \mu) + L_{p_1}(X, \mu)$ *al espacio de las funciones* $\nu-$*medibles tal que*

a. $| T(f+g)(y) | \leq | Tf(y) | + | Tg(y) |$

b. $\nu(\{y : | Tf(y) > \lambda |) \leq (B_0/\lambda) \,||\, f \,||_1,\ f \in L_1$

c. $\nu(\{y : | Tf(y) > \lambda |) \leq ((B_1/\lambda) \,||\, f \,||_{p_1})^{p_1},\ f \in L_{p_1}$
(cuando $p_1 = \infty$ *se supone que* $||\, Tf \,||_\infty \leq A_1 \,||\, f \,||_\infty$*)*

Entonces para $1 < p < p_1$, $||\, Tf \,||_p \leq A_p \,||\, f \,||_p$, *donde* A_p *depende de* B_0, B_1, p, p_1

Teorema 1.1.8 (*Teorema maximal de Hardy-Littlewood*)
Si $f \in L_1(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, *entonces* $Mf(t)$ *es finita c.s. Más aún*

a) *Si* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *entonces* $| \{t \in \mathbb{R} : Mf(t) > \lambda\} | \leq (2/\lambda) \,||\, f \,||_1$ *para* $\lambda > 0$

b) *Si* $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq \infty$, *entonces*
$Mf(t) \in L_p(\mathbb{R})$ *y* $||\, Mf \,||_p \leq A(p) \,||\, f \,||_p$ *con* $A(p)$ *constante que depende sólo de* p

Demostración
a) Sea $f \in L_1$ y sea $\lambda > 0$. Como Mf es semicontinua inferiormente el conjunto

$$E_\lambda = \{t : Mf(t) > \lambda\}$$

es abierto y por tanto medible.
Usaremos la regularidad de la medida de Lebesgue, para acotar la medida de E_λ.
Sea entonces K compacto en E_λ. Para cada $t \in E_\lambda$ existe un intervalo abierto I tal que

$$\frac{1}{| I |} \int_I | f | \, ds > \lambda$$

Ahora por los primeros dos lema y la compacidad de K existirá una familia de intervalos abiertos disjuntos $\{I_1, ..., I_m\}$ que cubren a K y que

$$| K | \leq 2 \left| \sum_{i=1}^{m} | I_j | ; \frac{1}{| I_j |} \int_{I_j} | f | \, ds > \lambda \right.$$

De esta manera

$$| K | \leq 2 \sum_{i=1}^{n} | I_j | \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} | f | ds \leq \frac{2}{\lambda} \int | f | ds$$

Haciendo tender K a E_λ tenemos (a).
b) Se tiene directamente al verificar las hipótesis del teorema de Marcinkiewicz.

□

Más adelante cuando digamos que $a \approx b$, querrá decir que existen constantes no nulas digamos c_1, c_2 tales que

$$c_1 a \leq b \leq c_2 a$$

1.2. ÁLGEBRAS DE BANACH

Un espacio vectorial normado completo V (con la métrica inducida por esta norma) se dice **espacio de Banach** (bajo dicha métrica). Nos referiremos a la topología inducida por la métrica d como la topología de X. Así en un espacio Banach cada red de Cauhy es convergente.

Definición 1.2.1 *Sea $\{f_\alpha\}_\alpha = A \subset X$, con X Banach. $\mathfrak{F} = \{F \subset A : F$ es finito$\}$. Si definimos $F_1 \leq F_2$ para $F_1 \subset F_2$ entonces $\mathfrak{F}$ es un conjunto dirigido. $\forall F \in \mathfrak{F}$, sea $g_F = \sum_{\alpha \in F} f_\alpha$. Si $\{g_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$ converge a $g \in X$, entonces diremos que $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = g$ converge a g.*

Teorema 1.2.1 (*Teorema de la convergencia monotona*) *Sea μ una medida regular de borel sobre un espacio X de Hausdorff compacto. Si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una red creciente de funciones continuas en $L_1(X)$. Entonces*

$$f = \lim_\alpha f_\alpha \in L_1(X)$$

si y sólo si $\sup_\alpha || f_\alpha ||_1 < \infty$ y en este caso se cumple que

$$\lim_\alpha || f - f_\alpha ||_1 = 0$$

Teorema 1.2.2 *X es Banach si y sólo si para toda serie $\sum_{\alpha \in A} \| f_\alpha \|$ convergente se cumple que $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ converge en X*

Definición 1.2.2 *Un* ***álgebra*** *es un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre un campo $\mathbb{F}$ junto con una función bilineal $* : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ llamada multiplicación la cual es asociativa.*

A veces se omite la condición de asociatividad pero como las álgebras más importantes son asociativas muchos autores piden la asociatividad en la definición. Un álgebra $\mathcal{A}$ será, conmutativa si la multiplicación es conmutativa y con unidad si existe $e \in \mathcal{A}$ (que será único en caso de existir y es comunmente denotado por 1) tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $ex = xe = e$. Si un espacio vectorial normado es álgebra y además si $\| vw \| \leq \| v \| \| w \|$ para todo $v, w \in \mathbb{V}$, entonces se dice que es un **álgebra normada** si además el espacio es Banach, el álgebra se dice **Álgebra de Banach**.
Dado un álgebra de Banach, es posible que la norma de la identidad no sea 1, que sería lo ideal, pero se puede redefinir la norma para que esto ocurra y lo mejor es que el espacio seguirá siendo un espacio Banach, a saber con $\| x \|_1 := \sup_{y \in (X - \{0\})} \dfrac{\| xy \|}{\| y \|}$.
Un **álgebra de división** es un álgebra donde cada elemento distinto de cero es invertible.

Teorema 1.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ álgebra de Banach y R un ideal cerrado de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}/R$ es también álgebra de Banach con la operación de producto*
$[a][b] = [ab]$

Definición 1.2.3 *Sean X, Y espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{F}$. Un* ***operador lineal*** *(transformación lineal) es una función T de X a Y tal que para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in F$ se cumple que $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$. Si $Y = F$ el operador se dice* ***funcional lineal****.*

Una transformación lineal entre los espacios normados X, Y es acotada si existe una constante M tal que $\| T(x) \| \leq M \| x \|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.2.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes para una transformación T entre espacios normados*

1. *T es continua.*

2. T es continua en un punto.

3. T es acotada.

*Dado X espacio normado denotamos por X^* al conjunto de funcionales lineales continuos, X^* resulta un espacio Banach bajo las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalar y es llamado **espacio dual** de X. Así mismo $(X^*)^*$ es el **doble dual** de X denotado por X^{**}.*
*Si X es Banach y Y es cerrado en X. Definimos como **anulador** de Y a*

$$Y^{\perp} = \{x^* \in X^*/x^*(y) = 0 \text{ para todo } y \in Y\}$$

que es un subespacio cerrado de X^*.

Teorema 1.2.5 (*Teorema de Hahn-Banach*) *Sea X un espacio vectorial normado complejo, S un subespacio de X, y p, una función de X a $\mathbb{R}$ tal que*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- $p(\alpha x) =\mid \alpha \mid p(x)$

Sea f un funcional lineal sobre S tal que $\mid f(s) \mid\leq p(s)$ en S. Entonces existe un funcional lineal F en X que extiende a f y que $\mid F(x) \mid\leq p(x)$ en X.

Una consecuencia del teorema de Hanh-Banach es la siguiente:

Teorema 1.2.6 *Sea Y subespacio de X normado. Sea $x \in X$ y sea*

$$\inf_{y \in Y} || x - y ||= d > 0$$

Entonces existe $x^* \in X^*$, de norma 1, tal que $x^*(x) = d$ y $x^* \in Y^{\perp}$.

Este teorema nos da luz sobre el hecho de que $(X/Y) \cong Y^{\perp}$. De aquí el siguiente teorema.

Teorema 1.2.7 *Sea Y subespacio cerrado de X con X Banach. Entonces para $x \in X$ se cumple que*

$$\inf\{|| x - y ||: y \in Y\} = \sup\{\mid k(x) \mid: k \in Y^{\perp}, || k ||\leq 1\}$$

Definición 1.2.4 *Sea $T : D \to Y$ lineal con D subespacio de un espacio X. Entonces T se dice **cerrado** si su gráfico, $graf(T)$, es cerrado en $X \times Y$.*

De manera equivalente, T es cerrada si y sólo si para $\{x_n\}$ en D convergente a x en X y $T(x_n)$ convergente a y en Y se cumple que $x \in D$ y $T(x) = y$.

Teorema 1.2.8 (*Teorema del gráfico cerrado*) *Un operador lineal cerrado T de un Banach X en un Banach Y es continuo*

Definición 1.2.5 *La **función natural** (ó **canónica**) J de X a X^{**} esta definida por $J(x)(x^*) = x^*(x)$, $x \in X^*$. Si el rango de J es igual a X^*, entonces a X se le dice **espacio reflexivo**.*

La **topología débil** de X es la topología en X que tiene como elementos básicos (los elementos de una base) a los conjuntos de la forma

$$\{x :\mid f_i(x) - f_i(x_0) \mid < \epsilon, i = 1, ..., n\}$$

donde $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ y $f_i \in X^*$.
Esta claro que X^* tiene una topología débil, pero a nosotros nos interesará otra topología en X^*; a saber, la **topología débil** * , pues en esta topología la bola unitaria cerrada es compacta (Teorema de Banach-Alaoglu ver [4]). Esta topología es aquella cuyos elementos básicos vienen dados por

$$\{f \in X^* :\mid f(x_i) - f_0(x_i) \mid < \epsilon, i = 1, ..., n\}$$

donde $x_1, , x_n \in X$, $\epsilon > 0$ y $f_0 \in X^*$. Es de notar que la topología débil y la débil* coinciden en X^* si X es reflexivo.

