

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“ANÁLISIS DE UN SISTEMA NO LINEAL CONTROLADO CON
LÓGICA DIFUSA MEDIANTE EL CRITERIO DE
ESTABILIDAD DE LYAPUNOV”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. LEONARDO ANTHONY PÉREZ BOLEK

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: LÓGICA DIFUSA.
TUTOR: PROF. BELKYS LÓPEZ DE LAMEDA

Barquisimeto, Venezuela. Octubre de 2008



Universidad Centroccidental
 “Lisandro Alvarado”
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“ANÁLISIS DE UN SISTEMA NO LINEAL CONTROLADO CON LÓGICA DIFUSA MEDIANTE EL CRITERIO DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV”

presentado por el ciudadano BR. LEONARDO ANTHONY PÉREZ BOLEK titular de la Cédula de Identidad No. 16.735.014, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas. Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

En primer lugar a Dios quien ha sido la fuente de sabiduría en todo momento y a esos seres tan amados a quienes debo mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Quiero eternamente agradecerles a mis padres, ya que sin su esfuerzo, mis estudios no hubiesen sido posible.

De igual manera quiero expresar mi enorme gratitud A Juan de Dios Pérez Ortega y Aracélis Acosta de Pérez por su apoyo incondicional, sus consejos y su motivación. De una manera muy especial expreso mi afecto hacia el Profesor Carlos Lameda quien fue la guía y esa mano amiga que en conjunto con la Profesora Belkys de Lameda me brindaron esa paciencia, dando todo su esfuerzo y dedicación, además de sus conocimientos en el campo de la investigación y la práctica, las cuales han sido imprescindibles para llevar a término el presente trabajo.

También quiero expresar mi mas profundo agradecimiento a mi mejor amiga y compañera Ana Beatriz, quien me impulsa siempre y me da ese motivo para querer ser alguien mejor. A mis amigos: Yankis Linares, Borys Páez por su ayuda; el tiempo, la disposición y la confianza que me brindaron. Jose Querales y Juan de Dios Pérez, quienes estuvieron en cada uno de los pasos de mi vida. De la misma manera, les agradezco a mis compañeros de clase Victoria, Gaby, Gladimar, Luis, David, Efren, Javier, Isaac, Nestor, Manuel, Rafael y Elifer por su apoyo y compañía durante mi trayectoria en la universidad.

Por último, quiero expresar mi sentimiento de aprecio y amistad a mis profesores de formación Alexander Carrasco, Edgar Guedez, Jhonny Escalona, Ismael Huerta, Jurancy Ereú, Miguel Vivas, Rómulo Bervíns y Rómulo Castillo; y a esas grandiosas mujeres de bienestar estudiantil que nos brindan ese apoyo día a día como si fuéramos sus hijos.

Gracias a todos.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

“ANÁLISIS DE UN SISTEMA NO LINEAL CONTROLADO CON
LÓGICA DIFUSA MEDIANTE EL CRITERIO DE
ESTABILIDAD DE LYAPUNOV”

POR: BR. LEONARDO ANTHONY PÉREZ BOLEK

TUTOR: PROF. BELKYS LÓPEZ DE LAMEDA

RESUMEN

Las características de estabilidad de un sistema pueden determinarse por la solución de la ecuación del sistema. Sin embargo, la estabilidad en el sentido de Lyapunov es una técnica para precisar la estabilidad de un sistema sin resolver necesariamente las ecuaciones del mismo.

A través de este trabajo se analizó un modelo matemático de un sistema no lineal a ser controlado, usando lógica difusa y conceptos de equilibrio y perturbación los cuales son fundamentales para la estabilidad.

Así mismo, se estudió el diseño de un sistema de control con lógica difusa asintóticamente estable basado en el teorema de estabilidad de Lyapunov. Además, se analizó la estabilidad del sistema no lineal con el uso de controladores difusos para lograr la estabilidad en el sentido de Lyapunov sobre un modelo matemático, creando una base de reglas a partir de condiciones obtenidas mediante el método de selección de una función candidata a ser de Lyapunov, todo esto con un mínimo conocimiento sobre la dinámica del sistema.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Propiedades fundamentales	5
1.2. Mapeo Contractivo	8
1.3. Existencia y unicidad	9
1.4. Lógica Difusa	17
2. Sistemas Autónomos	23
2.1. Punto de Equilibrio	23
3. Teoría de Estabilidad	29
4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	37
4.1. Funciones Definidas y Semidefinidas	40
4.2. Función de Lyapunov	42
4.3. Sistemas invariantes en el tiempo	48
4.4. Síntesis del método difuso de Lyapunov	50
5. Sistema no lineal controlado con Lógica Difusa	53
5.1. Aplicación de la Teoría de Lyapunov	53
5.2. Diseño del Controlador	60
5.3. Simulación	61
5.4. Conclusiones y Recomendaciones	65
Referencias Bibliográficas	67

INTRODUCCIÓN

El estudio actual de la estabilidad en “*Control Difuso*” ha ganado considerable atención debido al notable número de modelos matemáticos y computacionales que hacen uso de ellos para describir el comportamiento en el sentido de estabilidad total o asintótico de los estados de los diferentes sistemas; incluso aquellos provenientes de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, que en particular son empleados para describir estructuras espacio-temporales en mecánica, electrónica, dinámica de fluidos, sistemas de reacciones químicas, entre otros.

El concepto de conjuntos difusos fue ideado por Lotfi Zadeh en 1965 [27]. A partir de este concepto se han generado importantes investigaciones y desarrollos en diferentes áreas del conocimiento tales como ciencias matemáticas, ingeniería, economía, ciencias sociales y medicina, entre otros.

El propósito inicial de Zadeh en introducir los conjuntos difusos era proveer de una herramienta para ayudar al modelado de sistemas complejos, especialmente, pero no restringido a aquellos que involucraban agentes humanos. En muchos casos, la meta de intentar formular modelos con el tipo de precisión usualmente asociado con las técnicas de modelado clásico. Permitiendo cierta cantidad de imprecisión en nuestros modelos, se provee de una robustez que nos permite modelar situaciones complejas, que de otra forma no pudieran ser modeladas, y además provee de un medio para incluir la vaguedad inherente al proceso humano de conceptualizar el mundo externo.

Inspirado en los trabajos de Zadeh [27], [28], E. Mandani aplicó por primera vez estos conceptos al control automático [12]. De ahí en adelante, se han realizado numerosas investigaciones y se han desarrollado técnicas de control con lógica difusa, que han sido descritas en varios textos, entre ellos [11], [4] y [13].

Aún cuando los controladores basados en lógica difusa (o controladores difusos) han sido aplicados exitosamente en muchas situaciones, a menudo hay resistencia en usarlos en aplicaciones críticas dado que las técnicas de análisis y síntesis para ellos no han sido

bien desarrolladas.

Debido al hecho de que un controlador difuso es un sistema basado en razonamiento aproximado, bajo ciertas circunstancias; éste no requiere de un modelo analítico y como las propiedades de estabilidad y robustez de un sistema son difíciles de alcanzar, entonces algunos investigadores se han interesado en las propiedades de los controladores difusos tales como análisis de estabilidad asintótica y total mediante sistemas robustos.

Si bien, se han realizado ciertas investigaciones sobre el análisis de estabilidad de sistemas de control difuso, todavía persisten problemas fundamentales en el control de sistemas complejos basado en lógica difusa, entre ellos:

1. La gran cantidad de reglas difusas para sistemas de alto orden, los cuales hacen el análisis complejo.
2. Los parámetros de diseño de las funciones de pertenencia determinan el desempeño del sistema difuso y las funciones de pertenencia apropiadas deben ser asignadas a través de un proceso de ensayo y error que consume tiempo.
3. El hecho de que no puede aplicarse ninguna herramienta general para el análisis de estabilidad.

La mayoría de estos estudios se limitan a sistemas de segundo orden cuyos controladores difusos son diseñados con respecto a un plano de fase determinado por el error y el cambio en el error de acuerdo con una variable x , y su derivada.

El estado de equilibrio de un sistema es un aspecto importante para el estudio de su conducta. Debido a que muchas veces podemos decir que tenemos un sistema controlado cuando logramos mantenerlo cerca de una posición de equilibrio estable, con la seguridad de que no se alejará mucho de ese punto. Si además, se tiene estabilidad asintótica, entonces después de un periodo transitorio, el sistema funcionará prácticamente en la posición de equilibrio. A través de la presente investigación, se hizo un análisis de un

sistema no lineal controlado con lógica difusa usando la teoría de Lyapunov con la finalidad de establecer condiciones de estabilidad. Para esto, se estudió el modelado matemático de sistemas no lineales, se revisaron aspectos sobre la estabilidad de dichos sistemas, se estudiaron fundamentos sobre el control con lógica difusa y se simuló un sistema de péndulo invertido, analizando lo datos obtenidos posteriormente.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Propiedades fundamentales

Repasemos algunos elementos que vamos a usar frecuentemente, incluyendo las propiedades fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias que hacen que $\dot{x} = f(t, x)$ sea un modelo apropiado para representar sistemas físicos. Estas propiedades son esencialmente las de existencia y unicidad de solución y dependencia continua respecto de parámetros y condiciones iniciales.

Definición 1.1. Una métrica sobre un conjunto no vacío M , es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x, y, z \in M$ se satisface que:

1. $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$.
2. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad triangular).

Un **Espacio métrico** es un par (M, d) , donde M es un conjunto no vacío y d una métrica sobre M .

Definición 1.2. Sean (M, d) un espacio métrico, $a \in M$ y $r > 0$. Llamaremos

- Bola Abierta de centro a y radio r al conjunto $B(a; r) = \{x \in M / d(x, a) < r\}$.
- Bola Cerrada de centro a y radio r al conjunto $B[a; r] = \{x \in M / d(x, a) \leq r\}$.
- Esfera de centro a y radio r al conjunto $S(a; r) = \{x \in M / d(x, a) = r\}$.

Donde es claro que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$.

Definición 1.3. Sean M un espacio métrico. $A \subset M$ y $a \in A$. Diremos que a es un punto interior de A , si $\exists r > 0$ tal que $B(a; r) \subset A$. Donde

- El **Interior** de A es el conjunto denotado por $IntA = \{a \in A / a \text{ es un punto interior de } A\}$.
- La **Frontera** de A es el conjunto denotado por $\partial A = \{x \in M / \forall r > 0 : B(x; r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x; r) \cap (M - A) \neq \emptyset\}$.

Se dice que A es un conjunto **Abierto** si $IntA = A$.

Vamos a considerar frecuentemente las normas p en \mathbb{R} , definidas como:

$$\|x\| = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\| = \max_i |x_i|$$

Todas las normas p son equivalentes en el sentido de que si $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son dos normas p diferentes, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Un resultado clásico relativo a normas p es la desigualdad de Hölder

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ define un mapeo lineal $y = Ax$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

La norma p inducida de A esta definida como

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

Que para $p = 1, 2, \infty$ está dada por:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{max}(A^T A)]^{1/2} \quad \text{y} \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|,$$

donde $\lambda_{max}(A^T A)$ es el máximo autovalor de $A^T A$.

Definición 1.4. (Espacio lineal normado) Un espacio lineal X es un espacio lineal normado si, para cada vector $x \in X$, existe una función de valores reales, llamada norma y denotada $\|x\|$, que satisface

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, con $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.

Si no estuviera claro del contexto, si $\|\cdot\|$ es una norma en X o en \mathbb{R}^n , vamos a escribir $\|\cdot\|_X$ para la norma de X .

Definición 1.5. (Convergencia) Una sucesión $\{x_k\}$ en X converge a un vector $x \in X$ si $\|x - x_k\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Definición 1.6. (Conjunto cerrado) Un conjunto $S \subset X$ es cerrado sí toda sucesión convergente con elementos en S tiene límite en S .

Definición 1.7. (Sucesión de Cauchy) Una sucesión $\{x_k\}$ en X se dice sucesión ó secuencia de Cauchy si $\|x_k - x_m\| \rightarrow 0$ cuando $k, m \rightarrow \infty$.

Notar que toda secuencia convergente es Cauchy, pero no toda secuencia Cauchy es convergente.

Definición 1.8. (Espacio de Banach) Un espacio lineal normado X es completo si toda sucesión de Cauchy converge a un vector en X . Un espacio lineal normado completo es un espacio de Banach.

