

Transformaciones espectrales y polinomios ortogonales

Javier Hernández Benítez

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Transformaciones espectrales y polinomios ortogonales

Por

Javier Hernández Benítez

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Asociado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Transformaciones espectrales y polinomios ortogonales

Resumen

En esta memoria presentamos algunas transformaciones espectrales de funcionales lineales hermitianos (Transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus). Se consideran funcionales lineales hermitianos asociados con medidas de probabilidad soportadas en la circunferencia unidad. En esos casos comparamos la matriz de Hessenberg asociada con dichas medidas de probabilidad y su perturbación y presentamos la conexión entre dichas matrices donde intervienen las factorizaciones LU y QR.

Índice general

Introducción	1
1. Polinomios ortogonales y funcionales de momentos	4
1.1. Funcionales de momentos	4
1.2. Polinomios ortogonales asociados a funcionales lineales	6
1.3. Polinomios ortogonales clásicos	8
1.3.1. Polinomios de Hermite	8
1.3.2. Polinomios de Laguerre	9
1.3.3. Polinomios de Jacobi	9
1.3.4. Polinomios de Bessel	10
1.4. Polinomios ortogonales y sistemas lineales	12
2. Transformaciones espectrales para matrices hermitianas Toeplitz	17
2.1. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad	17
2.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y transformaciones espectrales	24
2.2.1. Transformación de Christoffel	26
2.2.2. Transformación de Uvarov	27
2.2.3. Transformación de Geronimus	28
2.3. Matrices de Hessenberg asociadas a polinomios ortogonales	32
2.4. Funcionales lineales cuasi-definidos y la factorización LU	36
2.5. Funcionales lineales definidos positivos y la factorización QR	44
2.5.1. Ejemplos	49

3. Transformación de Uvarov	57
3.1. Transformación $\mathcal{L}_3(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}$	57
3.1.1. Ejemplo	62
3.2. Transformación $\mathcal{L}_4(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\bar{q}(\bar{\alpha})$	64
4. Transformación de Geronimus y funcionales definidos positivos	70
4.1. Resultados preliminares	71
4.2. Matrices de Hessenberg y la transformación de Geronimus	74
4.3. Ejemplos	83
Problemas abiertos	87
Bibliografía	89

Índice de Tablas

1.1. Coeficientes en la relación (1.2.2)	10
1.2. Coeficientes en la relación (1.3.7)	11

Introducción

Antecedentes

La teoría de polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real ha sido objeto de atención no sólo desde una perspectiva analítica (propiedades asintóticas, distribución de sus ceros) sino desde un amplio espectro de aplicaciones (integración numérica, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, teoría de grafos, sistemas integrables, etc). Más recientemente, se ha desarrollado un tratamiento basado en las propiedades espectrales de las matrices de Jacobi asociadas a dichos polinomios ortogonales. De hecho, las matrices de Jacobi representan, en forma matricial, el operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales. En [48] y [52] se ha abierto una interesante aproximación a la conexión entre perturbaciones de medidas y factorización LU de matrices de Jacobi que ha sido desarrollada tanto desde el aspecto teórico ([6], [7], [51]) como numérico ([4], [5]) en el marco de las denominadas transformaciones de Darboux que tienen su origen en los problemas biespectrales (véase [48]), así como a través de la factorización QR ([8]).

Esta memoria aborda la teoría de polinomios ortogonales respecto a una medida positiva no trivial soportada sobre la circunferencia unidad. Dicha teoría se inicia con los trabajos de G. Szegő (véase [49] y su exhaustivo conjunto de referencias) y se desarrolla desde una perspectiva analítica por Ya L. Geronimus ([16], [17] y [18]) basada en la teoría clásica de funciones de variable compleja. La conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios discretos constituyen un importante eje de actividad investigadora en la década de los cincuenta (véase a modo de ejemplo [24]). En la década de los ochenta se asiste un renovado interés por el tema tanto desde la perspectiva de la teoría de aproximación (fracciones continuas [27] y aproxima-

ción por polinomios trigonométricos [44]) como desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización QR de matrices unitarias de Hessenberg de dimensión finita ([23]). En los años noventa se desarrolla una teoría constructiva de familias de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad (véase [2], [19], [20], [26], [31], [33], [38], [39], [42], entre otros) junto a una novedosa interpretación basada en la representación matricial del operador de multiplicación respecto a una base ortonormal en relación a medidas soportadas en un arco de la circunferencia unidad ([21], [22]).

Sin duda alguna, el hito más relevante al comienzo del siglo XXI es la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon [46] que constituyen la descripción más exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (véase también [45] a modo de síntesis). Una de sus aportaciones fundamentales es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent $\Lambda = \text{span} \{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias $S = \{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$ y $T = \{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$. La matriz resultante es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques de dimensión 2 la primera y de un único bloque de dimensión 1 y los restantes de dimensión 2 la segunda, cuyas entradas están relacionadas con los denominados parámetros de reflexión, i. e. las evaluaciones en el punto $z = 0$ de los polinomios ortonormales. Este resultado debido a D. S. Watkins ([50]) fue obtenido mediante una demostración alternativa e independiente en [9].

En esta memoria nos centramos en el análisis de ciertas perturbaciones canónicas de funcionales hermitianos definidos en el espacio Λ . En particular, establecemos la conexión entre las correspondientes funciones de Carathéodory mediante una transformación espectral lineal, siguiendo la línea esbozada en [32].

Estructura de la memoria y aportaciones originales

A continuación, explicamos los contenidos y aportaciones específicas de cada capítulo que conforma esta memoria. El capítulo 1 es una introducción que contiene conceptos básicos acerca de funcionales de momentos, caracterizaciones y operaciones algebraicas. También introducimos algunos aspectos de la teoría de polinomios ortogonales asociados a funcionales lineales al igual que damos ciertas caracterizaciones de los polinomios ortogonales clásicos. Al final de este capítulo estudiamos la relación entre polinomios ortogonales y funcionales lineales.

les en el contexto de la conexión entre la matriz de momentos y los generadores de espacios de estado.

En el capítulo 2 abordamos el tema de transformaciones espectrales para matrices hermitianas Toeplitz. Comenzamos con los conceptos básicos de la teoría de polinomios ortogonales respecto a funcionales lineales hermitianos y se definen tres perturbaciones canónicas: Christoffel, Uvarov y Geronimus, así denominadas por su análogo con el caso real, analizando para la primera de ellas las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de polinomios ortogonales respecto al funcional perturbado y luego, la relación existente entre las correspondientes matrices de Hessenberg vía factorización LU y QR. Ésta última en el caso de funcionales lineales hermitianos definidos positivos.

En el capítulo 3 se estudian dos modelos de transformación de Uvarov y se dan condiciones necesarias y suficientes para que el funcional perturbado sea cuasi-definido. Finalmente se establece la relación entre las matrices de Hessenberg.

En el capítulo 4 consideramos la transformación de Geronimus μ_1 , de una medida no trivial de probabilidad μ soportada en la circunferencia unidad, dada por

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z - \alpha|^2}, \quad \alpha \notin \mathbb{T}, |z| = 1.$$

Tras introducir conceptos básicos y resultados preliminares, damos una expresión explícita de los polinomios ortonormales con respecto a μ_1 en función de los asociados a μ . Finalmente, usando los resultados obtenidos y desarrollados en el capítulo 2, mostramos una conexión entre las matrices de Hessenberg asociadas con el operador de multiplicación con respecto a las dos familias de polinomios, en la que interviene la factorización QR. Asimismo, mostramos algunos ejemplos de dichos tipos de transformaciones junto con las representaciones explícitas de las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a la medida μ_1 .

Finalmente, la última sección contiene algunos problemas abiertos.

Publicaciones resultado de la memoria

Algunas contribuciones del capítulo 2 han aparecido en [13] y [36], fundamentalmente en relación con los problemas de factorización. En [13] se presentan algunos resultados del capítulo 3 mientras que en [37] se han sintetizado los elementos básicos del capítulo 4.

Capítulo 1

Polinomios ortogonales y funcionales de momentos

1.1. Funcionales de momentos

Sea $\mathcal{U} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal en el espacio vectorial \mathbb{P} de los polinomios con coeficientes complejos y consideremos la base canónica $\{x^n\}_{n \geq 0}$.

Definición 1.1.1 La sucesión $\{m_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$\mathcal{U}(x^n) = m_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.1)$$

se denomina *sucesión de momentos*. El valor m_n se denomina *momento de orden n* y el funcional lineal \mathcal{U} se llama *funcional de momentos asociado a la sucesión $\{m_n\}_{n \geq 0}$* .

La matriz semi-infinita H cuyas entradas están dadas por $h_{k,j} = m_{k+j}$, $k, j = 0, 1, \dots$, se denomina *matriz de momentos estándar* asociada al funcional \mathcal{U} . H es una matriz de Hankel, esto es, una matriz cuyos elementos de las anti-diagonales son idénticos

$$H = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Definición 1.1.2 Sea H_n la submatriz principal de H de dimensión $(n+1) \times (n+1)$. Diremos que el funcional lineal \mathcal{U} es *cuasi-definido* si las submatrices principales

H_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ de la matriz de Hankel semi-infinita $H = (m_{j+k})_{j,k=0}^{\infty}$ son no singulares.

Diremos que \mathcal{U} es definido positivo si $\mathcal{U}(p(x)) > 0$ para todo polinomio $p \in \mathbb{P}$ no nulo y no-negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.

En un caso definido positivo, los momentos del funcional son reales (véase [12]).

Proposición 1.1.3 ([12]) *Un funcional lineal \mathcal{U} es definido positivo si y solo*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix} > 0, \quad (1.1.2)$$

para todo $n \geq 0$.

En el caso definido positivo, existe una medida de Borel positiva μ soportada en un subconjunto \mathbb{E} de la recta real tal que el funcional lineal \mathcal{U} tiene una representación integral

$$\mathcal{U}(p) = \int_{\mathbb{E}} p(x) d\mu(x). \quad (1.1.3)$$

A continuación describiremos una serie de operaciones básicas en el espacio de los funcionales lineales que serán de utilidad a lo largo de esta memoria.

Dado un polinomio $\phi \in \mathbb{P}$, con $\deg \phi = n$, podemos introducir un nuevo funcional lineal llamado *multiplicación a la izquierda de \mathcal{U} por ϕ* de la siguiente forma

$$(\phi(x)\mathcal{U})(p(x)) = \mathcal{U}(\phi(x)p(x)).$$

Asimismo, llamaremos *multiplicación por la izquierda de \mathcal{U} por el polinomio inverso ϕ* al funcional definido por

$$(\phi(x)^{-1}\mathcal{U})(p(x)) = \mathcal{U}\left(\frac{p(x) - L_{p,\phi}(x)}{\phi(x)}\right),$$

donde $L_{p,\phi}$ es el polinomio interpolador de grado $n - 1$ que interpola a p en las raíces de ϕ .

Un caso particular de lo anterior es el siguiente: si $\alpha \in \mathbb{C}$, llamaremos *multiplicación por la izquierda de \mathcal{U} por la función racional $(x - \alpha)^{-1}$* al funcional lineal $\tilde{\mathcal{U}}$ definido por

$$\tilde{\mathcal{U}}(p) := (x - \alpha)^{-1}\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}\left(\frac{p(x) - p(\alpha)}{x - \alpha}\right), \quad p \in \mathbb{P}.$$

La *derivada distribucional* del funcional \mathcal{U} está dada por

$$(D\mathcal{U})(p(x)) = -\mathcal{U}(p'(x)), \text{ para todo } p \in \mathbb{P}.$$

En base a lo anterior, introducimos los siguientes funcionales a partir de \mathcal{U}

- (i) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. El funcional $\tilde{\mathcal{U}} := (x - \alpha)\mathcal{U}$ se llama *transformado canónico de Christoffel* del funcional \mathcal{U} (ver [52]).
- (ii) Si $\alpha, m \in \mathbb{C}$, $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} + m\delta_\alpha$ recibe el nombre de *transformado canónico de Uvarov*, donde δ_α es el funcional de Dirac dado por $\delta_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$, $p \in \mathbb{P}$ (ver [52]).
- (iii) Sean $\alpha, m \in \mathbb{C}$. El funcional $\tilde{\mathcal{U}} := (x - \alpha)^{-1}\mathcal{U} + m\delta_\alpha$ se denomina *transformado canónico de Geronimus* (ver [52]).

1.2. Polinomios ortogonales asociados a funcionales lineales

Sean $\mathcal{L} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios.

Definición 1.2.1 Diremos que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto al funcional lineal \mathcal{L} si

- (i) $\deg P_n(x) = n$ para todo $n \geq 0$.
- (ii) $\mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) = \mathbf{k}_n \delta_{n,m}$, con $\mathbf{k}_n \neq 0$ y $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Diremos que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es ortonormal respecto al funcional lineal \mathcal{L} si, además de cumplirse (i) y (ii), se tiene que $\mathbf{k}_n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 1.2.2 Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a \mathcal{L} . Entonces, para todo $p \in \mathbb{P}$ con $\deg p(x) = n$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x),$$

donde $\lambda_k = \frac{\mathcal{L}(P_k(x)p(x))}{\mathcal{L}(P_k(x)^2)}$, para $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Del anterior resultado, es sencillo comprobar que, si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a \mathcal{L} , entonces $\{c_n P_n\}_{n \geq 0}$, con $c_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$, también lo es. Si el coeficiente líder de cada $P_n(x)$ es igual a 1, entonces decimos que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales *mónicos*.

Proposición 1.2.3 (ver [12]) *Sea \mathcal{L} un funcional lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) \mathcal{L} es un funcional lineal cuasi-definido.
- (ii) Existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ respecto al funcional lineal \mathcal{L} , dada por

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.2.1)$$

donde $\Delta_n = \det H_n$, $n \geq 0$.

- (iii) Existen sucesiones de números complejos $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ con $\gamma_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que la sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ definida por la relación

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (1.2.2)$$

es ortogonal respecto a \mathcal{L} (con el convenio $P_{-1}(x) = 0$).

La representación matricial del operador asociado con la multiplicación por x en \mathbb{P} respecto a la base de polinomios ortogonales mónicos es una matriz tridimensional:

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Además, es fácil comprobar que el polinomio característico de la submatriz principal J_{n+1} de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ es el polinomio P_{n+1} , $n \geq 0$.

1.3. Polinomios ortogonales clásicos

Los polinomios ortogonales clásicos son las familias más utilizadas en la literatura de polinomios ortogonales. Estos polinomios, aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales hipergeométricas (ver [40]).

Definición 1.3.1 Sean $\mathcal{L} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal cuasi-definido y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a \mathcal{L} . Diremos que \mathcal{L} es un funcional lineal clásico si existen polinomios ϕ y ψ con $\deg \phi \leq 2$ y $\deg \psi = 1$ tales que

$$D(\phi \mathcal{L}) = \psi \mathcal{L}. \quad (1.3.1)$$

En este caso, se dice que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos respecto a \mathcal{L} . La expresión (1.3.1) se denomina ecuación distribucional de Pearson.

Teorema 1.3.2 (ver [34]) Sea \mathcal{L} un funcional lineal cuasi-definido, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

- (i) \mathcal{L} es un funcional lineal clásico.
- (ii) Los polinomios mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto al funcional lineal \mathcal{L} , son autofunciones del operador diferencial de segundo orden $\phi D^2 + \psi D$, esto es, $\exists \lambda_n \neq 0$ tal que

$$\phi P_n'' + \psi P_n' + \lambda_n P_n = 0. \quad (1.3.2)$$

Como hemos señalado anteriormente, los polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ que satisfacen la ecuación (1.3.2) son los denominados de *tipo hipergeométrico*: polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre, polinomios de Jacobi y polinomios de Bessel.

1.3.1. Polinomios de Hermite

La familia de los polinomios mónicos de Hermite $\{H_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_H(p(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{-x^2} dx.$$

La familia $\{H_n\}_{n \geq 0}$ satisface la relación de recurrencia

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.3.3)$$

con el convenio $H_{-1}(x) = 0$.

El funcional lineal \mathcal{L}_H satisface la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1) con $\phi(x) = 1$ y $\psi(x) = -2x$.

1.3.2. Polinomios de Laguerre

Los polinomios mónicos de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ con $\alpha > -1$ constituyen una familia uniparamétrica ortogonal respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_L(p(x)) = \int_0^{+\infty} p(x)x^\alpha e^{-x} dx.$$

Los polinomios $\phi(x) = x$, $\psi(x) = -x + \alpha + 1$ son los asociados a \mathcal{L}_L en la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1).

La sucesión $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ satisface la relación de recurrencia

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1)L_n^{(\alpha)}(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.3.4)$$

con el convenio $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

1.3.3. Polinomios de Jacobi

Los polinomios mónicos de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n \geq 0}$ constituye una familia dependiente de dos parámetros $\alpha, \beta > -1$ y son ortogonales respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_P(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

La relación de recurrencia que satisface $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n \geq 0}$ es

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.3.5)$$

con el convenio $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$, donde

$$\beta_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)},$$

$$\gamma_n = \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

En la ecuación (1.3.1) los polinomios asociados a \mathcal{L}_P son $\phi(x) = 1 - x^2$ y $\psi(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$.

1.3.4. Polinomios de Bessel

Los polinomios mónicos de Bessel $\{B_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ constituyen una familia uniparamétrica con parámetro $\alpha \neq -2, -3, -4, \dots$ y son ortogonales respecto al funcional lineal cuasi-definido

$$\mathcal{L}_B(p(x)) = \int_{\mathbb{T}} p(x)x^\alpha e^{-\frac{2}{x}} dx,$$

donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Los polinomios $\{B_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ satisfacen la relación de recurrencia

$$xB_n^{(\alpha)}(x) = B_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n B_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n B_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.3.6)$$

con el convenio $B_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$, donde

$$\beta_n = -\frac{2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)},$$

$$\gamma_n = -\frac{4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}.$$

El funcional lineal \mathcal{L}_B satisface la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1) con $\phi(x) = x^2$ y $\psi(x) = (\alpha+2)x+2$.

La siguiente tabla resume los valores de los coeficientes de la relación de recurrencia (1.2.2)

	β_n	γ_n
Hermite	0	$\frac{n}{2}$
Laguerre	$2n + \alpha + 1$	$n(n + \alpha)$
Jacobi	$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}$	$\frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}$
Bessel	$-\frac{2\alpha}{(2n + \alpha)(2n + \alpha + 2)}$	$-\frac{4n(n + \alpha)}{(2n + \alpha - 1)(2n + \alpha)^2(2n + \alpha + 1)}$

Tabla 1.1: Coeficientes en la relación (1.2.2)

Otra caracterización de los polinomios ortogonales clásicos, viene dada por la siguiente

Proposición 1.3.3 (ver [34]) *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (i) $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos.
- (ii) La sucesión de polinomios mónicos $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ dada por $Q_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1}$, es también una sucesión de polinomios ortogonales.
- (iii) En el desarrollo de P_n en términos de la base polinómica $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, los coeficientes para $0 \leq k \leq n-3$ se anulan, es decir:

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_{n-2}(x). \quad (1.3.7)$$

La familia $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal respecto al funcional $\phi \mathcal{L}$, donde ϕ es el polinomio que aparece en la relación (1.3.1) (véase [34]). Los coeficientes r_n, s_n de la relación (1.3.7) para las distintas familias de polinomios ortogonales clásicos están dadas en la siguiente tabla

	r_n	s_n
Hermite	0	0
Laguerre	n	0
Jacobi	$\frac{2n(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-\frac{4n(n-1)(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$
Bessel	$\frac{4n}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{4n(n-1)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}$

Tabla 1.2: Coeficientes en la relación (1.3.7)

1.4. Polinomios ortogonales y sistemas lineales

En el espacio vectorial \mathbb{P} de los polinomios en una variable con coeficientes complejos introducimos un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i. e. una aplicación de $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ en \mathbb{C} tal que

$$(i) \quad \langle \alpha p + \beta q, r \rangle = \alpha \langle p, r \rangle + \beta \langle q, r \rangle \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, p, q, r \in \mathbb{P}.$$

$$(ii) \quad \langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}, p, q \in \mathbb{P}.$$

$$(iii) \quad \langle p, p \rangle \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}.$$

Si se considera la base canónica $\{z^n\}_{n \geq 0}$ del espacio \mathbb{P} , tenemos asociada la matriz infinita de Gram $R = (r_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$, también denominada matriz de momentos, donde $r_{k,j} = \langle z^k, z^j \rangle$. R_n , $n = 0, 1, \dots$, denotará la submatriz principal de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ de la matriz R .