Proposición 1.2.1 *Sea X un espacio de Banach. Entonces una red $\varphi_{\alpha \alpha \in A}$ en X^* converge a φ en X^* con la topología débil* si y sólo si* $\lim_{\alpha \in A} \varphi_{\alpha(f)} =$ *$\varphi(f)$ para toda f en X*

Definición 1.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Un funcional lineal φ en $\mathcal{A}^*$ se dice **multiplicativo** si $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ y $\varphi(1) = 1$. Al conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos lo denotaremos por $M_{\mathcal{A}}$ y cuando este sobreentendido X, lo denotaremos simplemente por M.*

Proposición 1.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ álgebra de Banach y sea $f \in \mathcal{A}$ con $\| 1 - f \| < 1$. Entonces f es invertible y $\| f^{-1} \| \leq \dfrac{1}{1 - \| 1 - f \|}$*

Una de las características de los funcionales lineales multiplicativos es que son acotados, más aún de norma 1, veamos esto.
Sea $\mathcal{A}$ álgebra de Banach y sea $\varphi \in M_{\mathcal{A}} = M$.
Para todo $f \in M$ es claro que $\varphi(f - \varphi(f),1) = 0$, por lo tanto podemos escribir todo g en $\mathcal{A}$ de la forma $\lambda + f$ con $f = g - \varphi(g),1 \in Ker(\varphi)$ y $\lambda = -\varphi(g) \in \mathbb{C}$ así

$$\begin{aligned} \| \varphi \| &= \sup_{g\neq 0} \frac{| \varphi(g) |}{\| g \|} \\ &= \sup_{f\in Ker(\varphi),\lambda\neq 0} \frac{| \varphi(\lambda + f) |}{\| \lambda + f \|} \\ &= \sup_{f\in Ker(\varphi),\lambda\neq 0} \frac{| \lambda |}{\| \lambda + f \|} \\ &= \sup_{f\in Ker(\varphi),\lambda\neq 0} \frac{1}{\| 1 + \frac{f}{\lambda} \|} \end{aligned}$$

Si $\| 1 + \dfrac{f}{\lambda} \| < 1$ para alguna f y λ con las caracteristicas vistas, entonces $\dfrac{f}{\lambda}$ es invertible por la proposición 1.2.2, luego

$$1 = \varphi(1) = \varphi(\frac{f}{\lambda}.(\frac{f}{\lambda})^{-1}) = \varphi(\frac{f}{\lambda})\varphi(\frac{f}{\lambda})^{-1} = 0$$

Por lo tanto $\| 1 + \dfrac{f}{\lambda} \| \geq 1$ para toda $f \in Ker(\varphi)$ y $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, de donde se tiene que $\| \varphi \| \leq 1$ y como $\varphi(1) = 1$ y $\| 1 \| = 1$ se tiene que $\| \varphi \| = 1$

Proposición 1.2.3 *Dado X un espacio Haussdorf compacto (y por tanto $C(X)$ es álgebra de Banach). Si dotamos a $C(X)$ de la topología w^*, entonces $M = M_{C(X)}$ es homeomorfo a X. Además para toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se tiene que $M_{\mathcal{A}}$ es w^* compacto de $\mathcal{A}^*$.*

Definición 1.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ álgebra de Banach y $f \in \mathcal{A}$. Definimos*

1. *El **espectro** de f como $\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda.1$ no es invertible en $\mathcal{A}\}$*
2. *El **resolvente** de f como $\rho_{\mathcal{A}}(f) = \mathbb{C} - \sigma_{\mathcal{A}}(f)$*
3. *El **radio espectral** de f como $\gamma_{\mathcal{A}}(f) = \sup\{| \lambda | : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(f)\}$ (el cual siempre existe y es menor que $\| f \|$)*

A veces sólo se escribe $\sigma(f), \rho(f), \gamma(f)$.

Un resultado conocido del análisis funcional es que para toda f, $\sigma(f)$ es no vacío y compacto.

Teorema 1.2.9 (*Gelfand-Mazur*) *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de división de Banach, entonces existe un isomorfismo isométrico (único) de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$*

Demostración
Sea $f \in \mathcal{A}$ y sea $\lambda_f \in \sigma(f)$. Entonces $f - \lambda_f$ no es invertible, ahora como $\mathcal{A}$ es álgebra de división debe ser $f - \lambda_f = 0$ más aún notemos que $\sigma(f)$ tendra un único elemento para cada f.
Definamos $\Psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dada por $\Psi(f) = \lambda_f$. No es dificil ver que Ψ cumplirá las condiciones deseadas.

$\square$

Teorema 1.2.10 *Si $\mathcal{A}$ es álgebra de Banach, entonces M está en correspondencia inyectiva con el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$.*

Demostración
Sea $\varphi \neq 0$ funcional lineal multiplicativo en M y sea $R = Ker(\varphi)$ (que es un ideal propio). Supongamos que B es un ideal que contiene a R propiamente, sea así $f \in B - R$.
$1 = (1 - \dfrac{f}{\varphi(f)}) + \dfrac{f}{\varphi(f)}$ pero $(1 - \dfrac{f}{\varphi(f)}) \in R$ y $\dfrac{f}{\varphi(f)} \in B$, es decir, $1 \in B$, por tanto $B = \mathcal{A}$, así R es maximal.
De esta manera hemos relacionado un elemento en M con un ideal propio maximal de $\mathcal{A}$.
Supongamos ahora un ideal propio maximal m en $\mathcal{A}$. m no contiene elementos invertibles (pues tendría una unidad y por tanto sería igual a $\mathcal{A}$) $\overline{m}$ es ideal propio y no contiene por tanto al 1, pues de contener al 1 existiría f en m con $\| 1 - f \| < 1$ y por la proposición 1.2.2 f sería invertible; como m es maximal debe ser $m = \overline{m}$, es decir, m es un ideal maximal cerrado, por tanto $\mathcal{A}/m$ es campo; luego por el teorema anterior $\mathcal{A}/m \sim \mathbb{C}$.
Sea $\Pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/m$ la proyección natural y sea $\Psi : \mathcal{A}/m \to \mathbb{C}$ un isomorfismo. Entonces $\varphi = \Psi \circ \Pi$ es un funcional lineal multiplicativo con núcleo (Kernel) igual a m. Tenemos así una correspondencia $\varphi \leftrightarrow Ker(\varphi)$, veamos que es

inyectiva.
Supongamos $Ker(\varphi_1) = Ker(\varphi_2) = m$. Entonces tenemos

$$\varphi_2(f - \varphi_2(f)) = \varphi_1(f - \varphi_1(f)) = 0$$

así $f - \varphi_2(f), f - \varphi_1(f) \in m$ y por tanto

$$f - \varphi_2(f) - (f - \varphi_1(f)) = -\varphi_2 + \varphi_1 \in m$$

obtenemos así que

$$\varphi_1(\varphi_1(f) - \varphi_2(f)) = \varphi_1(f) - \varphi_2(f) = 0$$

Como f es arbitraria concluimos que $\varphi_1 = \varphi_2$.

$\square$

Capítulo 2

FUNCIONES DE OSCILACIÓN MEDIA ACOTADA (BMO) Y MEDIDAS DE CARLESON

2.1. ESPACIOS H_p

Comenzaremos hablando de los productos de Blaschke sin pretender hacer un estudio riguroso, para esto el lector puede consultar [4] y [6].

Definición 2.1.1 *Si* $\{z_n\}$ *es una sucesión de números conplejos y si*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k \qquad (i)$$

existe, decimos que (i) *es* ***el producto infinito*** *de los* z_n *y lo denotamos como*

$$z = \prod_{k=1}^{\infty} z_k$$

Teorema 2.1.1 *Sea* $\{z_n\}$ *una sucesión de puntos en* D *tal que*

$$\sum (1- \mid z_n \mid) < \infty$$

y sea m el número de z_n iguales a 0. Entonces el ***producto de Blaschke***

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-\overline{z_n}}{| z_n |} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}$$

es una función analítica en el disco, y además $| B(z) | \leq 1$. Más aún los ceros de B son precisamente los z_n y la multiplicidad de estos ceros es el número de veces que aparece z_n es el sucesión.

Si f es analiı́tica en el disco, no identicamente nula y tal que *log* $| f |$ tiene mayorante armónica mayorante entonces se cumple que

$$\sum (1 - | z_n |) < \infty$$

para $\{z_n\}$ los ceros de f (ver [10]).

Definición 2.1.2 *Si $p > 1$, llamamos $H_p(D) = H_p$ al conjunto de funciones F analíticas en D tales que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(re^{i\theta}) |^p \, d\theta)^{1/p} := || f ||_{H_p} < \infty$$

Esto último define una norma, más aún estos son espacios completos.
Definimos $H_\infty := H_\infty(D)$ como

$$H_\infty := \{F \in C(D) : F \text{ es analítica y acotada } \}$$

Con la norma del supremo este es un espacio completo.

Definición 2.1.3 *Definimos $H_p(dt) = H_p(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es el semiplano superior, a*

$\{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} : f$ *es analítica y* $(\sup_y \int | f(x + iy) |^p \, dx)^{1/p} = || f ||_{H_p(dt)} < \infty\}$

Y $H_\infty(dt)$ *a* $\{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} : f$ *es analítica y* $(\sup_{\mathcal{H}} | f(z) | < \infty\}$

Estos también son espacios completos cuando $p > 1$.

Teorema 2.1.2 (*F. Riesz*) *Sea $0 < p < \infty$ y sea $f \in H_p$ no identicamente nula con ceros $\{z_n\}$. Sea B el producto de Blaschke con ceros $\{z_n\}$. Entonces $g = \dfrac{f}{B} \in H_p$ y además*

$$|| g ||_{H_p} = || f ||_{H_p}$$

. Notemos que esta g es libre de ceros

Demostración

Sean B_n productos finitos de Blaschke con ceros $z_1, ..., z_n$ y sea $g_n = \dfrac{f}{B_n}$.
Ahora por el lema 1.1.1, se tiene

$$\int \mid g_n(re^{i\theta}) \mid^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{R\to 1} \int \frac{\mid f(Re^{i\theta}) \mid^p}{\mid B_n(Re^{i\theta}) \mid^p} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{R\to 1} \int \frac{\mid f(Re^{i\theta}) \mid^p}{R^{np}} \frac{d\theta}{2\pi} = \mid\mid f \mid\mid_{H_p}$$

Esto último y ya que $\mid g_n \mid$ crece a $\mid g \mid$ (un simple cálulo) nos da que $g \in H_p$ y con $\mid\mid g \mid\mid_{H_p} \leq \mid\mid f \mid\mid_{H_p}$, esto último es una igualdad si notamos que $\mid f \mid \leq \mid g \mid$

$\square$

Observación 2.1.1 *Sea $f \in H_1$ entonces $f = BF$ con F en H_1 libre de ceros y B en H_∞. Como F es libre de ceros, entonces $g = \sqrt{F} \in H_2$, así*

$$f = f_1 + f_2 = \frac{(B-2)F}{2} + \frac{(B+2)F}{2}$$

con f_1, f_2 libre de ceros y tales que $f_i = g_i^2$, $g_i \in H_2$

Sea $C = C(T = \partial D) = \{f$ continua en $[-\pi, \pi]; f(-\pi) = f(\pi)\}$. Sea ahora $A_0 = C \cap H_\infty$ el conjunto de funciones que tienen extensión analítica a D (notemos que $A_0 \subset C$).
Definamos $H_0^p = zH_p = \{f \in H_p; \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\theta = 0\}$.
Y sea $M(\partial D) = \{\mu : \mu$ es medida Radon en $\partial D\}$ con la norma

$$\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \mid d\mu(e^{i\theta}) \mid$$

Este es el dual de C, pero lo que más nos interesará es que $A_0^\perp = H_0^1$, así por el teorema 1.2.7

$$\sup\{\mid \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Fkd\theta \mid : k \in H_0^1, \mid\mid k \mid\mid \leq 1\} = \text{ínf}\{\mid\mid b \mid\mid_\infty : b \in A_0\}$$

Teorema 2.1.3 *Sea $f \in L\infty$. Definimos la distancia de f a H_∞ como*

$$dist(f, H_\infty) := \inf_{g\in H_\infty} \mid\mid f - g \mid\mid_\infty$$

y la distancia de f a A_0 como

$$dist(f, A_0) = inf_{g\in A_0} \mid\mid f - g \mid\mid_\infty$$

Entonces se cumple que:

1. $dist(f, H_\infty) = \sup\{\frac{1}{2\pi}\{| \int F f d\theta |: F \in H_0^1, || F ||_1 \leq 1\}$
2. $dist(f, H_\infty) = dist(f, A_0) =|| f - A_0 ||_\infty$
3. *Existe* $g \in H_0^1$, $|| g ||_1$, *con*

$$|| f - A_0 ||= \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta$$

Terminamos la sección con el análogo del teorema 1.1.7 en espacios H_p.

