UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“El Teorema de Birkhoff para transformaciones que preservan medidas infinitas. ”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Manuel V Carrera T.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Sistema Dinámico.
Tutor: Dr. sergio muñoz.

Barquisimeto, Venezuela. Noviembre de 2008

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"El Teorema de Birkhoff para transformaciones que preservan medidas infinitas. "

presentado por el ciudadano Br. Manuel V Carrera T. titular de la Cédula de Identidad No. 17.276.723, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Para dos seres que han tenido una gran influencia en mí... Yanira y Vicente.

Agradecimientos

A Dios, por permitirme ser parte de su creación.

A mis padres Yanira y Vicente... Sencillamente son todo en mi vida... Este y todos los triunfos que vienen serán por ustedes y para ustedes... los quiero!!

A mis hermanas y hermano María Eugenia, María Victoria y Francisco Ortega gracias por estar siempre pendiente de mí. Estaré en deuda eterna con ustedes... Gracias por existir.

A mis sobrinas y sobrino Ana, María, Mariana y Daniel ya que desde que llegaron a este mundo son mi inspiración constante.

A mi abuela Victoria, a mis tías, tíos, primos por confiar ciegamente en mí. Eternamente le estaré agradecido.

Al profesor Sergio Muñoz por su paciencia y dedicación.

Al Profesor Carlos Garcia. Su gran colaboración fue esencial en la culminación de este trabajo... Todas tus ideas están plasmada en esta tesis

A los profesores Ismael Huerta, Alexander Carrasco, Ebner Pineda y Neptalí Romero por todo el conocimiento que con gran dedicación me trasmitieron.

A mi compadre amigo y hermano Elifer Vásquez... Nunca olvidare tantas discusiones sanas que tuvimos durante el transcurso de nuestra carrera. Una eterna amistad siempre nos unirá.

A mis compañeros Dicmar, Mediomundo, Yuly, Alejandra, Yajaira, Lina, Liseth, Willennys, Elizabeth por todos esos momentos inolvidables vividos dentro y fuera de la universidad.

A los Licenciados Jesús, María L, Dexy, Adrianita, Cayama cuyas conversaciones acerca de la vida siempre tendré presente.

A mis compañeros de la promoción 39 con especial afecto a Efrén, Javier, Yankis y Borys por tantos días de estudios compartido.

Por último y no menos importantes al Grupo LOS ANORMALES (Luis F, Mario, Néstor, Gregorio, Adrián y David) y al poncho azul, mis amigos de parranda... una hermandad que comenzó no se donde y terminará no se cuando.

Resumen

Consideremos un espacio de medida σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$, el Teorema ergódico de Birkhoff establece que dada una transformación $T : X \to X$, ergódica, que preserva la medida μ se cumple: si $\mu(X) < \infty$, dada $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi d\mu \quad \mu - \text{ctp} \quad x \in X$$

Ver [3] y [7].

El objetivo fundamental de este trabajo es probar que si $\mu(X) = \infty$, no es posible un Teorema de Birkhoff en un contexto de probabilidad, en otras palabras probaremos que:

Dada $T : X \to X$ una transformación ergódica, conservativa que preserva la medida μ en un espacio de medida σ-finito infinito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y (a_n), $n \geq 1$, una sucesión cualquiera de números reales positivos, entonces se cumple una de las siguientes proposiciones:

i) $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a_n} = 0$ μ-ctp para todo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)_+$

ii) Existe una sucesión $n_k \uparrow \infty$ tal que $\frac{S_{n_k}(f)}{a_{n_k}} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$ μ-ctp para todo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)_+$

donde $S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$.

Para lograr dicho objetivo, seguiremos la lectura contenida en [1].

Índice

Capítulo 1
Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar algunas definiciones y resultados básicos en Teoría de la Medida que son útiles para lo que sigue, como referencias para las demostraciones de los teoremas que aquí presentamos se encuentran los libros [2],[6]

1.1. Espacios Medibles

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío, una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un *álgebra* si:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B$.

Como consecuencia de la definición: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ y
$A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$; además por asociatividad, la unión y la intersección finita de conjuntos en $\mathcal{A}$ también están en $\mathcal{A}$.

Definición 1.2. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ se dice que es una *σ-álgebra* si es cerrada por uniones numerables, esto es:

- $A_j \in \mathcal{A}$ para $j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ implica $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Obsérvese que la *σ-álgebra* $\mathcal{A}$ también es cerrada por intersecciones numerables: si $A_j \in \mathcal{A}$ para $j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ entonces $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j^c)^c \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.1. Sea $\mathcal{A}$ la familia de subconjuntos de X definida por $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra llamada la *σ-álgebra trivial*, y es igual a la intersección de todas las σ-álgebras definidas en X.

Ejemplo 1.2. Consideremos X un conjunto cualquiera no vacío y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ entonces $\mathcal{A}$ también es una σ-álgebra definida en X.

Notemos que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de un conjunto X entonces $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, asi $\{\emptyset, X\}$ es la menor σ-álgebra y $\mathcal{P}(X)$ es la mayor σ-álgebra de un conjunto X.

Definición 1.3. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X, diremos que $\mathcal{A}$ *es generada por* $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y toda σ-álgebra $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ satisface que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

En términos mas precisos, una *σ-álgebra generada* por una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es la menor σ-álgebra que contiene a la familia $\mathcal{B}$.
Si X es un espacio topológico se denomina *σ-álgebra de Borel* de X a la σ-álgebra generada por la familia de subconjuntos abiertos. En este caso los conjuntos en la σ-algebra de Borel se denominan Borelianos de X.

Definición 1.4. Un *espacio medible* es una dupla $(X, \mathcal{A})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados conjuntos medibles.

1.2. Espacios de medida

Ahora introducimos el concepto de medida y analizamos algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición 1.5. Una *medida* en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ es una función
$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$

y para cualquier sucesión B_n disjunta dos a dos de conjuntos en $\mathcal{A}$ se cumple que:

- $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada un *espacio de medida*, cuando $\mu(X) = 1$ diremos que μ es una medida de probabilidad y en este caso $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado un *espacio de probabilidad*.
A los conjuntos $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$ son llamados conjuntos de medida cero.

Definición 1.6. Diremos que μ es una medida *σ-finita* si existe una sucesión (E_n) de conjuntos en $\mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (numerable) y $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $\mu(X) = \infty$ diremos que μ es de *medida infinita* y en este caso $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado un espacio de medida *σ-finito infinito*.

A continuación presentaremos algunas definiciones muy usada en teoría de la medida y que forman parte del lenguaje de la misma. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ denotará un espacio de medida.

Definición 1.7. Una propiedad aplicable a elementos de un conjunto $S \subset X$ se cumple en *casi todo punto* relativo a la medida μ (el cual abreviaremos ctp) si el conjunto de puntos de S donde dicha propiedad es falsa tiene medida cero.