1.2. Mapeo Contractivo

Teorema 1.1. (*Mapeo Contractivo*) Sea \mathbf{S} un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X y sea T un mapeo de \mathbf{S} en \mathbf{S} . Supongamos que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbf{S}, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Entonces T tiene un único punto fijo en \mathbf{S} , es decir, existe un único vector $x^* \in \mathbf{S}$ que satisface $x^* = T(x^*)$. Además, x^* puede obtenerse por el método de aproximaciones sucesivas comenzando de cualquier vector en \mathbf{S} .

Demostración. Tomemos un vector arbitrario $x_1 \in \mathbf{S}$ y definamos la sucesión x_k por la fórmula $x_{k+1} = T(x_k)$. Como T mapea de \mathbf{S} en \mathbf{S} , $x_k \in \mathbf{S}$ para todo $k \geq 1$. El primer paso de la prueba es mostrar que x_k es una sucesión de Cauchy. Hagamos

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \\ &\leq \rho \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \rho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \\ &\quad \vdots \\ &\leq \rho^{k-1} \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|x_{k+r} - x_k\| &\leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \dots + \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq (\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \dots + \rho^{k-1}) \|x_2 - x_1\| \\ &\leq (\rho^{k-1}) \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \|x_2 - x_1\| \\ &= \frac{\rho^{k-1}}{(1-\rho)} \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Donde $\frac{\rho^{k-1}}{(1-\rho)} \|x_2 - x_1\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto, la sucesión es de Cauchy. Ahora bien, como X es un espacio de Banach, $x_k \rightarrow x^* \in X$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Además, como S es cerrado, en particular $x^* \in S$. Mostremos ahora que $x^* = T(x^*)$.

Para cualquier $x_k = T(x_{k-1})$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x^* - T(x^*)\| &\leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \\ &\leq \|x^* - x_k\| + \rho \|x_{k-1} - x^*\|. \end{aligned}$$

Eligiendo un k lo suficientemente grande, puede hacerse arbitrariamente pequeño el lado derecho de la desigualdad.

Así

$$\|x^* - T(x^*)\| = 0$$

o sea que $x^* = T(x^*)$. Sólo falta probar que x^* es el único punto fijo de T en S . Supongamos que existen dos puntos fijos x^* y y^* , entonces

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= \|T(x^*) - T(y^*)\| \\ &\leq \rho \|x^* - y^*\|. \end{aligned}$$

Y como $\rho < 1$, necesariamente $x^* = y^*$. Lo cual completa la prueba. \square

1.3. Existencia y unicidad

Definición 1.9. Diremos que f es seccionalmente continua sobre $[a, b]$, si f es continua en $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a, b]$.

En cada uno de estos puntos de discontinuidad debe existir los límites por la derecha y por la izquierda, los cuales son:

$$f(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x).$$

$$f(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x).$$

Es decir, si f es seccionalmente continua debe tener a lo más un número finito de discontinuidades, las cuales son discontinuidades de salto; donde este salto está dado por la diferencia: $f(x_i^+) - f(x_i^-)$.

En esta sección estudiaremos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Entendemos por solución en un intervalo $[t_0, t_1]$ a una función continua

$$x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que \dot{x} esté definida y además

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Vamos a asumir que $f(t, x)$ es continua en x pero, sólo seccionalmente continua en t (esto nos va a permitir considerar entradas con saltos o escalones).

Teorema 1.2. (*Existencia y unicidad*) Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y supongamos que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (1.2)$$

$\forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que (1.1) tiene una solución única en $[t_0, t_0 + \delta]$.

Demostración. Notemos que si $x(t)$ es una solución de (1.1) entonces, al integrar, se tiene que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (1.3)$$

es decir, $x(t)$ satisface (1.1) sí satisface (1.3), por lo que el estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (1.1) es equivalente al estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación integral (1.3). Vamos a considerar el lado derecho de (1.3) como un mapeo de la función continua

$$x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Denotándolo como $(Px)(t)$, podemos re-escribir (1.3) como

$$x(t) = (Px)(t). \quad (1.4)$$

Notemos que $(Px)(t)$ es continua en x . Una solución de (1.4) es un punto fijo del mapeo P que lleva x a Px . La existencia de un punto fijo de (1.4) se puede probar usando el teorema del mapeo contractivo. Para eso necesitamos definir un espacio de Banach X y un conjunto cerrado $\mathbf{S} \subset X$ tal que P mapee \mathbf{S} en \mathbf{S} y sea una contracción en \mathbf{S} .

Definamos $X = C[t_0, t_0 + \delta]$, con norma $\|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|x(t)\|$.

$S = \{x \in X / \|x - x_0\|_C \leq r\}$, donde r es el radio de la bola B_r y δ es una constante positiva cualquiera. Nos vamos a restringir a elegir un δ tal que satisfaga $\delta \leq t_1 - t_0$ de tal forma que $[t_0, t_0 + \delta] \subset [t_0, t_1]$. Nótese que $\|x(t)\|$ es una norma en \mathbb{R}^n , mientras que $\|x\|_C$ es una norma en X ; de la misma forma B_r es una bola en \mathbb{R}^n mientras que \mathbf{S} es una bola en X . Por definición, P mapea X en X . Para probar que mapea \mathbf{S} en \mathbf{S} escribimos

$$(Px)(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)] ds.$$

Como f es seccionalmente continua, sabemos que $f(t, x_0)$ es acotada en $[t_0, t_1]$.

Sea $h = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|f(t, x_0)\|$.

Usando la condición Lipschitz (1.2) y el hecho de que para cada $x \in S$,

$$\|x(t) - x_0\| \leq r, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|] ds \\
&\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h] ds \\
&\leq \int_{t_0}^t (Lr + h) ds \\
&= (t - t_0)(Lr + h) \\
&\leq \delta(Lr + h)
\end{aligned}$$

y también

$$\|Px - x_0\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|(Px)(t) - x_0\| \leq \delta(Lr + h) \leq r.$$

Si elegimos $\delta \leq r/(Lr + h)$. Entonces P mapea \mathbf{S} en \mathbf{S} . Ahora vamos a probar que P es una contracción en \mathbf{S} . Sean $x, y \in \mathbf{S}$ y consideremos

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - (Py)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t L\|x(s) - y(s)\| ds \\
&\leq (t - t_0)L\|x - y\|_C.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|Px - Py\|_C &\leq L\delta\|x - y\|_C \\
&\leq \rho\|x - y\|_C
\end{aligned}$$

con $\rho \leq \frac{r}{L}$.

Eligiendo $\rho < 1$ y $\delta \leq \frac{r}{L}$, aseguramos que P es un mapeo de contracción en \mathbf{S} . Luego, por el teorema del mapeo contractivo, Si

$$\delta \leq \min\left\{t_1 - t_0, \frac{r}{Lr + h}, \frac{\rho}{L}\right\}, \quad \rho < 1 \quad (1.5)$$

entonces (1.3) tiene una única solución en \mathbf{S} . Nos falta probar que la solución es única en X . Para eso vamos a probar que toda solución de (1.3) en X tiene que estar en \mathbf{S} . Notemos primero que, como $x(t_0) = x_0$, está en la B_r , toda solución continua $x(t)$ debe permanecer en B_r durante algún tiempo. Supongamos que $x(t)$ deja la B_r y sea $t_0 + \mu$ el primer instante en que $x(t)$ interseca la frontera de B_r . Entonces $\|x(t_0 + \mu) - x_0\| = r$. Por otro lado, para todo $t \leq t_0 + \mu$,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t (Lr + h) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r = \|x(t_0 + \mu) - x_0\| \leq (Lr + h)\mu \Rightarrow \mu \geq \frac{r}{Lr + h} \geq \delta$$

lo cual significa que $x(t)$ no puede dejar B_r durante el intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$, es decir, toda solución en X debe estar en \mathbf{S} . En consecuencia, la unicidad de la solución en \mathbf{S} implica unicidad de la solución en X . \square

Una función que satisface (1.2) se dice Lipschitz en X y L es la constante de Lipschitz.

Lema 1.1. (*Desigualdad de Gronwall-Bellman*)

Sea $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no-negativa. Si una función continua $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds \quad \text{para } a \leq t \leq b,$$

entonces en el mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds.$$

Si $\lambda(t) \equiv \lambda$ es constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau) d\tau}$$

y si además $\mu(t) \equiv \mu$ es constante:

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}.$$

Demostración. Definamos las funciones

$$z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

y

$$v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0.$$

Entonces z es diferenciable y además

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

Esta es una ecuación de estado (escalar) cuya función de transición de estados es

$$\phi(t, s) = e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau}.$$

Como $z(a) = 0$, tenemos que

$$z(t) = \int_a^t \phi(t, s)(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))ds.$$

El término $\int_a^t \phi(t, s)\mu(s)v(s)ds$ es no negativo, por lo que

$$z(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau} \mu(s)\lambda(s)ds,$$

luego, usando el hecho que $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$, se completa la prueba para el caso general. Ahora, en el caso especial de $\lambda(t) \equiv \lambda$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^t \mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau} ds &= - \int_a^t \frac{d}{ds} \left(e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau} \right) ds \\ &= - \left(e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau} \Big|_{s=a}^{s=t} \right) \\ &= -1 + e^{\int_a^t \mu(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

Con lo cual se completa la prueba en el caso de λ constante. Por integración, se obtiene fácilmente el resultado en el caso de μ constante. \square

Para que la solución de la ecuación de estado (1.1) sea de algún interés, debe depender continuamente del instante inicial t_0 , del estado inicial x_0 , y de la función del lado derecho $f(t, x)$. La forma integral (1.3) muestra que es obvia la *dependencia continua* del instante inicial.

Ahora, Por dependencia continua de la condición inicial entendemos lo siguiente: Sea $y(t)$ la solución de (1.1) que comienza en $y(t_0) = y_0$ y está definida en el intervalo compacto $[t_0, t_1]$; dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo z_0 en la bola $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x - y_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ tiene una solución única $z(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$, y satisface $\|z(t) - y(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Para definir dependencia continua de la función del lado derecho f , vamos a precisar en qué forma f es perturbada. Vamos a asumir que f depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes, es decir, $f = f(t, x, \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Sea $x(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda_0) = x_0$. Se dice que la solución depende continuamente de λ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo λ en la bola $\{\lambda \in \mathbb{R}^p / \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $x(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda) = x_0$, y satisface $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Teorema 1.3. *Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y Lipschitz en X en $[t_0, t_1] \times W$, con constante de Lipschitz L , donde $W \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sean $y(t)$ y $z(t)$ soluciones de $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ y $\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)$, $z(t_0) = z_0$ tal que $y(t), z(t) \in W$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Supongamos que*

$$\|g(t, x)\| \leq \mu, \quad \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times W,$$

para algún $\mu > 0$, con $\|y_0 - z_0\| \leq \tau$, entonces

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \tau e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} [e^{L(t-t_0)} - 1], \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Demostración. Como las soluciones $y(t)$ y $z(t)$ están dadas por

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, z(s)) + g(s, z(s))] ds$$

donde

$$y(t) - z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - z_0 - \int_{t_0}^t [f(s, z(s)) + g(s, z(s))] ds.$$

Ahora, tomando norma obtenemos que

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &= \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|g(s, z(s))\| ds \\ &\leq \tau + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds. \end{aligned}$$

Ahora, por el Lema 1.1, Aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman a la función $\|y(t) - z(t)\|$ resulta que

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \tau + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L[\tau + \mu(t - t_0)] e^{L(s-t_0)} ds.$$

Donde por integración por partes

$$\int_{t_0}^t L[\tau + \mu(t - t_0)] e^{L(s-t_0)} ds = \tau e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} e^{L(t-t_0)} - \frac{\mu}{L} - \mu(t - t_0) - \tau$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \tau e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} e^{L(t-t_0)} - \frac{\mu}{L} \\ &\leq \tau e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

□

1.4. Lógica Difusa

La lógica Difusa ha sido percibido como un área del conocimiento interdisciplinaria que en grandes rasgos pudiera dar respuesta a problemas metodológicos que anteriormente no había podido ser resueltos y mucho menos simulados. Frecuentemente nos encontramos situaciones en la vida que exigen la toma de decisiones o aplicaciones de ciertas normas y reglas, que de cierta manera tienen la necesidad de usar un lenguaje humano que no sea tan restringido para su aplicación en diversas áreas científicas.

En primer lugar definamos lo que es un conjunto difuso y observemos las propiedades fundamentales entre conjuntos.

Definición 1.10. Sea X un conjunto, llamado universo de discurso, de elemento genérico x . Se dice que un conjunto difuso A de X está formado por el par $(A, \mu_A(x))$, donde x es una variable de A y μ_A una función cuya imagen pertenece al intervalo cerrado $[0, 1]$, esta función recibe el nombre de intensidad de pertenencia o función de membresía (FM).

