UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"El Ascent y El Descent de un Operador y su relación con la Propiedad de Extensión Univaluada"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. José L. Yovera Y.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: Dr. Fernando Villafañe D.

Barquisimeto, Venezuela. Noviembre de 2008

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"El Ascent y El Descent de un Operador y su relación con la Propiedad de Extensión Univaluada"

presentado por el ciudadano Br. José L. Yovera Y. titular de la Cédula de Identidad No. 16.594.186, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios, a mis Padres, y en especial a mi hijo Luis Aarón

AGRADECIMIENTOS

Quiero primeramente agradecer a mi Dios Todopoderoso por permitirme la vida.
Enormemente a mi madre Aida Yecerra por ser ella quien me enseño las grandes cosas de este mundo, por su apoyo incondicional, por ser la mejor del mundo y el mejor ejemplo de mi vida.
A mi tutor Dr. Fernando Villafañe Duarte por ser quien supo enseñarme está hermosa rama de nuestra fantastica Matemática.
A mis Hermanas Yudelmis y Aibeth por estar siempre apoyandome.
A mi papá Alberto por ser un dador de ejemplo y por apoyarme siempre.
A mi novia Sháron por ser especial en mi vida y estar en todo momento dandome ánimo.
A mis profesores, por ser ellos quienes aportaron sus conocimientos en mi formación académica.
A nuestra Alma Mater la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado por permitir grandes momentos de mi vida universitaria en sus instalaciones.
A mis amigos de estudios Julio Barreto, Teodoro Cordero, Ramón Padilla, José Muñoz.
A mis compañeros de la Promoción 39 por los momentos provechosos en nuestra carrera.
A el Profesor Ismael Huerta por ser una persona ejemplar dentro y fuera del aula de clase
A el Profesor Edgar Guedez por su valiosa y oportuna ayuda.

Y a todos aquellos que de una u otra forma aportaron su granito de arena para que allá culminado este trabajo dándome su ayuda moral e incondicional.

A todos ustedes mi más grande agradecimiento!!!!!

Resumen

Dentro del Análisis Funcional, existen muchas conexiones entre conceptos y propiedades, en las que se debe estudiar y determinar cuáles son éstas, es de hacer notar, que este trabajo se basa en conectar la Teoría de Operadores con la Propiedad de Extensión Univaluada. En el mismo, se verá la relación de la propiedad con el Ascent y el Descent de un operador que no son más, que las longitudes de la Nulicadena y la Cadena Imagen respectivamente. Para ello, es necesario conocer algunas propiedades que serán desarrolladas a lo largo del trabajo. En el Capítulo I se encuentra la Teoría Preliminar, la cual, es vista en los cursos de álgebra lineal y análisis funcional, siendo esta de gran importancia dentro del desarrollo del mismo. En el Capítulo II se plantea lo concerniente a los Operadores de Fredholm en los diferentes espacios donde estén definidos dichos operadores y cuáles son las propiedades que cumplen en cada uno de ellos, aportando ciertas características que serán de gran ayuda para lograr los objetivos del trabajo. En el Capítulo III se desarrolla la Teoría de Riesz-Schauder, teoría que permite determinar la estructura de los operadores. La idea principal de la investigación es estudiar las cadenas ascendentes y descendentes, presentar las definiciones y propiedades del Ascent y el Descent de un operador, así como las referencias de los Operadores de Fredholm con Cadena Finita. En el Capítulo IV, se desarrolla una definición importante, como lo es la Propiedad de Extensión Univaluada, se hace una pequeña introducción a la Teoría Espectral Local y su conexión con la Teoría de Operadores de Fredholm, dentro de la cual podemos encontrar teoremas claves para la demostración del resultado principal que es ver la relación del Ascent y el Descent de un Operador con la SVEP.

Índice

Introducción

En este trabajo vamos a ver la relación que existe entre la propiedad de extensión univaluada con el ascent y el descent de un operador. Para llegar a este resultado se debe incursionar dentro de tópicos que nos van a permitir demostrar lo que deseamos. Acá daremos un análisis a los operadores de Fredholm. Estudiaremos también los operadores lineales acotados definidos en los espacios de Banach, y daremos una introducción a la teoría local espectral de dichos operadores. La teoría local espectral de operadores es una parte importante del análisis funcional que tiene su uso en varias áreas de análisis matemático moderno y la física, por ejemplo en el cálculo diferencial y las ecuaciones integrales, así como la teoría cuántica.

El estudio clásico de la estructura espectral de un operador ha sido enriquecido recientemente por el desarrollo de algunos nuevos métodos de gran alcance para el análisis del espectro local. Un concepto básico en teoría local espectral es dado por la propiedad de extensión univaluada (SVEP). Esta propiedad fue introducida por Dunford como herramienta para la teoría general de operadores espectrales, según se encuentra dentro del trabajo hecho por Dunford y Schwarz [7].

La SVEP también juega un papel importante en los trabajos recientes de Laursen y Neumann [10] y de Aiena [1]. Uno de los objetivos de este trabajo es de relacionar la propiedad de extensión univaluada con dos conceptos de suma importancia en la teoría de Riesz-Schauder, como lo son el ascent y el descent de un operador.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos, las cuales están distribuidas de la siguiente manera. En el Capítulo 1, desarrollamos la teoría preliminar clásica del álgebra lineal y del análisis funcional, y establecemos, en particular, los resultados más importantes de éstas.

En el capítulo 2 se estudian lo referente a los operadores de Fredholm, acá encontraremos las propiedades que cumplen los operadores con deficiencia finita de donde desprendemos una definición primordial como lo es, la deficiencia finita, estudiaremos las características del índice, los operadores de Fredholm en los espacios Normados, teniendo como principal resultado la relatividad regular de un operador, que conjugado con la deficiencia finita nos permitirá definir a los operadores de Fredholm, operadores con espacio imagen cerrado y operadores de Fredholm sobre espacios de Banach, resaltando la definición de modulo mínimal.

En el capítulo 3 se desarrolla parte de la teoría de Riesz-Schauder donde encontraremos las definiciones del ascent y el descent de un operador, así como algunas propiedades que cumplen estos.

En el cuarto capítulo se establece el resultado principal, además se estudiaran lo referente a la teoría local espectral, donde encontraremos los subespacios que nos van a permitir conllevar nuestra teoría a lo que deseamos demostrar.

Capítulo 1
Teoria Preliminar

En este capítulo se presenta lo referente a los tópicos que se debe tener presente para dar base a la teoría que desarrollaremos, las herramientas que acá se consideran son tratadas usualmente en los cursos de álgebra lineal y de análisis funcional por lo tanto solo daremos el resultado sin demostración las cuáles pueden ser consultadas en [1], [2], [5], [8],[12].