Definición 1.8. Diremos que dos conjuntos $A_1,\ A_2 \subset X$ coinciden *mod* μ y se denota por $A_1 = A_2$ mod (μ) si $A_1 \triangle A_2$ tienen medida cero.
$A \subset B$ mod (μ) significa que $A,\ B \in \mathcal{A},\ \ \mu(B - A) = 0$.

Ejemplo 1.3. Sea X un conjunto no vacío y consideremos la σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dado cualquier $p \in X$, consideremos la función $\delta_p : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definida por:

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in A \\ 0, & \text{si } p \notin A. \end{cases}$$

Tenemos que δ_p es una medida que usualmente es llamada *Delta de Dirac* en el punto p.

Ejemplo 1.4. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Borel entonces existe una única medida λ definida en $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(I) = \mathit{longitud}(I)$ para todo intervalo I. Esta medida es llamada *medida de lebesgue*, no es una medida finita pero si σ-finita.

1.3. Funciones medibles e integración en un espacio de medida

En esta sección daremos el concepto de funciones medibles y definiremos la integral de una función medible definida en un espacio de medida. Denotaremos por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definición 1.9. Diremos que una función entre espacios medibles $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ es *medible* si para cada $B \in \mathcal{A}_2$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.

Si $(Y, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, diremos que f es una función medible que comúnmente se llama *funcion borel medible.*

Como consecuencia de la definición anterior diremos que una función $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es medible si y sólo si, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

Veamos algunas propiedades de las funciones medibles

Proposición 1.1. *i) Si f es medible y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es medible.*

ii) Si f y g son funciones medibles y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ es medible.

iii) Si f es medible, entonces $|f|$ es medible.

iv) Si f es medible, entonces $-f$ es medible.

v) Si f y g son funciones medibles entonces, $\max\{f, g\}$ *es una función medible.*

vi) Si f es medible, la parte positiva $f^+ = \max\{f, 0\}$ y negativa $f^- = \max\{-f, 0\}$ respectivamente de f son funciones medibles. ademas $f = f^+ - f^- y$ $|f| = f^+ + f^-$ es medible.

Definición 1.10. Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $E \in \mathcal{A}$, llamaremos *función característica* a la función $1_E : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$1_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Claramente la función característica es una función medible ya que el conjunto $\{x \in X : 1_E(x) > \alpha\}$ es X, E o $\emptyset$

Definición 1.11. Diremos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una *función simple* si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tales que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

Denotaremos por $\mathcal{S}$ al conjunto de todas las funciones simples finitas.

Introduzcamos ahora el concepto de integral, comenzando por definir la integral de una función simple

Definición 1.12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{S}$ una función no negativa, es decir

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} : X \to [0, +\infty)$$

definimos *la integral de f con respecto de μ* como el valor en $[0, +\infty]$ dado por:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

En la igualdad dada en la definición anterior, adoptamos la convención, $0.(+\infty) = 0$. Además se verifica facilmente, que la definición es coherente, pues si dos combinaciones lineales definen una misma función simple, los valores de la integral obtenidos apartir de las dos combinaciones coinciden.

Proposición 1.2. *Sean $f, g \in \mathcal{S}$ no negativas y $c \geq 0$ entonces:*

i) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.

ii) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

iii) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Con esta proposición, se observa que sobre las funciones simples en $\mathcal{S}$ no negativas, la integral es lineal y monótona. Vamos a extender ahora la noción de integral a funciones medibles no negativas.

Definición 1.13. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f \geq 0$ es una función medible definimos la integral de f con respecto de μ en X de la siguiente forma:

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X h d\mu : h \in \mathcal{S}, \quad 0 \leq h \leq f\}$$

Nótese que el valor de la integral puede no ser finito. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es positiva, medible y $E \in \mathcal{A}$, entonces $1_E f$ también es una función positiva, medible, y se define *la integral de f sobre E con respecto a μ* como el número real extendido

$$\int_E f d\mu = \int 1_E f d\mu$$

.

Teorema 1.1. *i) Si f es una función medible no negativa y $c \geq 0$ entonces cf también es medible y $\int c f d\mu = c \int f d\mu$.*

ii) Si f, g son funciones medibles no negativas entonces $f + g$ es una funcion medible y $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Definamos ahora la integral para cualquier función medible.

Definición 1.14. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, descomponemos $f = f^+ - f^-$ donde $f^+ = \text{máx}\{f(x), 0\}$ y $f^- = \text{máx}\{-f(x), 0\}$ las cuales son las partes positiva y negativa de f respectivamente, y si uno de los términos $\int_X f_+ d\mu$ o $\int_X f_- d\mu$ es finito, definimos *la integral* de *f respecto de μ* como

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Diremos que *f es integrable* si ambos terminos son finitos.

Denotaremos por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ o simplemente $\mathcal{L}^1(\mu)$ al conjunto de todas las funciones integrables, y por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)_+$ o simplemente $\mathcal{L}^1(\mu)_+$ al conjunto de todas las funciones integrables no negativas.

Teorema 1.2. *i) Sea f una función medible. f está en $\mathcal{L}^1(\mu)$ si y sólo si $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$, y en este caso:*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$

ii) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.

iii) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ entonces $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Definición 1.15. Una sucesión (f_n) de funciones medibles se dice que *converge casi uniformemente* a una funcion f si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \epsilon$ tal que f_n converge uniformemente a f en $X - E$.

Teorema 1.3. ***(Teorema de Egoroff.)***

Supongase que $\mu(X) \leq \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones medibles tal que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ ctp $x \in X$ entonces la sucesión f_n converge casi uniformemente a f.

Capítulo 2
Teoria Ergódica

En este capítulo no se pretende dar una exposición a profundidad de la teoría ergódica, sólo se desea presentar algunos conceptos básicos que nos ayudarán a entender el propósito final de este trabajo.
Las demostraciones de algunos teoremas que aquí no presentamos están contenida en [1] y [3].
En el resto del presente capítulo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ denotará un espacio de medida σ-finito

2.0.1. Conceptos y Teoremas básicos.

Definición 2.1. Diremos que $T : X \to X$ es una *transformación medible* si para todo $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Definición 2.2. Diremos que $T : X \to X$ es una *transformación no singular* si T es medible y cumple con:

$$\mu(T^{-1}(B)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(B) = 0; \quad B \in \mathcal{A}.$$

En palabras, T preserva la medida de los conjuntos de medida cero.

Definición 2.3. Sea $T : X \to X$ medible, diremos que T *preserva la medida* μ (o que μ es T *invariante*) si:

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{A}.$$

Además se puede apreciar de la definición que las transformaciones que preservan la medida son también transformaciones no singulares.

Definición 2.4. Sea $T : X \to X$ una transformación no singular, y sea $W \subset X$ un conjunto en $\mathcal{A}$, diremos que W es un *conjunto errante* por T (o T-*errante*) si la colección $\{T^{-n}(W)\}_{n=0}^{\infty}$ es dos a dos disjuntas.

Denotaremos por $\mathcal{W} = \mathcal{W}(T) = \bigcup_{W \text{ errante}} W$.

Definición 2.5. Sea $T : X \to X$ una transformación no singular, diremos que T es *conservativa* si $\mu(\mathcal{W}) = 0$.