Por otra parte, aplicando a la base canónica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos construir una única familia de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ tal que

$$(i) \quad P_n(z) = \kappa_n z^n + \text{términos de grado inferior}, \kappa_n > 0.$$

$$(ii) \quad \langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}, \text{ para } 0 \leq m \leq n.$$

La familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$ se denomina familia de polinomios ortonormales respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La familia $\{\kappa_n^{-1} P_n\}_{n \geq 0}$ se denomina familia de polinomios ortogonales mónicos respecto al anterior producto escalar.

Si mediante $w_{n+1} = [1, z, \dots, z^n]^t$ y $v_{n+1} = [P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)]^t$ denotamos, respectivamente, los vectores polinómicos de orden $n+1$ correspondientes a las bases $\{z^n\}_{n \geq 0}$ y $\{P_n\}_{n \geq 0}$, entonces se deduce fácilmente

Proposición 1.4.1

$$(i) \quad \langle w_{n+1} w_{n+1}^t \rangle = R_n.$$

$$(ii) \quad \langle v_{n+1} v_{n+1}^t \rangle = I_{n+1}.$$

Con la anterior notación queremos denotar que el producto escalar se aplica a cada una de las entradas de las matrices producto.

Por otra parte, $v_{n+1} = A_n w_{n+1}$ donde $A_n \in \mathbb{C}^{(n+1), (n+1)}$ es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Más concretamente, los elementos diagonales son los coeficientes líderes $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_n$ de los polinomios ortonormales $P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)$.

Teniendo en cuenta que

$$z v_{n+1} = M_n v_{n+1} + [0, \dots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t, \quad (1.4.1)$$

donde $\alpha_{n+1} = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}$ y M_n una matriz Hessenberg inferior, se tiene

$$z A_n w_{n+1} = M_n A_n w_{n+1} + [0, \dots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t,$$

esto es

$$z w_{n+1} = A_n^{-1} M_n A_n w_{n+1} + \left[0, \dots, 0, \frac{P_{n+1}(z)}{\kappa_{n+1}} \right]^t. \quad (1.4.2)$$

Identificando las entradas en los dos miembros de la anterior igualdad, se tiene

$$A_n^{-1} M_n A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_{n+1,n+1} & -a_{n+1,n} & \cdots & & -a_{n+1,1} \end{bmatrix} = F_n^{(0)}, \quad (1.4.3)$$

donde $P_{n+1}(z) = \kappa_{n+1} (z^{n+1} + a_{n+1,1} z^n + \cdots + a_{n+1,n} z + a_{n+1,n+1})$, $(F_n^{(0)})^t = Z_n + u_n e_n^t$, $u_n = (-a_{n+1,n+1}, -a_{n+1,n}, \dots, -a_{n+1,1})^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ y Z_n es la matriz de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ con 1 en la primera subdiagonal inferior y las restantes entradas son nulas.

De (1.4.3) se sigue que el polinomio característico de M_n es precisamente el polinomio $\kappa_{n+1}^{-1} P_{n+1}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} R_n &= \langle w_{n+1} w_{n+1}^t \rangle = \langle A_n^{-1} v_{n+1} v_{n+1}^t A_n^{-t} \rangle \\ &= A_n^{-1} A_n^{-*} = L_n L_n^*. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Puesto que $L_n = A_n^{-1}$ es triangular inferior con elementos diagonales positivos, (1.4.4) es la factorización de Cholesky de la matriz R_n .

En la teoría de sistemas lineales (véase [28]) el par $\left((F_n^{(0)})^t, e_0 \right)$, donde $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se denomina par canónico de controlabilidad de la matriz R_n . De hecho, para $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} r_{k,j} &= e_k^t (A_n^{-1} A_n^{-*}) e_j \\ &= e_0^t (F_n^{(0)})^k A_n^{-1} A_n^{-*} (F_n^{(0)*})^j e_0 \\ &= e_0^t (A_n^{-1} M_n^k) (M_n^j)^* A_n^{-*} e_0 \\ &= (e_0^* A_n^{-1}) M_n^k (M_n^j)^* (e_0^* A_n^{-1})^*. \end{aligned}$$

Si denotamos $g_n^* = e_0^* A_n^{-1}$, esto es, $g_n = A_n^{-*} e_0 = L_n^* e_0$, entonces de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} R_n &= \begin{bmatrix} g_n^* \\ g_n^* M_n \\ \vdots \\ g_n^* M_n^n \end{bmatrix} [g_n, M_n^* g_n, \dots, (M_n^*)^n g_n] \\ &= C_n^* C_n, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

donde $C_n = [g_n, M_n^* g_n, \dots, (M_n^*)^n g_n]$ es la matriz de controlabilidad asociada al par (M_n^*, g_n) .

Ahora bien, de (1.4.3) se sigue que

$$A_n^* (M_n^*)^k = (F_n^{(0)*})^k A_n^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

y, por tanto,

$$A_n^* C_n = I_{n+1}.$$

En conclusión, la matriz de controlabilidad $C_n \in \mathbb{C}^{n+1, n+1}$ asociada al par (M_n^*, g_n) es la inversa de la matriz A_n^* .

En el caso del producto escalar estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la recta real, la matriz M_n es una matriz de Jacobi, esto es, una matriz tridiagonal simétrica.

En el caso del producto escalar no estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la circunferencia unidad, dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{q(z)} d\mu,$$

la matriz M_n es una matriz cuasi-unitaria (ver [36]).

Definición 1.4.2 ([28], [29]) *La sucesión (F_n, g_n) donde $F_n \in \mathbb{C}^{n+1, n+1}$, $g_n \in \mathbb{C}^{n+1, 1}$ se denomina sucesión generadora de espacios de estado para la matriz de momentos R si, para cada n , la matriz de controlabilidad de R_n es*

$$C_n = [g_n, F_n g_n, \dots, F_n^n g_n]$$

El par (M_n^*, g_n) es una sucesión generadora de espacios de estado asociada a la matriz de momentos R . Veamos como se puede construir por inducción dicha sucesión generadora de espacios de estado, esto es, presentaremos un método recursivo que permite deducir (M_{n+1}^*, g_{n+1}) a partir de (M_n^*, g_n) .

Denotaremos $R_0 = [r_{0,0}]$,

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+2, n+2},$$

para $n \in \mathbb{N}$, con $a_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, y supongamos que hemos encontrado un generador de espacios de estado (F_n, g_n) para la matriz R_n . Queremos encontrar un generador de espacios de estado (F_{n+1}, g_{n+1}) para la matriz R_{n+1} de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad g_{n+1} = \begin{bmatrix} g_n \\ * \end{bmatrix}. \quad (1.4.6)$$

Si $R_n = L_n L_n^*$, con L_n triangular inferior y elementos diagonales positivos, denota la factorización de Cholesky de la matriz R_n , es fácil probar que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ a_n^* L_n^{-*} & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= L_{n+1} L_{n+1}^*, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

donde $l_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ y $l_{n+1}^2 = r_{n+1,n+1} - a_n^* L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \geq 0$ por ser R_{n+1} definido positivo. Así pues, la matriz L_{n+1} , es triangular inferior con elementos diagonales positivos y, por consiguiente, (1.4.7) es la factorización de Cholesky de R_{n+1} .

Por otra parte, $g_n = L_n^* e_0 = [r_{0,0}^{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0]^t$. Determinaremos, a continuación, F_{n+1} . Dado que, de acuerdo con (1.4.3), podemos asumir que

$$F_n = L_n^* (Z_n + \bar{u}_n e_n^t) L_n^{-*},$$

donde u_n es un vector a determinar en $\mathbb{C}^{n+1,1}$ y $e_n = [0, \dots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L_{n+1}^* (Z_{n+1} + \bar{u}_{n+1} e_{n+1}^t) L_{n+1}^{-*} \\ &= L_{n+1}^* \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} L_{n+1}^{-*}, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad v_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}, \beta_n \in \mathbb{C},$$

y Z_n es la matriz de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ que tiene 1 en la primera subdiagonal inferior y las restantes entradas son nulas.

Utilizando (1.4.6)

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{-*} & -l_{n+1}^{-1} L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n^* (Z_n + L_n^{-*} L_n^{-1} a_n e_n^t) L_n^{-*} & s_n \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$s_n = l_{n+1}^{-1} (L_n^* v_n + \beta_n L_n^{-1} a_n - L_n^* F_n L_n^{-*} L_n^{-1} a_n).$$

Sin más que escoger

$$\bar{u}_n = L_n^{-*} L_n^{-1} a_n = R_n^{-1} a_n \quad (1.4.8)$$

se sigue

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & s_n \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}.$$

Así pues, hemos obtenido explícitamente F_{n+1} y g_{n+1} satisfaciendo las condiciones de anidamiento (1.4.6).

Es importante reseñar que las matrices F_n son Hessenberg superiores, esto es, las entradas por debajo de la primera subdiagonal inferior son nulas. Además, la elección de u_n en (1.4.8) tiene una importancia especial. De hecho

$$\begin{aligned} [-u_n^t, 1] R_{n+1} &= [-u_n^t, 1] \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1, n+1} \end{bmatrix} \\ &= [0, \dots, 0, l_{n+1}^2]. \end{aligned}$$

Esto significa que el vector fila $[-u_n^t, 1] \in \mathbb{C}^{1, n+2}$ define un polinomio mónico de grado $n+1$ que es ortogonal a \mathbb{P}_n respecto al producto escalar asociado a la matriz de Gram R .

Obsérvese que $F_n = M_n^*$, de acuerdo con la notación (1.4.5).

Capítulo 2

Transformaciones espectrales para matrices hermitianas Toeplitz

2.1. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

Sea S un funcional lineal

$$S : \Lambda \mapsto \mathbb{C},$$

donde $\Lambda = \text{span}\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es el espacio lineal de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos. A partir del funcional S podemos definir un funcional bilineal $\mathcal{L} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ de la manera siguiente

$$\mathcal{L}(p(z), q(z)) := S(p(z)\bar{q}(z^{-1})), \quad p, q \in \mathbb{P},$$

donde \mathbb{P} es el espacio lineal de los polinomios con coeficientes complejos.

Obsérvese que

$$\mathcal{L}(zp(z), zq(z)) = \mathcal{L}(p(z), q(z)).$$

Definición 2.1.1 Consideremos la matriz $T = (t_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, donde $t_{m,n} := \mathcal{L}(z^m, z^n) = S(z^{m-n}) = t_{n-m}$ y sea $T_n = (t_{k,j})_{k,j=0}^n$ la submatriz principal de T de dimensión $(n+1) \times (n+1)$. Entonces

- (i) Diremos que \mathcal{L} es un funcional bilineal hermitiano en \mathbb{P} si $t_{-n} = \overline{t_n}$ para $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Diremos que \mathcal{L} es un funcional bilineal cuasi-definido en \mathbb{P} si $\det T_n \neq 0$ para todo entero no negativo n .
- (iii) \mathcal{L} es un funcional bilineal definido positivo en \mathbb{P} si $\mathcal{L}(p, p) > 0$ para todo $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$, o, equivalentemente, $\det T_n > 0$ para todo entero no negativo n .

En el caso en que \mathcal{L} es definido positivo (ver [18], [24]), existe una medida de probabilidad no trivial μ soportada en la circunferencia unidad tal que el funcional \mathcal{L} admite una representación integral

$$\mathcal{L}(p, q) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} d\mu(\theta).$$

Por convenio, el funcional bilineal \mathcal{L} se dice definido positivo sobre la circunferencia unidad. La matriz semi-infinita T es una matriz de Toeplitz, esto es, las entradas de cada subdiagonal son constantes

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n & \cdots \\ t_{-1} & t_0 & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & t_1 & \\ t_{-n} & \cdots & t_{-1} & t_0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios con coeficientes complejos. Diremos que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal con respecto a \mathcal{L} si

- $\deg P_n = n$,
- $\mathcal{L}(P_m, P_n) = \mathbf{k}_n \delta_{m,n}$, con $\mathbf{k}_n \neq 0$,

donde $\delta_{m,n}$ es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Diremos, también, que la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es *ortonormal* con respecto a \mathcal{L} si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión ortogonal y $\mathbf{k}_n = 1$ para todo n . En este caso, también podemos decir indistintamente que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es ortonormal con respecto a μ .

Teorema 2.1.2 (i) Si el funcional bilineal \mathcal{L} es cuasi-definido, entonces existe una sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortogonales mónicos asociada con el funcional \mathcal{L} dada por

$$P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (2.1.1)$$

donde $\Delta_{n-1} = \det T_{n-1}$.

(ii) Si \mathcal{L} es definido positivo, entonces existe una única sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortonormales asociados con \mathcal{L} dados por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z), \quad (2.1.2)$$

con $P_n(z)$ dado en (2.1.1) y $\kappa_n = \mathbf{k}_n^{-\frac{1}{2}}$, donde $\mathbf{k}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Proposición 2.1.3 ([17], [46], [49]) La sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface dos tipos de relaciones de recurrencia

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_n^*(z). \quad (2.1.3)$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$P_{n+1}(z) = (1 - |P_{n+1}(0)|^2)zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z), \quad (2.1.4)$$

donde $P_n^*(z) = z^n \overline{P_n(\bar{z}^{-1})}$

Las evaluaciones $P_{n+1}(0)$ de los polinomios ortogonales en $z = 0$ se denominan *coeficientes de reflexión*.

Una demostración de este resultado utilizando los generadores de espacios de estado de la matriz de Toeplitz T aparece en [29]. Sin embargo, utilizando el hecho de que el operador de multiplicación por z es unitario respecto al funcional bilineal \mathcal{L} se puede dar una demostración alternativa.

Lema 2.1.4 Si $J_n \in \mathbb{C}^{n+1, n+1}$ es una matriz con 1 en la anti-diagonal principal y las restantes entradas son nulas, entonces

$$J_n \bar{T}_n J_n = T_n$$

Demostración: Es inmediata teniendo en cuenta que T_n es una matriz Toeplitz y Hermitiana. ■

Lema 2.1.5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_n^*, z^k) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \mathcal{L}(P_n^*, 1) &= \mathbf{k}_n. \end{aligned}$$

Demostración:

Si $P_n(z) = z^n + a_{n,1}z^{n-1} + \dots + a_{n,n}$ entonces tenemos

$$[a_{n,n}, \dots, a_{n,1}, 1]T_n = [0, 0, \dots, 0, \mathbf{k}_n].$$

Considerando conjugados

$$[\bar{a}_{n,n}, \dots, \bar{a}_{n,1}, 1] \bar{T}_n = [0, 0, \dots, 0, \mathbf{k}_n]$$

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \dots, \bar{a}_{n,n}] J_n \bar{T}_n = [0, 0, \dots, 0, \mathbf{k}_n].$$

Multiplicando a la derecha por J_n

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \dots, \bar{a}_{n,n}]T_n = [\mathbf{k}_n, 0, \dots, 0].$$

De aquí se sigue el enunciado. ■

Demostración (de Proposición 2.1.3):

(i) $P_{n+1}(z) - zP_n(z) \in \mathbb{P}_n$ y, además,

$$\mathcal{L}(P_{n+1}(z) - zP_n(z), z^k) = 0,$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Por tanto, $P_{n+1}(z) - zP_n(z) = \lambda_n P_n^*(z)$. Evaluando esta igualdad en $z = 0$ se tiene $\lambda_n = P_{n+1}(0)$, de donde se sigue el enunciado.

(ii) $P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z) \in z\mathbb{P}_n$ y, además,

$$\mathcal{L}(P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z), z^k) = 0,$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Por tanto,

$$P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z) = \xi_n z P_n(z). \quad (2.1.5)$$

Identificando los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene $\xi_n = 1 - |P_{n+1}(0)|^2$, de donde se sigue el enunciado. ■

Corolario 2.1.6

$$\frac{\mathbf{k}_{n+1}}{\mathbf{k}_n} = 1 - |P_{n+1}(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de multiplicar los dos miembros de la igualdad (2.1.5) por $zP_n(z)$ y aplicar el producto escalar. ■

De aquí se sigue que $|P_{n+1}(0)| \neq 1$. Recíprocamente, dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números complejos tales que $|a_n| \neq 1$ existe un único funcional lineal hermitiano \mathcal{S} tal que la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface $P_{n+1}(0) = a_n$. Para ello, basta utilizar la recurrencia ascendente y construir la familia de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ de manera que los momentos se determinan de forma recurrente a partir de

$$\mathcal{L}(zP_n(z), 1) = -P_{n+1}(0)\mathbf{k}_n,$$

esto es,

$$c_{-n-1} + a_{n,1}c_{-n} + \dots + a_{n,n}c_{-1} = -P_{n+1}(0)\mathbf{k}_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$ con $\mathbf{k}_0 = c_0$, donde \mathcal{L} viene dado en términos de \mathcal{S} tal y como se ha indicado al comienzo de esta sección.

Este resultado es una extensión al caso de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad del teorema de Favard (véase [1]).

Notemos que \mathcal{L} es cuasi-definido si y sólo si $|P_n(0)| \neq 1$ para todo $n \geq 1$. \mathcal{L} es definido positivo si y sólo si $|P_n(0)| < 1$ para todo $n \geq 1$.

Por otra parte, si \mathcal{L} es definido positivo y $P_n(\alpha) = 0$, entonces $|\alpha| < 1$. Si \mathcal{L} es cuasi-definido se tiene el siguiente resultado

Lema 2.1.7 ([15]) Sean \mathcal{L} un funcional bilineal cuasi-definido, $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L} , y $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) Si $P_n(\alpha) = 0$ y $|\alpha| \neq 1$, entonces $P_n^*(\alpha) \neq 0$.

(ii) Si $|\alpha| = 1$, entonces $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración: (i) Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_n(\alpha) = P_n^*(\alpha) = 0$ con $|\alpha| \neq 1$, entonces aplicando reiteradamente la relación de recurrencia regresiva, tenemos $P_1(\alpha) = P_1^*(\alpha) = 0$. En consecuencia

$$P_1(z) = z - \alpha \quad \text{y} \quad P_1^*(z) = 1 - \alpha\bar{z},$$

y por tanto, se tiene que $P_1^*(\alpha) = 1 - |\alpha|^2 = 0$, contradiciendo así la hipótesis.