Definición 1.1 (**Norma**)**.** Sea X un espacio vectorial. La norma en X, es una función de valor real $\|\cdot\|$, en X que satisface las siguientes condiciones para todo elemento $x, y \in X$, y cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad Triangular)

Definición 1.2 (**Espacio Normado**)**.** Un espacio vectorial X se llama espacio normado cuando a cada $x \in X$ está asignado un número real no negativo $\|x\|$, llamado norma de x, de manera que:

(a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera x e y de X

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ si $x \in X$ y α es un escalar

(c) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$

Definición 1.3 (**Transformación Lineal**)**.** Sean X, Y espacios vectoriales y una aplicación $T : X \to Y$, diremos que T es una Transformación Lineal si se cumple

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \tag{1.1}$$

par cualquier α escalar y $x, y \in X$.

Si en la definición anterior, si Y es subespacio de X, y cumple con (1.1) diremos entonces que la aplicación es un **Operador Lineal**.

Si además la aplicación es $T : X \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede ser el cuerpo de los reales o los complejos, y cumple con (1.1), diremos entonces que la aplicación es un **Funcional Lineal**.

Definición 1.4. Un **Semigrupo** es un conjunto no vacio G junto con una operación binaria sobre G la cual es:

(i) **Asociativa:** $a(bc) = (ab)c$ para todo $a, b, c \in G$.

Un **Monoide** es un semigrupo G el cual contiene

(ii) **Elemento Identidad:** $e \in G$ tal que $ae = ea = a$ para todo $a \in G$.

Un **Grupo** es un monoide G tal que

(iii) **Elemento Inverso** Para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Un semigrupo G se le llama **Abeliano o Conmutativo** si cumple que

(iv) **Conmutativa:** $ab = ba$ para todo $a, b \in G$

Definición 1.5. Sean G y H semigrupos. Una función $f : G \to H$ es un **Homomorfismo** si cumple que:

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Si f es inyectiva, diremos entonces que es un **Monomorfismo.**
Si f es sobreyectiva, diremos entonces que es un **Epimorfismo.**
Si f es biyectiva, diremos entonces que es un **Isomorfismo.**
Un homomorfismo $f : G \to G$ se le llama **Endomorfismo** y un isomorfismo $f : G \to G$ se le conoce como un **Automorfismo.**

Definición 1.6 (Imagen y Núcleo). Sean E, F espacios vectoriales, y $A : E \to F$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales E, F llamaremos Imagen al conjunto

$$A(E) = \{Ax : x \in E\}$$

y, llamaremos el Núcleo al conjunto

$$N(A) = \{x \in E : Ax = 0\}$$

$A(E)$ es subespacio de F y $N(A)$ es subespacio de E

Definición 1.7 (Espacio de Banach). Un espacio de Banach es un espacio normado el cual es completo en la métrica definida por su norma.

Definición 1.8. Sean X, Y espacios de Banach, denotaremos por $L(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en Y. Si $X = Y$ entonces denotamos a $L(X, X)$ como $L(X)$

Definición 1.9 (Dual). Sea X un espacio de Banach, denotaremos por el dual a $X' := L(X, \mathbb{C})$. Si $T \in L(X, Y)$, denotaremos al operador dual por $T' \in L(Y', X')$ y definido por

$$(T'f)(x) := f(Tx)$$

para todo $x \in X, f \in Y'$

Definición 1.10 (Anulador y Pre-Anulador). Sea M un subespacio del espacio de Banach X. El anulador de M es el subespacio cerrado de X', definido por

$$M^{\perp} := \{f \in X' : f(x) = 0, \forall x \in M\},$$

El pre-anulador de un subconjunto W de X' es el subespacio cerrado de X definido por

$$^{\perp}W := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in W\}$$

Proposición 1.1. *Sea E, F espacios normados con espacio dual E', F' respectivamente. Si $A' \in L(F', E')$ es el operador dual de $A \in L(E, F)$, entonces*

$$\begin{array}{ll} \overline{A(E)}^{\perp} = N(A') & \qquad \overline{A(E)} = N(A')^{\perp} \\ \overline{A'(F')}^{\perp} = N(A) & \qquad \overline{A'(F')} \subset N(A)^{\perp} \end{array}$$

Como consecuencia de este resultado tenemos que para T un operador acotado sobre un espacio de Banach y T' su dual se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} N(T) =^{\perp} \overline{T'(X')} & \qquad ^{\perp}N(T') = \overline{T(X)} \\ \overline{T(X)}^{\perp} = N(T') & \qquad \overline{T'(X')} \subseteq N(T)^{\perp} \end{array}$$

Definición 1.11 (Operador de Rango Finito). A todos los Operadores Lineales con espacio imagen de dimensión finita son los llamados operadores de dimensión finita u operadores de rango finito.

Ahora, establecemos algunas notaciones de las cuáles hacemos uso en la definición de algunos espacios que con mucha frecuencia vamos a trabajar. Consideremos a E espacio vectorial, denotamos por $\mathcal{J}(E)$ a el conjunto de todos los endomorfismos de E. A $\mathcal{E}(E)$ como el conjunto de todos los endomorfismos de dimensión finita de E. También, denotaremos por $\mathcal{L}(E)$ al conjunto de todos los endomorfismos continuos de E. Y, $\mathcal{F}(E)$ denotará al conjunto de todos los endomorfismos continuos de dimensión finita.

Definición 1.12 (Suma Directa). Sean F, G subespacio, entonces la suma $F+G$ es también un subespacio. Esta suma se le llama Suma Directa y la denotamos por $F \oplus G$ si $F \cap G = \{0\}$.

Además, si $F \oplus G = E$, entonces G es llamado el **Complemento Algebraico** de F en E, con esto en mente veamos la siguiente proposición:

Proposición 1.2. *Todo subespacio de un espacio vectorial posee un complemento algebraico.*

Proposición 1.3. *Dos complementos de un subespacio dado son, o ambos infinitodimensional o son de la misma dimensión finita.*

Esta proposición nos permite definir la codimensión,

Definición 1.13 (Codimensión). Sean F, G subespacios de E, entonces se define la codimensión de un subespacio G de E como la dimensión de algún complemento F de G, se denota por $codim_E G$ o simplemente $codim G$ si el espacio E es fijo.

De esta definición se desprende lo siguiente

$$\begin{array}{lcll} codimG & = & \infty & \text{si} \quad dimF = \infty \\ codimG & = & dimF & \text{si} \quad 1 \leq dimF < \infty \\ codimG & = & 0 & \text{si} \quad G = E \end{array}$$

Definición 1.14 (Proyector). Un proyector es una transformación lineal $P : E \to E$ tal que $P^2 = P$.

Proposición 1.4. *Si $A : E \to F$ es lineal, P un proyector de E sobre $N(A)$ y Q un proyectar de F sobre $A(E)$, entonces existe una función lineal $B : F \to E$ tal que las ecuaciones*

$$BA = I_E - P, \qquad\qquad AB = I_F - Q$$

son válidas.