Dado $x \in A$, cuando la función $\mu_A(x)$ alcanza su valor máximo igual a 1, se tiene pertenencia absoluta y cercano a él se tiene un alto grado de pertenencia de x en el conjunto A . Mientras que si alcanza su valor mínimo igual a 0, se tiene la no pertenencia o cercano a este un grado de pertenencia bajo de x en el conjunto A .

Algunas de las más conocidas funciones de membresía están dadas por:

- FM triangular:

Se especifica mediante tres parámetros $\{a, b, c\}$, de la siguiente forma:

$$\text{trimf}(x, [a, b, c]) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq a. \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{para } a \leq x \leq b. \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{para } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{para } c \leq x. \end{cases}$$

- FM Gaussiana:

Se especifica con dos parámetros c, σ , donde c representa el centro de la FM y σ determina su anchura, de la siguiente forma.

$$Gaussmf(x, [c, \sigma]) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}.$$

- FM Sigmoidal:

Se especifica con dos parámetros a, c , Dependiendo del signo de el parámetro a , la FM sigmoidal es inherentemente abierta a la derecha o a la izquierda. Esta FM viene expresada de la siguiente manera:

$$Sigmf(x, [a, c]) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}.$$

Para mayores detalles, véase [21] pág. 4 – 74.

Usualmente el universo de discurso puede consistir en objetos discretos (ordenados o no ordenados) o de un espacio continuo.

Ejemplo 1.1. (Conjuntos difusos ordenados y no ordenados)

Un conjunto difuso con un X consistente de objetos discretos no ordenados:

Ciudades Larenses calurosas:

$$\{(Carora, 1), (Barquisimeto, 0,8), (Cabudare, 0,85), (Sanare, 0,1), (Quibor, 1)\}.$$

Un conjunto difuso con un X consistente de objetos discretos ordenados:

Años de la adolescencia en varones:

$$\{(10, 0,1), (11, 0,4), (12, 0,8), (13, 1), (14, 1), (15, 1), (16, 0,8), (17, 0,5), (18, 0,1)\}$$

Definición 1.11. (Variable Lingüística)

Una variable lingüística es una quintuple $(X, T(X), U, G, M)$, donde X es el nombre de la variable, $T(X)$ es el término conjunto, es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de X , U es el universo a tomar, G es la gramática para generar los nombres y M es el conjunto de reglas semánticas para asociar cada X con su significado.

Operaciones con conjuntos difusos

Las operaciones entre conjuntos difusos varían con respecto a las operaciones de la lógica clásica, estas son caracterizados por su función de membresía.

Dados dos conjuntos difusos A y B en un universo de discurso X , en la lógica difusa se tienen las siguientes operaciones:

- Unión: $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ con $x \in X$.
- Intersección: $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ con $x \in X$.

Donde C es un nuevo conjunto difuso definido por $\{(x, \mu_C(x)) / x \in X\}$.

- Complemento: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ con $x \in X$.

Sistema de inferencia difusa

La inferencia difusa es el proceso de mapear, es decir, establecer una correspondencia que asocie a cada elemento de un primer conjunto con un único elemento de otro conjunto, a una entrada dada a una salida, utilizando lógica difusa. Esta operación produce una base desde la cual se pueden tomar decisiones o se pueden distinguir patrones.

El sistema de inferencia difusa, (*Fuzzy inference system o FIS*), es un sistema que hace uso de la teoría de conjuntos difusos para mapear entradas y salidas, involucrando los operadores de la lógica difusa, las funciones de membresía y reglas tipo *Si ... entonces*.

La estructura básica de un sistema de inferencia difusa consiste de tres componentes conceptuales: una *base de reglas*; que contiene una selección de reglas difusas, una *base de datos* (o diccionario); que define las funciones de membresía usadas en las reglas difusas y un *mecanismo de razonamiento*, que realiza el proceso de inferencia sobre reglas y hechos dados, para obtener una salida o conclusión deseada.

Estos sistemas pueden tomar entradas tanto difusas como no difusas, es decir, *nítidas*, pero las salidas que produce son siempre conjuntos difusos. Algunas veces es necesario tener salidas nítidas, especialmente cuando el sistema de inferencia es usado como un controlador. En estos casos, necesitamos un método de desdifusificación para extraer un valor nítido que mejor represente un conjunto difuso. El método más popular de desdifusificación es el cálculo del centro de gravedad ó centroide, el cual retorna el centro del área bajo la curva, aunque existen otros métodos para este cálculo.

La figura 1.1 muestra un sistema de inferencia difusa con salida nítida, las líneas segmentadas indican un sistema básico de inferencia difusa con salida difusa, y el bloque de desdifusificación sirve para transformar una salida difusa en un valor nítido único.

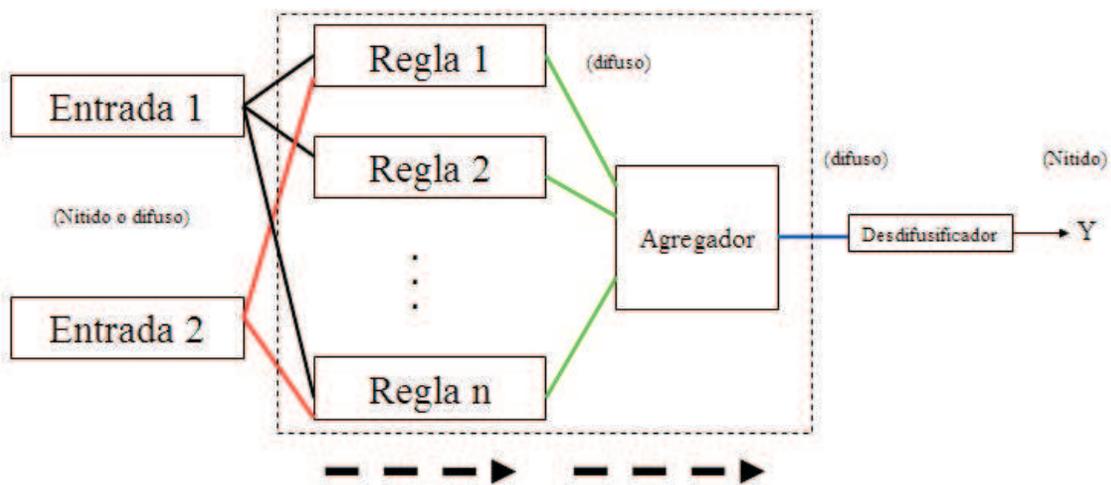


Figura 1.1: Estructura de sistema. Ver [6]. La Borrosidad

Con el objeto de mantener coherencia en el desarrollo de las teorías de los conjuntos difusos, hubo la necesidad de darle una denominación a los conjuntos tradicionales estudiados hasta el momento y así fue escogido el término Conjunto Nítido.

Método de Mandani

El método de inferencia propuesto por Ebrahim Mandani en 1975, tuvo inicialmente como objetivo controlar una maquina de vapor y una caldera mediante la sintetización de un conjunto de reglas de control lingüísticas obtenidas de operadores humanos experimentados. Esta investigación estuvo basada en un artículo de Lotfi Zadeh de 1973, sobre algoritmos para sistemas y procesos de decisión complejos.

Para computar una salida de un *FIS*, se deben seguir una serie de pasos, como se detalla a continuación:

1. Crear las reglas difusas

Las reglas difusas serán la colección de sentencias lingüísticas que describen como el *FIS* debe tomar la decisión. Estas reglas son escritas de la siguiente forma:

If (SI) (entrada 1 es función de membresía 1) *y/o* (entrada 2 es función de membresía 2) ... **then (ENTONCES)** (salida n es una función de membresía n)

2. Realizar la Difusificación

En este paso se mapean las entradas a valores entre 0 y 1, usando las funciones de membresía de entrada.

3. Realizar las Combinaciones Difusas

Al hacer las reglas difusas, usamos los conceptos de *y*, *o* y *no*. Estas operaciones están definidas de diversas formas en la lógica difusa.

4. Computar la Consecuencia

La consecuencia de una regla difusa es computada utilizando dos pasos:

- a) Computar la fuerza de la regla combinando las entradas difusificadas mediante el uso de operadores difusos.
- b) Recortar la función de membresía de salida al nivel de la fuerza de la regla.

5. Combinar las salidas en una distribución de salida

Las salidas de todas las reglas difusas deben ser ahora combinadas para obtener una distribución de salida difusa. Esto corresponde al proceso de agregación, usualmente se utiliza una disyunción difusa para obtener la distribución de salida mostrada en la esquina inferior derecha de la figura 1.1.

6. Desdifusificar la distribución de salida

En muchos casos es deseable conseguir un único valor nítido para la salida del *FIS*. Este número difuso se obtiene a través del proceso conocido como desdifusificación.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS AUTÓNOMOS

Los sistemas más frecuentes son de la forma

$$\dot{x} = f(t; \mathbf{x}; \mathbf{u})$$

donde t es la variable temporal, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas. En muchos casos, el sistema a estudio no depende explícitamente del tiempo, por lo que la ecuación anterior puede escribirse así

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}; \mathbf{u}).$$

Cuando queremos analizar un determinado sistema de control, para el cual conocemos la señal de entrada $\mathbf{u}(t)$, el sistema puede escribirse como

$$\dot{x} = f(\mathbf{t}; \mathbf{x}).$$

Supondremos que la función f verifica un conjunto condiciones de regularidad respecto de las variables \mathbf{t} , \mathbf{x} y \mathbf{u} que aseguran la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial para una condición inicial dada. En general vamos a buscar acciones de control que dependan de los estados, es decir, del tipo $\mathbf{u} = H(x)$. En ese caso hablaremos de control por realimentación de estados y la descripción del sistema resulta ser la ecuación *no forzada*:

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo.

2.1. Punto de Equilibrio

Los sistemas sobre los que nos centraremos son del tipo (2.1) y dedicaremos buena parte del presente capítulo a su estudio. Un concepto importante relacionado con la ecuación de estado (2.1) es el de Punto de Equilibrio.

Definición 2.1. Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado es un punto de equilibrio (PE) de (2.1) si posee la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado permanece en x^* en todo tiempo futuro.

Los PE de (2.1) son las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0$$

Un PE puede ser aislado, es decir no tiene otros PE en la vecindad donde habita, o puede existir un continuo de PE. Cuando el sistema es lineal, (2.1) tiene la forma conocida

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

El único PE aislado posible (tomando $u = 0$) es $x = 0$. Como las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas, siempre es conveniente, al analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de equilibrio y estudiar el sistema lineal resultante. Sin embargo, esto no es suficiente debido básicamente a dos razones:

- La linealización sólo predice el comportamiento local, no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación.
- La dinámica de un sistema no lineal es mucho más rica que la de un sistema lineal debido a la presencia de fenómenos no lineales como: escape en tiempo finito, múltiples PE aislados, ciclos límite, oscilaciones sub-armónicas, armónicas o casi-periódicas, caos, entre otros.

Ejemplo 2.1. (Sistema de péndulo).

Uno de los problemas más simples en robótica es el de controlar la posición de una junta usando un motor ubicado en el punto de giro. Matemáticamente esto no es más que un péndulo, representado en la figura siguiente:

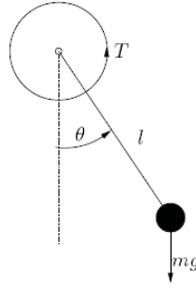


Figura 2.1: Gráfica del péndulo simple.

Usando la segunda ley de Newton podemos escribir la ecuación de movimiento en la dirección tangencial como:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta}.$$

Donde m es la masa de la bola, l es la longitud del brazo, θ es el ángulo entre la vertical y el brazo, g es la aceleración de la gravedad, y k es el coeficiente de fricción. Tomando como variables de estado

$$x_1 = \theta \quad y \quad x_2 = \dot{\theta}.$$

Podemos escribir las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad y \quad \dot{x}_2 = \left(\frac{-g}{l}\right)x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2.$$

Luego, haciendo $\dot{x}_1 = x_2 = 0$ los PE son $(n\pi, 0)$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Obviamente sólo los PE $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ son no triviales, ya que el resto son repeticiones de los mismos.

Físicamente podemos ver que el PE en $(0, 0)$ es estable mientras que el PE en $(\pi, 0)$ es inestable, como ya vamos a estudiar con más detalle más adelante.

Definición 2.2. Se dice que un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ tiene un punto de equilibrio aislado en $x = 0$ si $\det A \neq 0$, Además, posee un continuo de PE o subespacio de equilibrio cuando $\det A = 0$.