Teorema 2.1. ***(Teorema de recurrencia de Halmos)***

Sea $T : X \to X$ una transformación no singular, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$ entonces

$$\mu(A \cap W) = 0 \text{ para todo } W \in \mathcal{W}$$

si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T^n = \infty \text{ ctp en } B \quad \text{para todo} \quad B \in \mathcal{A}_+ \cap A.$$

Demostración. Ver [1] , página 15. □

El siguiente teorema establece una condición para la conservatividad.

Teorema 2.2. ***(Teorema de recurrencia de Maharam)***

Supongase que $T : X \to X$ es una transformación que preserva la medida en un espacio de medida σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Si existe un conjunto $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < \infty$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \text{ mod } \mu$$

, entonces T es conservativa.

Demostración. Ver [1], página 19. □

Ejemplo 2.1. (**La Transformación de Boole**)

Sean $X = \mathbb{R}$, y λ la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, y condideremos $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Dicha transformación preserva la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, es decir $\psi^{-1}(I) = I$ donde I es cualquier intervalo. En efecto, es suficiente verificar este resultado para intervalos de la forma $I = (0, \eta)$, $\eta > 0$ y $I = (\eta, 0)$ $\eta < 0$.

Para $\eta > 0$ se tiene que:

$$(0, \eta) = \psi(-1, \alpha_1) \cup \psi(1, \alpha_2) \Rightarrow \psi^{-1}(0, \eta) = (-1, \alpha_1) \cup (1, \alpha_2)$$

donde $(-1, \alpha_1)$ y $(1, \alpha_2)$ son intervalos disjuntos, y por tanto:

$$\begin{aligned}
\mu[\psi^{-1}(0,\eta)] &= \mu[(-1,\alpha_1) \cup (1,\alpha_2)] \\
&= \mu[(-1,\alpha_1)] + \mu[(1,\alpha_2)] \\
&= -1 + \alpha_1 + 1 + \alpha_2 \\
&= \alpha_1 + \alpha_2
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \eta \quad &\Rightarrow \quad \eta = x - \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \quad x^2 - \eta x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Las raíces de esta última ecuación vienen dadas por

$$\alpha_1 = \tfrac{\eta}{2} + \tfrac{\sqrt[2]{\eta^2+4}}{2}, \quad \tfrac{\eta}{2} - \tfrac{\sqrt[2]{\eta^2+4}}{2}$$

así:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{\eta}{2} + \frac{\sqrt[2]{\eta^2+4}}{2} + \frac{\eta}{2} - \frac{\sqrt[2]{\eta^2+4}}{2} \\
&= \eta
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\lambda[(0,\eta)] = \mu[(0,\alpha_1+\alpha_2)] = \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda[\psi^{-1}(0,\eta)]$$

de donde, ψ preserva la medida de Lebesgue.
Ademas $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(I)$ donde $I = (-1, 1)$, así por el Teorema 2.2 anterior la transformación de Boole es conservativa. Ver [5].

Definición 2.6. Sea $T : X \to X$ una trasformación no singular de un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, diremos que T es *ergódica* si:

$$\text{para todo } A \in \mathcal{A}, \;\; T^{-1}(A) = A \mod \mu \Rightarrow \mu(A) = 0 \;\text{ o bien }\; \mu(A^c) = 0.$$

Ejemplo 2.2. La transformación de Boole dada en el ejemplo anterior es ergódica. Para profundizar en el tema se aconseja la lectura contenida en [4], [5].

El siguiente teorema, nos dice que en un contexto de no singularidad y conservatividad, se obtienen retornos en casi todo punto a un conjunto dado.

Teorema 2.3. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y $T : X \to X$ es una transformación no singular. entonces T es conservativa y ergódica si y solo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_A \circ T^n(x) = \infty \text{ ctp } x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}_+.$$

Demostración. Ver [1], página 22. □

2.0.2. La Transformación inducida.

Supongamos que T es una transformación conservativa y no singular, sea $A \in \mathcal{A}$, entonces μ-ctp $x \in A$ retorna infinitas veces a A bajo iteraciones de T. Definamos la *función tiempo retorno*, $\varphi_A : A \to \mathbb{N}$ por

$$\varphi_A(x) := \min\{n \geq 1 : \ T^n(x) \in A\}, \quad \text{para } x \in A$$

la cual es finita μ-ctp $x \in A$ por el Teorema 2.1.
Definamos además la *transformación inducida*, $T_A : A \to A$ como:

$$T_A(x) = T^{\varphi_A(x)}(x).$$

Es importante resaltar que $\mu_{|A} \circ T_A^{-1}$ y $\mu_{|A}$ definen una medida en el espacio medible $(A, \mathcal{A}_+ \cap A)$, Por otro lado, denotemos, $[\varphi = n] = \{x \in A : \ \varphi_A(x) = n\}$, para $n \geq 1$ así podemos escribir

$$T_A^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\varphi = n] \cap T^{-n}(B)$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
x \in T_A^{-1}(B) &\Leftrightarrow \ x \in A \ \text{ tal que } \ T_A(x) = z \ \text{ para algún } \ z \in B \\
&\Leftrightarrow \ \text{existe } \ n \geq 1 : x \in A \ \text{ y } \ T^n(x) = T^{\varphi_A(x)}(x) = z \in B \\
&\Leftrightarrow \ \text{existe } \ n \geq 1 : x \in [\varphi = n] \ \text{ y } \ x \in T^{-n}(B) \\
&\Leftrightarrow \ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\varphi = n] \cap T^{-n}(B).
\end{aligned}$$

Ahora bien, utilizando este último resultado se demuestra que $\mu_{|A} \circ T_A^{-1}$ es absolutamente continua con respecto a la medida $\mu_{|A}$.

En efecto, consideremos $B \in \mathcal{A}$ y supongamos que $\mu_{|A}(B) = 0$

$$\begin{aligned}
\mu_{|A} \circ T_A^{-1}(B) &= \mu_{|A}(T_A^{-1}(B)) \\
&= \mu_{|A}(\bigcup_{n=1}^{\infty}[\varphi = n] \cap T^{-n}(B)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{|A}([\varphi = n] \cap T^{-n}(B)) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{|A}(T^{-n}(B)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{|A}(B) \quad (\texttt{por ser } T \texttt{ no singular}) \\
&= 0 \qquad\qquad (\texttt{Por hipotesis})
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mu_{|A}(T^{-n}(B)) = 0.$$

Puesto que $T_A : A \to A$ y $\varphi_A : A \to \mathbb{N}$ se sigue que $\varphi_A \circ T_A$ está bien definida en ctp $x \in A$. Por inducción ahora se muestra que todas las potencias $\{T_A^k\}$ están bien definida en ctp x en A y satisfacen la siguiente propiedad:

$$T_A^k(x) = T^{(\varphi_A)_k(x)}(x) \quad \text{donde} \quad (\varphi_A)_1(x) = \varphi_A(x), \quad (\varphi_A)_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_A \circ T_A^i(x).$$