Proposición 1.5. *Sea E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y sea E de dimensión finita, E y F son isomorfos si, y sólo si $dimE = dimF$.*

Proposición 1.6. *La función lineal $A : E \to F$ de los espacios normados E y F posee una inversa continua A^{-1} definida sobre $A(E)$ si, y sólo si para una constante apropiada $m > 0$ la estimación*

$$m\|x\| \leq \|Ax\|$$

se cumple para todo $x \in E$.

Definición 1.15 (Nulideficiencia o Nulidad). Sea A una transformación lineal de E en F, llamaremos Nulideficiencia o Nulidad a la dimensión del núcleo y lo denotaremos por $\alpha(A)$.

Definición 1.16 (Imagen Deficiencia o Rango). Sea A una transformación lineal de E en F, llamaremos Imagen Deficiencia o Rango a la codimensión del espacio imagen y lo denotamos por $\beta(A)$.

Proposición 1.7. *Sea $K : E \to E$ un operador de rango finito, representado con ayuda del sistema bilineal (E, E') en la forma*

$$Kx = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i'(x)x_i,$$

donde los vectores $x_1, \ldots, x_n$ perteneciente a E y $x_1', \ldots, x_n'$ perteneciente a E', son linealmente independientes. Sea el operador $K' : E' \to E'$ dado por

$$K'x' = \textstyle\sum_{i=1}^{n}, x_i(x')x_i',$$

y sea I' la transformación identidad en E'. Entonces tenemos

$$\alpha(I - K) = \beta(I - K) < \infty \tag{1.2}$$

en particular, los operadores de la forma $I - K$ son biyectivos si, y sólo si ellos son inyectivos o sobreyectivos.

Proposición 1.8. *Un endomorfismo continuo de un espacio normado es normalmente soluble si, y sólo si su imagen es cerrado.*

Teorema 1.1. *Si la función lineal A del espacio de Banach E sobre el espacio de Banach F es inyectiva, entonces la función inversa A^{-1} es continua.*

Proposición 1.9. *La función lineal $A : E \to F$ con espacio nulo $N(A)$ cerrado es continuo o abierto si, y sólo si la correspondiente inyección canónica*

$$\hat{A} : E/N(A) \to F$$

es continua o abierta, respectivamente. En el caso de continuidad tenemos $\|\hat{A}\| = \|A\|$.

Capítulo 2
Operadores de Fredholm

2.1. Operadores con Deficiencia Finita

Vamos a iniciar considerando los Operadores con deficiencia finita, los cuáles son la base de la teoría por desarrollar, estos operadores nos van ha permitir conceptos precisos que son claves para llegar a nuestro resultado, como especie de preámbulo daremos unas definiciones que a la larga serán de mucha ayuda para los objetivos del trabajo. Dentro de este contexto se hablará acerca de las álgebras y las álgebras cocientes mas no se definiran por lo que se recomienda ver [8] para entender estos conceptos.

Definición 2.1 (Deficiencia Finita). Diremos que un operador posee Deficiencia Finita si $\alpha(A)$ y $\beta(A)$ son finitos.

Con esto en mente demostremos la siguiente proposición,

Proposición 2.1. *El endomorfismo $A \in \mathcal{J}(E)$ posee una clase de equivalencia invertible $\widehat{A} \in \mathcal{J}(E)/\mathcal{E}(E)$, i.e existen operadores B, C en $\mathcal{J}(E)$ y K_1, K_2 en $\mathcal{E}(E)$ que satisfacen $BA = I - K_1$, $AC = I - K_2$ si, y sólo si $\alpha(A)$ y $\beta(A)$ son finitos.*

Demostración. Comencemos por considerar el operador $A = R - S$ sobre un espacio vectorial E, donde R es una biyección y S es de dimensión finita. Si denotamos por $\widehat{T}$ la clase de equivalencia del operador T, en la álgebra cociente $\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(E)/\mathcal{E}(E)$, entonces $\widehat{A} = \widehat{R} - \widehat{S} = \widehat{R}$, y así como R posee una inversa (en el sentido de las teoría de las álgebras) en $\mathcal{J}(E)$, también $\widehat{R}$, y por tanto, $\widehat{A}$, es invertible en $\widehat{\mathcal{J}}$. Sabemos que $\alpha(A)$ y $\beta(A)$ son finitas, entonces se sigue inmediatamente de la Proposición 1.4 que con el operador B indicado en esa proposición, la ecuación $\widehat{B}\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{B} = \widehat{I}$ se tiene, porque los proyectores P y Q en la Proposición 1.4 tienen ahora rango finito. Así $\widehat{A}$ es también en este caso un elemento invertible de $\widehat{\mathcal{J}}$.

Recíprocamente, si la clase de equivalencia $\widehat{A}$ de un operador A es invertible, esto es, si existen operadores B y C tales que $\widehat{B}\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{C} = \widehat{I}$ entonces, para ciertos operadores de dimensión finita K_1, K_2 las ecuaciones

$$BA = I - K_1 \qquad\qquad AC = I - K_2 \tag{2.1}$$

son válidas. De aquí se siguen las inclusiones

$$N(A) \subset N(BA) = N(I - K_1) \qquad\qquad A(E) \supset (AC)(E) = (I - K_2)(E)$$

y con ellos, las estimaciones $\alpha(A) \leq \alpha(I - K_1)$, $\beta(A) \leq \beta(I - K_2)$. Así, por causa de la Proposición 1.7 ambas dimensiones $\alpha(A), \beta(A)$ son finitas. □

De acuerdo a la proposición pasada, exactamente los operadores con deficiencia finita tienen clases de equivalencia invertible en $\mathcal{J}(E)/\mathcal{E}(E)$. Denotemos por $\Delta(E)$ el conjunto de los endomorfismos de E con deficiencia finita.

Observación 2.1. En [8] se observa que la ecuación de la integral de Fredholm con núcleo continuo llevan operadores con igual deficiencia finita. F. Noether fue el primero en decir que las llamadas ecuaciones integrales singulares generan operadores donde las deficiencias son suavemente finitas pero diferentes.

Si tomamos en cuenta que los elementos invertibles de un álgebra forma un grupo y que los factores de un producto invertible ab son ambos invertibles o no invertibles, entonces obtenemos por la proposición 2.1, la siguiente afirmación acerca de la estructura de $\Delta(E)$.