Ejemplo 2.2. (Sistema Masa-Resorte). Consideramos el sistema masa-resorte de la figura siguiente.

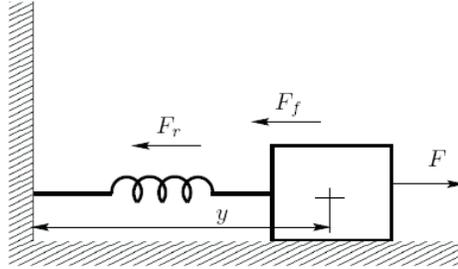


Figura 2.2: Fuerzas del sistema masa-resorte.

Usando la ley de Newton:

$$m\ddot{y} + F_f + F_r = F,$$

donde F_f es una fuerza resistiva de fricción, F_r es la fuerza de recuperación del resorte, y F es una fuerza externa a nuestra disposición. Asumimos que F_r es sólo función del desplazamiento, es decir $F_r = g(y)$, $g(0) = 0$. Para desplazamientos pequeños, F_r puede modelarse como la relación lineal $g(y) = ky$. Para grandes desplazamientos, la fuerza de recuperación puede depender no linealmente de y . Por ejemplo, hay resortes suaves donde

$$g(y) = k(1 - a^2y^2)y, \quad |ay| < 1,$$

o resortes duros donde

$$g(y) = k(1 + a^2y^2)y.$$

Un ejemplo de fuerza de fricción es la fuerza viscosa o amortiguamiento del aire, que suele modelarse como una función no lineal de la velocidad $F_v = h(\dot{y})$, $h(0) = 0$. Para velocidades pequeñas podemos asumir que $F_v = c\dot{y}$. Combinando un resorte duro con amortiguamiento lineal y una fuerza externa periódica $F = A\cos(\omega t)$ obtenemos la ecuación de Duffing

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A\cos(\omega t),$$

que es un ejemplo clásico en el estudio de excitación periódica de sistemas no lineales. Otro ejemplo de fuerza de fricción es la fricción estática o de Coulomb. Este tipo de amortiguamiento aparece cuando la masa se desliza sobre una superficie seca. Cuando la masa está en reposo, existe una fuerza de fricción estática F_s que actúa paralela a la superficie y está limitada por los valores $\mu_s mg$, donde $0 < \mu_s < 1$ es el coeficiente de fricción estática. Esta fuerza toma cualquier valor, dentro de sus límites, para mantener la masa en reposo. Para que haya movimiento, debe ejercerse una fuerza en la masa que venza a la fuerza de fricción. En ausencia de la fuerza exterior, $F = 0$, la fuerza de fricción estática compensa la fuerza de recuperación del resorte y mantiene el equilibrio si $|g(y)| \leq \mu_s mg$. Una vez que la masa entra en movimiento, aparece una fuerza de fricción de deslizamiento de magnitud $\mu_k mg$ que se opone al movimiento, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, que asumimos constante. Un modelo ideal de la fuerza de fricción es

$$F_d = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{para } \dot{y} < 0 \\ F_s, & \text{para } \dot{y} = 0 \\ \mu_k mg, & \text{para } \dot{y} > 0. \end{cases}$$

Combinando un resorte lineal con amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula tenemos

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

donde

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \text{Sign}(\dot{y}), & \text{para } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{para } \dot{y} = 0 \text{ y } |y| \leq \mu_s mg/k \\ \mu_s mg \text{Sign}(y), & \text{para } \dot{y} = 0 \text{ y } |y| > \mu_s mg/k. \end{cases}$$

El valor de $\eta(y, \dot{y})$ para $\dot{y} = 0$ y $|y| \leq \mu_s mg/k$ resulta de la condición de equilibrio $\ddot{y} = \dot{y} = 0$. Tomando $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$, la ecuación de estado es

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2)$$

Dos características de esta ecuación son:

1. Tiene un conjunto de equilibrio en lugar de PE aislados.
2. La función del lado derecho es una función discontinua del estado.

Considerando $x_2 > 0$ o $x_2 < 0$ se obtienen dos modelos lineales diferentes. El comportamiento del sistema no lineal puede estudiarse en cada región vía el análisis lineal.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE ESTABILIDAD

Antes de estudiar el comportamiento local de un sistema no lineal alrededor de un PE, repasemos el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como una herramienta de ayuda al estudio.

Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = Me^{J_r t} M^{-1} x_0.$$

Donde J_r es la forma real de Jordan de A y M es una matriz real no singular tal que $M^{-1}AM = J_r$. Dependiendo de los autovalores de A , la forma real de Jordan toma alguna de las siguientes tres formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Donde k es 0 ó 1. La primera forma corresponde al caso en que los autovalores λ_1 y λ_2 son reales y distintos, la segunda corresponde al caso en que los autovalores son reales e iguales, y la tercera corresponde al caso de autovalores complejos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. En el caso de autovalores reales, hay que separar el caso en que al menos uno de los autovalores es cero. En este caso, el origen no es un PE aislado y el comportamiento cualitativo del sistema es distinto de los otros casos.

✂ Autovalores Reales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

En este caso $M = [v_1, v_2]$, donde v_1 y v_2 son los autovectores asociados con λ_1 y λ_2 . El retrato de fase es el de un:

- **Nodo estable** si ambos autovalores son negativos, las trayectorias en el plano de fase son parábolas que se hacen tangentes al autovector lento (correspondiente al mayor autovalor) cuando se acercan al origen, y paralelas al autovector rápido (correspondiente al menor autovalor) lejos del origen.

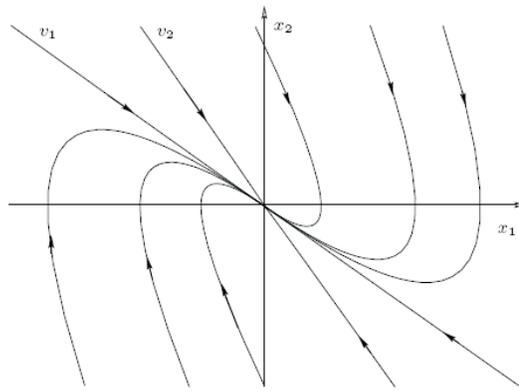


Figura 3.1: Retrato de fase de un nodo estable.

- **Nodo inestable** si ambos autovalores son positivos, las trayectorias en el plano de fase son parábolas con formas similares a la del nodo estable pero con sentido invertido.
- **Ensilladura** Si los autovalores tienen distinto signo, las trayectorias en el plano de fase (excepto las correspondientes a los autovectores, que son rectas) son hipérbolas que “comienzan” tangentes al autovector estable (correspondiente al autovalor estable) en infinito, y “terminan” tangentes al autovector inestable (correspondiente al autovalor inestable), también en infinito.

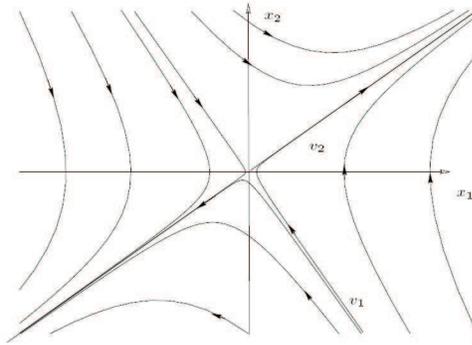


Figura 3.2: Retrato de fase de una ensilladura.

✦ **Autovalores Complejos** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En coordenadas polares r y θ el modelo de estado se desacopla, tomando la forma

$$\dot{r} = \alpha r$$

$$\dot{\theta} = \beta.$$

De forma que el radio es una función exponencial de la parte real de los autovalores, α , y el ángulo crece linealmente con la parte imaginaria β . El retrato de fase es el de un:

- **foco estable** Si α es negativa. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que convergen al origen.

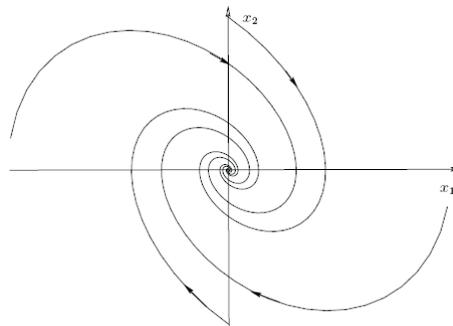


Figura 3.3: Retrato de fase de un foco estable.

- **foco inestable** Si α es positiva. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que divergen del origen.
- **Centro** si $\alpha = 0$. Las trayectorias en el plano de fase son elipses centradas en el origen.

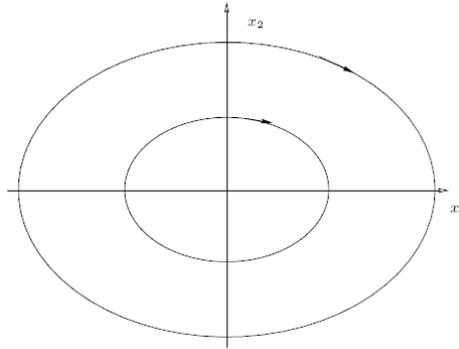


Figura 3.4: Retrato de fase de un centro.

✂ **Autovalores Múltiples No Nulos** $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

El retrato de fase en este caso se asemeja al de un nodo (estable o inestable) según λ sea negativo o positivo. Las trayectorias no tienen en este caso el comportamiento asintótico rápido o lento como en el caso de autovalores distintos.

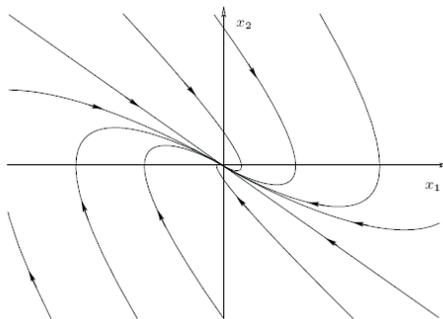


Figura 3.5: Retrato de fase del caso de autovalores múltiples no nulos.

Nota 3.1. (*Resumen del caso en que el origen es un PE aislado.*) El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados con diferentes tipos de equilibrio: nodo estable, nodo inestable, ensilladura, foco estable, foco inestable y centro. El tipo de equilibrio está completamente especificado por la ubicación de los autovalores de la matriz A . El comportamiento global del sistema (en todo el plano de fase) está cualitativamente determinado por el tipo de equilibrio.

✂ Uno o Ambos Autovalores es Cero

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial, es decir existe un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A . Todo vector en el kernel de A es un punto de equilibrio del sistema. La dimensión del kernel puede ser uno o dos.

- Si es dos, entonces A es la matriz nula y todo punto en el espacio de estado es un punto de equilibrio.
- Si la dimensión del kernel de A es uno, entonces la forma de Jordan de A dependerá de la multiplicidad del cero como autovalor.

Observación 3.1. Cuando la multiplicidad del cero como autovalor es uno, el autovector correspondiente define el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema. Todas las trayectorias en el plano de fase convergen al subespacio de equilibrio cuando el autovalor no nulo es negativo, y divergen cuando es positivo; el caso mostrado en la Figura 3.6.

Observación 3.2. Cuando la multiplicidad del cero como autovalor es dos, el autovector v_1 , donde $M = [v_1, v_2]$ es la transformación que lleva a la forma de Jordan, es el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema. Las trayectorias que comienzan fuera del subespacio de equilibrio se mueven paralelas a él, como se ve en la Figura 3.7.

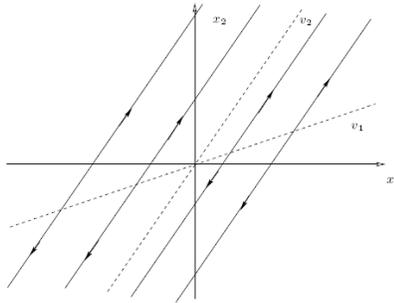


Figura 3.6: Retrato de fase para $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$.

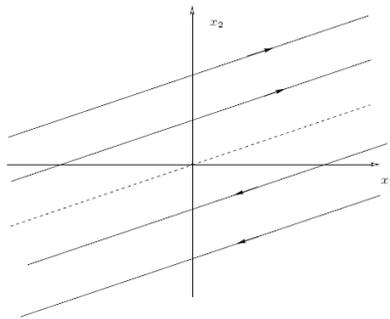


Figura 3.7: Retrato de fase para $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$.