Esto se debe al hecho que:

$$T_A(x) = T^{\varphi_A(x)}(x)$$

así que

$$\begin{aligned}
T_A^2(x) &= T_A(T_A(x)) \\
&= T^{\left[\varphi_A(T_A(x))\right]}(T_A(x)) \\
&= T^{\left[\varphi_A(T_A(x))\right]}(T^{\varphi_A(x)}(x)) \\
&= T^{\left[\varphi_A(x) + \varphi_A(T_A(x))\right]}(x) \\
&= T^{(\varphi_A)_2(x)}(x)
\end{aligned}$$

Ahora aplicando inducción matemática, supongamos que para $k-1$ iteradas de T, se cumple lo siguiente:

$$T_A^{k-1}(x) = T^{\sum\limits_{i=0}^{k-2}\varphi_A \circ T^i(x)}(x) = T^{(\varphi_A)_{k-1}}(x) \quad \texttt{(Hipótesis inductiva)}$$

luego,

$$\begin{aligned}
T_A^k(x) &= T_A(T_A^{k-1}(x)) \\
&= T^{\left[\varphi_A(T_A^{k-1}(x))\right]}(T_A^{k-1}(x)) \\
&= T^{\left[\varphi_A(T_A^{k-1}(x))\right]}(T^{\sum\limits_{i=0}^{k-2}\varphi_A \circ T^i(x)}(x)) \\
&= T^{\left[\sum\limits_{i=0}^{k-2}\varphi_A \circ T^i(x) + \varphi_A(T_A^{k-1}(x))\right]}(x) \\
&= T^{\left[\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varphi_A \circ T^i(x)\right]}(x) \\
&= T^{(\varphi_A)_k(x)}(x)
\end{aligned}$$

Comprobando así lo expuesto anteriormente.

2.0.3. Propiedades de la Transformación inducida.

Proposición 2.1. *Si $T : X \to X$ es una transformación no singular, conservativa y $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$ entonces la transformación inducida $T_A : A \to A$ es una transformación conservativa, no singular en el espacio de medida $(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_{|A})$.*

Demostración. Probemos en primer lugar que T_A es una transformación no singular. Sea $B \in \mathcal{A} \cap A$, como $\mu_{|A} \circ T_A^{-1} \ll \mu_{|A}$ se tiene que:

$$\mu_{|A}(B) = 0 \Rightarrow \mu_{|A}(T_A^{-1}(B)) = 0$$

probemos por lo tanto que

$$\mu_{|A}(T_A^{-1}(B)) = 0 \Rightarrow \mu_{|A}(B) = 0.$$

Para ello procedemos por contrarrecíproco, supongamos que $\mu(B) > 0$, entonces por la conservatividad de T existe $n \geq 1$ tal que $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$. Sea $n_0 \geq 1$ el menor entero, tal que $A \cap T^{-n_0}(B) \subset T_A^{-1}(B)$ mod μ, así que, $\mu(A \cap T^{-n_0}(B)) \leq \mu(T_A^{-1}(B))$. Luego, como $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$ se concluye que $\mu(T_A^{-1}(B)) > 0$.

De donde, T_A es una transformación no singular en el espacio de medida $(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_{|A})$.
Por último probemos la conservatividad de T_A.
Por ser φ_A el menor entero n para el cual $T^n(x) \in A$ ctp $x \in A \subset X$, se tiene:

$$x, T^n(x) \in A \quad \Rightarrow \quad \text{existe} \quad k \leq n \text{ tal que } T^n(x) = T_A^k(x).$$

Por la conservatividad de T, para $A \in \mathcal{A}_+,\ B \in \mathcal{A} \cap A$ y por el teorema de recurrencia de Halmos obtenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T_A^n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T^n(x) = \infty \text{ ctp en } B.$$

Lo cual demuestra la conservatividad de T_A. □

Proposición 2.2. *Supóngase que $T : X \to X$ es una transformación no singular, conservativa y $A \in \mathcal{A}_+$, entonces*

i) T es ergódica $\Rightarrow$ T_A es ergódica

ii) T_A es ergódica y $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = X$ mod μ $\Rightarrow$ T es ergódica.

Demostración. Probemos $i)$.
Supongamos que T es ergódica y consideremos $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A,\ \mu(B) > 0$ y B un conjunto T_A-invariante, es decir $T_A^{-1}(B) = B$, queremos probar que $\mu(B^c) = \mu(A \setminus B) = 0$.
Razonemos por absurdo, supongamos que $\mu(A - B) > 0$ así se tiene que:

$$x, T^n(x) \in (A \setminus B) \ \Rightarrow \exists \ \ k \leq n \text{ tal que } T^n(x) = T_A^k(x).$$

por el teorema de recurrencia de Halmos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T_A^n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T^n(x) = \infty \text{ ctp } x \in (A - B),$$

pero por ser B un conjunto T_A-invariante se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_B \circ T_A^n(x) = 0$$

lo cual es una contradicción, por tanto $\mu(A \setminus B) = 0$.
Asi, hemos demostrado que T_A es ergódica.
Probemos $ii)$.
Sea $C \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(C) > 0$ y $T^{-1}(C) = C$, queremos probar que $\mu(C^c) = \mu(X \setminus C) = 0$. Para algún n se cumple que:

$$C \cap T^{-n}(A) = T^{-n}(C \cap A)$$

como $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = X \bmod \mu$, entonces para algun n, $\mu(C \cap T^{-n}(A)) > 0$, pero como T es no singular se obtiene que $\mu(C \cap A) > 0$. Esto obliga a que

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(C) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_A^{-n}(A \cap C) = A \bmod \mu$$

por la conservatividad y ergodicidad de T_A De donde

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(C) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = A \bmod \mu$$

así tenemos que C tiene medida total, y por lo tanto T es ergódica. □

2.0.4. El Teorema ergódico de Birkhoff.

En esta sección, con la cual finalizaremos el presente capítulo, presentaremos un teorema fundamental en la teoria ergódica, el cual fue motivado por la búsqueda de la respuesta a la siguiente pregunta: Dada un transformación $T : X \to X$ que preserva la medida de un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y una función integrable $\varphi : X \to \mathbb{R}$, dar condiciones para que el siguiente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(T(x) + \varphi(T^2(x) + \dots \varphi(T^{n-1}(x))}{n}$$

exista y sea el mismo en ctp $x \in X$. En 1931 G.D Birkhoff encontro la respuesta a la pregunta expuesta anteriomente, resultado que se conoce con el nombre de Teorema Ergódico de Birkhoff que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.4. ***(Teorema Ergódico de Birkhoff.)*** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito, supongamos que $T : X \to X$ es una transformación que preserva la medida y $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ entonces:*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \varphi \circ T^j(x) \text{ converge ctp } x \in X \text{ a una función } \varphi^* \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Ademas $\varphi^* \circ T = \varphi^*$ ctp $x \in X$. Si $\mu(X) < \infty$ entonces $\int \varphi^* d\mu = \int \varphi d\mu$

Demostración. Ver [7]. □

A continucación presentaremos observaciones y comentarios importantes acerca del Teorema ergódico de Birkhoff.