Proposición 2.2. *El producto de operadores con deficiencia finita también posee deficiencia finita, Así $\Delta(E)$ es un semigrupo. Si el operador AB posee deficiencia finita, entonces o ambos operadores o ningún operador posee deficiencia finita. La suma de un operador con deficiencia finita y de un operador con dimensión finita posee deficiencia finita.*

Demostración. La demostracion es facil verla teniendo presente el comentario posterior a la observación anterior y la proposición 2.1. □

Para todo operador A de deficiencia finita uno asocia el siguiente índice:

$$ind(A) = \alpha(A) - \beta(A).$$

La afirmación básica concerniente al índice se hace a través del siguiente teorema llamado Teorema del índice:

Teorema 2.1 (**Teorema del Índice**). *Para endomorfismos A, B con deficiencia finita se tiene*

$$ind(AB) = ind(A) + ind(B) \tag{2.2}$$

Demostración. Iniciamos la prueba observando que AB posee deficiencia finita por la Proposición 2.2 y el espacio complementario el cual existe por medio de la proposición 1.2. Sea

$$E_1 = B(E) \cap N(A), \tag{2.3}$$

determinamos subespacios E_2, E_3 y E_4 de E tales que

$$B(E) = E_1 \oplus E_2, \tag{2.4}$$

$$N(A) = E_3 \oplus E_1, \tag{2.5}$$

$$E = \overbrace{E_3 \oplus E_1}^{N(A)} \oplus E_2 \oplus E_4 \tag{2.6}$$

Se sigue de la descomposición anterior que

$$\begin{aligned} A(E) &= A(E_2 \oplus E_4) \\ &= A(E_2) \oplus A(E_4) \\ &= A(E_1 \oplus E_2) \oplus A(E_4) \\ &= (AB)(E) \oplus A(E_4). \end{aligned}$$

De acá tenemos entonces

$$A(E) = (AB)(E) \oplus A(E_4). \tag{2.7}$$

Además sea F un subespacio de E tal que

$$N(AB) = N(B) \oplus F, \tag{2.8}$$

la restricción de B en F es inyectiva, de aquí B/F es un isomorfismo cuya imagen

$$\begin{aligned}B(F) &= B(F \oplus N(B))\\&= B(N(AB))\\&= B(E) \cap N(A)\\&= E_1.\end{aligned}$$

Luego, la proposición 1.5 garantiza que

$$dimF = dimE_1. \tag{2.9}$$

Por la misma razón

$$dimA(E_4) = dimE_4. \tag{2.10}$$

De (2.5),(2.6), (2.8) y (2.7), obtenemos (en este orden) tomando en consideración (2.9),(2.10).

$$\begin{aligned}\alpha(A) &= dimE_1 + dimE_3,\\\beta(B) &= dimE_3 + dimE_4,\\\alpha(AB) &= \alpha(B) + dimF &&= \alpha(B) + dimE_1,\\\beta(AB) &= \beta(A) + dimA(E_4) &&= \beta(A) + dimE_4.\end{aligned}$$

De estas cuatro ecuaciones se sigue que

$$\begin{aligned}ind(AB) &= \alpha(AB) - \beta(AB)\\&= \alpha(B) + dimE_1 - \beta(A) - dimE_4\\&= \alpha(B) + \alpha(A) - dimE_3 - \beta(A) - \beta(B) + dimE_3\\&= \alpha(A) - \beta(A) + \alpha(B) - \beta(B)\\&= ind(A) + ind(B).\end{aligned}$$

□

La próxima proposición es un resultado de estabilidad concerniente al índice; se dice que el índice de un operador A con deficiencia finita no cambia si se le suma un operador arbitrario de dimensión finita o rango finito (o, si se **perturba** a A por operadores de esta clase). Presentamos primero un lema que se sigue inmediatamente de la proposición 2.2 y del teorema del índice:

Lema 2.1. *Si para un operador A de deficiencia finita una ecuación de la forma $AB = C$ o $BA = C$ con $ind(C) = 0$, entonces también B tiene deficiencia finita y*

$$ind(B) = -ind(A)$$

Demostración. Queremos ver que el operador B posee deficiencia finita.
Ahora bien, de la hipótesis sabemos que el operador C tiene $indC = 0$ lo que nos garantiza que tanto la nulideficiencia como la imagen deficiencia son finitas, más aún son iguales, por lo que podemos asegurar que el operador C posee deficiencia finita.
Por su parte tenemos que el operador B se encuentra relacionado con A y C mediante la ecuación $BA = C$ y siguiendo la proposición 2.2 la cual nos asegura que los operadores A y B o ambos poseen deficiencia finita o ninguno posee deficiencia finita, pero de la hipótesis el operador A posee deficiencia finita, y para que se cumpla la ecuación el operador B debe tener deficiencia finita. De está forma aseguramos que el operador B tiene deficiencia finita. Demostremos ahora que $ind(B) = -ind(A)$.

$$\begin{aligned} AB &= \text{C} && \text{(Por Hipótesis)} \\ ind(AB) &= \text{ind(C)} && \text{(Aplicando Índice)} \\ ind(A) + ind(B) &= 0 && \text{(Teo. del índice y } ind(C) = 0\text{)} \\ ind(B) &= -ind(A) && \text{(Ambos índices son finitos)} \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3. *Si A es un endomorfismo de deficiencia finita de E y S uno de dimensión finita, entonces*

$$ind(A + S) = ind(A)$$

Demostración. Primero observamos que $A + S$ posee deficiencia finita por Proposición 2.2 . Pero de la Proposición 2.1 se tiene que existe un $B \in \mathcal{J}(E)$ y un $L \in \mathcal{E}(E)$ tal que $BA = I - L$. Luego, por proposición 1.7 se tiene que $ind(I - L) = 0$, se sigue, con ayuda del teorema anterior, que $ind(B) = -ind(A)$. Además,

$$B(A + S) = BA + BS = I - L + BS = I - L_1$$

con $L_1 = L + BS \in \mathcal{E}(E)$.
De esta forma,
$ind(B(A + S)) = ind(I - L_1)$ donde el operador del lado derecho cumple

$$\begin{aligned} ind(I - L_1) &= \alpha(I - L_1) - \beta(I - L_1) && \text{((}I - L_1\text{) tiene deficiencia finita)} \\ &= \alpha(I - L_1) - \alpha(I - L_1) && \text{(Por Proposición 1.7)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $ind(I - L_1) = 0$, así cumplimos las hipótesis del lema anterior, de aquí obtenemos $ind(A+S) = -ind(B) = ind(A)$ $\square$

Finalmente, presentamos resultados que nos permiten en ciertos casos conocer a los operadores con deficiencia finita.

Proposición 2.4. *Sea K un endomorfismo de E y F un espacio vectorial tal que $K(E) \subseteq F \subseteq E$; Sea $\tilde{I}, \tilde{K}$ las restricciones de I, K sobre F; entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$N(I-K) = N(\tilde{I} - \tilde{K})$ entonces también $\alpha(I-K) = \alpha(\tilde{I} - \tilde{K})$*

2. *De $F = G \oplus (\tilde{I} - \tilde{K})(F)$ se sigue que $E = G \oplus (I-K)(E)$ en particular $\beta(I-K) = \beta(\tilde{I} - \tilde{K})$.*

3. *$I-K$ tiene deficiencia finita si, y sólo si $\tilde{I} - \tilde{K}$ lo tiene.*

Demostración. (1) Sabemos que $\tilde{I} = I/F$ y que $\tilde{K} = K/F$, ahora bien

$$\begin{aligned} N(I-K) &= \{x \in E/(I-K)x = 0\} \\ &= \{x \in E/Kx = x\} \subseteq K(E) \end{aligned}$$

pero por la hipótesis $K(E) \subseteq F$, lo que nos garantiza que $N(I-K) = N(\tilde{I} - \tilde{K})$. De acá y de manera sencilla se tiene que $\alpha(I-K) = \alpha(\tilde{I} - \tilde{K})$.