Teorema 2.1.4 *Sea* $0 < p < \infty$ *y sea* $f \in H_p(dt)$. *Entonces para* $\alpha > 0$ *la función maximal no tangencial*

$$f^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} | f(z) |$$

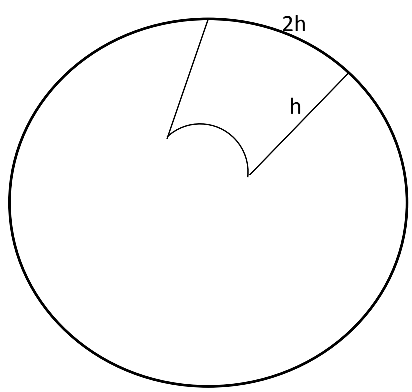
está en L_p *y además* $|| f^* ||_p^p \leq A_\alpha || f ||_{H_p}^p$ *donde* A_α *es una constante que depende sólo de* α.

2.2. MEDIDAS DE CARLESON

Definición 2.2.1 *Una medida* μ *definida en* D *se dice una* ***medida de Carleson*** *si existe una constante* N *tal que para todo sector*

$$S = S(h, \theta_0) = \{re^{i\theta} : 1 - h \leq r < 1, | \theta - \theta_0 |\leq h\}$$

se cumple que $\mu(S) \leq Nh$ *donde* N *es una constante. A la más pequeña* N *que satisface la condición anterior se le llama* ***norma de Carleson de la medida*** μ *y se denota por* $N(\mu)$.



En la definición se toma h en $(0,1]$. Cuando $h=1$ entonces $\mu(D) \leq N$, esto es, las medidas de Carleson en el disco son finitas.

Definición 2.2.2 *Una medida μ definida en el semiplano superior abierto se dice* ***medida de Carleson*** *si existe una constante N tal que para todo rectangulo*

$$Q = (x_0, x_0 + h) \times (0, h)$$

se cumple que $\mu(Q) \leq Nh$ donde N es una constante. A la más pequeña N de la condición anterior se le llama ***norma de Carleson de la medida*** *μ y se denota por $N(\mu)$.*

Para un ejemplo de medida de Carleson (más aún la construcción de una) el lector puede consultar [6]

Lema 2.2.1 *Sea u armónica y $\alpha > 0$. Entonces para todo $\lambda > 0$ se cumple que $\{t : u^*(t) > \lambda\}$ es un conjunto abierto. Esto es, u^* es* ***semicontinua inferiormente****.*

Demostración
Demostremos que $\{t : u^*(t) \leq \lambda\} = A$ es cerrado. Sea $\{t_n\}$ en A convergente a t, supongamos por un momento que t no está en A, así que existe $z' = x + iy \in \Gamma_\alpha(t)$ con $\mid u(z') \mid > \lambda$ y $\mid x - t \mid = \alpha y - \epsilon$ ($\epsilon > 0$). Para este $\epsilon > 0$ existe N tal que $\mid t_N - t \mid < \epsilon$, luego

$$\mid t_N - x \mid \leq \mid t_N - t \mid + \mid t - x \mid < \alpha y$$

lo que nos lleva a que $\lambda < \mid u(z') \mid < u^*(t_n) \leq \lambda$, una clara contradicción.

$\square$

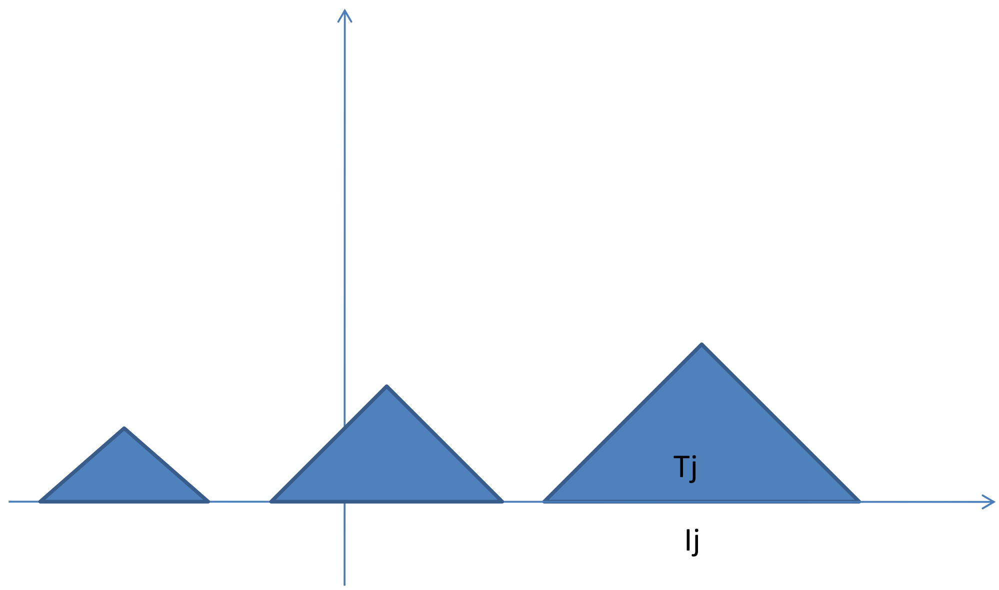
Teorema 2.2.1 *σ es medida de Carleson si y sólo si existe A constante tal que para $\lambda > 0$ y u armónica en $\mathcal{H}$ se cumple que*

$$\sigma(\{z : \mid u(z) \mid > \lambda\}) \leq A \mid \{t : u^*(t) > \lambda\} \mid$$

Demostración
($\Rightarrow$)
$\{t : u^*(t) > \lambda\}$ es abierto y por tanto igual a $\bigcup I_j$, donde los I_j son intervalos abiertos disjuntos. Sea $c(I_j)$ el centro de I_jy sea T_j el triángulo isósceles con base I_j y altura $\mid I_j \mid /2$, esto es,

$$T_j = \{z = x + iy : \mid x - c(I_j) \mid + \alpha y < \mid I_j \mid /2\}$$

Y sea Q_j el cuadrado con base I_j.



Los T_j son disjuntos, y además $\{z :\mid u(z) \mid > \lambda\} \subset \bigcup T_j$, como $\mid u(z) \mid > \lambda$ se tendrá que $u^*(t) > \lambda$ en el intervalo $\{\mid x - t \mid < \alpha y\}$ que estará en un intervalo I_j y un simple cálculo nos da que $z \in T_j$. Luego

$$\begin{aligned}
\sigma(\{z :\mid u(z) \mid > \lambda\}) &\leq \sum \sigma(T_j) \\
&\leq \sum \sigma(Q_j) \\
&\leq N(\sigma) \sum \mid I_j \mid \\
&= N(\sigma) \mid \{t : u^*(t) > \lambda\} \mid
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$
Sea $I = (x_0, x_0 + h)$, $f(x) = 4\lambda 1_I(x)$ (que tiene norma igual a $4\lambda h$) y u la integral de Poisson de f. Entonces $\mid u(z) \mid > \lambda$ en $Q = I \times (0, h)$ (cálculo tedioso), así por la hipótesis y el teorema maximal de Hardy-Littlewood tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(Q) &\leq \sigma(\{\mid u(z) \mid > \lambda\}) \\
&\leq A \mid \{t : u^*(t) > \lambda\} \mid \\
&\leq AB \mid\mid f \mid\mid_1 \\
&\leq Ch
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.2.2 (*Carleson*) *Sea σ medida en $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *σ es medida de Carleson*
2. *Para $1 < p < \infty$ y $f \in L_p$, $u \in L_p(\mathcal{H})_\sigma$ donde u es la integral de Poisson de f.*
3. *Para $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ y u la integral de Poisson de f se cumple que*

$$\int \mid u \mid^p d\sigma \leq c(p) \int \mid f \mid^p dt$$

4. *Para toda $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\lambda > 0$ se cumple que:*

$$\sigma(z : u(z) > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda} \int \mid f \mid dt$$

Demostración
Si 1 se cumple, entonces por el lema anterior y el teorema maximal de Hardy-Littlewood, se tiene 3 y 4. Claramente 3 implica 2.
Supongamos que 2 se cumple para algún p. Definamos $T : L_p \to L_p$ dada por $T(f) = u$ (u integral de Poisson de f), bien definida por la hipótesis. Si T es cerrada, por el teorema del gráfico cerrado será continua y se tendría así 3. Veamos entonces que T es cerrada. Sean $\{x_n\}$ (en L_p)y $\{T(x_n)\}$ tales que

$$x_n \to x, T(x_n) \to y$$

Como L_p es Banach, entonces $x \in D$. Ahora

$$\begin{aligned} \| y - T(x) \|_p &= \| y - T(x_n) + T(x_n) - T(x) \|_p \\ &\leq \| y - T(x_n) \|_p + (\int \mid x_n(t) - x(t) \| P_z(t) \mid dt)^{1/p} \\ &= \| y - T(x_n) \|_p + (\| x_n - x \|_p \| P_z \|_q)^{1/p} \end{aligned}$$

Haciendo tender n al infinito, se tiene que $T(x) = y$ y por tanto T es cerrado.
Supongamos que 3 se cumple o que 4 se cumple para algún $1 < p < \infty$. Sea $I = (x_0, x_0 + h)$, $f(t) = 4X_I(t)$ y sea u la integral de Poison de f. Entonces $\| f \|_p = 4h^{1/p}$ (aquí $1 \leq p < \infty$), y $u(z) > 1$ en $Q = I \times (0, h)$; procediendo

de forma parecida que en el lema anterior con $f = 4X_I$ se tiene 1.
Bien sea porque se cumpla 3 ó 4 se tendrá que

$$\begin{aligned}\sigma(Q) &\leq \sigma(\{\mid u(z) \mid > 1\}) \\ &\leq A_p \mid\mid f \mid\mid_p^p \\ &\leq C_p h\end{aligned}$$

lo que implica que σ es medida de Carleson.

$\square$

Teorema 2.2.3 *Sea σ medida en $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a. *σ es medida de Carleson*

b. *Para $0 < p < \infty$ y $f \in H_p$*

$$\int \mid f \mid^p d\sigma \leq A \mid\mid f \mid\mid_{H_p}^p$$

c. *Para algún p con $1 \leq p < \infty$, se cumple que para toda $f \in L_p(\sigma)$ $f \in H_p$*

Esbozo de la demostración(ver [6])
$a \Rightarrow b$ igual que en el teorema anterior al utilizar el teorema 2.1.4 y el equivalente al teorema 2.2.1
Directamente $b \Rightarrow c$. Si c se cumple para algún p, c se cumplirá por el teorema del gráfico cerrado (inclusive se se cumple con $p < 1$)
$b \Rightarrow a$ se tendrá igual que el teorema anterior al tomar

$$f(z) = (\frac{y_0}{\pi(z - \overline{z}_0)^2})^{1/p},\ (Q = (x_0, x_0 + y_0) \times (0, y_0))$$

y notando que $\mid f(z) \mid^p \geq \dfrac{1}{5\pi y_0}$ en Q.