Observación 1. • Si T es ergódica entonces φ^* es constante ctp $x \in X$. Si además $\mu(X) < \infty$ se tiene que: $\varphi^* = \frac{1}{\mu(X)} \int \varphi d\mu$ ctp $x \in X$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

• Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ es una transformación ergódica que preserva la medida μ entonces. Dada $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j(x) = \int_X \varphi(x) d\mu \quad \mu \text{ ctp } \quad x \in X$$

Comentarios.

i) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea $T : X \to X$ una transformación que preserva la medida μ. Sea $E \in \mathcal{A}$ para $x \in X$ podiamos preguntarnos, ¿Con que frecuencia los elementos del conjunto $\{x, T(x), T^2(x), ...\}$[1] se encuentra en el conjunto E?.

Claramente $T^j(x) \in E$ si y sólo si $1_E(T^j(x)) = 1$, así el número de elementos de $\{x, T(x), T^2(x), ...\}$ en E es $\sum_{j=0}^{n-1} 1_E(T^j(x))$.

El número relativo de elementos de $\{x, T(x), T^2(x), ..., T^{n-1}(x)\}$ en E es igual a $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_E(T^j(x))$. Y si T es ergódica, aplicando el Teorema ergódico de Birkhoff se tiene que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_E(T^j(x)) \longrightarrow \mu(E) \text{ cuando } n \to \infty \text{ en ctp } x \in X$$

ii) Sea T una transformación que preserva la medida en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, definimos el *tiempo medio de pertenencia* (o simplemente promedio de Birkhoff) de la órbita de x en E como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T(x) \text{ si el límite existe.}$$

La fase o espacio medio de φ está definido como:

$$\int_X \varphi(x) d\mu.$$

[1] este conjunto es llamado la órbita de x

el Teorema ergodico de Birkhoff implica que estos promedio son iguales ctp $x \in X$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Para culminar, enunciaremos un teorema clásico en la teoría ergódica conocido con el nombre de Teorema de Hopf.

Teorema 2.5. ***(Teorema de Hopf.)***

Supóngase que $T : X \to X$ es una transformación conservativa, ergódica que preserva la medida μ en un espacio de medida σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_X g d\mu \neq 0$ para ctp $x \in X$.
entonces

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(T^k(x))} \longrightarrow \frac{\displaystyle\int_X f d\mu}{\displaystyle\int_X g d\mu} \quad ctp \;\; x \in X$$

Capítulo 3

Teorema Central

Comenzaremos con enunciar algunos teoremas previos, los cuales seran útiles para la demostración del teorema que es nuestro objetivo fundamental: la no validez del Teorema ergódico de Birkhoff caso medida infinita. Las demostraciones que aquí no se presentan, están totalmente contenidas en [1].

3.1. Teoremas previos.

Proposición 3.1. *Supongase que $T : X \to X$ es una transformación conservativa, ergódica que preserva la medida μ en un espacio σ-finito infinito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ entonces:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ ctp } x \in X, \text{ para toda } f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ que suponemos positiva sin perder generalidad. Por ser X es un espacio de medida σ-finito infinito, consideremos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $0 < \mu(A_n) < \infty$ tal que $A_n \subset A_{n+1}, \quad A_n \uparrow X$ y

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(X) = \infty \tag{3.1}$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ y consideremos el espacio de medida finita $(A_j, \mathcal{A} \cap A_j, \mu_{|A_j})$ y sea

$$B \in \mathcal{A} \text{ con } 0 < \mu(B) < \infty. \tag{3.2}$$

Ahora bien, para toda $x \in X$ se tiene que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k_{A_j}(x)$$

además, para toda $j \in \mathbb{N}$, $T_{A_j} : A_j \to A_j$ preserva la medida $\mu_{|A_j}$ y es ergódica con respecto a dicha medida, asi, aplicando límite en ambos lados de la desigualdad anterior y aplicando el teorema ergódico de Birkhoff se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k_{A_j}(x) = \frac{\int_{A_j} 1_B d\mu_{|A_j}}{\mu_{|A_j}(A_j)} = \frac{\mu_{|A_j}(B)}{\mu_{|A_j}(A_j)}$$

pero:

$$\frac{\mu_{|A_j}(B)}{\mu_{|A_j}(A_j)} = \frac{\frac{\mu(B\cap A_j)}{\mu(A_j)}}{1} = \frac{\mu(B \cap A_j)}{\mu(A_j)} \leq \frac{\mu(B)}{\mu(A_j)}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) \leq \frac{\mu(B)}{\mu(A_j)}$$

Ahora bien, tomando nuevamente límite en la variable j se tiene que:

$$\lim_{j\to\infty} \Big[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) \Big] \leq \lim_{j\to\infty} \frac{\mu(B)}{\mu(A_j)} = 0 \quad \text{por (3.1) y (3.2)}$$

De aquí se concluye por ser $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) > 0$ que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_B \circ T^k(x) = 0 \;\; \text{ctp } x \in X$$

luego, el teorema se está cumpliendo sólo para las funciones característica, 1_B con $0 < \mu(B) < \infty$ razonemos por absurdo y supongamos que existe $A \in \mathcal{A}$ con $0 < \mu(A) < \infty$, y existe $\{n_k\} \subset \{n\}$, tal que, para toda $x \in A$

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_1-1} f \circ T^j(x) \longrightarrow z_0 \neq 0 \;\; \text{cuando } n \to \infty$$

denotando por $S_{n_k}(f) = \dfrac{1}{n_k} \displaystyle\sum_{j=0}^{n_k-1} f \circ T^j(x)$, tenemos que

$$\frac{S_{n_k}(f)}{S_{n_k}(1_A)} = \frac{\frac{S_{n_k}(f)}{n_k}}{\frac{S_{n_k}(1_A)}{n_k}} = \frac{S_{n_k}}{n_k} \frac{1}{\frac{S_{n_k}(f)}{n_k}} \longrightarrow \infty \;\; \text{cuando } k \to \infty \quad (\text{ya que } z_0 \neq 0)$$

por otro lado, aplicando el Teorema de Hopf:

$$\frac{S_{n_k}(f)}{S_{n_k}(1_A)} \longrightarrow \frac{\int_X f d\mu}{\int_X 1_B} = \frac{\int_X f d\mu}{\mu(A)}$$

lo cual es una contradicción ya que $\dfrac{\int_X f d\mu}{\mu(A)}$ es una constante por estar $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

concluyendo así que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n\to\infty \text{ ctp } x\in X \text{ para toda } f\in\mathcal{L}^1(\mu)$$

□

Teorema 3.1. *Sean* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espacio de probabilidad y* $T: X\to X$ *una transformación ergódica que preserva la medida* μ*, supongamos además que* $f: X\to\mathbb{R}$ *es una función medible. Sea* $a:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *una función continua, estrictamente creciente, que satisface* $\frac{a(x)}{x}\downarrow 0$ *cuando* $x\to\infty$*. Si* $\int_X a(|f|)d\mu<\infty$*, entonces*

$$\frac{a(|S_n(f)|)}{n}\longrightarrow 0 \textit{ ctp } x\in X \textit{ cuando } n\to\infty,$$

donde $S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k$.