(ii) Sea $|\alpha| = 1$. Si $P_{n_0}(\alpha) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $P_{n_0}^*(\alpha) = 0$. Usando reiteradamente la relación de recurrencia regresiva, obtenemos

$$P_1(z) = z - \alpha,$$

lo que implica $|P_1(0)| = 1$, lo que nos llevaría a una contradicción. Por tanto, $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. ■

El núcleo reproductor de grado n , $K_n(z, \zeta)$, respecto a la familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$ se define mediante

$$K_n(z, \zeta) = \sum_{j=0}^n \frac{P_j(z)\overline{P_j(\zeta)}}{\mathbf{k}_j}. \quad (2.1.6)$$

Teorema 2.1.8 ([18], [24], [46], [49]) Sean $\zeta \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{P}_n$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) **Propiedad reproductora:**

$$\mathcal{L}(p(z), K_n(z, \zeta)) = p(\zeta). \quad (2.1.7)$$

(ii) **Fórmula de Christoffel-Darboux:**

$$K_n(z, \zeta) = \frac{P_{n+1}^*(z)\overline{P_{n+1}^*(\zeta)} - P_{n+1}(z)\overline{P_{n+1}(\zeta)}}{\mathbf{k}_{n+1}(1 - z\bar{\zeta})}. \quad (2.1.8)$$

Si el funcional bilinear \mathcal{L} es definido positivo, la expresión (2.1.6) se transforma en

$$K_n(z, \zeta) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(\zeta)}. \quad (2.1.9)$$

En este caso, diremos que $K_n(z, \zeta)$ es el núcleo reproductor de grado n asociado a la familia $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, y satisface

Proposición 2.1.9 Si $K_n(z, \zeta) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(\zeta)}$ es el núcleo reproductor asociado a $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, entonces

$$K_n(z, 0) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(0)} \varphi_j(z) = \kappa_n \varphi_n^*(z), \quad (2.1.10)$$

y

$$K_n(0, 0) = \sum_{j=0}^n |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2. \quad (2.1.11)$$

De la relación (2.1.11) se tiene

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2 |P_n(0)|^2,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \right)^2 = 1 - |P_n(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.12)$$

En el caso definido positivo, el núcleo reproductor de grado n está asociado con el siguiente problema extremal

$$\lambda_n(y) = \min \left\{ \int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) : \deg p \leq n, p(y) = 1 \right\}.$$

De hecho,

$$\lambda_n(y) := \frac{1}{K_n(y, y)},$$

siendo $\frac{K_n(z, y)}{K_n(y, y)}$ el polinomio en el que se alcanza dicho mínimo.

2.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y transformaciones espectrales 24

Para cada $y \in \mathbb{C}$, $\lambda_n(y)$ es una función decreciente con respecto a n y, en consecuencia, podemos definir

$$\begin{aligned}\lambda_\infty(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(y) \\ &= \inf \left\{ \int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) : p \in \mathbb{P}, p(y) = 1 \right\} \geq 0.\end{aligned}$$

λ_∞ se denomina *Función de Christoffel asociada a μ* . Uno de los resultados principales de relativos a la función de Christoffel se muestra a continuación

Proposición 2.1.10 ([46], Thm. 2.2.1) *Sea μ una medida de probabilidad no trivial soportada en el círculo unidad.*

- (i) Si $|y| > 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$.
- (ii) Si $|y| = 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = \mu(\{y\})$.
- (iii) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.
- (iv) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 < +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.

Por otra parte,

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - |P_n(0)|^2).$$

2.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y transformaciones espectrales

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función compleja que es analítica en un entorno de $z = 0$, i. e.

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad (2.2.1)$$

donde $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$ y $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$. A dicha función le podemos asociar un funcional lineal \mathcal{S}_F definido en el espacio de los polinomios de Laurent Λ de manera que

$$\mathcal{S}_F(z^k) = c_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde asumimos que $c_{-k} = \bar{c}_k$, $k \in \mathbb{N}$. \mathcal{S}_F define una aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio \mathbb{P} de los polinomios con coeficientes complejos de la siguiente forma

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{S}_F} = \mathcal{S}_F(p(z)\bar{q}(z^{-1})).$$

La aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_F}$ satisface las propiedades (i) y (ii) de los productos escalares introducidos en la sección 1.4. Si, además, se satisface (iii) diremos que \mathcal{S}_F es un funcional definido positivo. En este caso (véase [14], [17]), existe una medida no trivial μ soportada en la circunferencia unidad de manera que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu. \quad (2.2.2)$$

Definición 2.2.1 ([17], [42]) *Una función compleja F que admite una representación de la forma (2.2.2) donde μ es una medida positiva se denomina función de Carathéodory (C-función).*

Es inmediato probar que F es C-función si y sólo si F es analítica en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\Re(F(z)) > 0$ para $|z| < 1$.

De acuerdo con este resultado, F es una C-función si y sólo si $\frac{1}{F}$ es una C-función.

Definición 2.2.2 ([17], [46]) *Los polinomios mónicos Ω_n de grado n definidos mediante*

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0} \mathcal{S}_F\left(\frac{y+z}{y-z} (P_n(y) - P_n(z))\right) \quad (2.2.3)$$

se denominan polinomios de segunda especie asociados al funcional \mathcal{S}_F .

Es un sencillo ejercicio comprobar que

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) - P_{n+1}(0)\Omega_n^*(z)$$

y, por tanto, $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal $\mathcal{S}_{\bar{F}}$.

Proposición 2.2.3 ([43])

$$(i) \begin{cases} F(z)P_n(z) + \Omega_n(z) & = O(z^n), \\ F(z)P_n^*(z) - \Omega_n^*(z) & = O(z^{n+1}). \end{cases}$$

$$(ii) \quad \tilde{F}(z) = \frac{1}{F(z)}.$$

De esta forma, aparece un primer ejemplo de lo que denominaremos transformación espectral de funcionales lineales \mathcal{S}_F .

Definición 2.2.4 *Dada una función F analítica en un entorno de $z = 0$ diremos que \tilde{F} , función analítica en un entorno de $z = 0$, es una transformación espectral racional de F si existen polinomios A, B, C, D tales que*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \quad (2.2.4)$$

con $A(z)D(z) - B(z)C(z) \neq 0$.

Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a \mathcal{S}_F , parece natural analizar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{S}_{\tilde{F}}$. Este es un problema abierto. Algunas situaciones particulares han sido estudiadas en [42].

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de transformaciones racionales.

2.2.1. Transformación de Christoffel

Considérese un funcional lineal ν tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q \rangle_\nu = \langle (z - a)p, (z - a)q \rangle_{\mathcal{S}_F}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (2.2.5)$$

$\nu = C_a(\mathcal{S}_F)$ se denomina transformada canónica de Christoffel de \mathcal{S}_F .

Veamos que $\tilde{F}(z) = \nu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k z^k$, donde $\nu_{-k} = \nu(z^k)$ es una transformación racional de F .

$$\begin{aligned} \nu_{-k} &= \nu(z^k) = \langle z^k, 1 \rangle_\nu \\ &= \langle (z - a)z^k, (z - a) \rangle_{\mathcal{S}_F} = \langle z^{k+1} - az^k, z - a \rangle_{\mathcal{S}_F} \\ &= c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)} + |a|^2 c_{-k} \\ &= (1 + |a|^2) c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(z) &= v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k \\
 &= (1 + |a|^2) c_0 - a c_1 - \bar{a} c_{-1} - 2\bar{a} \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^k - 2a \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} z^k + \\
 &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |a|^2) c_k z^k \\
 &= (1 + |a|^2) F(z) - \bar{a} \left(c_{-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1} \right) - a \left(c_1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k-1} \right),
 \end{aligned}$$

y, como consecuencia

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(z) &= (1 + |a|^2) F(z) - \bar{a} (c_{-1} + z(F(z) + c_0)) - a \left(c_1 + \frac{1}{z} (F(z) - c_0 - 2c_1 z) \right) \\
 &= \left(1 + |a|^2 - \bar{a} z - \frac{a}{z} \right) F(z) + a \left(c_1 + \frac{c_0}{z} \right) - \bar{a} (c_{-1} + c_0 z).
 \end{aligned}$$

Proposición 2.2.5

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned}
 A(z) &= -\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a, \\
 B(z) &= -\bar{a}c_0z^2 + (ac_1 - \bar{a}c_{-1})z + ac_0, \\
 D(z) &= z.
 \end{aligned}$$

En el caso definido positivo, iteraciones de estas transformaciones de Christoffel han sido estudiadas en [19], [26] y [31].

2.2.2. Transformación de Uvarov

Considérese un funcional lineal ν tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q \rangle_\nu = \langle p, q \rangle_{S_F} + mp(a)\bar{q}(a^{-1}) + \bar{m}p(\bar{a}^{-1})\overline{q(a)}, \quad (2.2.6)$$

con $|a| \neq 1$ y $m \in \mathbb{C}$. $\nu = U_{a,m}(S_F)$ se denomina transformada canónica de Uvarov de S_F .

Veamos que $\tilde{F}(z) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$, donde $v_{-k} = v(z^k)$ es una transformación racional de F .

$$v_{-k} = \langle z^k, 1 \rangle_v = \langle z^k, 1 \rangle_{S_F} + ma^k + \bar{m}\bar{a}^{-k}.$$

Así pues

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= c_0 + m + \bar{m} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + \bar{m}\bar{a}^k + ma^{-k}) z^k \\ &= F(z) + \bar{m} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}^k z^k \right) + m \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k \right) \\ &= F(z) + \bar{m} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + m \frac{a + z}{a - z} \\ &= F(z) + \frac{a(m + \bar{m}) + (1 - |a|^2)(m - \bar{m})z - \bar{a}(m + \bar{m})z^2}{(z - a)(\bar{a}z - 1)}. \end{aligned}$$

Proposición 2.2.6

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= D(z) = (z - a)(\bar{a}z - 1), \\ B(z) &= (a - \bar{a}z^2)(m + \bar{m}) + (1 - |a|^2)(m - \bar{m})z. \end{aligned}$$

Propiedades asintóticas de polinomios ortogonales asociados a algunos casos particulares de transformadas de Uvarov han sido analizadas en [35].

2.2.3. Transformación de Geronimus

Considérese un funcional lineal v tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle (z - a)p, (z - a)q \rangle_v = \langle p, q \rangle_{S_F}, \quad a \neq 0. \quad (2.2.7)$$

$v = G_a(S_F)$ se denomina transformada canónica de Geronimus de S_F . Entonces

$$\begin{aligned} c_k &= \langle 1, z^k \rangle_{S_F} = \langle z - a, z^k(z - a) \rangle_v \\ &= v_k (1 + |a|^2) - av_{k+1} - \bar{a}v_{k-1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Haciendo $s_k = \frac{c_k}{\bar{a}^k}$, $t_k = \frac{v_k}{\bar{a}^k}$, la anterior expresión resulta ser

$$s_k = (1 + |a|^2)t_k - |a|^2 t_{k+1} - t_{k-1}, \quad k \geq 0,$$

de modo que

$$s_k = t_k - t_{k-1} - |a|^2(t_{k+1} - t_k), \quad k \geq 0.$$

Si hacemos $q_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geq 0$,

$$s_k = q_k - |a|^2 q_{k-1}, \quad k \geq 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{q_0 - s_0 - |a|^2 s_1 - \dots - |a|^{2k-2} s_{k-1}}{|a|^{2k}} \\ &= \frac{q_0 - c_0 - ac_1 - \dots - a^{k-1} c_{k-1}}{|a|^{2k}}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

así como

$$\begin{aligned} q_0 &= t_0 - t_{-1} = v_0 - \bar{a}v_1 \\ q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|a|^2} = t_1 - t_0 = \frac{v_1}{\bar{a}} - v_0. \end{aligned}$$

q_0 aparece como un parámetro libre. De esta forma

$$\begin{aligned} v_0 - av_1 &= \bar{q}_0 \\ v_0 - \frac{v_1}{\bar{a}} &= \frac{c_0 - q_0}{|a|^2} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

y, por tanto,

$$(1 - |a|^2)v_0 = 2\Re(q_0) - c_0,$$

esto es, $v_0 \in \mathbb{R}$. Si asumimos $|a| \neq 1$, v_0 queda unívocamente determinado y de (2.2.10) deducimos v_1 . Reiterando (2.2.9) se sigue que

$$\frac{v_k}{\bar{a}^k} = v_0 + \sum_{j=1}^k q_j, \quad k \geq 2.$$

Por tanto, disponemos de un grado de libertad que es la elección de q_0 . Por otra parte, multiplicando en (2.2.8) por z^k , $k \geq 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 F(z) &= v_0(1 + |a|^2) - av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 + 2(1 + |a|^2) \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k - 2a \sum_{k=1}^{\infty} v_{k+1} z^k - 2\bar{a} \sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1} z^k \\
 &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) - a \left(v_1 + \frac{2}{z} \sum_{k=2}^{\infty} v_k z^k \right) - \bar{a} \left(\bar{v}_1 + 2z \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k \right) \\
 &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) - a \left(v_1 + \frac{1}{z} (\tilde{F}(z) - v_0 - 2v_1 z) \right) - \bar{a} (\bar{v}_1 + z(v_0 + \tilde{F}(z))) \\
 &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) + a \left(v_1 + \frac{v_0}{z} \right) - \frac{a}{z} \tilde{F}(z) - \bar{a} (\bar{v}_1 + v_0 z) - \bar{a} z \tilde{F}(z) \\
 &= \left(1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a} z \right) \tilde{F}(z) + av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 + v_0 \left(\frac{a}{z} - \bar{a} z \right) \\
 &= \left(1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a} z \right) \tilde{F}(z) + v_0 - \bar{q}_0 - \bar{v}_0 + q_0 + v_0 \left(\frac{a}{z} - \bar{a} z \right). \tag{2.2.11}
 \end{aligned}$$

Así pues,

Proposición 2.2.7

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned}
 A(z) &= z, \\
 B(z) &= \bar{a}v_0 z^2 - 2i\Im(q_0)z - av_0, \\
 D(z) &= -\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{B(z)}{D(z)} \\
 &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\bar{a}v_0 z^2 - 2i\Im(q_0)z - av_0}{-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a} \\
 &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{(\bar{a}z^2 - a)(q_0 + \bar{q}_0 - c_0) - (1 - |a|^2)(q_0 - \bar{q}_0)z}{(1 - |a|^2)(-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a)} \\
 &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{(\bar{a}z^2 - a)(l_0 + \bar{l}_0) + (1 - |a|^2)(l_0 - \bar{l}_0)z}{-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a}
 \end{aligned}$$

con $l_0 = \frac{\bar{q}_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$, de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{(\bar{a}z^2 - a)(l_0 + \bar{l}_0) + (1 - |a|^2)(l_0 - \bar{l}_0)z}{(\bar{a}z - 1)(z - a)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + m\frac{a+z}{a-z} + \bar{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z},\end{aligned}$$

donde $m = \bar{l}_0 = \frac{q_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$.

En el caso definido positivo, un ejemplo de transformación de Geronimus con $m = 0$ ha sido analizado en [20], así como en [2], [38], [39] en el marco de problemas inversos para polinomios ortogonales que se expresan como combinaciones lineales, a su vez, de polinomios ortogonales.

Proposición 2.2.8

- (i) $G_a \circ C_a = U_{a,\bar{m}}$.
- (ii) $C_a \circ G_a = Id$.

Demostración:

- (i) Sea G la función analítica asociada al funcional C_a . Entonces, de acuerdo con la Proposición 2.2.5

$$G(z) = \frac{A(z)}{z}F(z) - \left(\bar{a}c_0z - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1) - ac_0\frac{1}{z}\right)$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z - 1)(z - a)$.

Si H es la función analítica asociada al funcional $G_a \circ C_a$ de acuerdo con la Proposición 2.2.7,

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{z}{A(z)}G(z) + m\frac{a+z}{a-z} + \bar{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\ &= F(z) + \frac{\bar{a}c_0z^2 - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1)z - ac_0}{(\bar{a}z - 1)(z - a)} + m\frac{a+z}{a-z} + \bar{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\ &= F(z) + \bar{m}\frac{a+z}{a-z} + \bar{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z}\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{m} = m - \frac{1}{2} \left(c_0 + \frac{ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1}{1 - |a|^2} \right).$$

(ii) Sea \tilde{F} la función analítica asociada al funcional $\nu = G_a$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 2.2.7

$$\tilde{F}(z) = \frac{z}{A(z)} F(z) + m \frac{a+z}{a-z} + \bar{m} \frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z},$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z - 1)(z - a)$.

Si K es la función analítica asociada al funcional $C_a \circ G_a$ de acuerdo con la Proposición 2.2.5 se tiene

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{A(z)}{z} \tilde{F}(z) - \left(\bar{a}v_0z + (av_1 - \bar{a}\bar{v}_1) - \frac{av_0}{z} \right) \\ &= F(z) + \frac{A(z)}{z} \left(m \frac{a+z}{a-z} + \bar{m} \frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \right) - \frac{A(z)}{z} \left(m \frac{a+z}{a-z} + \bar{m} \frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \right) \\ &= F(z). \end{aligned}$$

■

Las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus se denominan transformaciones espectrales lineales canónicas. En un caso definido positivo, corresponden a transformaciones de las medidas dadas por

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= |e^{i\theta} - a|^2 d\mu, \\ d\tilde{\mu} &= d\mu + m\delta_a + \bar{m}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \\ d\tilde{\mu} &= \frac{d\mu}{|e^{i\theta} - a|^2} + m\delta_a + \bar{m}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \end{aligned}$$

respectivamente.

Ejemplos de transformaciones espectrales racionales propias aparecen en la literatura cuando se perturban los parámetros de reflexión mediante desplazamientos en los subíndices (véase [42]).

2.3. Matrices de Hessenberg asociadas a polinomios ortogonales

Teniendo en cuenta que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una base ortogonal en \mathbb{P} , y combinando la fórmula de Christoffel-Darboux y las relaciones de recurrencia (2.1.3) y (2.1.4) se

obtiene

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^n \frac{\kappa_n}{\kappa_j} P_{n+1}(0) \overline{P_j(0)} P_j(z). \quad (2.3.1)$$

En notación matricial la relación anterior se traduce en

$$zP(z) = H_P P(z)$$

donde $P(z) = [P_0(z), P_1(z), \dots]^t$ y H_P es una matriz de Hessenberg inferior

$$H_P = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ h_{1,0} & h_{1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.3.2)$$

cuyas entradas son

$$h_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k + 1, \\ \frac{\kappa_k}{\kappa_j} P_{k+1}(0) \overline{P_j(0)}, & \text{si } j \leq k, \\ 0, & \text{si } j > k + 1. \end{cases}$$

En lo sucesivo, diremos que H_P es la *matriz de Hessenberg* asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$.

En el caso definido positivo, si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ es la base de \mathbb{P} formada por los polinomios ortonormales, la relación (2.3.1) se convierte en

$$z\varphi_n(z) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \varphi_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n} \sum_{j=0}^n \kappa_j \overline{P_j(0)} \varphi_j(z), \quad n \geq 0. \quad (2.3.3)$$

Si escribimos la relación anterior en forma matricial obtenemos

$$z\varphi(z) = H_\varphi \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$ y H_φ es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$h_{n,j} = \begin{cases} -\frac{\kappa_j}{\kappa_n} P_{n+1}(0) \overline{P_j(0)}, & \text{si } 0 \leq j \leq n, \\ \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si } j = n + 1, \\ 0, & \text{si } j > n + 1. \end{cases}$$

Nota 2.3.1 (i) Dado un funcional bilineal \mathcal{F} en \mathbb{P} , sea $P(z) := [p_0(z), p_1(z), \dots]^t$ con $p_k(z) \in \mathbb{P}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. La expresión $\mathcal{F}(P, P^t)$ denota una matriz semi-infinita cuyas entradas están dadas por

$$\left(\mathcal{F}(P, P^t)\right)_{k,j} = \mathcal{F}(p_k, p_j), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) Sea A una matriz con entradas complejas. En lo sucesivo, las expresiones $A_{(n)}$ y $(A)_{(n)}$ denotan la n -ésima fila de la matriz A . Análogamente, $A^{(n)}$ y $(A)^{(n)}$ denotan la n -ésima columna de A .