(2) Sea ahora la descomposición de $F = G \oplus (\tilde{I} - \tilde{K})(F)$. Primero probemos que $G \cap (I-K)(E) = \{0\}$.

Si $y \in G$ y al mismo tiempo $y = (I-K)x$, entonces $y + kx = x$, de está forma $y + kx$ se encuentra en F, y además $x \in F$, de esta manera obtenemos $y = (\tilde{I} - \tilde{K})x$; pero, por hipótesis y debe ser nulo.

Sea ahora x escogido arbitrariamente en E y también llamemos $z = (I-K)x$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= Kx + z \\ &= g + (I-K)f + z \quad \text{ya que } Kx \in K(E) \subseteq F = G \oplus (\tilde{I} - \tilde{K})(F) \end{aligned}$$

con $g \in G$ y $f \in F$, luego $x = g + (I-K)(f+x)$. De esta forma tenemos que $E = G \oplus (I-K)(E)$ así queda probada (2).

(3) Debemos ver que $I-K$ tiene deficiencia finita si, y sólo si $\tilde{I} - \tilde{K}$ lo tiene.

Supongamos que $I - K$ tiene deficiencia finita, esto implica por definición, que $\alpha(I-K)$ y $\beta(I-K)$ son finitos, pero de (1) y (2) $\alpha(I-K) = \alpha(\tilde{I}-\tilde{K})$ y $\beta(I-K) = \beta(\tilde{I}-\tilde{K})$, por lo que $\alpha(\tilde{I}-\tilde{K})$ y $\beta(\tilde{I}-\tilde{K})$ también son finitos de lo podemos concluir que $\tilde{I}-\tilde{K}$ también posee deficiencia finita.

El reciproco se procede de forma similar. $\square$

2.2. Operadores de Fredholm sobre Espacios Normados

Si A es un endomorfismo continuo con deficiencia finita de un espacio normado E donde $E = N(A) \oplus U$, sea $A_0 : U \to A(E)$ una transformación lineal definida por $A_0 x := Ax$ con $x \in U$, entonces sería conveniente poder elegir a los operadores B, C, K_1 y K_2 en las ecuaciones (2.1) también continuas, de modo que se encuentren dentro del álgebra $\mathcal{L}(E)$. Para entender mejor esto, se debe ver la manera en que se obtuvieron las ecuaciones (2.1). Asumamos que existe un proyector continuo P de E sobre $N(A)$, y de igual forma un proyector Q_0 de E sobre $A(E)$. El operador $B = A_0^{-1}Q_0$ es ciertamente continuo si A_0^{-1} es continuo, esto es, si A es abierto. Pero A_0 es abierto si A es abierto, de hecho, si $P_0 = I - P$ es el proyector continuo sobre U a lo largo de $N(A)$ y si $M \subset U$ es abierto en el subespacio U, entonces también $P_0^{-1} = \{x + y : x \in M, y \in N(A)\}$ es abierto, por lo tanto, debido a los abiertos tomados en A, la imagen $A(P_0^{-1}(M)) = \{Ax : x \in M\} = A_0(M)$ es abierto en $A(E) = A_0(U)$ y así es una aplicación abierta.

En resumen, podemos indicar: Si $A \in \mathcal{L}(E)$ es abierto y existe un proyector continuo P de E sobre $N(A)$ y un proyector continuo Q_0 de E sobre $A(E)$, y por tanto también un proyector continuo $Q : -I - Q_0$ de E a lo largo de $A(E)$, entonces existe un $B \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$BA = I - P, \qquad\qquad AB = I - Q \tag{2.11}$$

Para un operador A con deficiencia finita, los proyectores P, Q son de rango finito, en efecto, de las ecuaciones (2.11) tenemos que $BA = I - P$, entonces por proposición 2.2, BA posee deficiencia finita y en particular rango finito, además como el operador identidad I posee rango finito, por tanto el operador P debe tener rango finito. De manera similar se tiene que el operador Q posee rango finito. Con esto podemos asegurar que todos los operadores que figuran en (2.1) se pueden elegir de tal modo que sean continuos.

Si multiplicamos la primera ecuación de (2.11) en el lado izquierdo por A, entonces obtenemos

$$ABA = A. \tag{2.12}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} BA &= I - P && \text{(De (2.11))} \\ ABA &= A(I-P) && \text{(Multiplicando por } A \text{ ambos lados)} \\ &= A - AP && \text{(Composición de operadores)} \\ &= A && \text{(Pues } AP = 0,\ P(E) = N(A)) \end{aligned}$$

Esto se tiene independientemente de la dimensión del espacio nulo $N(A)$.

Definición 2.2 (**Continuamente Proyectable**)**.** Sea F subespacio del espacio normado E, diremos que F es continuamente proyectable si existe un proyector continuo P, con $P(E) = F$.

Definición 2.3 (**Relativamente Regular**)**.** Sea un operador $A \in \mathcal{L}(E)$, diremos que es relativamente regular si $ABA = A$ para algún $B \in \mathcal{L}(E)$.

De acá afirmamos lo siguiente: Un operador $A \in \mathcal{L}(E)$ con espacio nulo y espacio imagen continuamente proyectables, es relativamente regular.

Observación 2.2. El recíproco de la afirmación anterior es también válido.

Veamos la siguiente proposición

Proposición 2.5. *Un endomorfismo continuo de un espacio normado es relativamente regular si, y sólo si este es abierto y el espacio nulo y el espacio imagen son continuamente proyectables.*

Demostración. Si A es relativamente regular, entonces

$$(AB)^2 = ABAB = AB \text{ y } (BA)^2 = BABA = BA$$

por lo tanto los operadores idempotentes AB y BA son continuamente proyectable.

De $A(E) = (ABA)(E) \subset (AB)(E) \subset A(E)$ se sigue que $(AB)(E) = A(E)$, por lo tanto el espacio imagen de A es continuamente proyectable.

De $N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A)$, se obtiene que $N(BA) = N(A)$ por lo tanto $(I-BA)(E) = N(BA)$ pues BA es idempotente, entonces $(I-BA)(E) = N(A)$, y así también el espacio nulo de A es continuamente proyectable. Finalmente demostremos que A es abierto, para ello probemos la identidad

$$A(G) = B^{-1}(G + N(A)) \cap A(E), \tag{2.13}$$

para todo $G \subset E$.