Demostración. Ver [Aaronson], página 65. □

Proposición 3.2. *Supóngase que* $T: X\to X$ *es una transformación conservativa, ergódica que preserva la medida* μ *de un espacio de medida* σ*-finita* $(X,\mathcal{A},\mu)$*, y sea* $a:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *continua tal que* $a(n)\uparrow\infty$*,* $\frac{a(n)}{n}\downarrow 0$ *cuando* $n\to\infty$ *entonces:*
Si existe $A\in\mathcal{A}$*,* $0<\mu(A)<\infty$ *tal que*

$$\int_A a(\varphi_A)d\mu<\infty,$$

donde $\varphi_A: A\to\mathbb{N}$ *está dada por* $\varphi_A=\min\{n\in\mathbb{N},\quad n\geq 1: T^n(x)\in A\}$.
Entonces:

$$\frac{S_n(f)}{a(n)}\longrightarrow\infty \textit{ ctp } x\in X \textit{ para toda } f\in\mathcal{L}^1(\mu).$$

Demostración. Sea $A\in\mathcal{A}$ tal que $0<\mu(A)<\infty$ y supongamos que $\int_X a(\varphi_A)d\mu<\infty$, aplicando el teorema anterior se tiene que

$$\frac{1}{n}a((\varphi_A)_n)\longrightarrow 0 \text{ ctp} x\in A \text{ cuando } n\to\infty. \tag{3.3}$$

donde $(\varphi_A)_n=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_A\circ T_A^k$. ahora bien,

$$\begin{aligned}(\varphi_A)_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\varphi_A\circ T_A^k(x)\\ &= \varphi_A(x)+\varphi_A(T_A(x))+\ldots+\varphi_A(T_A^{n-1}(x))\\ &= k_1+k_2+\ldots+k_n\end{aligned}$$

llamemos

$$\varphi_A(T_A^{p-1}(x)) = k_p(x) \text{ para todo } p \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

asi tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{(\varphi_A)_n}(1_A)(x) &= \sum_{j=0}^{(\varphi_A)_n - 1} 1_A \circ T^j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{(k_1(x)+k_2(x)+\ldots+k_n(x))-1} 1_A \circ T^j(x) \\
&= 1_A(x) + \sum_{j=1}^{k_1(x)} 1_A \circ T^j(x) + \sum_{j=k_1+1}^{k_2(x)} 1_A \circ T^j(x) + \ldots \\
&\quad + \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n(x)-1} 1_A \circ T^j(x) \\
&= \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-veces} \\
&= n
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$S_{(\varphi_A)_n}(1_A)(x) = n \tag{3.4}$$

ahora, consideremos la sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ dada por

$$t_j = (\varphi_A)_j$$

así, para cada $n \geq 1$ tomemos $p_n = \max\{1 \leq j \leq n : \quad T^j(x) \in A\}$.
Luego, observemos que:

$$t_{p_n(x)}(x) = (\varphi_A)_{p_n(x)}(x) \leq n < t_{p_n+1}(x) = (\varphi_A)_{p_n(x)+1}(x)$$

por lo tanto

$$(\varphi_A)_{p_n(x)} \leq n < (\varphi_A)_{p_n(x)+1} \tag{3.5}$$

como la función a es creciente y usando (3.5) tenemos que:

$$a(n) < a((\varphi_A)_{p_n(x)+1}(x)) \Rightarrow \frac{1}{a(n)} > \frac{1}{a((\varphi_A)_{p_n(x)+1}(x))} \tag{3.6}$$

además, nuevamente de (3.5)

$$(\varphi_A)_{p_n(x)} \leq n \ \Rightarrow S_n(1_A) \geq S_{(\varphi_A)_{p_n(x)}}(1_A) \tag{3.7}$$

de (3.6) y (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{S_n(1_A)}{a(n)} &\geq \frac{S_{(\varphi)_{p_n}}(1_A)}{a((\varphi_A)_{p_n(x)+1}(x))} \\ &= \frac{p_n}{a((\varphi_A)_{p_n(x)+1}(x))} \qquad \text{por } (3.4) \\ &\longrightarrow \infty \quad \text{ctp} \quad x \in A \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \text{por} \quad (3.3) \end{aligned}$$

en conclusión:

$$\frac{S_n(1_A)}{a(n)} \longrightarrow \infty \qquad \text{ctp } x \in A \text{ cuando } n \to \infty.$$

es claro que si $C = \{x \in X : \frac{S_n(1_A)}{a_n} \longrightarrow \infty\}$ entonces $T^{-1}(C) = C$, es decir el conjunto C es T invariante y además $A \subset C$, lo cual implica que $\mu(C) > \mu(A) > 0$. De lo anterior, y por la ergodidad de T tenemos que $C = X$ mod μ. Asi,

$$\frac{S_n(1_A)}{a(n)} \longrightarrow \infty \quad \text{ctp} \quad x \in X \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \tag{3.8}$$

Ahora bien, sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu)_+$ cualquiera y supongamos sin perdida de generalidad que

$$\frac{S_n(1_A)}{a(n)} \longrightarrow C < \infty \quad \text{ctp} \quad x \in X \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

luego,

$$\frac{S_n(1_A)}{S_n(f)} = \frac{\frac{S_n(1_A)}{a(n)}}{\frac{S_n(f)}{a(n)}} \longrightarrow \infty \text{ ctp } x \in X \text{ cuando } n \to \infty \quad (\text{por } (3.8) \text{ y } (3.9))$$

pero, por el Teorema de Hopf

$$\frac{S_n(1_A)}{S_n(f)} \longrightarrow \frac{\int_X 1_A d\mu}{\int_X f d\mu} = \frac{\mu(A)}{\int_X f d\mu}.$$

lo cual es una contradicción. De donde

$$\frac{S_n(f)}{a(n)} \longrightarrow \infty \text{ ctp } x \in X \text{ cuando } n \to \infty \text{ para toda } f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

□

Proposición 3.3. *Supóngase que $T : X \to X$ una transformación conservativa, ergódica que preserva la medida σ-finita, de un espacio de medida $(X\mathcal{A}, \mu)$, y sea $a(n) \uparrow \infty$, $\frac{a(n)}{n} \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Si*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a(n)} \neq 0 \text{ para toda } x \in A, \quad \mu(A) > 0,$$

entonces:

$$\int_A a(\varphi_A) d\mu < \infty \text{ para todo } B \in \mathcal{A}_+ \cap A.$$