Proposición 2.3.2 Sea \mathcal{L} un funcional bilineal definido positivo sobre la circunferencia unidad. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente a \mathcal{L} y H_φ es la matriz Hessenberg inferior tal que

$$z\varphi(z) = H_\varphi\varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$, entonces

$$(i) \quad H_\varphi H_\varphi^* = I,$$

$$(ii) \quad H_\varphi^* H_\varphi = I - \lambda_\infty(0)\varphi(0)\varphi(0)^*,$$

donde I es la matriz unidad semi-infinita.

Demostración: (i) El funcional bilineal \mathcal{L} satisface

$$\mathcal{L}(zp, zq) = \mathcal{L}(p, q), \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{P}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_\varphi H_\varphi^* &= H_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \varphi^t) H_\varphi^* \\ &= \mathcal{L}(H_\varphi \varphi, \varphi^t H_\varphi^t) \\ &= \mathcal{L}(z\varphi, z\varphi^t) = \mathcal{L}(\varphi, \varphi^t) = I. \end{aligned}$$

(ii) Para $n \geq 0$, tenemos

$$\left(H_\varphi^*\right)_{(n)} \left(H_\varphi\right)^{(n)} = \left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 + |P_n(0)|^2 |P_{n+1}(0)|^2 + \kappa_n^2 |P_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2}.$$

Usando, en forma reiterada, la relación (2.1.12), se deduce

$$\begin{aligned}
(H_\varphi^*)_{(n)} (H_\varphi)^{(n)} &= 1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\right)^2 |P_n(0)|^2 \left(1 - |P_{n+1}(0)|^2\right) + \kappa_n^2 |P_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\
&= 1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+2}}\right)^2 |P_n(0)|^2 \left(1 - |P_{n+2}(0)|^2\right) + \kappa_n^2 |P_n(0)|^2 \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\
&\vdots \\
&= 1 - \kappa_n^2 |P_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_j^2} = 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{K_j(0, 0)} \\
&= 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lambda_\infty(0).
\end{aligned}$$

Por otra parte, para $0 \leq j < n$,

$$(H_\varphi^*)_{(n)} (H_\varphi)^{(j)} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_n^2} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right).$$

Usando la relación (2.1.12),

$$\begin{aligned}
(H_\varphi^*)_{(n)} (H_\varphi)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_{n+1}^2} + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right) \\
&= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_{n+2}^2} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, si aplicamos reiteradamente (2.1.12), se obtiene

$$\begin{aligned}
(H_\varphi^*)_{(n)} (H_\varphi)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_l^2} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{K_l(0, 0)} \\
&= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lambda_\infty(0).
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.3.3 *La matriz H_φ es unitaria si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = +\infty$, lo que se traduce en términos de la medida μ en que $\log \mu' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, esto es, la medida μ no pertenece a la clase de Szegő (ver [46]).*

2.4. Funcionales lineales cuasi-definidos y la factorización LU

Consideremos un funcional bilineal hermitiano cuasi-definido \mathcal{L} . Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y el funcional bilineal \mathcal{L}_1 definido mediante

$$\mathcal{L}_1(p, q) := \mathcal{L}((z - \alpha)p, q), \quad p, q \in \mathbb{P}. \quad (2.4.1)$$

El funcional \mathcal{L}_1 no es hermitiano y, por tanto, no hay garantías de la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a \mathcal{L}_1 . Sin embargo podemos analizar la existencia de sucesiones polinómicas que sean ortogonales a la derecha o izquierda con respecto a \mathcal{L}_1 .

Definición 2.4.1 Sean \mathcal{F} un funcional bilineal en \mathbb{P} y $\{L_n\}_{n \geq 0}$, $\{R_n\}_{n \geq 0}$ sucesiones de polinomios mónicos. Entonces

(i) Diremos que $\{L_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales por la izquierda con respecto a \mathcal{F} si, para todo $n \geq 0$, se cumple

- $\deg L_n = n$,
- $\mathcal{F}(L_n(z), z^k) = 0$, $0 \leq k \leq n - 1$,
- $\mathcal{F}(L_n(z), z^n) \neq 0$.

(ii) Diremos que $\{R_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales por la izquierda con respecto a \mathcal{F} si, para todo $n \geq 0$, se tiene

- $\deg R_n = n$,
- $\mathcal{F}(z^k, R_n(z)) = 0$, $0 \leq k \leq n - 1$,
- $\mathcal{F}(z^n, R_n(z)) \neq 0$.

Teniendo en cuenta la definición anterior podemos probar la siguiente

Proposición 2.4.2 Consideremos un funcional bilineal hermitiano cuasi-definido \mathcal{L} y su correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$. Sea \mathcal{L}_1 definido como en (2.4.1), con $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces

(i) La sucesión $\{R_n\}_{n \geq 0}$ dada por

$$R_n(z, \alpha) = \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} K_n(z, \alpha) = P_n(z) + \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z), \quad n \geq 0 \quad (2.4.2)$$

es ortogonal a la derecha con respecto a \mathcal{L}_1 . De nuevo, K_n es el núcleo polinómico de grado n correspondiente a la familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$.

(ii) La sucesión $\{S_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$S_n(z, \alpha) = \frac{1}{z - \alpha} \left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(z) \right), \quad n \geq 0 \quad (2.4.3)$$

es ortogonal a la izquierda con respecto a \mathcal{L}_1 .

Demostración: (i) De (2.4.2) se deduce fácilmente que $\deg R_n = \deg P_n = n$, para todo $n \geq 0$.

Usando la propiedad reproductora (2.1.7) y la fórmula de Christoffel-Darboux (2.1.8), para $0 \leq k \leq n$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(z^k, R_n(z, \alpha)) &= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}_1(z^k, K_n(z, \alpha)) \\ &= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(z^k(z - \alpha), K_n(z, \alpha)) \\ &= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(z^k(z - \alpha), K_{n+1}(z, \alpha) - \mathbf{k}_{n+1}^{-1} P_{n+1}(z) \overline{P_{n+1}(\alpha)}) \\ &= -\mathbf{k}_n \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

(ii) Partiendo de (2.4.3), es fácil comprobar que $\deg S_n = n$ para todo $n \geq 0$. Para $0 \leq k \leq n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(S_n(z, \alpha), z^k) &= \mathcal{L}((z - \alpha)S_n(z, \alpha), z^k) \\ &= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(z), z^k\right) \\ &= \mathcal{L}(P_{n+1}(z), z^k) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(P_n(z), z^k) \\ &= -\mathbf{k}_n \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

La sucesión $\{S_n(z, \alpha)\}_{n \geq 0}$ fue usada en [7] para el estudio de perturbaciones no-simétricas de funcionales bilineales simétricos. En [13], de manera alternativa, se trabaja con la familia $\{R_n(z, \alpha)\}_{n \geq 0}$.

Sean H_P y H_R las matrices de Hessenberg inferiores asociadas a $\{P_n(z)\}_{n \geq 0}$ y $\{R_n(z, \alpha)\}_{n \geq 0}$, respectivamente. Vamos a establecer una relación entre H_P y H_R . Para ello, dado que tanto $\{P_n(z)\}_{n \geq 0}$ como $\{R_n(z, \alpha)\}_{n \geq 0}$ son bases de polinomios mónicos en el espacio lineal \mathbb{P} de los polinomios con coeficientes complejos, existe una matriz triangular inferior L_{PR} con 1 como entradas en la diagonal principal tal que

$$R(z) = L_{PR}P(z),$$

donde $P(z) = [P_0(z), P_1(z), \dots]^t$ y $R(z) = [R_0(z, \alpha), R_1(z, \alpha), \dots]^t$. Las entradas de la matriz L_{PR} están dadas por

$$(L_{PR})_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ \frac{\mathbf{k}_k \overline{P_j(\alpha)}}{\mathbf{k}_j \overline{P_k(\alpha)}} & \text{si } k > j, \\ 0 & \text{si } k < j. \end{cases}$$

Lema 2.4.3 Consideremos el funcional bilineal \mathcal{L}_1 definido en (2.4.1) y $P(z) = [P_0(z), P_1(z), \dots]^t$. Sea $D_P = \mathcal{L}(P, P^t)$, entonces

- (i) $\mathcal{L}_1(P, P^t) = (H_P - \alpha I) D_P$,
- (ii) $\mathcal{L}_1((z - \alpha)P, P^t) = (H_P - \alpha I)^2 D_P$.

Demostración: (i)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(P, P^t) &= \mathcal{L}((z - \alpha)P, P^t) = \mathcal{L}((H_P - \alpha I)P, P^t) \\ &= (H_P - \alpha I) \mathcal{L}(P, P^t) = (H_P - \alpha I) D_P. \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra el segundo enunciado. ■

Debido al carácter ortogonal de la familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$, la matriz D_P es una matriz diagonal, no singular, cuyas entradas son

$$(D_P)_{k,j} = \begin{cases} \mathbf{k}_j & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Dado que la familia $\{R_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal a la derecha con respecto a \mathcal{L}_1 , entonces la matriz D_R es triangular inferior no singular y sus entradas vienen dadas por

$$(D_R)_{k,j} = \begin{cases} \frac{\mathbf{k}_k \mathbf{k}_j}{P_k(\alpha) \overline{P_j(\alpha)}} \left[\sum_{l=0}^k \left(\frac{P_l(\alpha) \overline{P_{l-1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{l-1}} + \frac{P_l(\alpha) \overline{P_l(0)}}{\mathbf{k}_l} \sum_{i=l}^k P_{i+1}(0) \overline{P_i(\alpha)} \right) \right] & \text{si } j \leq k, \\ 0, & \text{si } j > k, \end{cases}$$

asumiendo que $P_{-1}(z) = 0$.

Proposición 2.4.4 Sea L_{PR} la matriz de cambio de base tal que $R(z) = L_{PR}P(z)$. Entonces $H_P - \alpha I = LU$, donde

$$L = L_{PR}^{-1} D_R \quad (2.4.4)$$

es una matriz triangular inferior, y

$$U = L_{PR}^{-*} D_P^{-1} \quad (2.4.5)$$

es una matriz triangular superior.

Demostración: Del lema 2.4.3, se tiene

$$\begin{aligned} (H_P - \alpha I) D_P &= \mathcal{L}_1(P, P^t) \\ &= \mathcal{L}_1(L_{PR}^{-1} R, R^t L_{PR}^{-t}) \\ &= L_{PR}^{-1} \mathcal{L}_1(R, R^t) L_{PR}^{-*} \\ &= L_{PR}^{-1} D_R L_{PR}^{-*}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$H_P - \alpha I = L_{PR}^{-1} D_R L_{PR}^{-*} D_P^{-1}. \quad \blacksquare$$

La proposición anterior nos brinda una factorización LU de la matriz $H_P - \alpha I$ que no es única.

Ahora mostramos la relación entre las matrices H_P y H_R .

Proposición 2.4.5 Si $H_P - \alpha I = LU$, donde L y U están dadas por (2.4.4) y (2.4.5), respectivamente, entonces

$$H_R = D_R (UL) D_R^{-1} + \alpha I,$$

donde $D_R = \mathcal{L}_1(R, R^t)$.

Demostración: De la proposición anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1((z - \alpha)R, R^t) &= \mathcal{L}_1((z - \alpha)L_{PR}P, P^t L_{PR}^t) \\ &= L_{PR} \mathcal{L}_1((z - \alpha)P, P^t) L_{PR}^* \\ &= L_{PR} (H_P - \alpha I)^2 D_P L_{PR}^* \\ &= L_{PR} (LU)^2 D_P L_{PR}^*. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene

$$\mathcal{L}_1((z - \alpha)R, R^t) = (H_R - \alpha I) \mathcal{L}_1(R, R^t) = (H_R - \alpha I) D_R.$$

De esta forma,

$$H_R - \alpha I = L_{PR} L_{PR}^{-1} D_R U L D_P^{-1} D_P D_R^{-1} = D_R U L D_R^{-1}.$$

■

A continuación, si perturbamos el funcional \mathcal{L}_1 de la manera siguiente

$$\mathcal{L}_2(p, q) := \mathcal{L}_1(p, (z - \alpha)q) = \mathcal{L}((z - \alpha)p, (z - \alpha)q), \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (2.4.6)$$

entonces el funcional bilineal \mathcal{L}_2 es hermitiano (ver [33]), y una condición necesaria y suficiente para que \mathcal{L}_2 sea cuasi-definido se muestra en el siguiente

Teorema 2.4.6 El funcional bilineal \mathcal{L}_2 , definido por (2.4.6), es cuasi-definido si y sólo si $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$, para todo $n \geq 0$.

Demostración: Supongamos que \mathcal{L}_2 es cuasi-definido y sea $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a \mathcal{L}_2 . Denotemos por $\text{span}\{p(z)\}$ al subespacio lineal de \mathbb{P} generado por el polinomio $p \in \mathbb{P}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n &= (z - \alpha)\mathbb{P}_{n-1} \oplus \text{span}\{K_n(z, \alpha)\} \\ &= \text{span}\{(z - \alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus (z - \alpha)\mathbb{P}_{n-2} \oplus \text{span}\{K_n(z, \alpha)\}, \end{aligned}$$

donde las sumas directas son también ortogonales.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n &= \mathbb{P}_{n-1} \oplus \text{span}\{P_n(z)\} \\ &= \text{span}\{P_n(z)\} \oplus \text{span}\{K_{n-1}(z, \alpha)\} \oplus (z - \alpha)\mathbb{P}_{n-2}.\end{aligned}$$

De esta manera, dada la unicidad del complemento ortogonal del subespacio vectorial $(z - \alpha)\mathbb{P}_{n-2}$ respecto a \mathbb{P}_n

$$\text{span}\{(z - \alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus \text{span}\{K_n(z, \alpha)\} = \text{span}\{P_n(z)\} \oplus \text{span}\{K_{n-1}(z, \alpha)\}.$$

En consecuencia,

$$P_n(z) = (z - \alpha)Q_{n-1}(z) + \beta_n K_{n-1}(z, \alpha). \quad (2.4.7)$$

Ahora bien, si $K_{n_0-1}(\alpha, \alpha) = 0$ para algún n_0 , entonces, de la expresión (2.4.7), tenemos $P_{n_0}(\alpha) = 0$. Esto significa que

$$K_n(\alpha, \alpha) = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

y, por tanto,

$$P_{n+1}(\alpha) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Si $|\alpha| \neq 1$, teniendo en cuenta que $P_n^*(\alpha) \neq 0$, $n \geq n_0$, así como la fórmula de Christoffel-Darboux (2.1.8), para $n \geq n_0$ obtenemos

$$K_n(\alpha, \alpha) = \mathbf{k}_{n+1}^{-1} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2 - |P_{n+1}(\alpha)|^2}{1 - |\alpha|^2} = \mathbf{k}_{n+1}^{-1} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2}{1 - |\alpha|^2} \neq 0,$$

contradiendo así nuestra hipótesis.

Si $|\alpha| = 1$, entonces $P_n^*(\alpha) = 0$, $P_{n-1}(\alpha) = 0$ y, por tanto de la relación de recurrencia regresiva $P_1(\alpha) = 0$, i. e. $P_1(z) = z - \alpha$, o, equivalentemente, $|P_1(0)| = 1$, contradiciendo así, el carácter cuasi definido de \mathcal{L} . En consecuencia $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$, para todo $n \geq 0$.

Supongamos ahora que $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 0$ y consideremos la sucesión de polinomios mónicos $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ definidos por

$$(z - \alpha)Q_n(z) = P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} K_n(z, \alpha). \quad (2.4.8)$$

Entonces, para $0 \leq k \leq n$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(Q_n(z), (z - \alpha)^k) &= \mathcal{L}((z - \alpha)Q_n(z), (z - \alpha)^{k+1}) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}K_n(z, \alpha), (z - \alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}, (z - \alpha)^{k+1}\right) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}\mathcal{L}\left(K_n(z, \alpha), (z - \alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}\mathcal{L}\left(K_{n+1}(z, \alpha) - \frac{\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n+1}}P_{n+1}(z), (z - \alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} + \frac{P_{n+1}(\alpha)\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{K_n(\alpha, \alpha)}\delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\frac{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}\delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

Así $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional \mathcal{L}_2 . ■

Sea H_Q la matriz de Hessenberg inferior tal que

$$zQ(z) = H_Q Q(z),$$

donde $Q(z) = [Q_0(z), Q_1(z), \dots]^t$. Mostraremos la relación entre las matrices H_Q y H_R y veremos que la matriz H_Q se obtiene a partir de una factorización LU de la matriz H_R . Para ello, primero probaremos el siguiente

Lema 2.4.7 *Consideremos el funcional bilineal hermitiano \mathcal{L}_2 , y sea H_R la matriz de Hessenberg inferior tal que $zR(z) = H_R R(z)$, con $R(z) = [R_0(z), R_1(z), \dots]^t$. Entonces*

- (i) $\mathcal{L}_2(R, R') = D_R(H_R - \alpha I)^*$.
- (ii) $\mathcal{L}_2(R, (z - \alpha)R') = D_R((H_R - \alpha I)^*)^2$.

Demostración: (i)

$$\mathcal{L}_2(R, R') = \mathcal{L}_1(R, (z - \alpha)R') = \mathcal{L}_1(R, R')(H_R - \alpha I)^* = D_R(H_R - \alpha I)^*.$$

Usando un procedimiento similar, se deduce (ii). ■

Proposición 2.4.8 Sea L_{RQ} la matriz triangular inferior tal que $Q(z) = L_{RQ}R(z)$. Entonces,

$$H_R - \alpha I = L_{RQ}^{-1} \tilde{U},$$

donde \tilde{U} es una matriz triangular superior.

Demostración: Del Lema 2.4.7, se tiene

$$\begin{aligned} D_R (H_R - \alpha I)^* &= \mathcal{L}_2(R, R^t) = \mathcal{L}_2(L_{RQ}^{-1} Q, Q^t L_{RQ}^{-t}) \\ &= L_{RQ}^{-1} \mathcal{L}_2(Q, Q^t) L_{RQ}^{-*} \\ &= L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*}, \end{aligned}$$

donde $D_Q = \mathcal{L}_2(Q, Q^t)$ es una matriz diagonal no singular. De esta forma

$$H_R - \alpha I = L_{RQ}^{-1} D_Q^* (D_R L_{RQ})^{-*}.$$

En consecuencia podemos ver que

$$H_R - \alpha I = \tilde{L} \tilde{U},$$

con $\tilde{L} = L_{RQ}^{-1}$ y $\tilde{U} = D_Q^* (D_R L_{RQ})^{-*}$. ■

La estructura de la matriz D_Q proviene de la caracterización de ortogonalidad de la familia $\{Q_n\}_{n \geq 0}$. Las entradas de la matriz D_Q están dadas por

$$(D_Q)_{k,j} = \begin{cases} \mathbf{k}_j \frac{K_{j+1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)} & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Por otra parte, las entradas de la matriz cambio de base L_{RQ} son

$$(L_{RQ})_{n,j} = \begin{cases} \frac{P_{n+1}(\alpha) K_j(\alpha, \alpha)}{P_{j+1}(\alpha) K_n(\alpha, \alpha)} & \text{si } n \geq j, \\ 0, & \text{si } n < j. \end{cases}$$

Proposición 2.4.9 Sea L_{RQ} la matriz triangular inferior tal que $Q = L_{RQ}R$. Si $H_R - \alpha I = \tilde{L} \tilde{U}$ es la factorización LU sin pivoteo de $H_R - \alpha I$, entonces

$$H_Q - \alpha I = \tilde{U} \tilde{L}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(Q, (z - \alpha)Q') &= \mathcal{L}_2(L_{RQ}R, (z - \alpha)R'L_{RQ}) \\ &= L_{RQ}\mathcal{L}_2(R, (z - \alpha)R')L_{RQ}^*.\end{aligned}$$

De esta manera

$$\mathcal{L}_2(Q, Q')(H_Q - \alpha I)^* = L_{RQ}D_R((H_R - \alpha I)^*)^2 L_{RQ}^*,$$

o, equivalentemente,

$$D_Q(H_Q - \alpha I)^* = L_{RQ}D_R D_R^{-1} L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*} D_R^{-1} L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*} L_{RQ}^*.$$

Finalmente

$$(H_Q - \alpha I)^* = L_{RQ}^* D_R^{-1} L_{RQ} D_Q, \quad \text{i. e.,}$$

$$H_Q - \alpha I = D_Q^* L_{RQ}^{-*} D_R^{-1} L_{RQ}^{-1} = \tilde{U} \tilde{L}.$$

■

2.5. Funcionales lineales definidos positivos y la factorización QR

Supongamos ahora que el funcional bilineal \mathcal{L} es definido positivo, y sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a \mathcal{L} , dada por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z),$$

donde $\kappa_n = \mathbf{k}_n^{-\frac{1}{2}}$.