Si tomamos en consideración que el proyector AB opera sobre $A(E)$ como la identidad, entonces obtenemos

$$B^{-1}(G + N(A)) \cap A(E) = (AB)[B^{-1}(G + N(A)) \cap A(E)] \subset A(G + N(A)) = A(G). \tag{2.14}$$

Por otro lado, también BA es un proyector, representaremos todo $g \in G$ como la suma $g = x + y$ con $x \in N(AB), y \in (BA)(E)$; se sigue que $BAg = BAy = y = g - x$, por lo tanto $(BA)(G) \subset G + N(BA) \subset G + N(ABA) = G + N(A)$ y como $A(G) \subset B^{-1}(G + N(A)) \cap A(E)$. De estas inclusiones y de (2.14) obtenemos la afirmación de la identidad (2.13). Si ahora G es un subconjunto abierto de E, entonces para todo $x \in E$ obviamente $G + x$ es abierto, por lo tanto también los conjuntos

$$G + N(A) = \bigcup_{x \in N(A)} (G + x) \text{ y } B^{-1}(G + N(A))$$

son abiertos en E. Se sigue, con la ayuda de (2.1) que $A(G)$ es un subconjunto abierto del subespacio $A(E)$. $\square$

En virtud de esta proposición podemos formular los siguientes resultados concernientes a operadores con deficiencia finita.

Para un operador relativamente regular $A \in \mathcal{L}(E)$ con deficiencia finita, existen endomorfismos continuos B, C y endomorfismos continuos de dimensión finita K_1, K_2 tal que

$$BA = I - K_1, \qquad AC = I - K_2 \tag{2.15}$$

igual se puede escoger $B = C$.

Definición 2.4 (**Operador de Fredholm**). Dado un endomorfismo continuo de un espacio normado E, diremos que es Operador de Fredholm si éste es relativamente regular y posee deficiencia finita. Denotaremos al conjunto de todos los operadores de Fredholm sobre E por $\Phi(E)$.

Para un operador de Fredholm A sobre E las ecuaciones (2.15) se cumplen, esto es, la clase de equivalencia $\hat{A}$ en el álgebra cociente $\frac{\mathcal{L}(E)}{\mathcal{F}(E)}$ es invertible

Observación 2.3. De manera general $\frac{\mathcal{L}(E)}{\mathcal{F}(E)}$ no es normado, pues el ideal $\mathcal{F}(E)$ de operadores continuos de rango finito en general no es cerrado.

Cabe preguntar si el recíproco es o no válido, es decir, si un endomorfismo continuo A, para el cual se cumplen las ecuaciones (2.15) (esto es, el operador $\hat{A}$ es invertible en $\frac{\mathcal{L}(E)}{\mathcal{F}(E)}$), es un operador de Fredholm.

Recordemos ahora la definición de proyectabilidad continua. Si $E = F \oplus G$ y si el proyector P sobre F a lo largo de G es continuo, entonces llamaremos Espacio Complementario Topológico (o Complemento Topológico) de F; por su puesto F es un espacio complementario topológico de G. Precisamente los espacios continuamente proyectable son los que tienen complemento topológico, y también son llamados **Complementados**. Tales subespacios son necesariamentes cerrados porque estos son espacios nulos de proyectores continuos. Sin embargo, los subespacios cerrados no son necesariamente continuamente proyectables; se tiene que un subespacio F es continuamente proyectable si posee codimensión finita. Todo complemento algebraico de F es entonces un complemento topológico. Esta afirmacion nos indica cuándo los subespacios simples de dimensión finita son continuamente proyectables.

Proposición 2.6.

- *Subespacios de dimensión finita y cerrados con codimensión finita de un espacio normado son continuamente proyectables.*

- *Todo complemento algebraico de un subespacio cerrado de codimensión finita es también un complemento topológico.*

Demostración. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una base finita del subespacio F de E y P un proyector continuo de E sobre F, entonces P tiene representación dada por

$$Px = \sum_{k=1}^{n} x'_k(x)x_k \tag{2.16}$$

con $x'_k \in E'$ apropiado.

Ya que P opera sobre $P(E) = F$ como la identidad, tenemos

$$Px_i = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x'_k(x_i)x_k = x_i$$

Luego,

$$x'_k(x_i) = \delta_{ik} \tag{2.17}$$

para $i, k = 1, \ldots, n$.

Recíprocamente, si para $x_1, x_2, \ldots, x_n$, existe funcionales lineales continuas $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ tales que (2.17) sea válido, y definimos P por (2.16), entonces $Px_i = x_i$ para $1 \leq i \leq n$, de donde $P^2 = P$ y $P(E) = F$ se sigue que P es proyector continuo de E sobre F. □

Con ayuda de la proposición anterior se obtiene de forma inmediata

Proposición 2.7. *Un endomorfismo continuo de un espacio normado es un operador de Fredholm si, y sólo si este es abierto, con deficiencia finita y espacio imagen cerrado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que A es un operador de Fredholm, esto es, el operador A es relativamente regular y posee deficiencia finita, estamos interesados en demostrar que A es abierto con deficiencia finita y rango cerrado.

Pero, por la proposición 2.5 un operador es relativamente regular si, y sólo si es abierto y tiene núcleo y espacio imagen continuamente proyectable, y por ser A operador de Fredholm se tiene que A es abierto y tiene deficiencia finita; faltaría ver que tiene espacio imagen cerrado, pero por ser relativamente regular, posee espacio imagen continuamente proyectable y por la proposición 2.6, es un espacio cerrado.

($\Leftarrow$) Supongamos que A es abierto con deficiencia finita y rango cerrado, queremos ver que A es un operador de Fredholm, esto es, ver que A es relativamente regular y que tenga deficiencia finita, para ello se debe tener que el operador A sea abierto, con núcleo y espacio imagen continuamente proyectable.

Ahora bién,por hipótesis A es abierto con deficiencia finita lo que implica que la nulidad y la codimensión del rango son finito y además el espacio imagen es cerrado, así por la proposición 2.5, el nucleo y el espacio imagen son continuamente proyectable, por lo tanto A es relativamente regular y posee deficiencia finita por lo que concluimos que A es un operador de Fredholm. $\square$

2.3. Operadores con Espacios Imagen Cerrado

Ahora enfocaremos los operadores que tengan su espacio imagen cerrado.

Iniciemos con un lema preliminar.

Lema 2.2. *Si E, F son Espacios de Banach, entonces el operador $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tiene inversa continua si, y sólo si es inyectivo y su espacio imagen es cerrado.*

Demostración. Es claro, si A es inyectiva y $A(E)$ es cerrado, entonces la continuidad de A^{-1} se sigue del teorema 1.1 porque $A(E)$ es completo como un subespacio cerrado del espacio de Banach F. $\square$

La siguiente consideración conduce a asociar a todo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ un número que nos dé la información concerniente a la cerradura de $A(E)$. Aquí E y F son Espacios de Banach. Sea $\hat{E}$ el Espacio de Banach $E/N(A)$ y $\hat{A} : \hat{E} \longrightarrow F$ la inyección canónica correspondiente a A (Proposición 1.9).