$\square$

Veamos ahora el equivalente del teorema para el disco.

Teorema 2.2.4 *Sea σ medida en D. Entonces σ es medida de Carleson si y sólo si para $0 < p < \infty$ y $f \in H_p$ se cumple que*

$$\int \mid f \mid^p d\sigma \leq A \mid\mid f \mid\mid_{H_p}^p$$

2.3. FUNCIONES DE OSCILACIÓN MEDIA ACOTADA

Sea $\varphi \in l^1_{loc}$. Definimos $\varphi_I = \dfrac{1}{\mid I \mid} \int_I \varphi(t)dt$ como el **valor medio** de φ en I. Si

$$\sup_I \frac{1}{\mid I \mid} \int_I \mid \varphi(t) - \varphi_I \mid dt = \|\varphi\|_* < \infty$$

para I intervalo acotado, decimos que $\varphi \in BMO$, esto es, que φ es de **oscilación media acotada**.
Nos conseguimos con el problema de que las funciones constantes tienen "norma" 0, así que para empezar si queremos ver a BMO como espacio vectorial normado debemos solucionar esto, y lo haremos al considerar a los elementos de BMO como

$$\{[\varphi] : \|\varphi\|_* < \infty\}$$

donde $[\varphi] := \{\varphi + \alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$. De esta manera podemos ver a BMO como un subconjunto de $l^1_{loc} : \{constantes\}$.
BMO es un espacio de Banach con la **norma** $\| \, . \, \|_*$.
Si $\varphi \in BMO$ y I, J son intervalos acotados con $I \subset J$ y $\mid J \mid \leq 2 \mid I \mid$ un simple cálculo nos da que

$$\mid \varphi_I - \varphi_J \mid \leq 2 \|\varphi\|_* \qquad (*)$$

Por otro lado, un simple cálculo nos da que $\|\varphi\|_* \leq 2 \|\varphi\|_\infty$, esto es, las funciones acotadas son BMO (más aún un cálculo más cuidadoso no da $\|\varphi\|_* \leq \|\varphi\|_\infty$)

Lema 2.3.1 *Si $\varphi \in BMO$ y si I, J son intervalos acotados con $I \subset J$ y $\mid J \mid > 2 \mid I \mid$, entonces*

$$\mid \varphi_I - \varphi_J \mid \leq 2k \|\varphi\|_*$$

Demostración
Sea $\{I_n\}$ una colección de intervalos tales que

$$I = I_1 \subset ... \subset I_k = J$$

con $\mid I_{k+1} \mid \leq 2 \mid I_k \mid$, luego por desigualdad triangular y $*$ tenemos el lema demostrado.

$\square$

Teorema 2.3.1 *Sea $\varphi \in l^1_{loc}$. Entonces $\varphi \in BMO$ si y sólo si*

$$\int \frac{|\varphi|}{1+t^2}dt < \infty, \sup_{\mathcal{H}} \int |\varphi(t) - \varphi(z)| P_z(t)dt = A < \infty$$

donde $\varphi(z)$ es la integral de Poisson de φ. En tal caso se cumple que existen constantes c_1, c_2 tales que $c_1 \, || \varphi ||_* \leq A \leq c_2 \, || \varphi ||_*$, esto lo escribiremos como $A \approx || \varphi ||_*$.

Demostración
($\Leftarrow$)
Sea I un intervalo acotado con centro x y longitud $2y$ y sea $z = x + iy$. Si $t \in I$

$$\pi P_z(t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \geq \frac{y}{2y^2} = \frac{1}{|I|} = \frac{X_I(t)}{|I|}$$

Si t no esta en I la desigualdad es evidente. Ahora

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi(t) - \varphi_I| \, dt \leq \frac{1}{|I|}\left(\int_I |\varphi(t) - \varphi(z)| \, dt + \int_I |\varphi(z) - \varphi_I| \, dt\right)$$

que a su vez es menor o igual a

$$\pi \int_I |\varphi(t) - \varphi(z)| P_z(t)dt + \frac{1}{|I|}\int_I \left| \frac{1}{|I|}\int_I \varphi(z)ds - \frac{1}{|I|}\int_I \varphi(s)ds \right| dt$$

y esta lo es a

$$\pi A + \frac{1}{|I|}\int_I \pi A dt \leq 2\pi A$$

Así al tomar supremo se tiene que $|| \varphi ||_* \leq 2\pi A$
($\Rightarrow$)
Sea $z = x + iy \in \mathcal{H}$ y sea $I_0 = \{t : |t - x| < y\}$ y sean $I_k = \{t : |t - x| < 2^k y\}$ para k entero no negativo. Notemos que $|I_k| = 2^{k+1}y = 2 \, |I_{k-1}|$. Como ya vimos para $t \in I_0$ se tiene que $P_z(t) \leq \frac{1}{2\pi y} = \frac{C}{y}$ más aún por inducción se demuestra que para $t \in I_{k+1} - I_k$ se tiene

$$P_z(t) \leq \frac{C}{2^{2(k+1)}y}$$

Así $\int \mid \varphi(t) - \varphi_{I_0} \mid P_z(t)dt$ es menor o igual a

$$(\frac{C}{y})\int_{I_0} \mid \varphi(t){-}\varphi_{I_0} \mid dt{+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{2^{2k}y}\int_{I_k-I_{k-1}} \mid \varphi(t){-}\varphi_{I_k} \mid dt{+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{2^{2k}y}\int_{I_k-I_{k-1}} \mid \varphi_{I_k}{-}\varphi_{I_0} \mid dt$$

Y esto último es menor o igual a

$$\frac{C}{y}\int_{I_0} \mid \varphi(t) - \varphi_{I_0} \mid dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{2^{k-1}y} \mid\mid \varphi \mid\mid_* dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Ck \mid\mid \varphi \mid\mid_*}{2^{k-1}}dt$$

Pero como las series involucradas son convergentes concluimos que la expresión es menor o igual a $\mid\mid \varphi \mid\mid_* B$, B constante. En conclusión

$$\int \mid \varphi(t) - \varphi_{I_0} \mid P_z(t)dt \leq \mid\mid \varphi \mid\mid_* B$$

Si tomamos $z = i$ y aplicamos una de las desigualdades triangulares tendremos que

$$\int \frac{\mid \varphi \mid}{1+t^2}dt < \infty$$

$$\begin{aligned}
\int \mid \varphi(t) - \varphi(z) \mid P_z(t)dt &\leq \int \mid \varphi(t) - \varphi_{I_0} \mid P_z(t)dt + \int \mid \varphi_{I_0} - \varphi(z) \mid P_z(t)dt \\
&\leq B \mid\mid \varphi \mid\mid_* + \mid \varphi_{I_0} - \varphi(z) \mid \\
&\leq B \mid\mid \varphi \mid\mid_* + \mid \varphi_{I_0} \int P_z(t)dt - \int \varphi(t)P_z(t) \mid \\
&\leq 2B \mid\mid \varphi \mid\mid_*
\end{aligned}$$

Al tomar supremo obtenemos la segunda desigualdad.

□

Existe un espacio BMO en el círculo $T = \partial D$; a saber, diremos que $\psi \in L_1(T)$ está en $BMO(T)$ si:

$$\sup_I \frac{1}{\mid I \mid}\int_I \frac{\mid \psi - \psi_I \mid d\theta}{2\pi} = \mid\mid \psi \mid\mid_* < \infty$$

donde $\mid I \mid = \int_I \frac{d\theta}{2\pi}$ es la longitud de arco de un arco en T y

$$\psi_I = \frac{1}{\mid I \mid}\int_I \psi\frac{d\theta}{2\pi}$$

Ahora $z = i\dfrac{1-w}{1+w}$ es un mapeo conforme que transforma BMO(T) en BMO($\mathbb{R}$) y la norma de un $\varphi \in BMO(\mathbb{R})$ es equivalente a la norma de $\varphi \circ z \in BMO(T)$

Teorema 2.3.2 (*Teorema de John-Nirenberg*) *Sea $\varphi \in BMO$ y sea I un intervalo. Entonces para todo $\lambda > 0$ se cumple que*

$$\frac{\mid \{t \in I :\mid \varphi(t) - \varphi_I \mid > \lambda\} \mid}{\mid I \mid} \leq Ce^{-d\lambda/||\varphi||_*}$$

donde c, d son constantes que no dependen ni de φ ni λ.

Esbozo de la demostración

Supongamos que $|| \varphi ||_* = 1$, el caso general se sigue al aplicarlo a $\varphi / || \varphi ||_*$. El lema 1.1.3 aplicado a I, $u = \mid \varphi - \varphi_I \mid$ y $\alpha = 3/2$ nos da $\{I_{j_1}\}_{j_i=1}$, tales que:

$$\mid \varphi - \varphi_I \mid \leq 3/2 \text{ en } I - \bigcup I_{j_1} \text{ c.s}$$

$$\mid \varphi_{I_{j_1}} - \varphi_I \mid \leq 2\alpha = 3$$

$$\text{y } \textstyle\sum_{j_1} \mid I_{j_1} \mid \leq \frac{2}{3} \mid I \mid$$

Inductivamente podemos encontrar $\{I_{j_{1\ldots n}}\}_{j_{1\ldots n}}$ con los $I_{j_{1\ldots n}} \subset I_{j_{1\ldots n-1}}$ y tales que

$$\mid \varphi - \varphi_I \mid \leq 3n \text{ en } I - \bigcup I_{j_{1\ldots n}} \text{ c.s}$$

$$\text{y } \textstyle\sum_{j_{1\ldots n}} \mid I_{j_{1\ldots n}} \mid \leq (\frac{2}{3})^n \mid I \mid$$

De estas dos cosas tenemos que para $3n < \lambda \leq 3n + 3$ con $n > 1$

$$\mid \{t \in I :\mid \varphi(t) - \varphi_I \mid > \lambda\} \mid \leq \sum \mid I_{j_{1\ldots n}} \mid \leq (\frac{2}{3})^n \mid I \mid \leq e^{-d\lambda} \mid I \mid$$

donde $d = (1/6)ln(3/2)$. Por otro lado para $0 < \lambda < 3$

$$\mid \{t \in I :\mid \varphi(t) - \varphi_I \mid > \lambda\} \mid \leq Ce^{-d\lambda} \mid I \mid$$

con $C = e^{3d}$ d como antes.

□

Los detalles completos de la demostración son similares a los del teorema 2.3.1.
A continuación un lema que será pieza clave en la demostración de el teorema fundamental de la sección.

Corolario 2.3.1 *Sea* $\varphi \in l^1_{loc}$*. Entonces* $\varphi \in BMO$ *si y sólo si*

$$\int \frac{|\varphi|^2}{1+t^2}dt < \infty, \sup_{\mathcal{H}} \int |\varphi(t) - \varphi(z)|^2 P_z(t)dt = B < \infty$$

donde $\varphi(z)$ *es la integral de Poisson de* φ*. En tal caso se cumple que existen constantes* c_1, c_2 *tales que* $c_1 \|\varphi\|_* \leq \sqrt{B} \leq c_2 \|\varphi\|_*$.