Nota 3.2. (Persistencia del Tipo de Equilibrio Frente a Perturbaciones). Veamos el caso de perturbaciones lineales. Supongamos que A tiene autovalores distintos y consideremos la matriz $A + \Delta A$, donde ΔA es una matriz real de 2×2 cuyos elementos son arbitrariamente pequeños. Por la teoría de perturbaciones de matrices, ver [8], sabemos que los autovalores de una matriz dependen continuamente de sus parámetros. Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si la magnitud de la perturbación de cada elemento de A es menor que δ , los autovalores de la matriz perturbada $A + \Delta A$ estarán en una bola de radio ϵ centrada en los autovalores de A . En consecuencia, todo autovalor de A que esté en el semiplano derecho (o izquierdo) abierto, permanecerá en ese semiplano frente a perturbaciones de medidas arbitrariamente pequeñas. Por otro lado, los autovalores sobre el eje imaginario pueden moverse hacia cualquiera de los semiplanos frente a perturbaciones por más pequeño que sea ϵ .

Por lo tanto, podemos concluir que si el PE $x = 0$ de $\dot{x} = Ax$, es un nodo, foco o ensilladura, entonces el PE $x = 0$ de $\dot{x} = (A + \Delta A)x$, será del mismo tipo frente a perturbaciones suficientemente pequeñas.

La situación es muy distinta si el PE es un centro. Consideremos la siguiente perturbación de la forma real de Jordan correspondiente a un centro

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

Donde μ es el parámetro de perturbación. Cuando μ es positivo, el PE del sistema perturbado es un foco inestable; cuando μ es negativo es un foco estable. Esto pasa para cualquier valor de $\mu \neq 0$. Dado que el retrato de fase de un foco es cualitativamente distinto del de un centro, vemos que un centro no persiste frente a perturbaciones. El nodo, foco y ensilladura se dicen estructuralmente estables porque mantienen su comportamiento cualitativo frente a perturbaciones muy pequeñas, mientras que el centro no es estructuralmente estable. La diferencia entre ambos casos es debida a la ubicación de los autovalores de A , siendo los autovalores sobre el eje imaginario vulnerables a perturbaciones. Esto lleva a la definición de PE hiperbólico.

Definición 3.1. El origen $x = 0$ es un PE hiperbólico de $\dot{x} = Ax$ si A no tiene autovalores con parte real nula.

Cuando A tiene autovalores reales múltiples, perturbaciones infinitésimamente pequeñas pueden transformarlos en autovalores complejos. Es decir que un nodo puede permanecer como nodo o transformarse en un foco. Cuando A tiene autovalores nulos, existe una diferencia importante entre los casos en que uno o los dos ($A \neq 0$) autovalores sean cero. En el primer caso, una perturbación del autovalor en cero resulta en un autovalor $\lambda_1 = \mu$ donde μ puede ser positivo o negativo. Como el otro autovalor λ_2 es distinto de cero, la perturbación lo mantiene fuera del cero. Es decir, resultan dos autovalores reales distintos y el PE del sistema perturbado es un nodo o una ensilladura, dependiendo de los signos de λ_2 y μ . Sin embargo, como la perturbación es muy pequeña, de forma que λ_1 es muy pequeña con respecto de λ_2 , la forma de las trayectorias mantienen cierta similitud con las del caso en que un autovalor es nulo.

Cuando ambos autovalores de A son nulos, el efecto de una perturbación es más dramático.

Consideremos las siguientes posibles perturbaciones de la forma de Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Donde μ puede ser positivo o negativo. Es fácil de ver que el PE en cada uno de estos cuatro casos puede ser un centro, un foco, un nodo o una ensilladura, respectivamente.

✂ Equilibrios Múltiples

Un sistema lineal puede tener un PE aislado en $x = 0$, y un subespacio de equilibrio. Un sistema no lineal, en cambio, puede tener múltiples PE aislados.

CAPÍTULO 4

ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LYAPUNOV

Un punto fijo o de equilibrio del sistema (2.1) es un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que verifica que $f(x_0) = 0$. Lo anterior implica que la trayectoria que se origina en x_0 permanece allí indefinidamente. La propiedad de continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales nos asegura que dado un determinado tiempo positivo t_1 , si partimos lo suficientemente cerca de un punto fijo, la trayectoria que obtendremos se mantendrá cerca del mismo, por lo menos hasta el instante t_1 . Pero, ¿bajo qué condiciones dicha propiedad de permanecer cerca del punto fijo se cumplirá para todo tiempo futuro? La respuesta a esta pregunta nos lleva a los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica. Antes que nada, haremos la siguiente observación: si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo del sistema (2.1), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$, ya que siempre podemos realizar el cambio de variable $z = x - x_0$ que nos lleva a un sistema equivalente al original, para el cual se cumple que $z = 0$ es un punto fijo.

Como el sistema es autónomo, se cumple la siguiente propiedad

$$x(\tau; t; x) = x(\tau - t; 0; x); \forall t \geq 0 \quad (4.1)$$

o sea que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las trayectorias se originan en $t = 0$, de modo que se cumple (4.1). Omitiremos el instante inicial en la notación de las trayectorias, asumiéndolo nulo. A continuación introduciremos una serie de definiciones, en las cuales se asume que el origen $x = 0$ es un punto fijo del sistema (2.1), es decir que $f(0) = 0$.

Considérese lo siguiente:

1. Sea B_ρ la bola en \mathbb{R}^n con centro en el origen, es decir,

$$B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho, \rho > 0, \text{ con } \|\cdot\| \text{ la norma euclídea} \}$$
 (no se excluye el caso en el que $\rho = \infty$).
2. $f : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)$ es una función de clase C^1 .
3. $f(0) = 0$.

La condición (2) garantiza la existencia y unicidad de las soluciones de (2.1), mientras que la condición (3) implica que la función idénticamente cero es solución de (2.1) la cual llamaremos el equilibrio o el origen. Sea $x_0 \in B_\rho$, la solución de (2.1) que en $t = 0$ pasa por x_0 la denotamos $\varphi(t, x_0)$, es decir, esta solución es tal que $\varphi(0, x_0) = x_0$. Ver la Figura 4.1 para el caso $n = 2$.

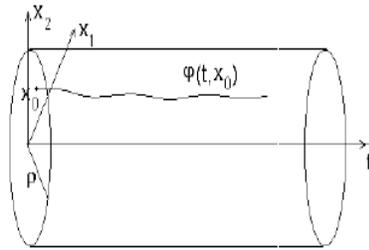


Figura 4.1: Gráfica de la solución $\varphi(t, x_0)$. Autor: Leonardo Pérez.

Definición 4.1. (Estabilidad en el sentido de Lyapunov) Si para el sistema (2.1) se cumple que dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ escalar positiva tal que $\forall \|x_0\| < \delta(\epsilon)$, $\|x(t, x_0)\| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$ entonces el origen es estable según Lyapunov.

Definición 4.2. Un estado de equilibrio es inestable si no es estable, esto es, existe un $0 < \epsilon < R$ tal que para cada $\delta > 0$ haya un t_0 con $\|x(t_0)\| > \delta$ y $\|x(t_1)\| \geq \epsilon$ para algún $t_1 > t_0$. Y además, el punto de equilibrio es completamente inestable si esta condición persiste para cada trayectoria dentro de la región D.

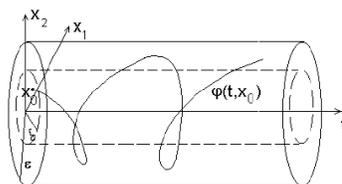


Figura 4.2: Estabilidad del origen. Cualquier solución que en $t = 0$ comience en el cilindro de base de radio δ no puede abandonar el cilindro de base con radio ϵ . Autor: Leonardo Pérez.

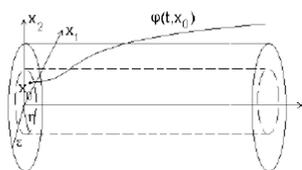


Figura 4.3: Inestabilidad del origen. Autor: Leonardo Pérez.

Sea $\varphi(t, x_0)$ una solución de (2.1), es decir esta solución es tal que $\varphi(t, x_0) = x_0$, podemos ver que en la Figura 4.3 la solución de $\varphi(t, x_0)$ se dice ser estable en el sentido de Lyapunov, si $\forall \epsilon > 0, x_0 \in B_\rho$ con $\rho \geq \epsilon$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|y_0\| < \delta$ entonces $\|\varphi(t, y_0) - \varphi(t, x_0)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$.

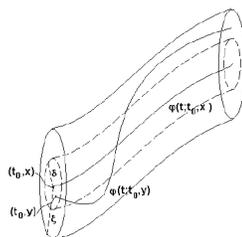


Figura 4.4: Estabilidad de la solución $\varphi(t, x_0)$. Autor: Leonardo Pérez.

Definición 4.3. (Atractividad) El equilibrio de (2.1) se dice atractivo si existe $\delta > 0, x_0 \in B_\rho$ con $\rho \geq \delta$; tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$.

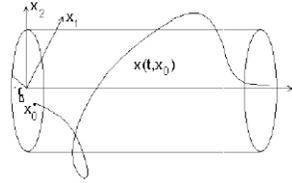


Figura 4.5: Atractividad del origen. Cualquier solución que en $t = 0$ comience en el cilindro de base con radio δ , eventualmente puede abandonarlo, pero finalmente permanecerá dentro del mismo. Autor: Leonardo Pérez.

4.1. Funciones Definidas y Semidefinidas

Definición 4.4. (Funciones escalares definidas positivas) Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida positiva* en una región D (que incluye el origen del espacio de estado) si:

1. $V(0) = 0$.
2. $V(\mathbf{x}) > 0$ través de alguna región de espacio de estado D fuera del origen, esto es, $V(x) > 0, x \in D; x \neq 0$.
3. $V(\mathbf{x})$ es continua a través de D .
4. $V(\mathbf{x})$ tiene primeras derivadas parciales continuas respecto de x_i , esto es, $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, con $i = 1, \dots, n$ son continuas.

Si la condición 2 se debilita para $V(\mathbf{x}) \geq 0$, más que para $V(\mathbf{x}) > 0$, entonces $V(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva.

Ejemplo 4.1. Muestre que la siguiente forma cuadrática es definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = 12x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 + x_2x_3 - 3x_1x_3$$

la forma cuadrática $V(\mathbf{x})$, se puede escribir como

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el criterio de Sylvester obtenemos que los menores

$$12 > 0, \quad \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 12 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} > 0.$$

Luego, como todos estos menores principales sucesivos de la matriz \mathbf{P} son positivos, se concluye que $V(\mathbf{x})$ es definida positiva.

Definición 4.5. (Funciones escalares semidefinidas positivas) Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida positiva* en una región D , si $V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall x \in D$.

Ejemplo 4.2. Supongamos que \mathbf{x} es un vector bidimensional, entonces la función escalar $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$ es una función semidefinida positiva, ya que es positiva en todos los estados de una región D , excepto en el origen o en algunos otros estados donde es cero.

Definición 4.6. (Funciones escalares definidas negativas) Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida negativa*, si $-V(\mathbf{x})$ es definida positiva.

Ejemplo 4.3. La función escalar $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ es una función definida negativa.

Definición 4.7. (Funciones escalares semidefinidas negativas) Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida negativa*, si $-V(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva.

Ejemplo 4.4. La función escalar $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ es una función semidefinida negativa.

Definición 4.8. (Funciones escalares no definidas) Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *no definida*, si en la región D toma valores tanto positivos como negativos, por pequeña que sea la región D .

4.2. Función de Lyapunov

Sea V una función de clase C^1 tal que

$$V : B_\rho \subset D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto V(x) \quad (4.2)$$

debemos considerar condiciones para las cuales se verifica si dicha función es de Lyapunov para la ecuación (2.1).

Definición 4.9. (Función de Lyapunov) Llamaremos función de Lyapunov para el sistema (2.1) a un mapa definido en un entorno D del origen de \mathbb{R}^n , a valores reales, $V : D \rightarrow [0, +\infty)$, continuamente diferenciable¹, que verifica que:

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(X) > 0, \quad \forall x \in D - \{0\}. \quad (4.3)$$

$$\dot{V}(X) \leq 0, \quad \forall x \in D - \{0\}. \quad (4.4)$$

La derivada que aparece en la ecuación (4.3) es la derivada de la función V a lo largo de las trayectorias del sistema y se define como:

$$\dot{V}(X) = \frac{d}{dt} V(X(t, x)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Una función escalar candidata de $V(x)$ se convierte en una función de Lyapunov si $V(X)$ es definida positiva y si $\frac{dV(x)}{dt}$ a lo largo de una trayectoria es semidefinida negativa en una región D .