Nos ocuparemos de la perturbación polinómica \mathcal{L}_2 del funcional \mathcal{L} introducida en (2.4.6). Notemos que el nuevo funcional \mathcal{L}_2 es también hermitiano y definido positivo y, por tanto, podemos considerar la familia $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortonormales asociada al funcional \mathcal{L}_2 .

Nuestro objetivo es hallar la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ asociadas al operador de multiplicación por z en $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ respectivamente. En primer lugar, deduciremos una expresión que relacione los polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a \mathcal{L} y \mathcal{L}_2 , respectivamente. Así, obtenemos a partir de (2.4.8) mediante la correspondiente normalización

$$(z - \alpha)\psi_n(z) = \sqrt{\frac{K_n(\alpha, \alpha)}{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}} \varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_{n+1}(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha, \alpha) K_n(\alpha, \alpha)}} \varphi_j(z). \quad (2.5.1)$$

Si consideramos

$$\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots]^t \quad \text{y} \quad \psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_n(z), \dots]^t,$$

entonces, en forma matricial, la expresión (2.5.1) resulta ser

$$(z - \alpha)\psi(z) = M\varphi(z), \quad (2.5.2)$$

donde M es una matriz Hessenberg inferior cuyas entradas $m_{i,j}$ están dadas por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_{i+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)}}, & \text{si } j \leq i, \\ \sqrt{\frac{K_i(\alpha,\alpha)}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Proposición 2.5.1 ([36]) *La matriz M satisface*

(i) $MM^* = I$.

(ii) $M^*M = I - \lambda_\infty(\alpha)\varphi(\alpha)\varphi(\alpha)^*$,

Demostración: Debido a la ortogonalidad de $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a \mathcal{L} y \mathcal{L}_2 , respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{L}_2(\psi(z), \psi(z)^t) = \mathcal{L}((z - \alpha)\psi(z), (z - \alpha)\psi^t(z)) \\ &= \mathcal{L}(M\varphi(z), \varphi(z)^t M^t) = M\mathcal{L}(\varphi(z), \varphi(z)^t) M^* = MM^*. \end{aligned}$$

(ii) Para $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} M_{(j)}^* M^{(j)} &= \frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\ &= \frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_\infty(\alpha, \alpha)} \\ &= 1 - \lambda_\infty(\alpha)|\varphi_j(\alpha)|^2. \end{aligned}$$

Para $k < j$

$$\begin{aligned}
M_{(k)}^* M^{(j)} &= -\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} + \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \left(-\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{\infty}(\alpha, \alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \lambda_{\infty}(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Nota 2.5.2 De acuerdo con la Proposición 2.1.10, la matriz M es unitaria si $|\alpha| > 1$. Si $|\alpha| = 1$ entonces $\lambda_{\infty}(\alpha) = 0$ siempre y cuando $\mu(\{\alpha\}) = 0$.

Si $|\alpha| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = \infty$, esto es, la medida μ no pertenece a la clase de Szegő, entonces M es unitaria.

A continuación, mostramos el resultado análogo a la proposición anterior para las submatrices principales (ver [36])

Proposición 2.5.3 Sea M_n la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de M .

(i) Consideremos el vector columna $e_n = [0, \dots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{(n,1)}$, entonces

$$M_n M_n^* = I_n - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} e_n e_n^*,$$

donde I_n denota la matriz unidad de dimensión $n \times n$.

(ii) Sea $P_n(\alpha) = [\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_{n-1}(\alpha)]^t$, entonces

$$M_n^* M_n = I_n - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} P_n P_n^*.$$

Demostración: Para $0 \leq k \leq n-2$, deducimos

$$\begin{aligned}
(M_n)_{(k)} (M_n^*)^{(k)} &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} \\
&= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha)} K_k(\alpha, \alpha) + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} = 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (M_n)_{(n-1)}(M_n^*)^{(n-1)} &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)K_{n-1}(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} |\varphi_l(\alpha)|^2 \\ &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)} = 1 - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $k < j$, obtenemos

$$\begin{aligned} (M_n)_{(k)}(M_n^*)^{(j)} &= \sum_{l=0}^k \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} |\varphi_l(\alpha)|^2}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)} \sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}} \\ &\quad - \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}} \sqrt{\frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)}} \\ &= \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}} \left(\sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 - K_l(\alpha, \alpha) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Para $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} (M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(k)} &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\ &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \sum_{l=k}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\ &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \left(\frac{1}{K_k(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)}, \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} (M_n^*)_{(0)}(M_n)^{(0)} &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|\varphi_0(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\ &= |\varphi_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $k < j$,

$$\begin{aligned}
(M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha, \alpha)K_{j-1}(\alpha, \alpha)}} \sqrt{\frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)}} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2 \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha, \alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \left(\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} - \sum_{l=j}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_n(\alpha, \alpha)}.
\end{aligned}$$

■

En la literatura, la matriz M_n se denomina *cuasi unitaria* (ver [29], [46]) en el sentido de que las primeras $n - 1$ filas constituyen un conjunto ortonormal, y la última fila es ortogonal con respecto a ese conjunto, pero no está normalizada.

Para obtener una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ , (i. e. $H_\varphi\varphi(z) = z\varphi(z)$, ver [21], [22]) introducimos la matriz cambio de base L tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Esta matriz puede expresarse en términos de las matrices H_φ y M de la siguiente manera

Proposición 2.5.4

$$L = (H_\varphi - \alpha I)M^*. \quad (2.5.4)$$

Demostración: Sea L la matriz cambio de base tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Entonces

$$(z - \alpha)\psi(z) = (z - \alpha)L^{-1}\varphi(z).$$

De la relación (2.5.2), obtenemos

$$M\varphi(z) = L^{-1}(H_\varphi - \alpha I)\varphi(z).$$

De esta forma,

$$LM = H_\varphi - \alpha I,$$

y dado que $MM^* = I$ (Proposición 2.5.1), se sigue el enunciado.

■

De la proposición anterior, obtenemos

Proposición 2.5.5

$$H_\psi - \alpha I = ML.$$

Demostración: De la expresión (2.5.2),

$$(z - \alpha)\psi(z) = M\varphi(z).$$

Por tanto,

$$(H_\psi - \alpha I)\psi(z) = ML\psi(z),$$

y, en consecuencia, deducimos el enunciado. ■

Para calcular H_ψ partiendo de H_φ , primero se necesita encontrar la matriz triangular inferior L . De las expresiones (2.5.3) y (2.5.4), mediante cálculos sencillos deducimos

Proposición 2.5.6 Las entradas $l_{i,j}$ de la matriz L son

$$l_{n,j} = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \sqrt{\frac{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & n = j, \\ \frac{\varphi_n(\alpha) \left(\frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n} \kappa_{n-1} \varphi_{n-1}^*(\alpha) \right)}{\sqrt{K_n(\alpha, \alpha) K_{n-1}(\alpha, \alpha)}} - \left(P_{n+1}(0) \overline{P_n(0)} + \alpha \right) \sqrt{\frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & j = n - 1, \\ \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n \sqrt{K_j(\alpha, \alpha) K_{j+1}(\alpha, \alpha)}} \left(\kappa_j \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} \varphi_j^*(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)} K_j(\alpha, \alpha) \right), & j \leq n - 2. \end{cases}$$

2.5.1. Ejemplos

Ejemplo 2.5.7 Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y \mathcal{L} el funcional bilineal definido por

$$\mathcal{L}(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Es bien conocido (ver [46]) que el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a \mathcal{L} es $P_n(z) = \varphi_n(z) = z^n$, para todo $n \geq 0$.

Entonces, el núcleo reproductor de grado n asociado a $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, es

$$K_n(z, \alpha) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{\alpha^j} = \frac{1}{\alpha^n} \frac{z^{n+1} - \alpha^{n+1}}{z - \alpha},$$

y, en consecuencia, $K_n(\alpha, \alpha) = n + 1$, para todo $n \geq 0$.

Por otra parte

$$H_\varphi - \alpha I = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & -\alpha & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Las entradas $m_{k,j}$ de M son

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}, & \text{si } j \leq k, \\ \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1. \end{cases} \quad (2.5.5)$$

En este caso, de la Proposición 2.5.6 deducimos $l_{k,j} = 0$, para $j \leq k-2$. Así, L es una matriz bidiagonal inferior

$$l_{k,k-1} = -\alpha \sqrt{\frac{k}{k+1}} \text{ y } l_{k,k} = \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}. \quad (2.5.6)$$

Para la determinación de la matriz H_ψ , analizaremos varios casos.

Para $j \geq k+2$, fácilmente se puede ver que $M_{(k)}L^{(j)} = 0$.

Para $j = k+1$, $M_{(k)}L^{(k+1)} = m_{k,k+1}l_{k+1,k+1} = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}} \sqrt{\frac{k+3}{k+2}} = \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}$.

Para $j = k$,

$$\begin{aligned} M_{(k)}L^{(k)} &= m_{k,k}l_{k,k} + m_{k,k+1}l_{k+1,k} \\ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{(k+2)(k+1)}} \sqrt{\frac{k+2}{k+1}} - \alpha \frac{k+1}{k+2} = -\alpha \frac{k+2+(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $j < k$,

$$\begin{aligned} M_{(k)}L^{(j)} &= m_{k,j}l_{j,j} + m_{k,j+1}l_{j+1,j} \\ &= \frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(j+2)(j+1)}} \left(\sqrt{\frac{j+1}{j+2}} - \sqrt{\frac{j+2}{j+1}} \right) \\ &= -\frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)(j+2)(j+1)}}. \end{aligned}$$

De esta forma, las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz de Hessenberg $H_\psi - \alpha I$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \geq k + 2, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si } j = k + 1, \\ -\alpha \frac{k+2+(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}, & \text{si } j = k, \\ -\frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)(j+2)(j+1)}}, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Ejemplo 2.5.8 Consideremos ahora los funcionales bilineales

$$S(p, q) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{1}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$S_2(p, q) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{|e^{i\theta} - \alpha|^2}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| < 1$ y $|\alpha| = 1$ (ver [20]). Es sencillo probar que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ está dada por

$$\varphi_0(z) = (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(z) = z^{n-1}(z - \beta), \quad \text{para } n \geq 1.$$

Así

$$H_\varphi - \alpha I = \begin{bmatrix} \beta - \alpha & (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

y el n -ésimo núcleo reproductor $K_n(z, \alpha)$ asociado a S es

$$K_n(z, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + \sum_{j=1}^n (z - \beta) \overline{(\alpha - \beta)} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{j-1}.$$

En consecuencia, se tiene

$$K_n(\alpha, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2.$$

Las entradas $m_{k,j}$ de M son

$$m_{l,j} = \begin{cases} \frac{\alpha^l(\alpha - \beta)(1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}} & \text{si } j = 0, \\ -\frac{|\alpha - \beta|^2\alpha^{l-j+1}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j \leq l, \\ \sqrt{\frac{K_l(\alpha, \alpha)}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = l + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.5.7)$$

De (2.5.4), deducimos la matriz L mediante $L = (H_\varphi - \alpha I)M^*$. De ahí, obtenemos las entradas $l_{r,j}$ de la matriz L

$$l_{r,j} = \begin{cases} \sqrt{K_1(\alpha, \alpha)} & j = r = 0, \\ -\alpha \sqrt{\frac{K_{r-1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r - 1, \\ \sqrt{\frac{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.5.8)$$

De acuerdo con la Proposición 2.5.5 las entradas $\tilde{h}_{r,j}$ de la matriz $H_\psi - \alpha I$ son

$$\tilde{h}_{r,j} = \begin{cases} -\left(\alpha - \beta + \alpha \frac{K_0(\alpha, \alpha)}{K_1(\alpha, \alpha)}\right) & \text{si } r = j = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{K_1(\alpha, \alpha)K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)}} \frac{\alpha^{r-1}(1 - |\beta|^2)2(\alpha - \beta)^2}{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+2}(\alpha, \alpha)}} & \text{si } j = 0, r \geq 1, \\ \frac{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+2}(\alpha, \alpha)}}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}, & \text{si } j = r + 1, \\ -\alpha \left(\frac{|\alpha - \beta|^2}{K_r(\alpha, \alpha)} - \frac{K_r(\alpha, \alpha)}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)} \right), & \text{si } 1 \leq j = r, \\ \frac{|\alpha - \beta|^4 \alpha^{r-j+1}}{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)K_{j+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j < r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, los cálculos son relativamente laboriosos. Es por ello que hemos intentado relacionar el cálculo de la matriz de Hessenberg H_ψ con alguna factorización de la matriz H_φ . De forma más precisa, hemos usado la factorización QR de la matriz $H_\varphi - \alpha I$ para obtener $H_\psi - \alpha I$. De hecho, si suponemos que Q^*R^* es la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)^*$, donde $QQ^* = I$ y R^* es una matriz triangular superior cuyas entradas de la diagonal principal son positivas, entonces $H_\varphi - \alpha I = RQ$ y podemos probar la siguiente proposición

Proposición 2.5.9 Consideremos la factorización

$$(H_\varphi - \alpha I)^* = Q^*R^*,$$

donde $QQ^* = I$ y R^* es una matriz triangular superior tal que las entradas de la diagonal principal son positivas. Si L es una matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$, entonces $R = L$,

Demostración: Notemos que $\mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^t) = \mathcal{L}_2(L\psi, \psi^t L^t) = L\mathcal{L}_2(\psi, \psi^t)L^* = LL^*$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^t) &= \mathcal{L}((z - \alpha)\varphi, (z - \alpha)\varphi^t) \\ &= (H_\varphi - \alpha I)\mathcal{L}(\varphi, \varphi^t)(H_\varphi - \alpha I)^* \\ &= (H_\varphi - \alpha I)(H_\varphi - \alpha I)^* \\ &= (RQ)(Q^*R^*) = RR^*. \end{aligned}$$

De la Proposición 2.5.6, se observa que las entradas $l_{k,k}$ de L , con $k \geq 0$, son positivas. De esta forma, LL^* representa la descomposición de Cholesky de la matriz de Gram del funcional bilineal \mathcal{L}_2 con respecto a la base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. De esta forma $R = L$. ■

Ahora, probaremos la siguiente

Proposición 2.5.10 $H_\psi - \alpha I = QL$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 H_\psi - \alpha I &= (H_\psi - \alpha I)\mathcal{L}_2(\psi, \psi^t) \\
 &= \mathcal{L}_2(H_\psi - \alpha I)\psi(z), \psi(z)^t) \\
 &= \mathcal{L}_2((z - \alpha)\psi(z), \psi(z)^t) \\
 &= \mathcal{L}_2((z - \alpha)L^{-1}\varphi(z), \varphi(z)^t L^{-t}) \\
 &= L^{-1}\mathcal{L}_2((z - \alpha)\varphi(z), \varphi(z)^t) (L^{-1})^* \\
 &= L^{-1}(H_\varphi - \alpha I)\mathcal{L}_2(\varphi(z), \varphi(z)^t) (L^*)^{-1} \\
 &= L^{-1}(LQ)(LL^*) (L^*)^{-1} \\
 &= QL.
 \end{aligned}$$

Nota 2.5.11 Notemos que, teniendo en cuenta las Proposiciones 2.5.5 y 2.5.10, se deduce $Q = M$.

Con el fin de dar una versión de la Proposición anterior para submatrices principales, se tiene

Proposición 2.5.12 Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de la matriz de Hessenberg $H_\varphi - \alpha I$ y consideremos la factorización

$$(H_\varphi - \alpha I)_n = R_n Q_n,$$

donde R_n es una matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria. En otras palabras $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$ es la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)_n^*$. Entonces

$$(H_\psi - \alpha I)_{n-1} = (Q_n R_n)_{n-1}.$$

Demostración: Consideremos la factorización $H_\varphi - \alpha I = LM$ y sean L_{11}, M_{11} las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de L y M , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} H_\varphi - \alpha I &= \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} L_{11}M_{11} & L_{11}M_{12} \\ \hline L_{21}M_{11} + L_{22}M_{21} & L_{21}M_{12} + L_{22}M_{22} \end{array} \right], \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$(H_\varphi - \alpha I)_n = L_{11}M_{11}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= ML \\ &= \left[\begin{array}{c|c} M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21} & M_{12}L_{21} \\ \hline M_{21}L_{11} + M_{22}L_{21} & M_{22}L_{21} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$(H_\psi - \alpha I)_n = M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21},$$

pero

$$M_{12}L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots \\ m_{n-1,n} & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{n,1} & \cdots & l_{n,n} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = m_{n-1,n} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}.$$

De esta forma,

$$(H_\psi - \alpha I)_{n-1} = (M_{11}L_{11})_{n-1}. \quad (2.5.9)$$

Dado que $MM^* = I$, se tiene

$$M_{11}M_{11}^* = I_n - |m_{n-1,n}|^2 E_{nn},$$

donde $E_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de dimensión $n \times n$ y I_n es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Ahora, consideremos la matriz de dimensión $n \times n$, $E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}$,

con $\delta = (1 - |m_{n-1,n}|^2)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Sean $\hat{Q} = EM_{11}$ y $\hat{R} = L_{11}E^{-1}$. Probaremos que \hat{Q} es una matriz unitaria de dimensión $n \times n$.

Sea \hat{q}_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, la i -ésima fila de \hat{Q} . Entonces

$$\hat{q}_i = \begin{cases} m_i, & 0 \leq i \leq n-2, \\ \frac{1}{\delta}m_n, & i = n-1, \end{cases}$$

donde m_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ es la i -ésima fila de M_{11} .

Si $0 \leq i, j \leq n-2$, entonces obtenemos

$$\left(\hat{Q}\hat{Q}^*\right)_{i,j} = \hat{q}_i\hat{q}_j^* = m_i m_j^* = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si $i = n-1$, ó $j = n-1$ y $i \neq j$, entonces

$$\hat{q}_i\hat{q}_j^* = \frac{1}{\delta}m_i m_j^* = 0.$$

Finalmente,

$$\hat{q}_{n-1}\hat{q}_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2}m_{n-1}m_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2}(1 - |m_{n-1,n}|^2) = 1.$$

La matriz \hat{R} es triangular inferior, con entradas positivas en la diagonal principal.

Además,

$$\hat{Q}^*\hat{R}^* = M_{11}^*EE^{-1}L_{11}^* = M_{11}^*L_{11}^* = (H_\varphi - \alpha I)_n^*.$$

Así, por la unicidad de la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)_n^*$, se deduce

$$\hat{Q} = Q_n \text{ y } \hat{R} = R_n.$$

Pero Q_n y M_{11} difieren en la última fila, y R_n y L_{11} difieren en la última columna. Por tanto,

$$(Q_n R_n)_{n-1} = (M_{11} L_{11})_{n-1} = (H_\psi - \alpha I)_{n-1}.$$

■

Capítulo

3

Transformación de Uvarov

3.1. Transformación $\mathcal{L}_3(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}$

Consideremos, nuevamente un funcional bilineal hermitiano \mathcal{L} y sea \mathcal{L}_3 una perturbación del funcional bilineal \mathcal{L} definida por

$$\mathcal{L}_3(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}, \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (3.1.1)$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| = 1$. Dado que $m \in \mathbb{R}$, el funcional bilineal \mathcal{L}_3 es también hermitiano.