Demostración
$(\Leftarrow)$
Por la desigualdad de *Hölder* se tiene que

$$\int \frac{|\varphi|}{1+t^2}dt = \int |\varphi| \frac{dt}{1+t^2} \leq \sqrt{\int \frac{|\varphi|^2}{1+t^2}dt}\sqrt{\int \frac{dt}{1+t^2}} < \infty$$

De manera similar se obtiene que

$$\sup_{\mathcal{H}} \int |\varphi(t) - \varphi(z)|^2 P_z(t)dt < \infty$$

Luego por el teorema 2.3.1 $\varphi \in BMO$ y con $\|\varphi\|_* \leq c_2\sqrt{B}$
$(\Rightarrow)$
Aca sólo ajustaremos un poco la demostración del teorema de 2.3.1 a nuestra hipótesis. Sea $z = x + iy \in \mathcal{H}$ y sea $I_0 = \{t : |t - x| < y\}$ y sean $I_k = \{t : |t - x| < 2^k y\}$ para k entero no negativo. Notemos que $|I_k| = 2^{k+1}y = 2|I_{k-1}|$.
Como ya vimos para $t \in I_0$ $P_z(t) \leq \dfrac{1}{2\pi y} = \dfrac{C}{y}$.
Por inducción se demuestra que para $t \in I_{k+1} - I_k$ se tiene que

$$P_z(t) \leq \frac{C}{C/2^{2(k+1)}y}$$

Por el lema 2.3.1

$$|\varphi - \varphi_{I_0}|^2 \leq 2|\varphi - \varphi_{I_k}|^2 + 2|\varphi - \varphi_{I_k}|^2 \leq 2|\varphi - \varphi_{I_k}|^2 + 2ak^2 \|\varphi\|_*^2$$

Procediendo como en la demostración del teorema 2.3.1 tendremos que esto último es menor o igual a $d \|\varphi\|_*^2$ lo cual nos llevaraćomo en el teorema antes señalado, a las dos desigualdades buscadas.

$\square$

Lema 2.3.2 (*Littlewood-Paley*) *Si $g(e^{it}) \in L_1(T)$ y si $g(0) = \frac{1}{2\pi}\int g(\theta)d\theta$, entonces*

$$\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy = \frac{1}{2\pi}\int \mid g(e^{i\theta}) - g(0) \mid^2 d\theta$$

$g(z)$ es la integral de Poisson de u.

Demostración

Supongamos $g(0) = 0$ el caso general se sigue tomando $f = g - g(0)$.
$2 \mid \nabla g(z) \mid^2 = \triangle(\mid g(z) \mid^2)$. Ahora para $r < 1$ apliquemos el teorema de Green con $u(z) = \mid g(z) \mid^2$ y $v(z) = log(\frac{r}{\mid z \mid})$ (que es armónica) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|z|<r} \triangle(u)vdxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|z|<r} \triangle(u)vdxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|z|<r} [\triangle(u)v - u\triangle(v)]dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|=r} \left(v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) ds \\
&- \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon=|z|} \left(v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) ds
\end{aligned}$$

Veamos quien es la primera expresión de la derecha.
Primero que nada la primera expresión es

$$\int_{|z|=r} \left(log(\frac{r}{r})\frac{\partial u}{\partial\eta} - \mid g(z) \mid^2 \frac{\partial log(\frac{r}{\mid z \mid})}{\partial\eta} \right) ds$$

$R(\theta) = re^{i\theta}$ parametriza la curva, luego parametrizando por longitud de arco, al calcular se tiene (ver comentarios a final de la sección 1,3) $\int_{|z|=r} \frac{\mid g(z) \mid^2}{r}ds$, pero como $ds = rd\theta$ nos quedará

$$\int \mid g(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta \qquad (*)$$

Estudiemos ahora la segunda expresión, al realizar los cálculos (ahora con $R(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$) encontramos que es igual a

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon=|z|}\left(\frac{|\ g(z)\ |^2}{\epsilon} + log(\frac{r}{\epsilon})\nabla\ |\ g(z)\ |^2\ .\eta\right) ds$$

Veamos que esta expresión es igual a 0. Como $\nabla\ |\ g(z)\ |^2$ esta acotado (por lo menos en $|\ z\ |< 1/2$) y η tiene norma 1, la expresión en valor absoluto es menor o igual a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon=|z|}\left(\frac{|\ g(z)\ |^2}{\epsilon} + log(\frac{r}{\epsilon})M\right) ds$$

que a su vez menor o igual a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon=|z|}\left(|\ g(\epsilon e^{i\theta})\ |^2 + \epsilon log(\frac{r}{\epsilon})M\right) d\theta$$

la primera da cero pues $g(0) = 0$ y la segunda da cero por simple computo. De esto y $(*)$ concluimos que

$$\int_D |\ \nabla g(z)\ |^2\ log(\frac{r}{|\ z\ |})dxdy = (1/2)\int |\ g(re^{i\theta})\ |^2\ d\theta$$

haciendo tender r a 1 tendremos por el teorema de la convergencia monótona que

$$\int_D |\ \nabla g(z)\ |^2\ log(\frac{1}{|\ z\ |})dxdy = (1/2)\int |\ g(e^{i\theta})\ |^2\ d\theta$$

Al multiplicar por $\frac{1}{\pi}$ tenemos probado el lema.

$\square$

Corolario 2.3.2 *Sean u, v armónicas en $\{z :|\ z\ |< R\}$ para $R > 1$ con $u(0) = 0$ entonces*

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})v(e^{i\theta})d\theta = 2\int_D log(\frac{1}{|\ z\ |})\nabla u.\nabla v dz$$

Demostración

Es una consecuencia del lema anterior al tomar $w = uv$ y recordando que

$$\triangle(uv) = (\triangle u)v + (\triangle v)u + 2\nabla u.\nabla v = 2\nabla u.\nabla v$$

$\square$

Lema 2.3.3 *Si* $g(e^{i\theta}) \in L_1(T)$, *entonces*

$$\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \approx \frac{1}{\pi}\int \mid g(e^{i\theta}) - g(0) \mid^2 d\theta$$

como siempre $u(z)$ *es la integral de Poisson de* g.

Demostración

Recordemos que para z en D se cumple que $1- \mid z \mid^2 \leq 2log(\frac{1}{\mid z \mid})$ así que

$$\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \leq \frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 2log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy$$

entonces por el lema anterior se tiene que

$$\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \leq \frac{1}{\pi}\int_D \mid g(e^{i\theta}) - g(0) \mid^2 dxdy$$

Ahora supongamos $\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy = K < \infty$.

Para $\mid z \mid > 1/4$ se tiene $log(\frac{1}{\mid z \mid}) \leq C(1- \mid z \mid^2)$ de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{1/4<|z|<1} \mid \nabla g(z) \mid^2 log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy &\leq \frac{C}{\pi}\int_{1/4<|z|<1} \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \\ &\leq \frac{C_1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \qquad (1) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que si $\mid z \mid \leq 1/4$ y $\mid \xi - z \mid < 1/4$ entonces $\mid \xi \mid < 1/2$ y $3/4 < 1- \mid \xi \mid^2$, por otro lado $\mid \nabla g(z) \mid^2 = 2 \mid g'(z) \mid^2 \geq 0$, es decir, es subarmónica, juntando todo esto tenemos que

$$\begin{aligned} \mid \nabla g(z) \mid^2 &\leq \frac{16}{\pi}\int_{|z-\xi|<1/4} \mid \nabla g(\xi) \mid^2 d\zeta d\eta (\xi = \zeta + i\eta) \\ &\leq \frac{B}{\pi}\int_{|z-\xi|<1/4} \mid \nabla g(\xi) \mid^2 (1- \mid \xi \mid^2)d\zeta d\eta \\ &\leq \frac{B}{\pi}\int_{|\xi|<1/2} \mid \nabla g(\xi) \mid^2 (1- \mid \xi \mid^2)d\zeta d\eta \\ &\leq BK \end{aligned}$$

Así

$$\frac{1}{\pi}\int_{|z|<1/4} \mid \nabla g(z) \mid^2 log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy \leq \frac{KB}{\pi}\int_{|z|<1/4} log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy = C_2 \qquad (2)$$

Entonces al usar el lema anterior y $(1), (2)$ tenemos que

$$\frac{C_1 + C_2}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2)dxdy \geq \frac{1}{\pi}\int_D \mid g(e^{i\theta}) - g(0) \mid^2 dxdy$$

lo que concluye la prueba

□

Observación 2.3.1 *Las demostraciones de los últimos dos lemas se pueden usar para mostrar que para $g \in L_1(T)$ se tiene*

$$\frac{1}{\pi}\int_D \mid \nabla g(z) \mid^2 \frac{(1- \mid z \mid^2)(1- \mid z_0 \mid^2)}{\mid 1 - \overline{z_0} z \mid^2} dxdy \approx \frac{1}{\pi}\int \mid g(e^{i\theta}) - g(z_0) \mid^2 P_{z_0}(\theta)d\theta$$

para $g \in L_1(T)$

Lema 2.3.4 *Una medida λ en D es medida de Carleson si y sólo si*

$$\sup_{z_0 \in D}\int \frac{1- \mid z \mid^2}{\mid 1 - \overline{z_0} z \mid^2} d\lambda(z) = M < \infty$$

En este caso se cumple que $M \approx N(\lambda)$

Demostración

$(\Rightarrow)$

Sea $f(t) = \dfrac{\sqrt{1- \mid z \mid^2}}{1 - \overline{z} e^{it}}$ y $f(z)$ su integral de Poisson. f está en H_2. Entonces por el teorema 2.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_D \mid f(w) \mid^2 d\mu(w) &= \int_D \mid \frac{1- \mid z \mid^2}{\mid 1 - \overline{z} w \mid^2} d\mu(w) \\ &\leq CN(\mu)2\pi \int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 dt \\ &= CN(\mu)2\pi \int_0^{2\pi} P_z(t)dt \\ &= CN(\mu) \qquad (*) \end{aligned}$$

Al tomar supremo se tiene lo querido
($\Leftarrow$)
Si $z = 0$ nos da que $\mu(D) \leq M < \infty$, así que la medida es finita. Entonces para $h \geq 1/4$, tenemos

$$\mu(S(h,z)) \leq \mu(D) \leq M \leq 4Mh$$

Sea ahora $h < 1/4$ y $z \in \partial D$, y sea $z_0 = (1 - \frac{h}{2})z)$. Entonces como $\overline{S(h,z)}$ es compacto se cumple que

$$\frac{(1- \mid z_0 \mid)(1- \mid z_0 \mid^2)}{\mid 1 - \overline{z_0}w \mid^2} \geq C$$

en $S(h,z)$. De esto se tiene que

$$\frac{1- \mid z_0 \mid^2}{\mid 1 - \overline{z_0}w \mid^2} \geq \frac{C}{1- \mid z_0 \mid} = 2\frac{C}{h}$$

Se sigue que

$$\frac{2C\mu(S(h,z))}{h} \leq \int_{S(h,z)} \frac{1- \mid z_0 \mid^2}{\mid 1 - \overline{z_0}w \mid^2} d\mu(w) \leq \int_D \frac{1- \mid z_0 \mid^2}{\mid 1 - \overline{z_0}w \mid^2} d\mu(w) \leq M$$

De esto último y $*$ concluimos que μ es medida de Carleson.