Demostración. Supongamos que $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a(n)} \neq 0$, por el Teorema de Egoroff (ver teorema 1.3) existe $B \in \mathcal{A}_+ \cap A$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$S_n(1_A)(x) \geq \epsilon a(n) \quad \text{para todo} \quad x \in B, \ n \geq 1$$

de donde

$$S_{\varphi_B(x)}(1_A)(x) \geq \epsilon a(\varphi_B(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in B$$

de aquí

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(\varphi_B(T_B^k(x))) &\leq \frac{1}{n\epsilon}\sum_{k=0}^{n-1} S_{\varphi_B(x)}(1_A)(\varphi_B(T_B^k(x))) \\ &= \frac{1}{n\epsilon} S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(\varphi_B(T_B^k(x))) \leq \frac{1}{n\epsilon} S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x) \tag{3.10}$$

ahora bien, de la ecuación (3.4) se tiene que

$$S_{(\varphi_A)_n}(1_B) = n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} S_{(\varphi_B)_n}(1_B) = 1 \tag{3.11}$$

así que, la parte derecha de la desigualdad (3.10) puede ser escrita, usando (3.11) de la siguiente forma

$$\frac{1}{n\epsilon} S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x) = \frac{\frac{1}{n\epsilon} S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x)}{\frac{1}{n} S_{(\varphi_B)_n}(1_B)(x)} = \frac{1}{\epsilon} \frac{S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x)}{S_{(\varphi_B)_n}(1_B)(x)} \tag{3.12}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(\varphi_B(T_B^k(x))) \leq \frac{1}{\epsilon} \frac{S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x)}{S_{(\varphi_B)_n}(1_B)(x)}$$

ahora, tomando límite en ambos lados de la desigualdad anterior y aplicando el Teorema de Hopf

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a(\varphi_B(T_A^k(x)))\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon}\frac{S_{(\varphi_B)_n}(1_A)(x)}{S_{(\varphi_B)_n}(1_B)(x)}=\frac{1}{\epsilon}\frac{\mu(A)}{\mu(B)}<\infty$$

esto último implica que

$$\int_B a(\varphi_B)d\ \mu<\infty,\quad B\in\mathcal{A}_+\cap A$$

□

3.2. No validez de Birkhoff caso medida infinita.

Teorema 3.2. *Suponga que $T:X\to X$ es una transformación ergódica, conservativa que preserva la medida μ en un espacio σ-finito infinito $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ y sea $(a_n)>0$, $n\geq 1$ una sucesión cualquiera de números reales, entonces se cumple una de las siguientes proposiciones:*

i) $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(f)}{a_n}=0$ *μ-ctp para todo $f\in\mathcal{L}^1(\mu)_+$*

ii) Existe una suceción $n_k\uparrow\infty$ tal que $\frac{S_{n_k}(f)}{a_{n_k}}\longrightarrow_{n\to\infty}\infty$ μ-ctp para todo
$f\in\mathcal{L}^1(\mu)_+$[1]

donde $S_n(f):=\sum_{k=0}^{n-1}f\circ T^k$

Demostración. Sea $f\in \mathrm{L}^1(\mu)_+$, ya que a_n es cualquier sucesión de números reales, veamos algunas sucesiones particulares para las cuales se cumple el teorema:

(1) Si Consideramos el caso que exista $N\in\mathbb{N}$ tal que $a_n\geq n$ para toda $n\geq N$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_n\geq n\quad &\Rightarrow\quad \frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{n}\\ &\Rightarrow\quad \frac{S_n(f)}{a_n}\leq\frac{S_n(f)}{n}\qquad \texttt{(ya que } S_n(f)\geq 0\texttt{)}\end{aligned}$$

Por proposición 3.1 se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n(f)}{n}=0$ μ-ctp, y por tanto $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n(f)}{a_n}=0$ μ-ctp, cumpliéndose asi la parte (i) del teorema.

[1] Esta condicion es equivalente a: $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(f)}{a_n}=\infty$ μ-ctp para todo $f\in\mathcal{L}^1(\mu)_+$

(2) Veamos ahora el caso cuando alguna subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de a_n es convergente. Ya que T es una transformación que preserva la medida, ergódica y conservativa, por teorema de 2.1 se tiene:

$$S_{n_k}(1_B) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n_k-1} 1_B \circ T^k \longrightarrow_{k\to\infty} \infty \ \ \mu - \text{ctp } x \in X \text{ para toda } B \in \mathcal{A}$$

por lo tanto, ya que a_{n_k} es convergente,

$$\frac{S_{n_k}(1_B)}{a_{n_k}} \quad = \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_k-1} 1_B \circ T^k}{a_{n_k}} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty \ \ \mu - \text{ctp para toda } B \in \mathcal{A}$$

Ahora bien, el teorema se esta cumpliendo sólo para las funciones caracteristicas. Veamos que (ii) se cumple, para ello razonemos por absurdo, supongamos que existe $A \in \mathcal{A},\ 0 < \mu(A) < \infty$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a_n} \neq \infty \ \mu\text{-ctp en } A$$

Es decir, existe $\{a_{n_p}\}$ tal que $\dfrac{S_{n_p}(f)}{a_{n_p}} \longrightarrow_{n\to\infty} C > 0$ μ-ctp en $A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0$

Asi,

$$\frac{S_{n_p}(1_A)}{S_{n_p}(f)} = \frac{\frac{S_{n_p}(1_A)}{a_{n_p}}}{\frac{S_{n_p}(f)}{a_{n_p}}} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty \quad \text{ctp } x \in X \text{ cuando } n \to \infty$$

luego, aplicando el teorema de Hopf

$$\frac{S_{n_p}(1_A)}{S_{n_p}(f)} \longrightarrow \frac{\int_X 1_A d\mu}{\int_X f d\mu} = \frac{\mu(A)}{\int_X f d\mu}$$

Lo cual es una contradicción ya que $\dfrac{\mu(A)}{\int_X f d\mu}$ es una constante, obteniendo asi que $\dfrac{S_n(f)}{a_n} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$ cumpliéndose la parte (ii) del Teorema.

Ahora bien, supongamos que a_n es una sucesión que no es ninguna de los casos anteriores, en otras palabras:

(3) $a_n \to \infty$

(4) Para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $a_n < n$, equivalentemente, existe $\{n_k\} \subset \{n\}$ tal que $a_{n_k} < n_k$.

Supongamos ademas que (i) no se cumple, asi existe $A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0$ tal que $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a_n} > 0 \ \mu - ctp$ en A. Consideremos:

$$\overline{a_n} = \max_{1\leq k\leq n} a_k$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\{a_1 a_2 \ldots a_n\} \subset \{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}\} \ &\Rightarrow \ \max\{a_1 a_2 \ldots a_n\} \leq \max\{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}\} \\
&\Rightarrow \ \max_{1\leq k\leq n} a_k \leq \max_{1\leq k\leq n+1} a_{k+1} \\
&\Rightarrow \ \overline{a_n} \leq \overline{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

asi, $\overline{a_n}$ es una sucesión creciente $(a_n \uparrow)$ y además $a_n \leq \overline{a_n}$ luego, por ser $\overline{a_n} = a_{k(n)}$ donde $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ ya que por (3), para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $m > N$ tal que $a_m > a_N$, y asi, $k(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{\overline{a_n}} &= \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a_{k(n)}} \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_{k(n)}(f)}{a_{k(n)}} \qquad \texttt{(ya que } k(n) \leq n) \\
&> 0 \ \mu - \text{ctp en } A \qquad (k(n) \texttt{ es una subsucesión de } n)
\end{aligned}$$