Esta transformación del funcional bilineal \mathcal{L} es un caso particular de la transformación de Uvarov (ver [30], [48] y [52])

Proposición 3.1.1 *El funcional bilineal \mathcal{L}_3 es cuasi-definido si y sólo si*

$$1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración: Supongamos que \mathcal{L}_3 es cuasi-definido y sea $\{U_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_3 .

Queremos obtener una relación entre las familias de polinomios ortogonales mónicos $\{U_n\}_{n \geq 0}$ y $\{P_n\}_{n \geq 0}$. Para ello, podemos escribir

$$U_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z), \quad (3.1.2)$$

donde $\{\lambda_{n,j}\}_{j=0}^{n-1}$ son los coeficientes de Fourier dados por

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(U_n, P_j)}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De la expresión (3.1.1) y la condición de ortogonalidad de U_n con respecto a \mathcal{L}_3 , se tiene

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(U_n, P_j) - mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)} = -\frac{mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De esta manera,

$$U_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z) = P_n(z) - mU_n(\alpha)K_{n-1}(z, \alpha).$$

Si hacemos $z = \alpha$ en la expresión anterior, entonces obtenemos

$$P_n(\alpha) = U_n(\alpha) (1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)).$$

Si $1 + mK_{n_0-1}(\alpha, \alpha) = 0$ para algún n_0 , entonces $P_{n_0}(\alpha) = 0$. esto significa que $1 + mK_{n_0}(\alpha, \alpha) = 0$, i. e., $P_{n_0+1}(\alpha) = 0$. En consecuencia

$$P_n(\alpha) = 0 \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta $|\alpha| = 1$, se tiene que $P_{n_0}^*(\alpha) = 0$. Aplicando la relación de recurrencia descendente (2.1.4), se obtiene $P_{n_0-1}(\alpha) = 0$, y si usamos dicha relación reiteradamente, llegamos a $P_1(\alpha) = 0$, así $P_1(z) = z - \alpha$ y $|P_1(0)| = 1$, contradiciendo el carácter cuasi-definido de \mathcal{L} . De esta manera

$$1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geq 1$.

Supongamos ahora que $1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y sea la familia de polinomios mónicos $\{U_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$U_n(z) = P_n(z) - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} K_{n-1}(z, \alpha). \quad (3.1.3)$$

Entonces, para $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(U_n(z), (z - \alpha)^k) &= \mathcal{L}(P_n(z), (z - \alpha)^k) - \frac{mP_n(\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \mathcal{L}(K_{n-1}(z, \alpha), (z - \alpha)^k) \\ &= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} - \frac{mP_n(\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \mathcal{L}\left(K_n(z, \alpha) - \frac{\overline{P_n(\alpha)}}{\mathbf{k}_n} P_n(z), (z - \alpha)^k\right) \\ &= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} + m \frac{P_n(\alpha)\overline{P_n(\alpha)}}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k}, \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\mathcal{L}_3(U_n(z), (z - \alpha)^k) = \mathbf{k}_n \frac{1+mK_n(\alpha, \alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k}. \quad (3.1.4)$$

Así pues, $\{U_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_3 . ■

Si el funcional \mathcal{L} es definido positivo y $m > 0$, entonces $1+mK_n(\alpha, \alpha) > 0$ para todo $n \geq 0$. En consecuencia \mathcal{L}_3 es también definido positivo.

En este caso, sea $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios ortonormales con respecto a \mathcal{L}_3 . Para encontrar una expresión de los elementos de la familia $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ en términos de $\{U_n\}_{n \geq 0}$, debemos obtener la norma de U_n respecto a \mathcal{L}_3 . Así, de (3.1.4)

$$\|U_n\|_{\mathcal{L}_3}^2 = \mathcal{L}_3(U_n, U_n) = \frac{1}{\kappa_n^2} \frac{1+mK_n(\alpha, \alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_n(z) &= \left(\frac{1}{\kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}_3}} \right) \varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{mP_n(\alpha)}{\|U_n\|_{\mathcal{L}_3} (1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))} \overline{\varphi_j(\alpha)} \varphi_j(z) \\ &= \left(\sqrt{\frac{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}{1+mK_n(\alpha, \alpha)}} \right) \varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_n(\alpha, \alpha))(1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}} \varphi_j(z). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

De esta manera, hemos demostrado la siguiente

Proposición 3.1.2 *Sea $L_{\sigma\varphi}$ una matriz triangular inferior tal que $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$, donde $\sigma(z) = [\sigma_0(z), \sigma_1(z), \dots]^t$ y $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$. Entonces las entradas*

de $L_{\sigma\varphi}$ están dadas por

$$(L_{\sigma\varphi})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}{1+mK_n(\alpha, \alpha)}}, & n = j, \\ -\frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_n(\alpha, \alpha))(1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Para calcular $L_{\sigma\varphi}^{-1}$, hacemos

$$P_n(z) = U_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} U_j(z),$$

donde $\gamma_{n,j}$, $0 \leq j \leq n-1$, son los coeficientes de Fourier dados por

$$\gamma_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(P_n, U_j)}{\mathcal{L}_3(U_j, U_j)} = \frac{\mathcal{L}(P_n, U_j) + mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}_3}^2} = \frac{mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}_3}^2}.$$

Así pues, para las familias correspondientes de polinomios ortonormales se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}_3} \sigma_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}_3}} \sigma_j(z) \\ &= \sqrt{\frac{1+mK_n(\alpha, \alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}} \sigma_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha, \alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha, \alpha))}} \sigma_j(z). \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos dado la demostración de la siguiente

Proposición 3.1.3 Las entradas de la matriz $L_{\sigma\varphi}^{-1}$ están dadas por

$$(L_{\sigma\varphi}^{-1})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+mK_n(\alpha, \alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}}, & n = j, \\ \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha, \alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha, \alpha))}}, & n > j \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Ahora, queremos establecer una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_σ asociadas a \mathcal{L} y \mathcal{L}_3 , respectivamente. Para ello podemos usar los resultados presentados en la Sección 2.5 del Capítulo 2, observando lo siguiente

Si al funcional bilineal \mathcal{L}_3 le aplicamos la transformación definida en (2.4.6), se tiene

$$|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_3 = |z - \alpha|^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}_2. \quad (3.1.6)$$

Sabemos, por la Proposición 2.5.10 que

$$H_\psi - \alpha I = ML,$$

donde M es la matriz cuasi-unitaria dada por (2.5.2) y L es una matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$.

Teniendo en cuenta (3.1.6), podemos entonces aplicar el mismo proceso con el funcional bilineal \mathcal{L}_3 . De esta forma, para las familias de polinomios ortonormales $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ asociadas a \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_2 , respectivamente, tenemos las relaciones siguientes

$$(z - \alpha)\psi(z) = M_3\sigma(z) \quad \text{y} \quad \sigma(z) = L_3\psi(z).$$

Entonces, por la Proposición 2.5.10, $H_\psi - \alpha I = M_3L_3$.

Proposición 3.1.4

$$L_3 = L_{\sigma\varphi}L \quad \text{y} \quad M_3 = ML_{\sigma\varphi}^{-1}. \quad (3.1.7)$$

Demostración: Dado que $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$ y $\varphi(z) = L\psi(z)$, entonces se tiene $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}L\psi(z)$.

Por otra parte, como $\sigma(z) = L_3\psi(z)$, entonces obtenemos $L_3 = L_{\sigma\varphi}L$.

Ahora, dado que $H_\psi - \alpha I = ML = M_3L_3$, entonces

$$M_3 = MLL_3^{-1} = ML(L^{-1}L_{\sigma\varphi}^{-1}) = ML_{\sigma\varphi}^{-1}.$$

■

De esta manera, para calcular $H_\sigma - \alpha I$ partiendo de $H_\psi - \alpha I$, necesitamos obtener las matrices M y L definidas en (2.5.3) y (2.5.4), respectivamente. Luego calculamos M_3 y L_3 mediante las expresiones (3.1.4) y, finalmente, hacemos $H_\sigma - \alpha I = L_3M_3$.

El resultado análogo para las submatrices principales es el siguiente

Proposición 3.1.5 Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de $H_\varphi - \alpha I$ y consideremos la factorización $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_nQ_n$ donde R_n es una

matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria, tal que $(H_\sigma - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$. Entonces

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11} R_n Q_n \hat{L}_{11}^{-1} \right)_{n-1},$$

donde \hat{L}_{11} es la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de la matriz $L_{\sigma\varphi}$, que satisface $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$.

Demostración: Consideremos la factorización $H_\sigma - \alpha I = LM$, y sean L_{11} , M_{11} las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de L y M , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} (M_3)_n &= M_{11} \hat{L}_{11}^{-1} + M_{12} L_{21} \quad \text{y} \\ (L_3)_n &= \hat{L}_{11} L_{11} \end{aligned}$$

donde $L_{\sigma\varphi}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L}_{11}^{-1} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array} \right]$. Por lo tanto,

$$(L_3 M_3)_n = \hat{L}_{11} L_{11} \left(M_{11} \hat{L}_{11}^{-1} + M_{12} L_{21} \right),$$

pero $\hat{L}_{11} L_{11} M_{11} \hat{L}_{11}^{-1}$ y $(L_3 M_3)_n$ difieren en la última fila. en consecuencia,

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = (L_3 M_3)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11} L_{11} M_{11} \hat{L}_{11}^{-1} \right)_{n-1}.$$

Así,

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11} R_n Q_n \hat{L}_{11}^{-1} \right)_{n-1},$$

ya que $R_n Q_n = L_{11} E^{-1} E M_{11} = L_{11} M_{11}$. ■

3.1.1. Ejemplo

Sea \mathcal{L} el funcional bilineal dado por

$$\mathcal{L}(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi},$$

y consideremos el funcional bilineal \mathcal{L}_3 definido por

$$\mathcal{L}_3(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + p(1)\overline{q(1)}.$$

Es bien conocido que $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ con $\varphi_n(z) = z^n$, es la sucesión de polinomios ortonormales asociados a \mathcal{L} . En consecuencia $1 + K_n(1, 1) = n + 2$, para todo $n \geq 0$.

De (2.5.5) y (2.5.6) obtenemos las entradas $m_{k,j}$ de M y $l_{k,j}$ de L , respectivamente

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}, & \text{si } j \leq k, \\ \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1, \end{cases} \quad \text{y} \quad l_{k,j} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{k}{k+1}}, & \text{si } j = k-1, \\ \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j < k+1, \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases}$$

Las entradas $(L_{\sigma\varphi})_{k,j}$ y $(L_{\sigma\varphi}^{-1})_{k,j}$ de las matrices triangulares inferiores $L_{\sigma\varphi}$ y $L_{\sigma\varphi}^{-1}$, son, respectivamente

$$(L_{\sigma\varphi})_{k,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, & \text{si } k = j, \\ -\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, & \text{si } k > j, \end{cases} \quad (L_{\sigma\varphi}^{-1})_{k,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}, & \text{si } k = j, \\ \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, & \text{si } k > j. \end{cases}$$

El siguiente paso es calcular L_3 y M_3 , que se deduce de (3.1.7), y en consecuencia, las entradas de M_3 son

$$(M_3)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{(k+2)(k+1)}, & \text{si } j = k, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1 \text{ ó } j < k, \end{cases}$$

y las entradas de L_3 son

$$(L_3)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{k+1}{\sqrt{k(k+2)}}, & \text{si } j = k-1, \\ 1, & \text{si } j = k, \\ -\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)(j+2)}}, & \text{si } j < k-1, \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases}$$

Finalmente, para obtener $H_\sigma - I$, necesitamos hacer la multiplicación de L_3 por M_3 , del cual obtenemos

$$(H_\sigma - I)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{(k+1)(k+2)} - 1, & \text{si } j = k, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1, \\ -\frac{j+3}{(j+2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)}}, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

3.2. Transformación $\mathcal{L}_4(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\bar{q}(\bar{\alpha})$

Consideremos ahora la transformación \mathcal{L}_4 del funcional bilineal \mathcal{L} definida por

$$\mathcal{L}_4(p, q) = \mathcal{L}(p, q) + mp(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\bar{q}(\bar{\alpha}), \quad (3.2.1)$$

con $|\alpha| \neq 1$ y $m \in \mathbb{C}$. El funcional bilineal \mathcal{L}_4 es también hermitiano.

Proposición 3.2.1 *El funcional bilineal \mathcal{L}_4 es cuasi-definido si y sólo si*

$$\Lambda_n := \begin{vmatrix} 1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha, \alpha) \\ mK_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \neq 0,$$

para todo $n \geq 0$, o equivalentemente,

$$\begin{vmatrix} K_n(\alpha, \alpha) & \frac{1}{m} + K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) \\ \frac{1}{\bar{m}} + K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) & K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración: Supongamos que \mathcal{L}_4 es cuasi-definido, y sea $\{V_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_4 . Entonces

$$V_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z),$$

donde

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(V_n, P_j)}{\mathcal{L}(P_j, P_j)} = -\frac{mV_n(\alpha)\bar{P}_j(\alpha^{-1}) + \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{P_j(\alpha)}}{\mathbf{k}_j}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_n(z) &= P_n(z) - mV_n(\alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{P_j(\bar{\alpha}^{-1})} P_j(z) - \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z) \\ &= P_n(z) - mV_n(\alpha) K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) - \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1}) K_{n-1}(z, \alpha). \end{aligned}$$

Ahora, si evaluamos la expresión anterior en $z = \alpha$ y $z = \bar{\alpha}^{-1}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} -P_n(\alpha) + (1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})) V_n(\alpha) + \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0, \\ -P_n(\bar{\alpha}^{-1}) + mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) V_n(\alpha) + (1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)) V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0. \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha, \alpha) \\ mK_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n(\alpha) \\ V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la unicidad de los valores $V_n(\alpha)$ y $V_n(\bar{\alpha}^{-1})$, entonces, la matriz del sistema lineal anterior

$$B_{n-1} := \begin{bmatrix} 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{bmatrix}$$

debe ser no singular. En consecuencia $\Lambda_n = \det B_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Supongamos ahora que $\Lambda_n \neq 0$, para todo $n \geq 0$, y consideremos el polinomio mónico

$$V_n(z) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} P_n(z) & mK_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(z, \alpha) \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Para $0 \leq k \leq n-1$ obtenemos

$$\mathcal{L}_4(V_n(z), (z - \alpha)^k) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathcal{L}_4(P_n(z), (z - \alpha)^k) & m\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), (z - \alpha)^k) & \bar{m}\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \alpha), (z - \alpha)^k) \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}.$$

Por otra parte, para $0 \leq k \leq n-1$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(P_n(z), (z - \alpha)^k) &= mP_n(\alpha)(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k, \\ \mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), (z - \alpha)^k) &= (\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k (1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})), \\ \mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \alpha), (z - \alpha)^k) &= mK_{n-1}(\alpha, \alpha)(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(V_n(z), (z - \alpha)^k) &= \\ &= \frac{m(\bar{\alpha}^{-1} - \bar{\alpha})^k}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(V_n, V_n) &= \mathcal{L}_4(V_n, P_n) = \\ &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathcal{L}_4(P_n, P_n) & m\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), P_n) & \bar{m}\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \alpha), P_n) \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pero,

$$\mathcal{L}_4(P_n, P_n) = \mathbf{k}_n + mP_n(\alpha)\overline{P_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}P_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{P_n(\alpha)},$$

$$\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), P_n) = mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})\overline{P_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})\overline{P_n(\alpha)},$$

$$\mathcal{L}_4(K_{n-1}(z, \alpha), P_n) = mK_{n-1}(\alpha, \alpha)\overline{P_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)\overline{P_n(\alpha)}.$$

de esta manera tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(V_n, V_n) &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -\overline{mP_n(\alpha^{-1})} & -\overline{\bar{m}P_n(\alpha)} \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -\overline{mP_n(\alpha^{-1})} & -\overline{\bar{m}P_n(\alpha)} \\ 0 & 1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha, \alpha) \\ 0 & mK_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{k}_n \frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

■

Como consecuencia inmediata se tiene

Corolario 3.2.2 *Si \mathcal{L} es un funcional bilineal definido positivo, entonces, el funcional bilineal \mathcal{L}_4 es definido positivo si y sólo si $\Lambda_{n+1}\Lambda_n > 0$, para todo $n \geq 0$.*

Bajo esa condición, sea $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a \mathcal{L}_4 . Entonces $\phi_n(z) = \frac{1}{\|V_n\|} V_n(z)$, donde

$$\|V_n\| = \|P_n\| \sqrt{\frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}}}. \tag{3.2.4}$$

En lo sucesivo, vamos a suponer que $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposición 3.2.3 *Sea $L_{\phi\varphi}$ la matriz triangular inferior tal que $\phi(z) = L_{\phi\varphi}\varphi(z)$, donde $\phi(z) = [\phi_0(z), \phi_1(z), \dots]^t$ y $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$. Entonces, las entradas*

de $L_{\phi\phi}$ están dadas por

$$(L_{\phi\phi})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}, & n = j, \\ -\frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)} \right), & n > j, \\ 0, & n < j, \end{cases}$$

donde $A_n(z) := \varphi_n(z) + m\varphi_n(z)K_{n-1}(\bar{z}^{-1}, z) - m\varphi_n(\bar{z}^{-1})K_{n-1}(z, z)$. Las entradas de la matriz $L_{\phi\phi}^{-1}$ son

$$(L_{\phi\phi}^{-1})_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(\Lambda_{n-1} + m\varphi_n(\alpha)\overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + m\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_n(\alpha)} \right), & n = j, \\ \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}} \left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)} \right), & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Demostración: Podemos expresar $V_n(z)$ en términos de $\{P_n\}_{n \geq 0}$

$$V_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} P_j(z),$$

donde $\gamma_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(V_n, P_j)}{\|P_j\|^2}$, $0 \leq j \leq n-1$.

Así, de (3.2.4), para los polinomios ortonormales, se tiene

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} \varphi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} \|P_j\| \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} \varphi_j(z). \quad (3.2.5)$$

Por (3.2.1) y la condición de ortogonalidad de V_n con respecto a \mathcal{L}_4

$$\begin{aligned} \gamma_{n,j} &= -\frac{m}{\|P_j\|^2} \left(V_n(\alpha)\overline{P_j(\bar{\alpha}^{-1})} + V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{P_j(\alpha)} \right) \\ &= -\frac{m}{\|P_j\|} \left(V_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, de (3.2.2)

$$V_n(\alpha) = \frac{\|P_n\|}{\Lambda_{n-1}} A_n(\alpha) \quad \text{y} \quad V_n(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{\|P_n\|}{\Lambda_{n-1}} A_n(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Así, si $n > j$ se tiene

$$(L_{\phi\phi})_{n,j} = \gamma_{n,j} \|P_j\| \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} = -\frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)} \right).$$

De (3.2.5), obtenemos $(L_{\phi\varphi})_{n,n} = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}$.

Por otra parte

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^n \beta_{n,j} \phi_j(z),$$

con $\beta_{n,j} = \mathcal{L}_4(\varphi_n, \phi_j)$.