Se sigue del Lema 2.2 que $A(E) = \hat{A}(\hat{E})$ es cerrado si, y sólo si $(\hat{A})^{-1}$ es continuo; además, de acuerdo a la Proposición 1.6, para cierta constante $m > 0$ la desigualdad $m\|\hat{x}\| \leqq \|\hat{A}\hat{x}\|$ se cumple para todo $\hat{x} \in \hat{E}$, esto es, si

$$\operatorname*{ínf}_{0\neq\hat{x}\in\hat{E}} \frac{\|\hat{A}\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} > 0 \tag{2.18}$$

Recordemos que la distancia $d(x, N(A))$ de un elemento x de $N(A)$ viene dada por

$$d(x, N(A)) := \operatorname*{ínf}_{y\in N(A)} \|x - y\|,$$

entonces para todo $x \in \hat{x}$ tenemos,

$$\|\hat{x}\| = \operatorname*{ínf}_{z\in\hat{x}} \|z\| = \operatorname*{ínf}_{y\in N(A)} \|x - y\|$$

$$= d(x, N(A))$$

y

$$\|\hat{A}\hat{x}\| = \|Ax\|.$$

Consecuentemente, el ínfimo en (2.18) coincide con el número

$$\gamma(A) := \inf_{\substack{x \in E \\ x \notin N(A)}} \frac{\|Ax\|}{d(x, N(A))}. \tag{2.19}$$

Definición 2.5 (**Módulo Minimal**)**.** Llamaremos el módulo minimal de A, al número dado por (2.19)

con esto se demuestra la siguiente proposición :

Proposición 2.8. *Si E y F son Espacios de Banach, entonces el espacio imagen del operador lineal continuo $A : E \longrightarrow F$ es cerrado si, y sólo si el módulo minimal satisface $\gamma(A) > 0$.*

De esta proposición se obtiene el siguiente criterio de operadores con espacio imagen cerrado.

Proposición 2.9. *Sea A una función lineal cerrada del espacio de Banach E sobre el espacio de Banach F. Si existe un subespacio cerrado G de F tal que $A(E) \cap G = \{0\}$ y $A(E) \oplus G$ es cerrado, entonces $A(E)$ es cerrado.*

Demostración. G es completo pues es un subespacio cerrado del espacio de Banach F, de aquí $E \times G$ es un espacio de Banach.

Definamos una función lineal continua $B : E \times G \to F$ por

$$B(x, y) = Ax + y \qquad \text{con } x \in E, y \in G.$$

El espacio imagen

$$B(E \times G) = A(E) \oplus G$$

es cerrado por hipótesis, de aquí $\gamma(B) > 0$ (Proposición 2.8). Mostremos ahora que $\gamma(A) \geq \gamma(B)$, además por la proposición 2.8, concluimos la prueba.

Debido a que $A(E) \cap G = \{0\}$ tenemos $N(B) = N(A) \times \{0\}$; consecuentemente para todo $x \in E$ tenemos

$$d((x,0),N(B)) = d(x,N(A)),$$

y como

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \|B(x,0)\| &\geq \gamma(B)d((x,0),N(B)) \\ &= \gamma(B)d(x,N(A)) \\ &\Rightarrow \tfrac{\|Ax\|}{d(x,N(A))} \geq \gamma(B) \end{aligned}$$

de donde $\gamma(A) \geq \gamma(B)$ se sigue inmediatamente. □

Proposición 2.10. *Sea A una transformación lineal del espacio de Banach E sobre el espacio de Banach F. Si el espacio imagen de A tiene codimensión finita, entonces éste es cerrado.*

Por motivo de simplicidad formularemos la siguiente proposición para endomorfismos.

Proposición 2.11. *Sea A un endomorfismo continuo del espacio de Banach E. Si $A(E)$ es cerrado, entonces también $A'(E')$ es cerrado y*

$$A'(E') = N(A)^{\perp} := \{x' \in E' : x'(x) = 0, \forall x \in N(A)\}. \tag{2.20}$$

Demostración. $N(A)$ es obviamente cerrado, de aquí, el hecho de que $A'(E')$ sea cerrado se tendrá cuando hallamos demostrado (2.20).

La inclusión $A'(E') \subset N(A)^{\perp}$ se sigue inmediatamente. Demostremos ahora, recíprocamente, que todo $x' \in N(A)^{\perp}$ pertenece a $A'(E')$. Para ello definamos, con la ayuda de x' un funcional lineal f sobre $A(E)$ como sigue.

Para $y \in A(E)$ elijamos un $x \in E$ con $Ax = y$ y hacemos

$$f(y) := x'(x)$$

f es determinado únicamente; es claro, si tenemos $Ax_1 = y$, entonces $x_1 - x \in N(A)$ de aquí $x'(x_1) = x'(x)$. Es trivial que f es lineal, f también es continua. Para toda $u \in N(A)$ tenemos $f(y) = x'(x-u)$, de aquí $\mid f(y) \mid \leq \|x'\|\|x-u\|$ y así también $\mid f(y) \mid \leq \|x'\|d(x,N(A))$. Luego por la Proposición 2.8, el módulo minimal satisface $\gamma(A) > 0$, de lo que podemos estimar

$$|f(y)| \leq \|x'\|\tfrac{\|Ax\|}{\gamma(A)} = \tfrac{\|x'\|}{\gamma(A)}\|y\|$$

Extendamos ahora a f de acuerdo al Teorema de Hahn-Banach a un funcional lineal continuo y' sobre E. Entonces para todo $x \in E$ tenemos

$$x'(x) = f(Ax) = y'(Ax) = A'y'(x)$$

donde $x' = A'y'$; y claramente, x' pertenece a $A'(E')$. $\square$

De las Proposiciones 1.8 y 2.11 obtenemos inmediatamente las siguientes afirmaciones.

Si el endomorfismo continuo A de el Espacio de Banach E posee un espacio imagen cerrado entonces tenemos:

- $Ax = y$ es soluble $\Leftrightarrow x'(y) = 0, \forall x' \in N(A)$
- $A'x' = y'$ es soluble $\Leftrightarrow y'(x) = 0, \forall x \in N(A)$

Así operadores con espacio imagen cerrado muestran el comportamiento de solubilidad con Operadores de Fredholm.

Observación 2.4. En [8] se encuentra el recíproco de la proposición 2.11 el cual nos hace ver que el criterio de solubilidad son también válidos cuando A' posee espacio imagen cerrado.