Así
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{\overline{a_n}} > 0 \ \mu - \text{ctp en } A \tag{3.13}$$

Ahora definamos:
$$f_n = \frac{\overline{a_n}}{n}, \tag{3.14}$$

y veamos que $\liminf_{n\to\infty} f_n < \infty$. Para esto probaremos lo siguiente:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{\overline{a_n}}{n} < \infty.$$

En efecto, sin perder generalidad supongamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = c \in \mathbb{R},$$

ya que $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, podemos construir una subsucesión $\{\frac{\overline{a_{n_k}}}{n_k}\}$ de $\{\frac{\overline{a_n}}{n}\}$ de la siguiente manera:

$$\frac{\overline{a_{n_k}}}{n_k} = \frac{a_{n_k}}{n_k}, \tag{3.15}$$

luego, de la hipótesis se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n_k}}{n_k} = c$ esto implica por (3.15) que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\overline{a_{n_k}}}{n_k} = c$ por lo tanto

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\overline{a_{n_k}}}{n_k} = c.$$

Garantizemos ahora que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, por (4) existe $\{n_k\} \subset \{n\}$ tal que $a_{n_k} < n_k$ esto implica que $0 < \frac{a_{n_k}}{n_k} < 1$ y esto prueba que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$ pues toda sucesion acotada posee una subsucesion convergente, digamos $\{a_{n_{k_p}}\} de \{a_{n_k}\}$ tal que $\frac{a_{n_{k_p}}}{n_{k_p}} \to_{p\to\infty} K \in [0,1]$.

Observación 2. Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_N < f_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$. de donde

$$f_N < f_j \text{ para toda } j \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\overline{a_N}}{N} \le \frac{\overline{a_j}}{j} = \frac{a_{k(j)}}{j} \text{ donde } 1 \le k(j) \le j$$

de esto último se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 \le k(j) \le j \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{k(j)} \ge \frac{1}{j} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_{k(j)}}{k(j)} \ge \frac{a_{k(j)}}{j} \ge \frac{\overline{a_N}}{N} \end{aligned}$$

así existe una sucesion $\{m_k\}$ tal que

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \ge \frac{\overline{a_N}}{N} = C \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{m_k\} \text{ tal que } a_{m_k} \ge C m_k.$$

y aqui procedemos como en el caso (1) cumpliéndose la parte la parte (i) del Teorema.

Ahora bien, como $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n < \infty$, se deduce que el conjunto

$$A = \{j \ge 2 : f_i > f_j \ \ \forall 1 \le i \le j-1\}.$$

es un subconjunto infinito de números naturales, en otras palabras A es una subsucesión de números naturales, digamos $A = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $1 = n_0 < n_1 < n_2 ...$
Luego, Por la forma en que se definió el conjunto anterior tenemos que para toda $k \ge 0$

$$f_{n_k} > f_{n_{k+1}}, \text{ y también, } n_k f_{n_k} \le n_{k+1} f_{n_{k+1}}, \quad \texttt{(De (3.14) y por ser } \overline{a_{n_k}} \texttt{ creciente)}$$

de donde

$$0 < \frac{n_k}{n_{k+1}} \leq \frac{f_{n_{k+1}}}{f_{n_k}} < 1,$$

ahora bien, sea $h_k(x) = \left(\dfrac{n_k}{n_{k+1}}\right)^x$ claramente h es continua en $\mathbb{R}$ en particular en $(0,1)$ además

$$h_k(0) = 1 \quad h_k(1) = \frac{n_k}{n_{k+1}}, \quad \text{y como ,} \quad \frac{n_k}{n_{k+1}} \leq \frac{f_{n_{k+1}}}{f_{n_k}} < 1,$$

aplicando el Teorema del valor intermedio existe $\alpha_k \in (0,1]$ tal que:

$$h_k(\alpha_k) = \left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^{\alpha_k} = \frac{f_{n_{k+1}}}{f_{n_k}}.$$

definamos:

$$g(x) = \frac{f_{n_k} n_k^{\alpha_k}}{x^{\alpha_k}}, \quad x \in [n_k, n_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N},$$

y

$$a(x) = xg(x).$$

claramente se comprueba que

$$a(n_k) = \overline{a_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

por la definición de los n_k, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, y todo $n \in [n_k, n_{k+1})$

$$f_n \geq f_{n_k}, \quad \text{de aqui} \quad f_n \geq g(n),$$

en efecto:

$$g(n) = \frac{f_{n_k} n_k^{\alpha_k}}{n^{\alpha_k}} \leq f_n \left(\frac{n_k}{n}\right)^{\alpha_k} < f_n. \quad (\texttt{ por ser } \frac{n_k}{n} \leq 1)$$

Además

$$a(n) = ng(n) \leq nf_n = n\frac{\overline{a_n}}{n} = \overline{a_n},$$

y se obtiene que

$$a(n) \leq \overline{a_n}. \tag{3.16}$$

ahora bien de (3.13) y (3.16) se obtiene que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)}{a(n)} > 0 \quad \text{ctp en } A.$$

Por otro lado podemos comprobar que $a(n)$ es creciente y $\dfrac{a(n)}{n}$ es decreciente calculando sus derivadas, así que estamos en las hipótesis de la proposición 3.3 y por lo tanto

$$\int_B a(\varphi_B)d\mu < \infty, \quad B \in \mathcal{A} \cap A$$

luego aplicando la proposición 3.2 se tiene:

$$\frac{S_n(f)}{a(n)} \longrightarrow \infty \text{ cuando } n \to \infty \quad \mu - \text{ctp}x \in X.$$

por último

$$\begin{aligned} a_{n_k} \leq \overline{a_{n_k}} = a(n_k) \quad &\Rightarrow \quad a_{n_k} \leq a(n_k) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{a_{n_k}} \geq \frac{1}{a(n_k)} \\ &\Rightarrow \quad \frac{S_{n_k}(f)}{a_{n_k}} \geq \frac{S_{n_k}(f)}{a(n_k)} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

en conclusión

$$\text{existe} \quad n_k \uparrow \infty \quad \text{tal que} \quad \frac{S_{n_k}}{a_n} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty \quad \text{ctp} \quad x \in X$$

cumpliéndose la parte (ii) del Teorema. $\square$

Referencias

[1] J. Aaronson. *An introducction to infinite ergodic theory*. American Math Society. Vol 50, 1996.

[2] R. Bartle. *The elements of integration*. John Wiley, Sons, New York, 1966.

[3] R. Mañé. *Introdução à Teoria Ergódica*. IMPA. Proyecto Euclides. Rio de Janeiro, 1986.

[4] M. V. Paredes. *Teoría Ergódica de transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en la recta*. Trabajo espacial de grado presentado para obtar al título de la Licenciada en Ciencias Matemáticas. UCLA, 2008.

[5] R.L.Adler and B. Weiss. The ergodic infinite measure preserving tansformation of boole. *Israel Journal of Math*, (16):263–278.

[6] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan publishing company, 1988.

[7] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Springer. New York, 1982.