¹ Diremos también que un mapa continuamente diferenciable, o sea, derivable y con derivada continua, es de clase C^1

Ejemplo 4.5. Considérese el sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Es claro, que el origen ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), es el único estado de equilibrio. Determinar una función de Lyapunov para el sistema.

Solución:

Tomemos a $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ como función escalar, la cual es definida positiva, entonces la derivada de $V(\mathbf{x})$ respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= (-2x_1^2 - 2x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

La cual, es semidefinida negativa. Esto muestra que $V(\mathbf{x})$ es continuamente decreciente a lo largo de cualquier trayectoria. Por tanto, $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov.

Teorema 4.1. (Teorema de estabilidad de Lyapunov) Sea el origen $x = 0$ un PE de (2.1) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Si existe una función de Lyapunov para (2.1), entonces el origen es estable.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, elijamos $r \in (0, \epsilon]$ tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq r\} \subset D$$

Sea $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. Entonces, por (4.3) $\alpha > 0$. Ahora, tomemos $\beta \in (0, \alpha)$ y sea

$$\chi_\beta = \{x \in B_r / V(x) \leq \beta\}.$$

Afirmación: $\chi_\beta \in \text{Int}(B_r)$.

En efecto, Supónganse por reducción al absurdo que χ_β no pertenece al interior de B_r . Entonces existe un punto $p \in \chi_\beta$ que se encuentra sobre la frontera de B_r . De este modo $V(p) \geq \alpha > \beta$, pero $\forall x \in \chi_\beta V(x) \leq \beta$, lo cual es una contradicción.

Entonces χ_β está en el interior de B_r ; ver la figura 4.6.

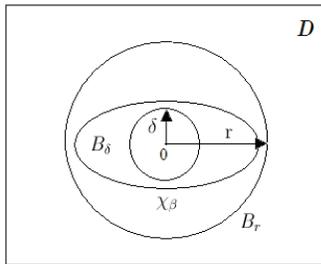


Figura 4.6: Representación geométrica de los subconjuntos en D . Autor: Leonardo Pérez.

El conjunto χ_β tiene la propiedad de que toda trayectoria que comienza en χ_β con $t = 0$ permanece en χ_β para todo $t \geq 0$. Esto se debe a que por (4.4)

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0$$

Como χ_β es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en B_r), concluimos por el Teorema 1.3 que (2.1) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$ cuando $x(0) \in \chi_\beta$. Luego, Como V es continua y $V(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

Entonces $B_\delta \subset \chi_\beta \subset B_r$, y

$$\begin{aligned} x(0) \in B_\delta &\Rightarrow x(0) \in \chi_\beta \\ &\Rightarrow x(t) \in \chi_\beta, \quad \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow x(t) \in B_r, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

lo que demuestra que el PE $x = 0$ es estable.

□

Definición 4.10. (Estabilidad asintótica) Si para el sistema (2.1) además de la estabilidad se cumple que $\delta(\epsilon)$ puede elegirse de modo tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t_o)\| = 0$ entonces el origen es asintóticamente estable según Lyapunov.

De tal modo que podríamos inferir que el equilibrio de (2.1) se dice ser asintóticamente estable si es estable y a su vez atractivo.

Las definiciones de estabilidad pueden interpretarse de la siguiente manera: si el origen es estable, partiendo suficientemente cerca de él nos mantendremos cerca de él indefinidamente (Ver Figura 4.7). La estabilidad asintótica expresa que no sólo permaneceremos cerca del origen, sino que además nos acercaremos a él en forma asintótica (Ver Figura 4.8).

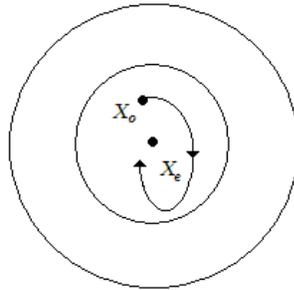


Figura 4.7: Estado de equilibrio estable. Autor: Leonardo Pérez.

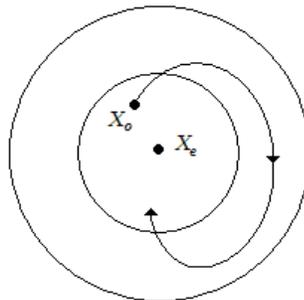


Figura 4.8: Estado de equilibrio asintóticamente estable. Autor: Leonardo Pérez.

Ambos conceptos son muy importantes para la teoría de control, ya que muchas veces podemos decir que tenemos un sistema controlado cuando logramos mantenerlo cerca de una posición de equilibrio estable, con la seguridad de que no se alejará mucho de ese punto de funcionamiento. Si además se tiene estabilidad asintótica, entonces después de un periodo transitorio, el sistema funcionará prácticamente en la posición de equilibrio.

Teorema 4.2. (Teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov) Sea el origen $x = 0$ un PE de (2.1) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Si existe una función de Lyapunov para (2.1) tal que $\dot{V}(X) < 0$, $\forall x \in D - \{0\}$, entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, elijamos $r \in (0, \epsilon]$ tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq r\} \subset D$$

Para mostrar la estabilidad asintótica debemos probar que $x(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Como V es continua y $V(0) = 0$, es suficiente mostrar que $V(x(t)) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Como $V(x(t))$ es monótonamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Mostremos que $c = 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $c > 0$. Por continuidad de $V(x)$, existe $d > 0$ tal que la bola B_d está contenida en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq c\}$. El límite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implica que la trayectoria $x(t)$ permanece fuera de la bola B_d para todo $t \geq 0$.

Sea $-\mu = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$, el cual existe ya que la función continua $\dot{V}(x)$ alcanza un máximo sobre el conjunto compacto $\{d \leq \|x\| \leq r\}$.

Como $\dot{V}(X) < 0$, $\forall x \in D - \{0\}$.

Integrando $\dot{V}(x)$ tenemos que,

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \mu t.$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que $c > 0$.

Así, $V(x(t)) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto $x = 0$ es asintóticamente estable. \square

Nótese que la condición de que $\dot{V} \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto Ω_c y nunca puede salir de él. Cuando $\dot{V} < 0$, la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un c menor. Luego, a medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

Si, además, $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es asintóticamente estable, en forma total.

4.3. Sistemas invariantes en el tiempo

Hay muchos caminos para la investigación de la estabilidad asintótica de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Por ejemplo, para un sistema continuo en el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

La condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen del sistema, se puede expresar como que todos los valores propios de \mathbf{A} tengan partes reales negativas, o bien que los ceros del polinomio característico

$$|p\mathbf{I} - \mathbf{A}| = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n$$

tengan partes reales negativas.

Hallar los valores propios se hace difícil, o imposible, en el caso de sistemas de orden superior, o si alguno de los coeficientes del polinomio característico son no numéricos.

Ejemplo 4.6. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde el único estado de equilibrio es el origen, $x = 0$. Determinar la estabilidad.

Solución:

Si elegimos la siguiente función escalar, como una posible función de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$$

La cual por definición es definida positiva, luego como

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad y \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2,$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$ esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1(x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2) \\ &= 4x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= 2x_1x_2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

Por lo cual es no definida. Esto implica que esta $V(\mathbf{x})$ particular, no es una función de Lyapunov y por lo tanto no se puede utilizar para determinar la estabilidad. Sin embargo, nótese que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$|pI - \mathbf{A}| = p^2 + p + 1$$

Así, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ son los valores propios de la matriz de coeficientes, y por tanto el origen es estable, Ver (3). Esto quiere decir que no hemos elegido una función candidata adecuada.

Si elegimos la siguiente función escalar, como una posible función de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

La cual por definición es definida positiva, entonces

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2x_2^2 = -2x_2^2$$

es semidefinida negativa. Nótese que si $\dot{V}(\mathbf{x})$ se extingue para $t \geq t_1$, entonces x_2 debe ser cero, $\forall t \geq t_1$, esto requiere que $\dot{x}_2 = 0$, para $t \geq t_1$ y como $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$, x_1 también debe ser igual a cero para $t \geq t_1$. Esto significa que $\dot{V}(\mathbf{x})$ se extingue sólo en el origen. Así, por el teorema 4.2 el estado de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en forma total.

4.4. Síntesis del método difuso de Lyapunov

En esta sección nuestro propósito es describir el método difuso de Lyapunov para el diseño de un controlador. Para el caso convencional, es decir, cuando tenemos una descripción matemática exacta de un sistema (planta); y lo describimos en toda su extensión en el caso difuso.

Consideremos un sistema de entrada simple y salida simple dado por

$$\dot{x} = F(x, u), \quad y = h(x), \quad (4.5)$$

donde $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots, F_n(\cdot))^T$ y las $F_i(\cdot)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, son funciones continuas, además $u \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ son las entradas y salidas del sistema, respectivamente. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema.

El objetivo de control es estabilizar el sistema alrededor de un punto de equilibrio x_0 (Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $x_0 = 0$). Específicamente la idea es diseñar una relación de control $u(x)$ tal que $\mathbf{0}$ pudiera ser un punto de equilibrio estable para (4.5). En este caso podrían ser usadas otras definiciones de estabilidad entre ellas la asintótica.

En este punto, se puede extender la idea conceptual en un escenario más general y realístico.

Supongamos que (4.5) es desconocido, pero tenemos un conocimiento parcial sobre el sistema (difuso). Como anteriormente se explicó, una alternativa para estudiar la estabilidad; es el uso del método de Lyapunov, es decir, determinar una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, encontrar su expresión al derivarla y hallar condiciones que prueben que, en efecto, $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov. Sin embargo, como nuestro conocimiento sobre la planta es vago (difuso), estas condiciones obtenidas resultan en un controlador difuso u .

Una manera de formular estas condiciones es en reglas, como las mencionadas en (1.4.3), es decir:

1. **Si** x_1 es **(VL)** *and/or* ... *and/or* x_n es **(VL)** **Entonces** u es **(VL)**.

Donde **(VL)** son los valores lingüísticos por ejemplo: largo, muy negativo, moderadamente alto, bastante corto, entre otros. Las cuales resultan ser la colección de sentencias lingüísticas que describirán la toma de decisión en el sistema de inferencia difusa.

CAPÍTULO 5

SISTEMA NO LINEAL CONTROLADO CON LÓGICA DIFUSA

5.1. Aplicación de la Teoría de Lyapunov

La aplicación de los conceptos relacionados con la teoría de Lyapunov es enorme y variada, desde su uso en el estudio de estabilidad en sistemas eléctricos de potencia hasta en reactores químicos, pasando por áreas tan diversas como la medicina en la propagación de enfermedades contagiosas o el desarrollo de las células en un embrión.

Veamos como la teoría de Lyapunov puede estudiarse en el análisis de estabilidad de un sistema controlado con lógica difusa.

Tomemos por ejemplo, un modelo del Péndulo Invertido, mostrado en la figura 5.1, y conformado por una carreta de masa M sobre la cual gira una barra de masa m uniformemente distribuida y de longitud l . El desplazamiento de la carreta es x y la fuerza aplicada a la carreta es U .

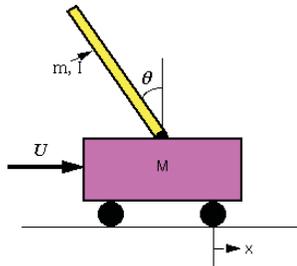


Figura 5.1: Modelo de un Péndulo invertido. Autor: Leonardo Pérez.

Definamos un sistema coordenado $X - Y$ como se muestra en la figura 5.2 y observe-

mos la dinámica del sistema de la barra y la carreta y obtengamos las ecuaciones del movimiento.

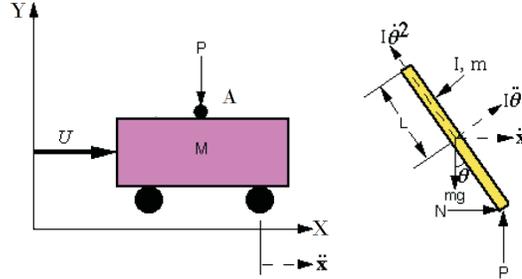


Figura 5.2: Modelo de un Péndulo invertido. Autor: Leonardo Pérez.

La posición horizontal y vertical de la masa del péndulo son $x + l \sin \theta_0$ y $l \cos \theta_0$, respectivamente.