Así,

$$\beta_{n,j} = \mathcal{L}(\varphi_n, \phi_j) + m\varphi_n(\alpha)\overline{\phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + m\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\phi_j(\alpha)}.$$

De (3.2.2) y (3.2.4), se tiene

$$\phi_j(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}}A_j(\alpha) \quad \text{y} \quad \phi_j(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}}A_j(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Por tanto, si $n > j$

$$\tilde{l}_{n,j}^{(-1)} = \beta_{n,j} = \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}} \left(\varphi_n(\alpha)\overline{A_j(\bar{\alpha}^{-1})} + \varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_j(\alpha)} \right),$$

y, si $n = j$

$$\tilde{l}_{n,n}^{(-1)} = \beta_{n,n} = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} + \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(\varphi_n(\alpha)\overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_n(\alpha)} \right).$$

■

Notemos que, al igual que la sección anterior, si aplicamos a \mathcal{L}_4 la transformación descrita en (2.4.6), es decir, si hacemos $|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_4$, resulta

$$|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_4 = |z - \alpha|^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}_2. \tag{3.2.6}$$

Por la Proposición 2.5.4, se tiene

$$H_\varphi - \alpha I = LM,$$

donde M es la matriz cuasi-unitaria dada en (2.5.3) y L es la matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Además, de la Proposición 2.5.10, se tiene $H_\psi - \alpha I = ML$.

Por tanto, teniendo en cuenta (3.2.6), podemos aplicar el mismo procedimiento al funcional bilineal \mathcal{L}_4 . De esta manera, las familias de polinomios ortonormales $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_2 , respectivamente, satisfacen

$$(z - \alpha)\psi(z) = M_4\sigma(z) \quad \text{y} \quad \sigma(z) = L_4\psi(z).$$

Finalmente, de la proposición 2.5.10, deducimos

$$H_\psi - \alpha I = M_4 L_4.$$

Proposición 3.2.4

$$L_4 = L_{\phi\varphi} L \text{ y } M_4 = M L_{\phi\varphi}^{-1}, \quad (3.2.7)$$

donde M está dada por (2.5.3) y L es la matriz triangular inferior definida en (2.5.4).

La versión para el caso de las submatrices principales se muestra a continuación

Proposición 3.2.5 Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de $H_\varphi - \alpha I$ y consideremos la factorización $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_n Q_n$ donde R_n es una matriz triangular inferior, y Q_n es una matriz unitaria tal que $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$. Entonces

$$\left(H_\phi - \alpha I \right)_{n-1} = \left(L_{11} R_n Q_n L_{11}^{-1} \right)_{n-1},$$

donde L_{11} es la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de la matriz $L_{\phi\varphi}$, que satisface $\phi = L_{\phi\varphi}\varphi$.

Demostración: Es análoga a la demostración de la Proposición 3.1.5. ■

Capítulo 4

Transformación de Geronimus y funcionales definidos positivos

Sea \mathcal{S} un funcional lineal hermitiano definido positivo. Como hemos visto anteriormente, el funcional \mathcal{S} admite una representación integral de la forma

$$\mathcal{S}(p) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) d\mu(\theta), \quad p \in \mathbb{P},$$

donde μ es una medida no trivial de probabilidad soportada en la circunferencia unidad \mathbb{T} . Debido al carácter hermitiano del funcional \mathcal{S} , podemos definir un producto escalar

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} d\mu(\theta), \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto a μ y $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ la correspondiente familia de polinomios ortonormales. De (2.1.2) se tiene

$$\varphi_n(z) = \kappa_n(\mu) P_n(z), \quad n \geq 0.$$

Las funciones

$$q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{t-z} d\mu(z), \quad t \notin \mathbb{T}, \quad j \geq 0, \quad (4.0.1)$$

se denominan *funciones de segunda especie* asociadas a μ . A partir de estas funciones, definimos

$$Q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{P_j(z)}}{t-z} d\mu(z) = \frac{1}{\kappa_j(\mu)} q_j(t).$$

Ahora, dado $\alpha \notin \mathbb{T}$, consideremos la siguiente perturbación de la medida μ

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2}. \quad (4.0.2)$$

Esta clase de perturbación fue estudiada en [20], así como la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Este tipo de perturbación es un ejemplo de transformación canónica de Geronimus de la medida μ .

Sean $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en \mathbb{T} con respecto a μ_1 y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ su correspondiente familia de polinomios ortonormales. Nuevamente, vamos a estudiar la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ asociadas con el operador multiplicación por z , respecto a $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$.

4.1. Resultados preliminares

Nuestro primer objetivo es encontrar una expresión para obtener la familia $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ en términos de la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$.

Proposición 4.1.1 *Sea $\varepsilon_n(\alpha) = \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^n |q_l(\alpha)|^2$, $n \geq 0$. Entonces*

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \varepsilon_{n-1}(\alpha), \quad n \geq 1. \quad (4.1.1)$$

Notemos que $\|\mu_1\| = \Delta_0(\mu_1)$.

Demostración: Si consideramos la familia $\{1, z-\alpha, \dots, (z-\alpha)^n, \dots\}$ y definiendo

$$d_{k,j}(\mu) = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^k \overline{(z-\alpha)^j} d\mu = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^{k+1} \overline{(z-\alpha)^{j+1}} d\mu = d_{k+1,j+1}(\mu_1),$$

con $k, j \geq 0$, entonces los polinomios ortogonales mónicos $P_n(z)$ están dados por

$$P_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(\mu)} \begin{vmatrix} d_{0,0}(\mu) & d_{1,0}(\mu) & \cdots & d_{n,0}(\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n-1}(\mu) & d_{1,n-1}(\mu) & \cdots & d_{n,n-1}(\mu) \\ 1 & z-\alpha & \cdots & (z-\alpha)^n \end{vmatrix},$$

donde

$$\Delta_n(\mu_1) = \begin{vmatrix} d_{0,0}(\mu_1) & \cdots & d_{n,0}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{0,n}(\mu_1) & \cdots & d_{n,n}(\mu_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{0,0}(\mu_1) & d_{1,0}(\mu_1) & \cdots & d_{n,0}(\mu_1) \\ d_{0,1}(\mu_1) & d_{0,0}(\mu) & \cdots & d_{n-1,0}(\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n}(\mu_1) & d_{0,n-1}(\mu) & \cdots & d_{n-1,n-1}(\mu) \end{vmatrix}.$$

Si usamos la identidad de Sylvester (ver [25], pag. 22), entonces obtenemos

$$\Delta_n(\mu_1)\Delta_{n-2}(\mu) = \Delta_{n-1}(\mu_1)\Delta_{n-1}(\mu) - \left(\frac{\Delta_{n-2}(\mu)}{\kappa_{n-1}(\mu)}\right)^2 |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geq 1.$$

De ahí, deducimos

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu_1)}{\Delta_{n-2}(\mu)} - |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geq 1.$$

De esta manera

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \Delta_0(\mu_1) - \sum_{l=0}^{n-1} |q_l(\alpha)|^2, \quad n \geq 1.$$

Dado que $\Delta_0(\mu_1) = \|\mu_1\|$, el enunciado queda demostrado. ■

A continuación, como consecuencia del resultado anterior, se tiene

Corolario 4.1.2

$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geq 0,$$

donde $\varepsilon_{-1}(\alpha) = \|\mu_1\|$.

Demostración: Es fácil comprobar que

$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_{n+1}(\mu_1)}{\Delta_n(\mu)} \frac{\Delta_{n-1}(\mu)}{\Delta_n(\mu_1)},$$

y usando (4.1.1) en la proposición anterior, obtenemos

$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geq 1.$$

Si $n = 0$, entonces se tiene

$$\left(\frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_1(\mu_1)}{\Delta_0(\mu_1)\Delta_0(\mu)} = \frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}.$$

■

Proposición 4.1.3 *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ se pueden obtener mediante la relación*

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = (z - \alpha)P_n(z) + \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}S_n(z, \alpha), \quad n \geq 1, \quad (4.1.2)$$

$$\tilde{P}_0(z) = 1, \quad \tilde{P}_1(z) = z - \alpha + \frac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|},$$

donde

$$S_n(z, \alpha) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z-t}{\alpha-t} K_{n-1}(z, t) d\mu(t), \quad n \geq 1, \quad (4.1.3)$$

y $K_{n-1}(z, \alpha)$ es el núcleo reproductor de grado $n-1$ asociado a la familia $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$.

Demostración: Como $\{(z - \alpha)\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ es una base ortonormal en $(z - \alpha)\mathbb{P}$ con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{\mu_1} = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\mu_1,$$

entonces el desarrollo de Fourier del polinomio $\psi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(\alpha)$ en términos de la base mencionada es

$$\psi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(\alpha) = (z - \alpha) \sum_{j=0}^n \lambda_{n+1,j} \varphi_j(z), \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1,j} &= \int_{\mathbb{T}} (\psi_{n+1}(t) - \psi_{n+1}(\alpha)) \overline{(t - \alpha)\varphi_j(t)} d\mu_1(t) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \psi_{n+1}(t) \overline{(t - \alpha)\varphi_j(t)} d\mu_1(t) - \psi_{n+1}(\alpha) \int_{\mathbb{T}} \overline{(t - \alpha)\varphi_j(t)} d\mu_1(t) \\ &= \frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} \delta_{n,j} + \psi_{n+1}(\alpha) \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha - t} d\mu(t). \end{aligned}$$

Así obtenemos,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(z) &= \psi_{n+1}(\alpha) \left(1 + (z - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha - t} \varphi_j(z) d\mu(t) \right) + \\ &\quad + \left[\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} + q_n(\alpha) \psi_{n+1}(\alpha) \right] (z - \alpha) \varphi_n(z) \\ &= \psi_{n+1}(\alpha) \int_{\mathbb{T}} \frac{z-t}{\alpha-t} K_{n-1}(z, t) d\mu(t) + \\ &\quad + \left[\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} + q_n(\alpha) \psi_{n+1}(\alpha) \right] (z - \alpha) \varphi_n(z). \end{aligned}$$

Si re-escribimos la expresión anterior en términos de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$, tenemos

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = \tilde{P}_{n+1}(\alpha)S_n(z, \alpha) + \left(\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} \right)^2 + \kappa_n(\mu)^2 Q_n(\alpha) \tilde{P}_{n+1}(\alpha) \right) (z - \alpha)P_n(z). \quad (4.1.4)$$

Notemos que $S_n(z, \alpha; \mu)$ es un polinomio de grado n . Entonces, para cada $n \geq 0$, teniendo en cuenta los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de (4.1.4), se deduce

$$\frac{1}{\kappa_n(\mu)} - \frac{1}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} = Q_n(\alpha)\tilde{P}_{n+1}(\alpha), \quad (4.1.5)$$

y del corolario 4.1.2,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n+1}(\alpha) &= \left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} \right)^2 \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_n(\alpha)} \\ &= \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (4.1.4), obtenemos

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = (z - \alpha)P_n(z) + \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}S_n(z, \alpha; \mu).$$

■

Nota 4.1.4 Si usamos en (4.1.3) la fórmula de Christoffel-Darboux (2.1.8), entonces la sucesión $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ satisface

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = \left(z - \alpha \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \right) P_n(z) + \frac{\overline{q_n(\alpha)q_n(\bar{\alpha}^{-1})}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\alpha^{n+1}} P_n^*(z), \quad n \geq 1. \quad (4.1.6)$$

Este resultado se puede ver con más detalle en [20].

4.2. Matrices de Hessenberg y la transformación de Geronimus

Con el fin de obtener una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ , la expresión (4.0.2), es equivalente a

$$d\mu = |z - \alpha|^2 d\mu_1. \quad (4.2.1)$$

En [13] se ha obtenido una relación entre dichas matrices

$$H_\psi - \alpha I = LM, \quad \text{y} \quad H_\varphi - \alpha I = ML, \quad (4.2.2)$$

donde L es una matriz triangular inferior, tal que

$$\psi(z) = L\varphi(z)$$

y M es una matriz de Hessenberg inferior que satisface

$$(z - \alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$ y $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \dots]^t$.

Por tanto, nuestro segundo objetivo es encontrar expresiones explícitas para M y L .

Proposición 4.2.1 ([37]) *Las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen*

$$(z - \alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$, $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \dots]^t$, y M es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}}, & \text{si } j = 0, k \geq 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}, & \text{si } k = 0, j = 1, \\ -\frac{q_k(\alpha)q_0(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)}}, & \text{si } j = 1, k \geq 1, \\ -\frac{q_k(\alpha)q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}, & \text{si } 2 \leq j \leq k, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & \text{si } j = k + 1, \\ 0, & \text{si } j > k + 1. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Demostración: Teniendo en cuenta (4.1.2) para $n = 0$, obtenemos

$$\tilde{P}_1(z) - \frac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|} \tilde{P}_0(z) = (z - \alpha)P_0(z)$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\psi_1(z) - \frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|^{\frac{1}{2}}}\psi_0(z) = (z - \alpha)\varphi_0(z).$$

Ahora, para $n = 1$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2(z) - \beta_2 \frac{\|\mu_1\|}{Q_0(\alpha)} \tilde{P}_1(z) &= (z - \alpha) \left[P_1(z) + \beta_2 \left(q_0(\alpha)\varphi_0(z) - \frac{\|\mu_1\|}{Q_0(\alpha)} P_0(z) \right) \right] \\ \tilde{P}_2(z) - \frac{\overline{Q_1(\alpha)}\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)Q_0(\alpha)} \tilde{P}_1(z) &= (z - \alpha) \left[P_1(z) - \left(\frac{\overline{Q_1(\alpha)}}{q_0(\alpha)} \right) \varphi_0(z) \right].\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\kappa_1(\mu)}{\kappa_2(\mu_1)}\psi_2(z) - \frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)} \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{q_0(\alpha)} \frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\psi_1(z) = (z - \alpha) \left(\varphi_1(z) - \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{q_0(\alpha)}\varphi_0(z) \right).$$

Finalmente, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \tilde{P}_n(z) &= (z - \alpha) \left[P_n(z) - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} P_{n-1}(z) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{n+1} q_{n-1}(\alpha) \varphi_{n-1}(z) \right], \\ \tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\overline{Q_n(\alpha)}\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{Q_{n-1}(\alpha)\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \tilde{P}_n(z) &= (z - \alpha) \left[P_n(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\kappa_{n-1}(\mu)Q_{n-1}(\alpha)} - q_{n-1}(\alpha) \right) \varphi_{n-1}(z) \right],\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{Q_{n-1}(\alpha)} \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \tilde{P}_n(z) &= (z - \alpha) \left[P_n(z) \right. \\ &\quad \left. - \beta_{n+1} \left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{q_{n-1}(\alpha)} - q_{n-1}(\alpha) \right) \varphi_{n-1}(z) \right].\end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\kappa_{n-1}(\mu)}{\kappa_n(\mu)} \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{q_{n-1}(\alpha)} \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)(\mu)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)(\mu_1)} \tilde{P}_n(z) = (z - \alpha) \left[P_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\kappa_n(\mu)q_{n-1}(\alpha)} \varphi_{n-1}(z) \right].$$

o, equivalentemente, para los polinomios ortonormales

$$\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu)}\psi_{n+1}(z) - \frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n-1}(\mu)}\frac{\overline{q_n(\alpha)}}{q_{n-1}(\alpha)}\psi_n(z) = (z - \alpha)\left[\varphi_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{q_{n-1}(\alpha)}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

De esta forma, teniendo en cuenta el Corolario 4.1.2

$$\left(\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2}\psi_{n+1}(z) - \left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2}\frac{\overline{q_n(\alpha)}}{q_{n-1}(\alpha)}\psi_n(z) = (z - \alpha)\left[\varphi_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{q_{n-1}(\alpha)}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

Si representamos las expresiones anteriores en forma matricial, se obtiene

$$(z - \alpha)\tilde{M}\varphi(z) = \hat{M}\psi(z), \quad (4.2.4)$$

donde \tilde{M} y \hat{M} son matrices bidiagonales inferior y superior respectivamente, con entradas

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{q_{k-1}(\alpha)}, & j = k - 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \hat{m}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}}, & j = k = 0, \\ -\frac{q_1(\alpha)}{q_0(\alpha)}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}, & j = k = 1, \\ -\frac{q_k(\alpha)}{q_{k-1}(\alpha)}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j = k \geq 2, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}, & k = 0, j = 1, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j = k + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que \tilde{M} es una matriz no singular. Por tanto, la expresión (4.2.4) es equivalente a

$$(z - \alpha)\varphi(z) = \tilde{M}^{-1}\hat{M}\psi(z).$$

Como consecuencia,

$$M = \tilde{M}^{-1}\hat{M}. \quad (4.2.5)$$

\tilde{M}^{-1} es una matriz triangular inferior con entradas $\tilde{m}_{k,j}^{(-1)}$ dadas por

$$\tilde{m}_{k,j}^{(-1)} = \begin{cases} \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{q_j(\alpha)}, & 0 \leq j \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, la multiplicación en (4.2.5) produce (4.2.3). ■

Por otra parte, la matriz M es cuasi-unitaria (ver [36]). De hecho se tiene

Proposición 4.2.2

(i) $MM^* = I$

(ii) $M^*M = I - \varepsilon_\infty(\alpha)\psi(\alpha)\psi(\alpha)^*$ donde

$$\varepsilon_\infty(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\alpha) = \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \geq 0,$$

Demostración: (i)

$$\begin{aligned} I &= \langle \varphi(z), \varphi(z)^t \rangle_\mu \\ &= \langle (z - \alpha)\varphi(z), (z - \alpha)\varphi(z)^t \rangle_{\mu_1} \\ &= \langle M\psi(z), \psi(z)^t M^t \rangle_{\mu_1} \\ &= M \langle \psi(z), \psi(z)^t \rangle_{\mu_1} M^* = MM^* \end{aligned}$$

(ii)

$$(M^*)_{(0)}M^{(0)} = \kappa_0(\mu_1)^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 = 1 - \frac{\varepsilon_\infty(\alpha)}{\|\mu_1\|}$$

$$\begin{aligned} (M^*)_{(1)}M^{(1)} &= \frac{1}{\varepsilon_0(\alpha)} \left(\varepsilon_0(\alpha)^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha)} \left(\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha) - \|\mu_1\||q_0(\alpha)|^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= 1 - \frac{|q_0(\alpha)|^2}{\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha)} \varepsilon_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

Para $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} (M^*)_{(j)}M^{(j)} &= \frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)} \left(1 + \frac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2} \sum_{l=j}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)} \left(\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2 + |q_{j-1}(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= 1 - \frac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)} \varepsilon_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

$$(M^*)_{(0)}M^{(1)} = -\frac{q_0(\alpha)}{\|\mu_1\| \sqrt{\|\mu_1\| - |q_0(\alpha)|^2}} \varepsilon_\infty(\alpha).$$

Para $j \geq 2$,

$$\begin{aligned}
(M^*)_{(0)}M^{(j)} &= -\frac{q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha) \\
(M^*)_{(1)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right] \\
&= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).
\end{aligned}$$

Finalmente, para $2 \leq k < j$,

$$\begin{aligned}
(M^*)_{(k)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right] \\
&= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).
\end{aligned}$$

Dado que $\tilde{P}_{n+1}(\alpha) = \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}$ con $n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(\alpha) &= \frac{\kappa_{n+1}(\mu_1)\overline{q_n(\alpha)}}{\kappa_n(\mu)\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \\
&= \frac{q_n(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\varepsilon_n(\alpha)}}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

■

Ahora, sea L la matriz triangular inferior tal que $\psi(z) = L\varphi(z)$. Entonces, teniendo en cuenta (4.2.4), obtenemos

$$\hat{M}L = \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I). \quad (4.2.6)$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} := \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I)$ están dadas por