$\square$

Análogamente en el semiplano superior

Lema 2.3.5 *Una medida λ en $\mathcal{H}$ es medida de Carleson si y sólo si*

$$\sup_{z_0 \in \mathcal{H}} \int \frac{y_0}{\mid z - \overline{z_0} \mid^2} d\lambda(z) = M < \infty$$

En este caso se cumple que $M \approx N(\lambda)$

Teorema 2.3.3 *Sea $\varphi \in L_1(T)$ y $d\lambda_\varphi = \mid \nabla\varphi(z) \mid^2 \, log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy$, donde $\varphi(z)$ es la integral de Poisson de φ. Entonces $\varphi \in BMO(T)$ si y sólo si $d\lambda_\varphi$ es medida de Carleson. En este caso existen constantes c_1, c_2 con*

$$c_1 \mid\mid \varphi \mid\mid_*^2 \leq N(d\lambda_\varphi) \leq c_2 \mid\mid \varphi \mid\mid_*^2$$

Más aún las constantes antes señaladas son universales.

Demostración
Por el corolario 2.3.1 y la observación 2.3.1 sabemos que $\varphi \in BMO(T)$ si y sólo si

$$\sup_{z_0 \in D} \int \mid \nabla\varphi(z) \mid^2 \frac{(1- \mid z \mid^2)(1- \mid z_0 \mid^2)}{\mid 1 - \overline{z_0} z \mid^2} dxdy = M < \infty$$

Y en tal caso y $M \approx \| \varphi_*^2 \|$. Por el lema anterior, esto último de cumple si y sólo si

$$d\mu_\varphi = \mid \nabla\varphi(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^2) dxdy$$

es medida de Carleson y en tal caso $N(\mu_\varphi) \approx \| \varphi_*^2 \|$. Así demostraremos el teorema al demostrar que μ_φ y λ_φ son equivalentes.

Recordemos que en D, se cumple que $1- \mid z \mid^2 < 2log(\frac{1}{\mid z \mid})$, lo que nos da

$$\mu_\varphi \leq 2\lambda_\varphi \qquad (i)$$

Por otro lado, para $\mid z \mid > 1/4$ tenemos que

$$C(1- \mid z \mid^2) \geq log(\frac{1}{\mid z \mid})$$

Esto nos dice que

$$\lambda_\varphi(S) \leq C\mu_\varphi(S) \qquad (*)$$

para sectores S con $h \leq 3/4$.
Ahora si vemos la demostración del lema anterior, en cierto momento se llegó probar que

$$\lambda_\varphi(\{\mid z \mid \leq 1/4\}) \leq A\mu_\varphi(\{\mid z \mid \leq 1/2\})$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \lambda_\varphi(D) & \leq & \lambda_\varphi(\{\mid z \mid \leq 1/4\})\lambda_\varphi(\{\mid z \mid > 1/4\}) \\ & \leq & A\mu_\varphi(\{\mid z \mid \leq 1/2\}) + CN(\mu_\varphi) \\ & \leq & A\mu_\varphi(D) + CN(\mu_\varphi) \\ & \leq & C'N(\mu_\varphi) \end{array}$$

Como $N(\lambda_\varphi)$ es la norma de Carleson de λ_φ tenemos que

$$N(\lambda_\varphi) \leq C_2 N(\mu_\varphi)$$

Así de $*$ y esto último concluimos que $N(\lambda_\varphi) \leq C_1 N(\mu_\varphi)$, que junto con (i) nos da el lema. Si vemos con cuidado nos daremos cuenta que las constantes son universales.

$\square$

2.4. ECUACIÓN NO HOMOGENEA DE CAUCHY-RIEMANN

Sea g C^1 y analítica acotada en D. Trataremos de resolver la ecuación no homogénea de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$$

Definamos f como

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{g(\zeta)}{z-\zeta} d\xi d\eta (\zeta = \xi + i\eta)$$

Veamos que esta bien definida.
Para z fijo, sea $w = z - \zeta = u + iv$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{g(z-w)}{w} dudv$$

Sea K la cota de g. Entonces

$$\mid f(z) \mid \leq \frac{1}{\pi}\int_D \frac{K}{\mid w \mid} dudv < \infty$$

La integral de la derecha se puede ver que es finita facilmente usando coordenadas polares. Ahora bien la idea es ver que f es solución de la ecuación $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ en D. Volvamos a fijar z en D. Derivando bajo el signo integral tenemos

$$\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\overline{\partial} g(z-w)}{w} dudv$$

pues $\dfrac{1}{w}$ es analítica. O lo que es igual

$$\overline{\partial} f(z) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{p<|w|<1} [\frac{\overline{\partial} g(z-w)}{w} - g(z-w)\overline{\partial}(\frac{1}{w})]dudv$$

Reorganizando (recordemos quien es $\overline{\partial}$) tenemos

$$\overline{\partial} f(z) = \lim_{p\to 0} \frac{i}{2\pi} \int_{p<|w|<1} [\frac{\partial}{\partial u}(i\frac{g(z-w)}{w}) - \frac{\partial}{\partial v}(\frac{g(z-w)}{w})]dudv$$

Aplicando el teorema de Green (el segundo) tenemos que

$$\overline{\partial} f(z) = -\lim_{p\to 0} \frac{i}{2\pi} \int_{p=|w|} \frac{g(z-w)}{w}(du+idv) + \frac{i}{2\pi}\int_{|w|=1} \frac{g(z-w)}{w}(du+idv)$$

La integral de la derecha es cero pues integramos sobre una función analítica. Por otro lado, $w = pe^{i\theta}$ y $dw = pie^{i\theta}$ así

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f(z) &= -\lim_{p\to 0} \frac{i}{2\pi} \int_{p=|w|} \frac{g(z-w)}{w}(du+idv) \\
&= \lim_{p\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z-pe^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z)d\theta \\
&= g(z)
\end{aligned}$$

Esta claro que la solución a la ecuación no es única, por ejemplo $b = f + h$ con $h \in A_0$ será solución también ya que $\overline{\partial} h = 0$. Lo que nos interesará es buscar cual b tiene menor norma, pero por el teorema 2.1.3 tenemos

$$\inf\{\|\, b\,\|_\infty : \frac{\partial b}{\partial \overline{z}} = G(z)\} = \sup\{|\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fkd\theta\, | : k \in H_0^1, \|\, k\,\|_1 \leq 1\}$$

2.5. TEOREMA DE WOLFF

Teorema 2.5.1 (*Wolff*) *Supongamos G acotada y C^1 en D y supongamos que $|\, G\,|^2\, log(\frac{1}{|z|})dxdy$ y $|\, \frac{\partial G}{\partial z}\,|\, log(\frac{1}{|z|})dxdy$ son medidas de Carleson. Entonces existe una solución de la ecuación $\dfrac{\partial b}{\partial \overline{z}} = G(z)$ continua en $\overline{D}$ y C^1 en D con $|\, b\,|_\infty \leq C_1\sqrt{B_1} + C_2 B_2$, con C_1, C_2 constantes universales y B_1, B_2 las normas de Carleson de las medidas respectivamente.*

Demostración
La existencia de la solución ya fue demostrada lo que haremos es buscar una solución con la cota del teorema. Recordemos que

$$\inf\{\| b \|_\infty : \frac{\partial b}{\partial \overline{z}} = G(z)\} = \sup\{| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fkd\theta |: k \in H_0^1, \| k \|_1 \leq 1\}$$

F continua en $\overline{D}$ (por ser G acotada), además consideremos $k \in H_0^1$ suave en ∂D. Por el corolario 2.3.2 y el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int F(e^{i\theta})k(e^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int \Delta(F(z)k(z))log(\frac{1}{| z |})dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int (4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} + 4\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}})log(\frac{1}{| z |})dxdy \\
&= \frac{2}{\pi}\int k(z)\frac{\partial G}{\partial z}log(\frac{1}{| z |})dxdy \\
&+ \frac{2}{\pi}\int k'(z)G(z)log(\frac{1}{| z |})dxdy \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

De la hipótesis tenemos que

$$| I_1 | \leq C_2 B_2 \| k \|_1 \leq C_2 B_2 \qquad (*)$$

De la observación 2.1.1, tenemos que podemos escribir $k = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}$ con k_j en H_1 libre de ceros y por tanto igual a g_j^2 con $g_j \in H_2$ y de norma menor que 3. Ahora

$$| \frac{2}{\pi}\int k_j'(z)G(z)log(\frac{1}{| z |})dxdy | = | \frac{4}{\pi}\int g_j(z)g_j'(z)G(z)log(\frac{1}{| z |})dxdy |$$

luego por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\sqrt{\frac{4}{\pi}\int | g_j'(z) |^2 log(\frac{1}{| z |})dxdy}\sqrt{\frac{4}{\pi}\int | g_j(z) |^2 | G(z) |^2 log(\frac{1}{| z |})dxdy}$$

Por el lema 2.3.3 la primera expresión es

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}\int | g_j(e^{i\theta}) - g_j(0) |^2 d\theta}$$

que es a su vez menor o igual a $\sqrt{2} \mid\mid g_j \mid\mid_2$. Por otro lado por la hipótesis la segunda expresión es menor o igual a $C\sqrt{B_1} \mid\mid g_j \mid\mid_2$. En resumen

$$I_2 \leq C_1\sqrt{B_1}$$

De esto último y $*$ tenemos la cota deseada

$\square$

Capítulo 3

TEOREMA DE LA CORONA

3.1. TEOREMA DE LA CORONA

Sea $H_\infty = \{F \in C(D)/F$ es analítica y acotada $\}$ (subespacio de $C(D)$), normado con $\| \, . \, \|_\infty = \sup\{| \, f(z) \, | ; z \in D\}$; más aún es álgebra de Banach (producto usual) conmutativa con unidad sobre $\mathbb{C}$. De la teoría previa tenemos que $M = M_{H_\infty}$ es w^* compacto en H_∞^* (proposición 1.2.3).
Por otro lado para toda $f \in H_\infty$ existe m ideal maximal de H_∞ tal que $Ker(f) = m$ (teorema 1.2.10). Denotemos por $\mathfrak{R}$ al conjunto de todos los ideales maximales en H_∞ y dotemoslo de la topología w^*.
Sea z en D. Definamos $\Psi_z : H_\infty \to \mathbb{C}$ como $\Psi_z(f) = f(z)$. Un simple cálculo nos muestra que $\Psi_z \in M$, así que existe $m_z \in \mathfrak{R}$ tal que $Ker(\Psi_z) = m_z$ por el teorema 1.2.10 (m_z está formado por las funciones en H_∞ que se anulan en z). $z \to m_z$ nos identifica al disco unitario dentro de $\mathfrak{R}$. Lo interesante es que D o digamos un $\mathfrak{B}$, es denso en $\mathfrak{R}$, eso es lo que dice el Teorema de la Corona, que mostraremos a continuación.