Aplicando la segunda ley de Newton a la dirección x del movimiento da

$$\sum (M + m)\ddot{x} = M \frac{d^2}{dt^2}x + m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta_0) = U. \quad (5.1)$$

Y observando que

$$\frac{d}{dt} \sin \theta_0 = \cos \theta_0 \dot{\theta}_0.$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta_0 = (-\sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2 + (\cos \theta_0) \ddot{\theta}_0.$$

$$\frac{d}{dt} \cos \theta_0 = (-\sin \theta_0) \dot{\theta}_0.$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta_0 = (-\cos \theta_0) \dot{\theta}_0^2 - (\sin \theta_0) \ddot{\theta}_0.$$

Donde un punto denota derivación con respecto al tiempo, la ecuación (5.1) puede reescribirse así:

$$(M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta_0 \dot{\theta}_0^2 + ml \cos \theta_0 \ddot{\theta}_0 = U. \quad (5.2)$$

A continuación, considérese el movimiento del péndulo invertido con respecto al punto A de la figura 5.2. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento, tenemos:

$$P \sin \theta_0 + N \cos \theta_0 + mg \sin \theta_0 = ml\ddot{\theta}_0 + m\ddot{x} \cos \theta_0$$

multiplicando por l

$$Pl \sin \theta_0 + Nl \cos \theta_0 + mgl \sin \theta_0 = ml^2\ddot{\theta}_0 + ml\ddot{x} \cos \theta_0 \quad (*).$$

Sumando los momentos sobre el centroide del péndulo tenemos que

$$-Pl \sin \theta_0 - Nl \cos \theta_0 = I\ddot{\theta}_0 \quad (**).$$

Y posteriormente, al sumar (*) y (**):

$$ml\ddot{x} \cos \theta_0 + ml^2\ddot{\theta}_0 + I\ddot{\theta}_0 = mgl \sin \theta_0.$$

Luego, al despejar \ddot{x}

$$\ddot{x} = \frac{mgl \sin \theta_0 - ml^2\ddot{\theta}_0 - I\ddot{\theta}_0}{ml \cos \theta_0}.$$

Ahora, calculemos el momento de inercia I de la barra uniforme de longitud l (Figura 5.3). Sea r la distancia perpendicular de la partícula al eje de rotación y dm el diferencial de masa de la partícula, la cual es una función de densidad, entonces

$$I = \int r^2 dm.$$

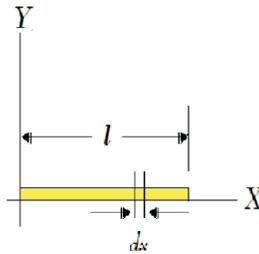


Figura 5.3: Barra uniforme. Autor: Leonardo Pérez.

$$dm = \rho dx.$$

$$m = \rho l.$$

Donde ρ es la densidad de la barra, m es la masa de la barra y l su longitud. De modo que, el momento de inercia de la barra alrededor del eje Y es:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^l r^2 dm = \int_0^l x^2 (\rho dx) = \rho \int_0^l x^2 dx \\ &= \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} \rho l^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{l} \right) l^3 = \frac{ml^2}{3} \end{aligned}$$

por tanto, $I = \frac{ml^2}{3}$. Así

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \theta_0 - \frac{4}{3} \ddot{\theta}_0}{\cos \theta_0} \quad (5.3)$$

Luego, despejando $\ddot{\theta}_0$ de (5.2) tenemos que

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{U - (M + m) \ddot{x} + ml(\sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{ml(\cos \theta_0)} \quad (5.4)$$

Y sustituyendo (5.3) en (5.4)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 &= \frac{U - (M + m) \left(\frac{g \sin \theta_0 - \frac{4}{3} \ddot{\theta}_0}{\cos \theta_0} \right) + ml(\sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{ml(\cos \theta_0)} \\ \ddot{\theta}_0 \left(1 - \frac{4(M + m)}{3m \cos^2 \theta_0} \right) &= \frac{U - (M + m) \frac{g \sin \theta_0}{\cos \theta_0} + ml(\sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{ml(\cos \theta_0)} \\ \ddot{\theta}_0 &= \frac{U - (M + m) \frac{g \sin \theta_0}{\cos \theta_0} + ml(\sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{ml(\cos \theta_0) - \frac{4(M + m)l}{3 \cos \theta_0}} \\ \ddot{\theta}_0 &= \frac{U \cos \theta_0 - (M + m)g \sin \theta_0 + ml(\sin \theta_0 \cos \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{ml(\cos^2 \theta_0) - \frac{4}{3}(M + m)l} \\ \ddot{\theta}_0 &= \frac{(M + m)g \sin \theta_0 - ml(\sin \theta_0 \cos \theta_0) \dot{\theta}_0^2 - U \cos \theta_0}{l \left(\frac{4}{3}(M + m) - m \cos^2 \theta_0 \right)} \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{g \sin \theta_0 - \frac{ml(\sin \theta_0 \cos \theta_0) \dot{\theta}_0^2}{(M + m)}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta_0}{(M + m)} \right)} - \left(\frac{\frac{\cos \theta_0}{(M + m)}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta_0}{(M + m)} \right)} \right) U.$$

Definamos $x_1 = \theta_0$ y $x_2 = \dot{\theta}_0$. Entonces las ecuaciones del sistema dinámico son:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x_1, x_2) + G(x_1, x_2)U \quad (5.5)$$

donde

$$F(x_1, x_2) = \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{M+m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{(m \cos^2 x_1)}{M+m}\right)}. \quad (5.6)$$

$$G(x_1, x_2) = \frac{\frac{\cos x_1}{M+m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{(m \cos^2 x_1)}{M+m}\right)}. \quad (5.7)$$

Como se quiere aplicar la síntesis del método difuso de Lyapunov asumiremos que las ecuaciones matemáticas de (5.5) son desconocidas y que sólo tenemos un conocimiento parcial acerca del péndulo. Considerando relevante el estado de las variables x_1 y x_2 , donde \dot{x}_2 es proporcional a U , es decir, cuando U se incrementa (decrece) \dot{x}_2 también se incrementa (decrece).

Nuestro objetivo está en diseñar $U(x_1, x_2)$ que balanceará el péndulo invertido. Para encontrar U tal que $(0, 0)^T$ pueda ser un punto estable para (5.5).

Consideremos la siguiente función:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (5.8)$$

La cual va a ser nuestra función de Lyapunov candidata, para la cual las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la definición 4.4 se satisfacen, donde

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2. \quad (5.9)$$

Por lo cual se debe verificar que (4.4) se cumple, esto es:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2\dot{x}_2 < 0 \quad (5.10)$$

en alguna vecindad de $(0, 0)^T$.

Se pueden extraer condiciones para las cuales (5.10) se cumple, las cuales nos proporcionarán el diseño del controlador de estabilidad, esto es

1. Si x_1 y x_2 tienen signos opuestos, entonces $x_1 x_2 < 0$ y necesariamente $\dot{x}_2 = 0$ para que (5.10) se cumpla.
2. Si x_1 y x_2 son ambos positivos, entonces (5.10) se cumple si $\dot{x}_2 < -x_1$.
3. Si x_1 y x_2 son ambos negativos, entonces (5.10) se cumple si $\dot{x}_2 > -x_1$.

Ahora bien, usando estas observaciones y recordando el hecho de asumir que \dot{x}_2 es proporcional a U , obtenemos pues las siguientes reglas difusas:

1. Si x_1 es positiva y x_2 es negativa entonces u es cero
2. Si x_1 es negativa y x_2 es positiva entonces u es cero
3. Si x_1 es positiva y x_2 es positiva entonces u es negativa grande
4. Si x_1 es negativa y x_2 es negativa entonces u es positiva grande

Siguiendo las ecuaciones planteadas en [25]. Caracterizando las variables lingüísticas *positivo* (P), *negativo* (N), *positivo grande* (PG), *negativo grande* (NG) y *cero* (C), tenemos que las funciones de membresía para cada una son:

$$\mu_P(x) = \frac{1}{1 + \exp(-30x)} \quad (5.11)$$

$$\mu_N(x) = \frac{1}{1 + \exp(30x)} \quad (5.12)$$

$$\mu_{PG}(x) = \exp(-(x - 5)^2) \quad (5.13)$$

$$\mu_{NG}(x) = \exp(-(x + 5)^2) \quad (5.14)$$

$$\mu_C(x) = \exp(-x^2) \quad (5.15)$$

Luego, usando el Fuzzy Logic Toolbox [23], el diseño del controlador, las funciones de membresía y las reglas, quedan planteados de la siguiente manera

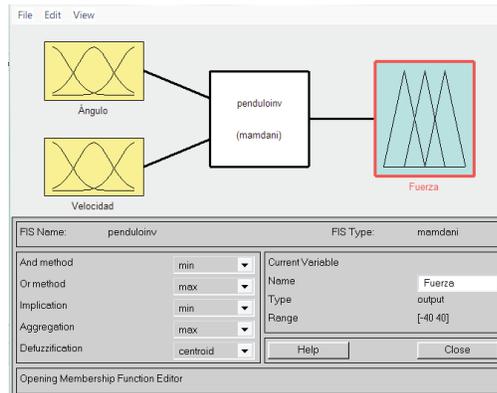


Figura 5.4: Diseño del controlador del Péndulo invertido. Autor: Leonardo Pérez.

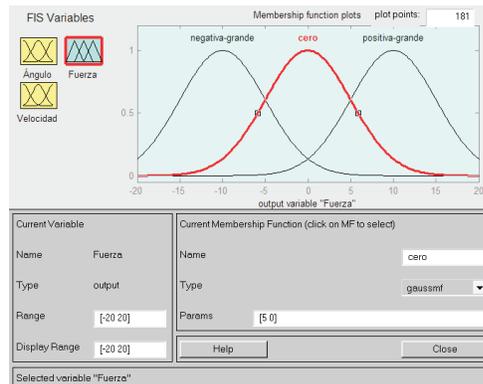


Figura 5.5: Funciones de membresía del diseño del controlador.

De este modo, con el desdifusificador de centro de gravedad y el producto de la máquina de inferencia, obtenemos el siguiente controlador de estabilidad:

$$U = -5f_l(x_1, x_2) - 5f_2(x_1, x_2)$$

donde

$$f_l(x_1, x_2) = \frac{\mu_P(x_1)\mu_P(x_2)}{\mu_P(x_1)\mu_P(x_2) + \mu_P(x_1)\mu_N(x_2) + \mu_N(x_1)\mu_P(x_2) + \mu_N(x_1)\mu_N(x_2)}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\mu_N(x_1)\mu_N(x_2)}{\mu_P(x_1)\mu_P(x_2) + \mu_P(x_1)\mu_N(x_2) + \mu_N(x_1)\mu_P(x_2) + \mu_N(x_1)\mu_N(x_2)}$$

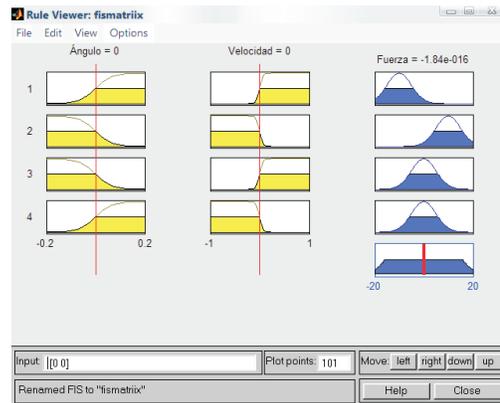


Figura 5.6: Reglas del diseño del controlador. Autor: Leonardo Pérez.

5.2. Diseño del Controlador

Las Figuras siguientes muestran los resultados de la simulación de lazo cerrado del sistema.

En la figura 5.7 se muestra el ángulo del péndulo x_1 como función del tiempo para las siguientes 5 condiciones iniciales:

$$(x_1(0), x_2(0)) = (4^\circ, 0), (9^\circ, 0), (12^\circ, 0), (17^\circ, 0), (20^\circ, 0).$$

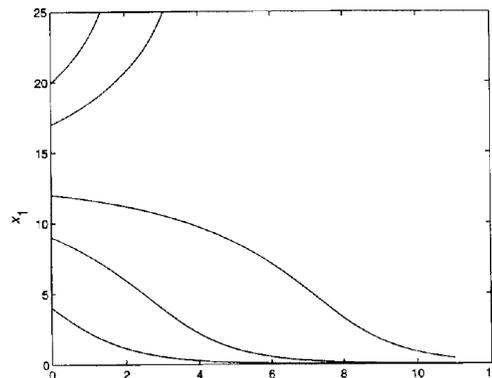


Figura 5.7: El ángulo $x_1(t)$ para 5 condiciones iniciales $(x_1(0), 0)$. Autor: Leonardo Pérez.

Donde se puede notar que para ángulos pequeños la tendencia del controlador es hacia $x_1 = 0$, esto nos indica que se obtiene la estabilidad local del sistema de lazo cerrado.