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_1(0)\overline{\varphi_0(0)}}{\kappa_1(\mu)\kappa_0(\mu)}, & j = k = 0, \\ -\frac{\kappa_{k-1}(\mu)\overline{q_k(\alpha)}}{\kappa_k(\mu)\overline{q_{k-1}(\alpha)}} - \frac{\varphi_{k+1}(0)\overline{\varphi_k(0)}}{\kappa_k(\mu)\kappa_{k+1}(\mu)}, & j = k, \\ \frac{\kappa_k(\mu)}{\kappa_{k+1}(\mu)}, & j = k + 1, \\ \frac{\overline{\varphi_j(0)}}{\kappa_k(\mu)} \left(\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{q_{k-1}(\alpha)} \frac{\varphi_k(0)}{\kappa_{k-1}(\mu)} - \frac{\varphi_{k+1}(0)}{\kappa_{k+1}(\mu)} \right), & j \leq k - 1, \\ 0, & j > k + 1, \end{cases}$$

y las entradas $\hat{l}_{k,j}$ de $\hat{L} = \hat{M}L$ son

$$\hat{l}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}} l_{0,0} + \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_1(\alpha)}}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,0}, & j = k = 0, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,1} + \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_1(\alpha)}}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{2,1}, & j = k = 1, \\ \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|}} l_{1,1}, & k = 0, j = 1, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,0} + \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_1(\alpha)}}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{2,0}, & k = 1, j = 0, \\ \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|}} l_{1,1}, & k = 0, j = 1, \\ \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_k(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k+1,k+1}, & j = k + 1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}} \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k,j} + \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_k(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k+1,j}, & j \leq k, \\ 0, & j > k + 1. \end{cases}$$

Dado que $l_{0,0} = \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\|\mu_1\|}}$ y teniendo en cuenta (4.2.6), las entradas $l_{k,j}$ de L satisfacen

$$\begin{aligned} l_{1,0} &= \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{0,0} + \frac{\overline{q_0(\alpha)} \sqrt{\|\mu_1\|}}{\|\mu_1\|} \right), \\ l_{2,0} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_0(\alpha)}}{\varepsilon_1(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{1,0} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,0} \right), \\ l_{k+1,0} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}{\varepsilon_k(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{k,0} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}} \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k,0} \right), \quad k \geq 2. \\ \\ l_{1,1} &= \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} \tilde{h}_{0,1}, \\ l_{2,1} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_0(\alpha)}}{\varepsilon_1(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{1,1} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,1} \right), \\ l_{k+1,1} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}{\varepsilon_k(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{k,1} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}} \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k,1} \right), \quad k \geq 2. \\ \\ l_{k+1,k+1} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}{\varepsilon_k(\alpha)}} \tilde{h}_{k,k+1}, \quad k \geq 1, \\ l_{k+1,j} &= \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}{\varepsilon_k(\alpha)}} \left(\tilde{h}_{k,j} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}} \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k,j} \right), \quad k \geq 1, j \geq 2, j \leq k + 1. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

O, de manera más explícita,

$$l_{k,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\|\mu\|}{\|\mu_1\|}}, & \text{si } j = k = 0, \\ \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} \left(\sqrt{\|\mu\|} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{q_l(\alpha)} \tilde{h}_{l,0} \right), & \text{si } j = 0, k > 1, \\ \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{q_l(\alpha)} \tilde{h}_{l,1}, & \text{si } j = 1, k \geq 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} \tilde{h}_{k-1,k}, & \text{si } j = k \geq 1, \\ \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} \sum_{l=j-1}^k \frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{q_l(\alpha)} \tilde{h}_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Para las submatrices principales se tiene la siguiente

Proposición 4.2.3 Sean $(H_\psi - \alpha I)_n$, M_n y L_n las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de $H_\psi - \alpha I$, M y L respectivamente. Entonces

- (i) $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.
- (ii) La factorización QR de $(H_\psi - \alpha I)_n^*$ es

$$(H_\psi - \alpha I)_n^* = \hat{Q}_n^* \hat{R}_n^*,$$

donde $\hat{Q}_n = E M_n$, $\hat{R}_n = L_n E^{-1}$ y E es una matriz diagonal con entradas $E_{k,k}$ dadas por

$$E_{k,k} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-1, \\ \frac{|q_n(\alpha)|}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}}, & k = n. \end{cases}$$

Demostración: (i) La expresión (4.2.2) escrita mediante matrices por bloques, resulta ser

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= \left[\begin{array}{c|c} L_n & \mathbf{0} \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} M_n & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} L_n M_n & L_n M_{12} \\ \hline L_{21} M_n + L_{22} M_{21} & L_{21} M_{12} + L_{22} M_{22} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.

(ii) La matriz \hat{R}_n es triangular inferior con entradas positivas en su diagonal principal, de manera que, basta probar que la matriz \hat{Q}_n es unitaria. De hecho,

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(0)} = \frac{1}{\|\mu_1\|} \left(\sum_{l=0}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right) = 1,$$

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(n-1)} = \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} + \frac{|q_{n-2}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} = 1.$$

Para $1 \leq k \leq n-2$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)} \left(\sum_{l=k}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right) \\ &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|\mu_1\|} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} \left[\sum_{l=k}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right] \right) \\ &= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|\mu_1\|} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, para $1 \leq j < k \leq n-2$

$$\begin{aligned} \left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}} \left[\sum_{l=j}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right] \right) \\ &= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}} \varepsilon_{j-1}(\alpha) \right) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} = \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{n-3}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)}} \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} = 0.$$

Así pues, \hat{Q}_n es una matriz unitaria. ■

4.3. Ejemplos

Ejemplo 4.3.1 Consideremos en la circunferencia unidad, la medida

$$d\mu = |z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta},$$

donde $d\theta$ es la medida de Lebesgue. Entonces la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en \mathbb{T} respecto a μ es (véase [19], [46])

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n+1} z^k, \quad \forall n \geq 0.$$

Es fácil comprobar que

$$\kappa_n(\mu) = \left(\int_{\mathbb{T}} |P_n(z)|^2 d\mu \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

En consecuencia $\|\mu\| = 2$ y la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ es

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \sum_{k=0}^n (k+1) z^k \\ &= \frac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(z-1)^2}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora, definimos la transformación de Geronimus de la medida μ mediante

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z - \alpha|^2} = \frac{|z - 1|^2 d\theta}{|z - \alpha|^2 2\pi}, \quad |\alpha| > 1, \quad z = e^{i\theta}.$$

Entonces, se obtiene

$$\|\mu_1\| = \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1}. \quad (4.3.1)$$

De (4.0.1), obtenemos las funciones de segunda especie asociadas a μ

$$q_n(\alpha) = (1 - \alpha^{-1})^2 \varphi_n(\alpha^{-1}), \quad (4.3.2)$$

y de (4.3.1) y (4.3.2) se tiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(\alpha) &= \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^n |q_l(\alpha)|^2 \\ &= \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - |1 - \alpha^{-1}|^4 \sum_{l=0}^n |\varphi_l(\alpha^{-1})|^2 \\ &= \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - |1 - \alpha^{-1}|^4 K_n(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} \left[2|\alpha|^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) - \frac{1}{(n+1)(n+2)|\alpha|^{2(n+2)}} \left(|(n+1)\alpha^{n+3} - (n+2)\alpha^{n+1} + \alpha|^2 - |\alpha^{n+2} - (n+2)\alpha + n+1|^2 \right) \right]. \quad (4.3.3)$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & j = k = 0, \\ -\frac{k}{k+1} \left(\frac{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha} + k+1}{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha}^2 + k\bar{\alpha}} + \frac{1}{k(k+2)} \right), & j = k \geq 1, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & j = k+1, \\ \frac{\sqrt{k+1}(1 - \bar{\alpha}^{-1})^2}{\sqrt{(j+1)(j+2)(k+2)}(\bar{\alpha}^{k+1} - (k+2)\bar{\alpha} + k)}, & j \leq k-1, \\ 0, & j > k. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Las entradas $m_{k,j}$ y $l_{k,j}$ de M y L , respectivamente, se obtienen sustituyendo las expresiones (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3), y (4.3.4) en (4.2.3) y (4.2.8).

Ejemplo 4.3.2 Consideremos ahora la siguiente medida en la circunferencia unidad

$$d\mu = \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(e^{i\theta} - 1),$$

donde $m > 0$.

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos en \mathbb{T} asociados a μ es (ver [13] y [46])

$$P_n(z) = z^n - \frac{m}{1+nm} \sum_{k=0}^{n-1} z^k,$$

para todo $n \geq 1$.

Entonces, obtenemos para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \kappa_n(\mu) &= \left(\int_0^{2\pi} P_n(z) \bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + m P_n(1) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad z = e^{i\theta}, \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left(z^n - \frac{m}{1+nm} \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right) \bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{m}{1+nm} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad z = e^{i\theta}, \end{aligned}$$

Luego,

$$\kappa_n(\mu) = \sqrt{\frac{1+nm}{1+(n+1)m}}, \quad (4.3.5)$$

así como $\|\mu\| = 1+m$. La familia $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortonormales asociados a μ está dada por

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sqrt{\frac{1+nm}{1+(n+1)m}} z^n - \frac{m}{\sqrt{(1+nm)(1+(n+1)m)}} \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\ &= \frac{(1+nm)z^{n+1} - mz^n + m}{\sqrt{(1+nm)(1+(n+1)m)}(z-1)}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{m^2}{1+m}, & j = k = 0, \\ -\frac{1+(k-1)m}{1+km} \left(\frac{(1+(k+1)m)\bar{\alpha} - (1+km)}{(1+km)\bar{\alpha}^2 - (1+(k-1)m)\bar{\alpha}} + \frac{m^2}{(1+(k-1)m)(1+(k+1)m)} \right), & j = k \geq 1, \\ \frac{\sqrt{(1+km)(1+(k+2)m)}}{1+(k+1)m}, & j = k+1, \\ \frac{m}{\sqrt{(1+jm)(1+(j+1)m)(1+km)(1+(k+1)m)}} \left(\frac{(1+(k+1)m)\bar{\alpha} - (1+km)}{(1+km)\bar{\alpha}^2 - (1+(k-1)m)\bar{\alpha}} - m \right), & j \leq k-1, \\ 0, & j > k. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Sea μ_2 la transformación de Geronimus de μ , dada por

$$d\mu_2 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2} = \frac{1}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{m}{|\alpha-1|^2} \delta(z-1), \quad |\alpha| > 1, \quad z = e^{i\theta}.$$

Entonces

$$\|\mu_2\| = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \frac{m}{|\alpha - 1|^2}. \quad (4.3.7)$$

Las funciones de segunda especie asociadas a μ evaluadas en α son

$$q_n(\alpha) = \frac{(1 + (n + 1)m)\alpha - (1 + nm)}{\sqrt{(1 + nm)(1 + (n + 1)m)}(\alpha - 1)\alpha^{n+1}}. \quad (4.3.8)$$

De (4.3.7) y (4.3.8) obtenemos

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \frac{1}{|\alpha - 1|^2|\alpha|^2} \left(m|\alpha|^2 - \sum_{k=0}^n \frac{|(1 + (k + 1)m)\alpha - (1 + km)|^2}{(1 + km)(1 + (k + 1)m)|\alpha|^{2k}} \right). \quad (4.3.9)$$

Las expresiones de las entradas de las matrices M y L son muy engorrosas, pero se obtienen sustituyendo las expresiones (4.3.5), (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8), y (4.3.9) en (4.2.3) y (4.2.8).

Problemas abiertos

En el análisis de los problemas estudiados a lo largo de la memoria, surgen de manera natural una serie de cuestiones que pretendemos abordar en el futuro próximo.

1. El análisis del carácter unitario del operador de multiplicación para medidas soportadas en la circunferencia unidad está ligado al hecho de que la medida no pertenezca a la clase de Szegő. Recientemente, M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez han eliminado dicho requisito a cambio de utilizar sendas bases en el espacio de los polinomios de Laurent (véase [9], [10] y [11]). De esta forma aparece una representación de dicho operador mediante una matriz pentadiagonal (CMV matriz) cuyas propiedades espectrales permiten un estudio novedoso de la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (véase [45], [46] y [47]). Queremos abordar la repercusión de las transformaciones espectrales racionales desde esta nueva perspectiva y su conexión con la factorización de la matriz CMV tanto desde el enfoque LU como QR.
2. La transformación UL de las matrices de Jacobi da lugar a la aparición del parámetro libre en la transformación de Geronimus. En el caso estudiado en la memoria y puesto que se ha de preservar el carácter hermitiano, parece natural considerar la transformación de Uvarov en dos pasos en la línea seguida en el capítulo 2 para la transformación canónica de Christoffel. Conjeturamos que de la factorización UL de la matriz de Hessenberg inicial se sigue la dependencia uniparamétrica vinculada a la adición de la masa de Dirac.
3. En el capítulo 4 se ha abordado el análisis de un tipo particular de transformación de Geronimus que no incorpora masas de Dirac. Estamos desarro-

llando el caso general junto con el análisis de la correspondiente matriz de Hessenberg, sobre la base de preservar el carácter cuasi-definido del funcional lineal transformado.

4. Como se ha señalado en el capítulo 2, la caracterización de las transformaciones espectrales racionales que transforman una C-función en otra C-función constituye un problema abierto. En [41] se ha resuelto para el caso de funciones de Stieltjes que son transformadas de Cauchy de medidas soportadas en la recta real.
5. En [29] se aplica el método de generación de espacios de estados para matrices de momentos con estructura Hankel y Toeplitz. Parece natural analizar dicho método en el caso de matrices de momentos con una estructura derivada de las propiedades algebraicas del soporte de la medida espectral. El caso de curvas algebraicas (véase [3]) constituye un interesante proyecto de investigación dado que las entradas de la matriz de momentos satisfacen relaciones lineales.

Bibliografía

- [1] R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán, *On the Favard Theorem and its extensions*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 231–254.
- [2] A. Branquinho, L. Golinskii y F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modification of the Lebesgue measure on the unit circle. An inverse problem*, Complex Variables **38** (1999), 137–154.
- [3] C. Brezinski, *Formal orthogonality on an algebraic curve*, Annals Numer. Math. **2** (1995), 21–33.
- [4] M. I. Bueno y F. M. Dopico, *Stability and sensitivity of tridiagonal LU factorization without pivoting*, BIT **44** (2004), 651–673.
- [5] ———, *Stability and sensitivity of Darboux transformation without parameter*, Electr. Trans. on Numer. Anal. **18** (2004), 101–136.
- [6] M. I. Bueno y F. Marcellán, *Darboux transformations and perturbation of linear functionals*, Linear Alg. and Appl. **384** (2004), 215–242.
- [7] ———, *Polynomial perturbations of bilinear functionals and Hessenberg matrices*, Linear Alg. and Appl. **414** (2006), 64–83.
- [8] M. Buhmann y A. Iserles, *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm*, J. Comput. Appl. Math. **43** (1992), 117–134.
- [9] M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials*, Linear Alg. and Appl. **362** (2003), 29–56.

- [10] ———, *Minimal representations of unitary operators and orthogonal polynomials on the unit circle*, *Linear Alg. and Appl.* **408** (2005), 40–65.
- [11] ———, *Measures on the unit circle and unitary truncations of unitary operators*, *J. Approx. Theory* **139** (2006), 430–468.
- [12] T. S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [13] L. Daruis, J. Hernández y F. Marcellán, *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*, *J. Comput. Appl. Math.* **202** (2007), 155–176.
- [14] J. S. Frame, *Matrix functions and applications IV: Matrix functions and constituent matrices*, *IEEE Spectrum* **1** (1964), 123–131.
- [15] P. García Lázaro y F. Marcellán, *On zeros of regular orthogonal polynomials on the unit circle*, *Ann. Polon. Math.* **58** (1993), 287–298.
- [16] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, *Ann. of Math.* **47** (1946), 742–761.
- [17] ———, *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.
- [18] ———, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, *AMS Transl.* **1** (1962), 1–78.
- [19] E. Godoy y F. Marcellán, *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, *Boll. Un. Mat. Ital A* **5** (1991), 1–12.
- [20] ———, *Orthogonal polynomials and rational modification of measures*, *Canad. J. Math.* **45** (1993), 930–943.
- [21] L. Golinskii, P. Nevai y W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, *J. Approx. Theory* **83** (1995), 392–422.
- [22] L. Golinskii, P. Nevai, W. Van Assche y F. Pintér, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II*, *J. Approx. Theory* **96** (1999), 1–32.

- [23] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.
- [24] U. Grenander y G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, 2nd ed., University of California Press, Berkeley 1958, Chelsea, New York, 1984.
- [25] R. Horn y C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [26] M. E. H. Ismail y R. W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weights*, J. Approx. Theory **71** (1992), 39–60.
- [27] W. B. Jones, O. Njåstad y W. J. Thron, *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.
- [28] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [29] T. Kailath y B. Porat, *State-space generators for orthogonal polynomials*, Prediction Theory and Harmonic Analysis (V. Mandrekar y H. Salehi, eds.), The Pesi Massani Volume, North-Holland, 1983, 131–163.
- [30] D. H. Kim y K. H. Kwon, *Quasi-definiteness of generalized Uvarov transforms of moment functionals*, J. Appl. Math. **1** (2001), 69–90.
- [31] X. Li y F. Marcellán, *Representation of Orthogonal Polynomials for modified measures*, Comm. in the Anal. Theory of Cont. Fract. **7** (1999), 9–22.
- [32] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **30** (2006), no. 117, 563–579.
- [33] F. Marcellán y M. Alfaro, *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*, En Erice International Symposium on Orthogonal Polynomials and Their Applications, IMACS Annals on Comput. and Appl. Math. J. C. Baltzer, Basel (1991), 3–14.
- [34] F. Marcellán, A. Branquinho y J. C. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), 283–303.

- [35] F. Marcellán y A. Cachafeiro, *Orthogonal Polynomials and Jump Modifications*, En *Orthogonal Polynomials and their Applications* (M. Alfaro et al. Editors), Lect. Notes in Math. 1329, Springer Verlag, Berlin, 1988, 236–240.
- [36] F. Marcellán y J. Hernández, *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals*, *Mediterr. J. Math.* **2** (2005), 451–458.
- [37] ———, *Geronimus spectral transforms and measures on the complex plane*, *J. Comput. Appl. Math.* **219** (2008), 441–456.
- [38] F. Marcellán, F. Peherstorfer y R. Steinbauer, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials I*, *Adv. in Comput. Math.* **5** (1996), 281–295.
- [39] ———, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials II*, *Adv. in Comput. Math.* **7** (1997), 401–428.
- [40] A. F. Nikoiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics: An Unified Approach*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.
- [41] F. Peherstorfer, *Finite perturbations of orthogonal polynomials*, *J. Comput. Appl. Math.* **44** (1992), 275–302.
- [42] ———, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, *Constr. Approx.* **12** (1996), 161–185.
- [43] F. Peherstorfer y R. Steinbauer, *Characterization of orthogonal polynomials with respect to a functional*, *J. Comput. Appl. Math.* **65** (1995), 339–355.
- [44] L. Reichel, G.S. Ammar y W.B. Gragg, *Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials*, *Math. Comp.* **57** (1991), 273–289.
- [45] B. Simon, *OPUC on one foot*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (2005), 431–460.
- [46] ———, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, vol. 1 y 2, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series, vol. 54, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.
- [47] ———, *CMV matrices: five years after*, To appear in the Proceedings of the W.D. Evans 65th Birthday Conference, 2006.

-
- [48] V. Spiridonov, L. Vinet y A. Zhedanov, *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 7621–7637.
- [49] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [50] D. S. Watkins, *Some perspectives on the eigenvalue problem*, SIAM Review **35** (1993), 430–471.
- [51] G. J. Yoon, *Darboux transforms and orthogonal polynomials*, Bull. Korean Math. Soc. **39** (2002), 359–376.
- [52] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **85** (1997), 67–83.