Teorema 3.1.1 (*Teorema de la Corona*)
Sean $f_1, ..., f_n \in H_\infty$ y supongamos que $\| \, f_k \, \| \leq 1$ para $k = 1, ..., n$ y que para algún $\delta > 0$ se tiene que $\sup_k | \, f_k(z) \, | > \delta$ para todo $z \in D$. Existe un número M dependiendo sólo de δ y n tal que $g_1 f_1 + ... + g_n f_n = 1$ en D para algunas funciones $g_k \in H_\infty$ con $\| \, g_k \, \|_\infty \leq M$

Demostración
Resolveremos el teorema suponiendo que las f_k son analíticas en una vecindad de D. Una vez hecho esto, para las f_k analíticas en D tomamos una sucesión

$\{r_j\}$ decreciente convergente a 1 y aplicamos el teorema a $f_k(r_j z)$.
De esta manera existirán $g_k^{r_j}$ en A_0 que en particular cumplirán en D con

$$\sum f_k(r_j z) g_k^{r_j}(z) = 1$$

Entonces al definir $g_k(z) = \lim_{j\to\infty} g_k^{r_j}(z)$ en D, vemos que se tiene el teorema incluso con las cotas deseadas (pues las cotas de las $g_k^{r_j}$ no dependen de r_j).
Sean $\varphi_j(z) = \dfrac{\overline{f_j}(z)}{\sum \mid f_k(z) \mid^2}$ para $j = 1, ..., n$ en una vecindad de $\overline{D}$. Aunque

$$f_1\varphi_1 + ... + f_n\varphi_n = 1$$

recordemos que $\overline{f_j}$ no es necesariamente analítica.
Si $g_j = \varphi_j(z) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z) f_k(z)$ para ciertas a_{jk} con $a_{kj} = -a_{jk}$, entonces

$$f_1 g_1 + ... + f_n g_n = 1$$

Así que demostraremos el teorema si logramos encontrar a_{jk} que puedan hacer analíticas a las g_j (y con la cota buscada).
Supongamos que $a_{kj} = b_{kj} - b_{jk}$. Para que las g_k sean analíticas debe ser $\overline{\partial} g_k = 0$; supongamos por un momento que

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial \overline{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}}$$

Ahora bien

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_j}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{jk}(z)}{\partial \overline{z}} f_k(z) + a_{jk}(z) \frac{\partial f_k(z)}{\partial \overline{z}} \right) \\
&= \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial b_{jk}(z)}{\partial \overline{z}} - \frac{b_{kj}(z)}{\partial \overline{z}} \right) f_k(z) \\
&= \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi_j(z) \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial \overline{z}} - \varphi_k(z) \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} \right) f_k(z) \\
&= \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} + \varphi_j(z) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial \overline{z}} f_k(z) \right) - \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z) f_k(z) \right) \\
&= \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} + \varphi_j(z) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial \overline{z}} f_k(z) \right) - \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} \\
&= \varphi_j(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial \overline{z}} f_k(z) \\
&= \varphi_j(z) \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z) f_k(z) \right) \\
&= \varphi_j(z) \frac{\partial}{\partial \overline{z}} (1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así que sólo debemos ver que la ecuación

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial \overline{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}}$$

tenga solución. Estudiemos esto.
Como $\sum_{k=1}^{n} \mid f_j \mid^2 \geq$ máx$(\mid f_j \mid^2) \geq \delta^2$, tendremos que $\dfrac{1}{\delta^2} \geq \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \mid f_j \mid^2}$ (esto nos dice que las φ_j son acotadas)
Ahora llamemos G_{jk} a $\varphi_j \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}}$ para los proximos cálculos tengamos en cuenta que

$$\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial \overline{z}} = \overline{f_j'} \text{(abuso de notación)}, \ \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}} = 0$$

que el módulo de un número es igual al de su conjugado y que el módulo de las f_j es menor o igual a 1 siempre.

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}} = \frac{\overline{f'_k}}{\sum \mid f_l \mid^2} - \frac{\overline{f_k} \sum f_l \overline{f'_l}}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mid \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}} \mid &\leq \frac{\mid \overline{f'_k} \mid}{\sum \mid f_l \mid^2} + \frac{\sum \mid \overline{f'_l} \mid}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2} \\
&\leq \frac{\sum \mid \overline{f'_l} \mid}{\sum \mid f_l \mid^2} + \frac{\sum \mid \overline{f'_l} \mid}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2} \\
&\leq \sum \mid \overline{f'_l} \mid \frac{1+n}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2} \\
&\leq \sum \mid \overline{f'_l} \mid A_{\delta,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}} \mid^2 &\leq (\sum \mid \overline{f'_l} \mid)^2 (A_{\delta,n})^2 \\
&\leq 2^n \sum \mid \overline{f'_l} \mid^2 (A_{\delta,n})^2 \\
&= \sum \mid \overline{f'_l} \mid^2 B_{n,\delta}
\end{aligned}$$

Por el teorema 2.3.3 $d\lambda_l =\mid f'_l \mid^2 log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy$ es medida de Carleson para cada $l \in \{1, ..., n\}$ (f_l esta acotada así que está en BMO) así de lo anterior $d\lambda_{jk} =\mid G_{jk} \mid^2 log(\frac{1}{\mid z \mid})dxdy$ lo será también.

Veamos ahora que $d\lambda^{jk} =\mid \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} \mid log(\frac{1}{|z|})dxdy$ es medida de Carleson también. Como utilizaremos la misma técnica, haremos los cálculos más directos. Para los proximos cálculos tengamos en cuenta que $\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}} = 0$ y que

$$\frac{\partial \overline{f_l'}}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_{jk}}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}} + \varphi_j \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z \partial \overline{z}} \\
&= \left(\frac{-\overline{f_j}\sum \overline{f_l} f_l'}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2}\right)\left(\frac{\overline{f_k'}}{\sum \mid f_l \mid^2} - \frac{\overline{f_k}\sum f_l \overline{f_l'}}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2}\right) \\
&+ \frac{\overline{f_j}}{\sum \mid f_l \mid^2}\left(\frac{-\overline{f_k'}\sum(\overline{f_l} f_l')}{(\sum \mid f_l \mid^2)^2} + \frac{(\sum \mid f_l \mid^2)\overline{f_k}\sum(f_l' \overline{f_l'}) + 2(\sum \overline{f_l} f_l') f_k (\sum f_l \overline{f_l'})}{(\sum \mid f_l \mid^2)^3}\right)
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\mid \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} \mid &\leq \frac{\sum \mid f_l' \mid}{(\sum \mid f_l \mid^2)^3}\left(\mid f_k' \mid + \frac{\sum \mid f_l' \mid}{\sum \mid f_l \mid^2}\right) \\
&+ \frac{1}{(\sum \mid f_l \mid)^3}\left(\left(\sum \mid f_l' \mid\right)\left(\sum \mid f_l \mid\right) + \frac{n\sum \mid f_l' \mid^2 + 2\left(\sum \mid f_l' \mid\right)^2}{\left(\sum \mid f_l \mid^2\right)^2}\right) \\
&\leq \left(\sum \mid f_l' \mid\right)^2 a_{n,\delta} + \left(\sum \mid f_l' \mid\right)^2 b_{n,\delta} \\
&\leq \left(\sum \mid f_l' \mid^2\right) b_{n,\delta}
\end{aligned}$$

Como antes tedremos que $d\lambda^{jk} = \mid \dfrac{\partial G_{jk}}{\partial z} \mid log(\frac{1}{|z|})dxdy$ es medida de Carleson, lo que quiere decir que por el teorema 2.5.1, nuestra ecuación tiene solución. Veamos que la constante M es universal, esto es depende sólo de n y δ. Por el teorema 2.3.3 se tiene que para todo $l \in \{1, ..., n\}$

$$N(d\lambda_l) \leq C \mid\mid f_l \mid\mid_*^2 \leq 4C$$

C contante universal. Así para todo $j, k \in \{1, ..., n\}$ se cumple que

$$N(d\lambda_{jk}) \leq 4nCB_{n,\delta} \text{ y } N(d\lambda^{jk}) \leq 4nCB'_{n,\delta}$$

De esta manera $\| b_{jk} \| \leq K_{n,\delta}$. Entonces

$$\begin{aligned} \| g_j \| &\leq \| \varphi_j \| + \sum_k \| a_{jk} \| \| f_k \| \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} + \sum_k (\| b_{jk} \| + \| b_{kj} \|) \\ &= \frac{1}{\delta^2} + 2\sum_k \| b_{jk} \| \\ &= \frac{1}{\delta^2} + 2nK_{n,\delta} \\ &= M \end{aligned}$$

□

En general una superficie de Riemann abierta X se dice que satisface el Teorema de la Corona si para toda colección de funciones analíticas acotadas $f_1, ..., f_n$ en X, tales que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\delta^2 < | f_1 |^2 + ... + | f_n |^2 < \delta^{-2}$$

entonces existen $g_1, ..., g_n$ analíticas acotadas en X tales que

$$f_1 g_1 + ... + f_n g_n = 1$$

El siguiente teorema nos dice que esto es equivalente a que $\mathfrak{R} - \overline{\Gamma(X)}$ es vacío, donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de ideales maximales de $H_\infty(X)$ y Γ es la identificación de comienzo de la sección. (Entre otras superficies de Riemann que satisfacen el teorema están las acotadas y algunas clases de dominios planares.)

Teorema 3.1.2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Si $m \in \mathfrak{R}$ entonces existe una red $\{z_\alpha\}$ con $| z_\alpha | < 1$ y $z_\alpha \to m$ en $\mathfrak{R}$*

2. *Si $f_1, ..., f_n \in H_\infty$; supongamos además que $\| f_k \| \leq 1$ para $k = 1, ..., n$ y que para algún $\delta > 0$ se tiene que $\sup_k | f_k(z) | > \delta$ para todo $z \in D$. Entonces*
   $g_1 f_1 + ... + g_n f_n = 1$ en D para algunas funciones $g_k \in H_\infty$

Demostración
$(1 \Rightarrow 2)$
Supongamos (2) falso. Sea $I = \{g_1 f_1 + ... + g_n f_n \in H_\infty / g_1, ... g_n \in H_\infty\}$, que es ideal propio pues 1 no pertenece a I por nuestra suposición. Como H_∞ tiene identidad, el teorema 1.1.3 nos dice que I está contenido en un ideal maximal digamos m, para este m existe $L \in M$ con $Ker(L) = m$, (además $f_k(m) = L(f_k)$) ahora como $I \subset m$ se tiene que

$$L(0.f_1 + ... + 1.f_k + ... + 0.f_n) = 0 = L(f_k) = f_k(m) \text{ para todo } k$$

Pero por (1) existe una red $\{z_\alpha\}$ con $| z_\alpha |< 1$ y $z_\alpha \to m$ en $\mathfrak{R}$, así

$$f_k(z_\alpha) \to f_k(m) = 0$$

veamos porque esto produce una contradicción.
Para $\delta > 0$, existe γ_k tal que $\alpha \geq \gamma_k$ implica $| f_k(z_\alpha) |< \dfrac{\delta}{2}$. Sea entonces $\gamma = \text{máx}\{\gamma_k\}$ por tanto para $\alpha \geq \gamma$ se tiene $| f_k(z_\alpha) |< \dfrac{\delta}{2}$ para todo k. Así $\delta \leq \sup_k | f_k(z_\alpha) |\leq \dfrac{\delta}{2}$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$.
$(2 \Rightarrow 1)$
Supongamos (1) falso, esto es, existe $m \in \mathfrak{R}$ y una vecindad de m V tal que $V \cap D = \emptyset$. Por definición de la topología w^*

$$V = V(h_1, ..., h_n, \delta) = \{z \in \mathfrak{R} :| h_k(z) - h_k(m) |< \delta\}$$

Sean $f_k = h_k - h_k(m) \in H_\infty$, así para todo z en el disco unitario, se cumple que $| f_k(z) |\geq \delta$ para alguna k pues en caso contrario $z \in V$. Entonces por (2) existen $g_1, ..., g_2 \in H_\infty$ con $f_1 g_1 + ... + f_n g_n = 1$, así que

$$g_1(m) f_1(m) + ... + g_n(m) f_n(m) = 1$$

lo que contradice el que $f_k(m) = 0$ para todo k. Concluimos que (1) se cumple.