En la figura 5.8 se muestra el péndulo en el plano de fase para la condición inicial $x_1(0) = 0,068\text{rad}$ ($\simeq 4^\circ$), $x_2(0) = 1\text{rad/seg}$.

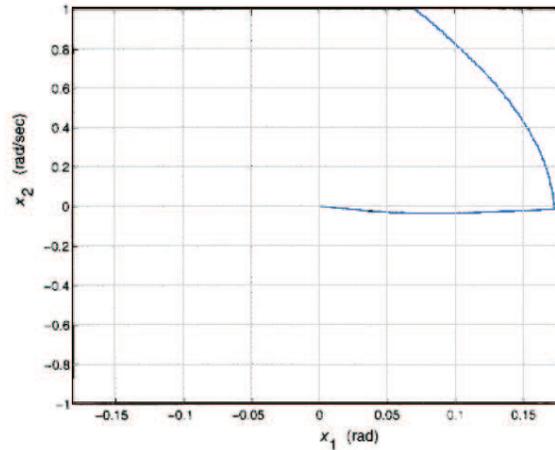


Figura 5.8: Plano de fase con condición inicial $x_1(0) = 0,068\text{rad}$ y $x_2(0) = 1\text{rad/s}$. Autor: Leonardo Pérez.

Nótese que la velocidad angular x_2 decrece y se aproxima a cero y luego el polo se mueve lentamente tendiendo a $x_1 = 0$. Esto concuerda con 5.9 donde

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2\dot{x}_2, \quad (5.16)$$

entonces $\dot{V} = 0$ en la línea $x_2 = 0$.

5.3. Simulación

Haciendo uso del Fuzzy logic tool box [23]. A través de las 4 reglas difusas anteriormente mencionadas. Podemos crear un nuevo controlador, agregando condiciones para la posición del carro x_3 y la velocidad adquirida por el carro x_4 , y así observar y estudiar el sistema bajo el entorno del SIMULINK [22].

Siguiendo la caracterización de las variables lingüísticas *positivo* (P), *negativo* (N), *positivo grande* (PG), *negativo grande* (NG) y *cero* (C), y agregando 2 nuevas variables: *medianamente negativa* (MN) y *medianamente positiva* (MP), tenemos las siguientes reglas difusas:

1. Si x_1 es positiva y x_2 es negativa y x_3 es medianamente positiva y x_4 es medianamente positiva entonces u es cero.
2. Si x_1 es negativa y x_2 es positiva y x_3 es medianamente negativa y x_4 es medianamente negativa entonces u es cero.
3. Si x_1 es positiva y x_2 es positiva y x_3 es medianamente positiva y x_4 es medianamente positiva entonces u es negativa grande.
4. Si x_1 es negativa y x_2 es negativa y x_3 es medianamente negativa y x_4 es medianamente negativa entonces u es positiva grande.

Donde, las funciones de membresía de estas dos nuevas caracterizaciones están dadas por:

$$\mu_{MP}(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x+3}{3}\right|^4}. \quad (5.17)$$

$$\mu_{MN}(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-3}{3}\right|^4}. \quad (5.18)$$

Donde μ_{MP} y μ_{MN} son funciones de membresía de Bell generalizadas de parámetros $(a = 3, b = 2, c = -3)$ y $(a = 3, b = 2, c = 3)$, respectivamente.

Luego, usando [23], el nuevo del controlador y las funciones de membresía quedan planteados como se muestra en la figura 5.9 y 5.10. Luego, al crear el esquema de la figura 5.11 en el SIMULINK y utilizando el controlador, podemos observar la animación de la figura 5.12.

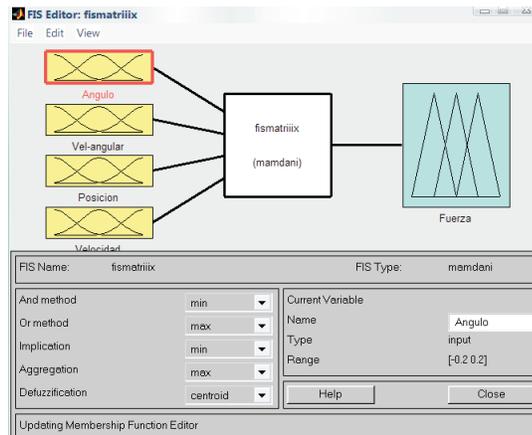


Figura 5.9: Diseño del controlador del Péndulo invertido. Autor: Leonardo Pérez.

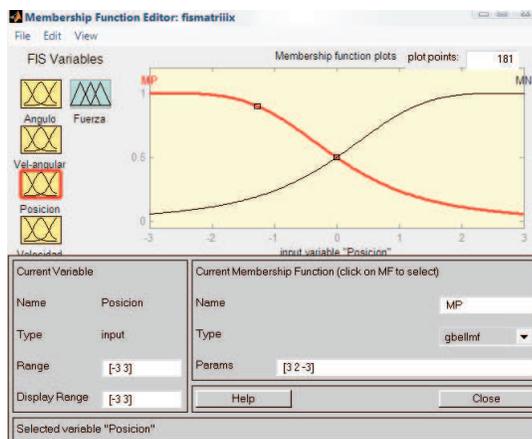


Figura 5.10: Funciones de membresía del diseño del controlador. Autor: Leonardo Pérez.

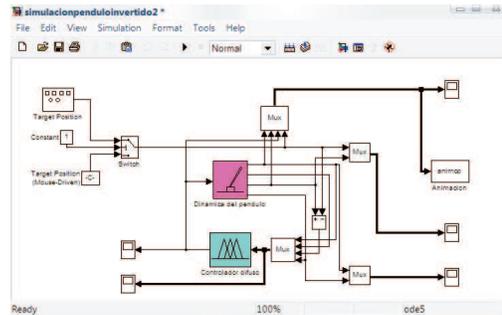


Figura 5.11: Simulación del péndulo invertido en SIMULINK. Autor: Leonardo Pérez.

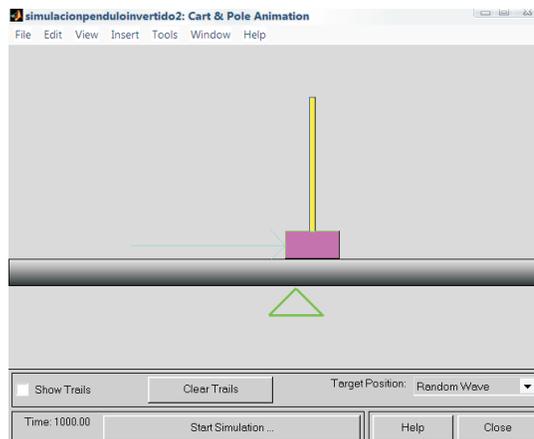


Figura 5.12: Animación del péndulo invertido. Autor: Leonardo Pérez.

Donde se puede notar que para ángulos pequeños la tendencia del controlador es hacia $x_1 = 0$, esto nos indica que se obtiene la estabilidad local del sistema.

Nótese que mediante el uso del controlador la velocidad angular x_2 decrece y se aproxima a cero en cada perturbación que presenta la barra. Esto concuerda con (5.9) donde

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 \dot{x}_2, \quad (5.19)$$

Donde se verifica que $x_1 x_2 + x_2 \dot{x}_2 < 0$, y Cuando $x_2 = 0$ entonces $\dot{V} = 0$. Por tanto obtenemos el resultado de estabilidad deseado.

5.4. Conclusiones y Recomendaciones

A través de este trabajo se aprovechó la teoría de Lyapunov para diseñar un controlador difuso a un sistema no lineal, en particular un péndulo invertido. Creando un base de reglas a partir de las condiciones obtenidas mediante el método de selección de una función candidata a ser de Lyapunov, todo esto con un mínimo conocimiento sobre la dinámica del sistema. Permitiendo en grandes rasgos disminuir la cantidad de reglas que hacen lentos los procesos computacionales. Luego, usando el Fuzzy Logic Tool Box del paquete MatLab se construyó un controlador difuso con dichas reglas, permitiendo el modelado de la planta y observando resultados satisfactorios sobre su estabilidad.

Se recomienda hacer estudios similares en sistemas como el Ball and Beam, sistemas de llenado de tanques y de reacciones térmicas, usando el método de Sugeno y control con modo deslizante, así como, en circuitos eléctricos elementales donde las ecuaciones no son sencillas, (ver [12], [17], [20]).

O bien, Considere un sistema no lineal gobernado por la ecuación diferencial

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \quad (5.20)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y es la salida del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es el control, $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$ es el vector de estado (el cual asumimos que es medible y computable), y f y g son funciones no lineales particularmente desconocidas. Asumamos que, $g > 0$. Haciendo uso de [1], se sabe que este sistema es en forma normal y de manera general, un sistema no lineal que puede ser transformado a esta forma. La mayor restricción es que el control u debería aparecer expresado linealmente en la ecuación.

Ahora, supongamos que se tiene listo el diseño de un controlador difuso

$$u = u_{fuzz} \quad (5.21)$$

para el sistema. Este puede ser construido por ensayo y error (ver [2]). La tarea sería garantizar el sistema de lazo cerrado y, al mismo tiempo, no realizar cambios al diseño del controlador difuso existente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALBERTO ISIDORI (1995). *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 3rd edition.
- [2] ALBERTO ISIDORI (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- [3] ASTROM, K. AND WITTENMARK, B. (1995). *Adaptive Control*. Addison Wesley, Second Edition.
- [4] CHOI, B.; KWAK, S. AND KIM, B. (1999). *Design of a single input fuzzy logic control and its properties*. Fuzzy Sets and Systems, 106, pp. 299-308.
- [5] CHURCHIL, R.V. (1972). *Operational mathematics*. McGraw Hill book company, 3rd edition.
- [6] COMISIÓN DE ESTUDIOS DISCIPLINARIOS, UCV (2004). *La Borrosidad*. Seminarios. Editorial Torino. Año 7. No.18.
- [7] DR. JOSE SARABIA (1994). *Ecuaciones Diferenciales*. Primera edición.
- [8] G.H. GOLUB AND C.F. VAN LOAN (1996). *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 3rd edition.
- [9] JANTZEN, J. (2007). *Foundations of Fuzzy Control*. Wiley.
- [10] KHALIL, L. (1996). *NonLinear Systems*. Prentice-Hall, 2nd edition.
- [11] LO, J. AND KUO, Y. (1998). *Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 6 No. 3, pp. 426-435.
- [12] MANDANI, E.H.(1974). *Applications of fuzzy Algorithms for simple dynamics plants*. Proceedings of the IEE, Vol. 121, pp. 1585-1588.

- [13] MARGALLOT, M. AND LANGHOLTZ, G. (1999). *Fuzzy Lyapunov-based approach to the design of fuzzy controllers*. Fuzzy sets and systems, No. 106, pp. 49-54.
- [14] OGATA, K. (2003). *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson-Prentice Hall. 4ta Edición.
- [15] OGATA, K. (1987). *Dinámica de sistemas*. Prentice Hall.
- [16] OGATA, K. (1999). *Problemas de Ingeniería de Control Utilizando Matlab*. Prentice Hall.
- [17] PALM , R. DRIANKOV D. AND HELLENDORN, H. (1996). *Model Based Fuzzy Control. Fuzzy Gain Schedulers and Sliding Fuzzy Mode Controllers*. Springer.
- [18] PASSINO, K. AND YURKOVICH, S. (1997). *Fuzzy Control*. Addison Wesley.
- [19] PEDRYCZ, W. (1993). *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. Wiley and Sons.
- [20] SHANKAR SASTRY. (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer.
- [21] THE MATHWORKS, INC. 1996. *MATLAB, Edición de Estudiante*. Guía de Usuario. Prentice Hall International.
- [22] THE MATHWORKS, INC. 1996. *SIMULINK, Edición de Estudiante*. Prentice Hall International.
- [23] THE MATHWORKS, INC. 1998. *Fuzzy Logic Toolbox*. The MathWorks, Inc.
- [24] UMEZ-ERONINI, E. (2001). *Dinámica de Sistemas y Control*. Thomson Learning.
- [25] WANG, L. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall.

-
- [26] YAGER, R AND FILEV, D. (1994). *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. Wiley and Sons.
 - [27] ZADEH, L. (1965). *Fuzzy Sets*. Information and Control, 8, p.p. 338-353.
 - [28] ZADEH, L. (1973). *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*. IEEE Transactions of Systems, Man and Cybernetics, SMC-3, pp. 28-44.