□

3.2. OTROS TEOREMAS DE LA CORONA

La idea ahora es estudiar generalizaciones del teorema o el teorema en otros contextos. Si nos fijamos bien bajo las hipótesis del teorema se probó que

$1 \in J(f_1, ..., f_n)$(el ideal generado por $f_1, ..., f_n$), la pregunta lógica que sigue es: dadas f_i como en la hipótesis y $g \in H_\infty$, con $| g(z) | \leq \text{máx}_j(| f_j(z) |)$ entonces ¿$g \in J(f_1, ..., f_n)$?. La respuesta es negativa, un contraejemplo fue dado por Rao en 1967 utilizando productos de Blaschke. Pero afirmativa para g^3 y bajo ciertas restricciones para g^2.
Si B_1, B_2 son dos productos de Blaschke con ceros distintos pero con

$$0 = \inf_{z \in D} (| B_1(z) | + | B_2(z) |)$$

entonces $| B_1 B_2 | \leq (| B_1^2 |, | B_2^2 |)$ pero $B_1 B_2$ no se puede escribir de la forma $g_1 B_1^2 + g_2 B_2^2$

Teorema 3.2.1 *Supongamos $g, f_1, f_2 \in H_\infty$ con*

$$|| g ||_\infty, || f_i ||_\infty \leq 1 \ y \ g(z) \leq \text{máx}(| f_1 |, | f_2 |)$$

Entonces $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2$ para ciertas $g_i \in H_\infty$ si y sólo si $\dfrac{\partial b}{\partial \overline{z}} = \dfrac{g^2(\overline{f_1 f_2'} - \overline{f_1' f_2})}{(| f_1 |^2 + | f_2 |^2)^2}$ tiene solución acotada única en D.

Lema 3.2.1 *Si $f \in H_2$, con $f(e^{i\theta}) \in BMO$, entonces $\dfrac{| f'(z) |^2}{| f(z) |} log(\dfrac{1}{| z |}) dxdy$ es medida de Carleson en D con norma de Carleson a lo más $K \, || f ||_*$, K constante universal.*

Teorema 3.2.2 *Sean f_i como en el Teorema de la Corona y sea además $g \in H_\infty$ con*

$$| g(z) | \leq | f_1(z) | + ... + | f_n(z) |$$

Entonces existen $g_i \in H_\infty$ tales que $g^3 = g_1 f_1 + ... + g_n f_n$.

Demostración Como en el fondo la demostración es parecida a la del Teorema de la Corona sólo daremos un esbozo de la demostración. Al igual que en el teorema podemos suponer $g, f_1, ..., f_n$ son analíticas en una vecindad de D.
Sean φ_j como en el Teorema de la Corona.
Definamos $\psi_j = g\varphi_j$ para $j = 1, ..., n$. Estas ψ_j tienen módulo menor que 1 y son $\mathcal{C}^\infty$ en $\overline{D}$.
Si conseguimos b_{jk} que hagan analíticas a $g_j = g^2 \psi_j + \sum_{k=1}^n (b_{jk} - b_{kj}) f_k$ resolveremos el problema. Una condición que garantiza que tales funciones sean analíticas es que $\dfrac{\partial b_{jk}}{\partial \overline{z}} = g^3 G_{jk} = H_{jk}$. Se verifica que

$$| H_{jk} |^2 \leq C_\delta \sum | f_l' |^2$$

Así que $| H_{jk} |^2 \dfrac{1}{log | z |} dxdy$ es medida de Carleson. Por otro lado

$$\frac{\partial H_{jk}}{\partial z} = 3g^2 g' G_{jk} + g^3 \frac{\partial G_{jk}}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
| g^2 g' G_{jk} | &\leq \frac{| g^2 || g' || \overline{f_j} || \sum f_l(\overline{f_l f_k'} - \overline{f_l' f_k}) |}{(\sum | f_l |^2)(\sum | f_l |^2)^2} \\
&\leq \frac{(| g' | \sum | \overline{f_k'} |) + (| g' || \sum \overline{f_l'}) |}{(\sum | f_l |^2)((\sum | f_l |^2)^2)} \\
&\leq \frac{(n | g' || \overline{f_k'} |) + (\sum | g' || \overline{f_l'}) |}{(\sum | f_l |^2)((\sum | f_l |^2)^2)} \\
&\leq \frac{n \sum(| g' |^2 + | \overline{f_l'} |^2) + \sum(| g' |^2 + | \overline{f_l'} |^2)}{(\sum | f_l |^2)((\sum | f_l |^2)^2)} \\
&\leq \frac{D_{n,\delta} | g' |^2 + E_{n,\delta} \sum | \overline{f_l'} |^2)}{(\sum | f_l |^2)^{1/2}} \\
&\leq E_{n,\delta} \frac{| g' |^2}{| g |} + F_{n,\delta} \sum \frac{| \overline{f_l'} |^2}{| f_l |}
\end{aligned}$$

$$\text{y claramente } | g^3 \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} | \leq F_{n,\delta} \sum | f_l |^2$$

En conclusión tenemos que $\dfrac{\partial H_{jk}}{\partial z} log \dfrac{1}{| z |} dxdy$ es también medida de Carleson por el lema anterior y el teorema 2.3.3; así existen soluciones b_{jk} de la ecuación mencionada y por tanto tenemos el teorema.

□

A continuación enunciaremos dos teoremas de la Corona que se encuentra en la literatura reciente. El primero es una buena extensión del Teorema de la Corona y el segundo es el teorema en otro contexto.
Se han elegido de manera que se puedan entender sin utilizar teorias más allá de la trabajadas hasta ahora. Antes de cada teorema se darán una serie de definiciones y notaciones para entenderlo mejor.

3.2.1. TEOREMA DE LA CORONA H_p EN POLIEDROS ANALÍTICOS

Definición 3.2.1 *Un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un **poliedro analítico de n funciones** si*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n :\mid f_i(z) \mid < 1, i = 1, ..., n\}$$

Donde las funciones son analíticas en alguna vecindad de $\overline{\Omega}$. Diremos que Ω es no-degenerado si

$$\partial f_{i_1} \wedge ... \wedge \partial f_{i_k} \neq 0$$

en $\{\mid f_{i_1} \mid = ... = \mid f_{i_k} \mid = 1\}$

Teorema 3.2.3 (*Teorema de la Corona de Jörgen Boo*) *Sea Ω un poliedro analítico no-degenerado. Supongamos que $f_i \in H_\infty(\Omega)$, $1 \leq i \leq m$, satisfacen que $0 < \delta \leq \sum_{i=1}^m \mid f_i \mid$ para algún δ. Para cualquier $h \in H_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, existen $g_i \in H_p(\Omega)$, $1 \leq i \leq m$, tales que*

$$h = \Sigma_{i=1}^m f_i g_i$$

Para la demostración ver [2]

3.2.2. EL TEOREMA DE LA CORONA EN Q_p

Definición 3.2.2 *Para $p \in (0,1)$ decimos que una medida de Borel positiva μ en D es una **p-medida de Carleson** si y sólo si se cumple que*

$$\sup_{w \in D} \int_D \left(\frac{1- \mid w \mid}{\mid 1 - z\overline{w} \mid^2}\right)^p d\mu(z) < \infty$$

Definición 3.2.3 *Definiremos como Q_p para $p \in (0,1)$ como el conjunto de funciones $f \in H_\infty(D)$ tales que μ es p-medida de Carleson, donde*

$$d\mu(z) = \mid f'(z) \mid^2 (1- \mid z \mid^p) d\lambda(z)$$

λ la medida de Lebesgue en D

Q_p es un espacio de Banach con la norma

$$\mid\mid f \mid\mid = \mid f(0) \mid + \sqrt{\int_D \mid f'(z) \mid^2 (1- \mid z \mid)^p d\lambda(z)} < \infty$$

Donde λ es la medida de Lebesgue en D
Los **multiplicadores** de un espacio Banach X denotado por $\mathcal{M}(X)$ es el conjunto

$$\{f \in X : fg \in X, \forall g \in X\}$$

Teorema 3.2.4 (*Teorema de la Corona en Q_p de Jie Xiao*) *Sea $p \in (0,1)$ y sean $f_1, ..., f_n \in Q_p$. Entonces el Teorema de la Corona es soluble en Q_p si y sólo si $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}(Q_p)$ y satisfacen la condición*

$$\inf_{z \in D} \sum_{i=1}^{n} \mid f_i(z) \mid > 0$$

Para la demostración ver [13].

Bibliografía

[1] Barret, D; Diller, J *A new construction of Riemann surfaces with corona.* 1991

[2] Boo, J *The H_p corona theorem in analytic polyhedra.* Institut Mittag-Leffler, 1997.

[3] Charalambos D. Aliprantis; Owen Burkinshaw *Principles of real analysis.* Academic press. Third edition, 1998.

[4] Douglas, R.G. *Banach algebra techniques in operator theory.* Academic Press. 1972.

[5] Fraleigh, John B. *álgebra abstracta.* Addison-Weley iberoamericana. Tercera edición, 1987.

[6] Garnett, John B. *Bounded analytic functions.* Academic Press. 1981.

[7] Koosis, P. *Introduction to H^p spaces.* Cambridge University Press. 1980.

[8] Malliavin, P. *Integration and probability.* Springer-Verlag. 1995.

[9] Reed, M; Simon, B. *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis.* Academic Press. 1980.

[10] Rudin, Walter. *Real and complex analysis.* MaGraw-Hill. Third edition, 1999.

[11] Torchinsky, Alberto. *Real-variable methods in harmonic analysis* . Courier dover publications, 2004.

[12] Trent, T; Zhang, X. *A matricial corona theorem.* 2000.

[13] Xiao, Jie *The Q_p corona theorem*. Pacific journal of mathematics, vol. 194, No. 2, 2000.

[14] Zhu, K. *Operator theory in function spaces*.