Para un A sobreyectivo tenemos $N(A') = \{0\}$; de esta observación obtenemos, con ayuda de la Proposición 2.11 y el Lema 2.2, la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *Si A es un endomorfismo continuo sobreyectivo del Espacio de Banach E, entonces A' tiene inversa continua sobre $A'(E')$.*

2.4. Operadores de Fredholm sobre Espacios de Banach

Recordemos que un endomorfismo continuo definido sobre un espacio normado E, es llamado Operador de Fredholm, si éste es relativamente regular y con deficiencia finita; de acuerdo a la Proposición 2.17 la regularidad relativa de un operador, se tiene si este es abierto y tanto el espacio imagen como el espacio nulo son, continuamente proyectables.

Con la ayuda del Teorema de Extensión de Hahn-Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$ es un Operador de Fredholm si éste es abierto, con deficiencia finita y su espacio imagen cerrado. Si E es un espacio de Banach, entonces se tiene que $A(E)$ es cerrado, y esto en parte implica que A es abierto. Consecuentemente tenemos:

Proposición 2.13. *Un endomorfismo continuo F de un Espacio de Banach E es un Operador de Fredholm si, y sólo si posee deficiencia finita.*

Dentro de esto encontraremos un teorema de perturbación para operadores de Fredholm sobre espacios normados arbitrarios. Junto con A, también $A+K$ es un operador de Fredholm para todo operador K continuo de dimensión finita, y además, el índice se conserva : $ind(A) = ind(A+K)$.

La siguiente proposición es también un teorema de perturbación, mostremos que el caracter de ser de Fredholm (y el índice) de un operador no cambia si sumamos un operador suficientemente pequeño.

Proposición 2.14. *Para todo Operador de Fredholm A de un Espacio de Banach E, existe un número $\rho = \rho(A) > 0$ tal que para todo $S \in \mathcal{L}(E)$ con $\|S\| < \rho$ también $A+S$ es un operador de Fredholm y ind(A+S)=ind(A). Así, el conjunto $\Phi(E)$ de los Operadores de Fredholm sobre E, es abierto en $\mathcal{L}(E)$.*

Demostración. Para A existe un $B \in \mathcal{L}(E)$ y un $K \in \mathcal{F}(E)$ tal que $BA = I - K$

De la Proposición 1.7 tenemos que el $ind(I-K) = 0$, se sigue del Lema 2.1 que B tiene deficiencia finita y

$$ind(B) = -ind(A)$$

Si hacemos $\rho := \frac{1}{\|B\|}$ y si $\|S\| < \rho$. entonces $\|BS\| \leq \|B\|\|S\| < 1$.

Así $I - BS$ es biyectiva, y por lo tanto el índice se anula. Por la proposición 2.3 obtenemos de

$$B(A+S) = BA + BS = I - K + BS = (I + BS) - K$$

que también $ind(B(A+S))$ se anula. Entonces B posee deficiencia finita, se sigue con la ayuda del lema 2.1, que también A+S posee deficiencia finita y que la ecuación $ind(B) = -ind(A+S)$ será válida.

Así, A+S es un operador de Fredholm por la proposición anterior, y su índice coincide con $ind(A)$ por la ecuaciones anteriores. $\square$

Capítulo 3

La Teoría de Riesz-Schauder de Operadores Compactos.

3.1. Operadores con Cadenas Finitas

Dentro de la teoría de Riesz-Schauder existen operadores que poseen propiedades muy importantes a la hora de estudiar los operadores de Fredholm, dentro de esta teoría encontraremos los conceptos principales que nos van a permitir desarrollar los objetivos de este trabajo.

El espacio nulo de la potencia A^n de un endomorfismo A sobre el espacio vectorial E forma una sucesión creciente

$$N(A^0) = \{0\} \subset N(A) \subset N(A^2) \subset \dots$$

el cual es llamado la Nulicadena.

Si para cierto $n \geq 0$ tenemos $N(A^n) = N(A^{n+1})$, entonces también $N(A^{n+1}) = N(A^{n+2})$ y así $N(A^n) = N(A^{n+m})$ para $m = 1, 2, \dots$. Es claro que si $x \in N(A^{n+2})$ se sigue que $A^{n+1}Ax = 0$, de aquí $Ax \in N(A^{n+1}) = N(A^n)$ y así $A^{n+1}x = 0$, esto es, $x \in N(A^{n+1})$. Este razonamiento nos permite definir lo siguiente

Definición 3.1 (Ascent). El Ascent de un operador A, es el entero no negativo más pequeño $p := p(A)$ tal que $N(A)^p = N(A)^{p+1}$.

Si tal entero no existe, esto es, $N(A)^p \neq N(A)^{p+1}$ para todo p, entonces $p(A) = \infty$.

La cadena imagen de A es la sucesión decreciente de los espacios imagen de las potencias de A

$$A^0(E) = E \supset A(E) \supset A^2(E) \supset \dots$$

Si para cierto $n \geq 0$ tenemos que $A^n(E) = A^{n+1}(E)$, entonces $A^n(E) = A^{n+m}(E)$ para $m = 1, 2, \dots$; con esto definimos lo siguiente

Definición 3.2 (**Descent**)**.** El Descent de un operador A, es el entero no negativo más pequeño $q := q(T)$ tal que $T^q(X) = T^{q+1}(X)$.

Si tal entero no existe, esto es, $A^n(E) \neq A^{n+1}(E)$ entonces diremos que $q(A) = \infty$.

Claramente, si $p(A) = 0$ entonces A es inyectiva, y si $q(A) = 0$ entonces A es sobreyectiva.

Para endomorfismos $A := I - K$ con K de dimensión finita, ambas cadenas son finitas.

Es claro que el espacio nulo de

$$A^n = (I-K)^n = I - (nK - \binom{n}{2}K^2 + \ldots + (-1)^{n-1}K^n) =: I - K_n, n \geq 1$$

está contenido en el espacio imagen $K_n(E)$ y obviamente, este espacio está contenido en el espacio $K(E)$ de dimensión finita, tal que la nulicadena de A eventualmente se haga constante. Entonces, además, K_n es de dimensión finita y así por proposición 1.7 se tiene $\alpha(I - K_n) = \beta(I - K_n)$, se sigue que $\beta(A^n) = \beta(I - K_n)$ se hará constante en el mismo exponente que en $\alpha(A^n) = \alpha(I - K_n)$. Así, tenemos que $q(A) = p(A) < \infty$.

Las siguientes dos proposiciones dan condiciones precisas para que se hagan constante la nulicadena o la cadena imagen de un endomorfismo A de E.

Proposición 3.1. *Tenemos que $p(A) \leq m < \infty$ si, y sólo si $N(A^n) \cap A^m(E) = \{0\}$, aquí n es un número natural arbitrario.*

Demostración. Si $p(A) \leq m < \infty$, n es un número natural y $y \in N(A^n) \cap A^m(E)$, entonces $y = A^m x$ y $A^n y = 0$, de aquí $A^{n+m}x = 0$. Por lo tanto, $x \in N(A^{n+m}) = N(A^m), (m \geq p)$, así $y = A^m x = 0$.

Recíprocamente, para un número natural n, sea

$$N(A^n) \cap A^m(E) = \{0\}.$$

Debido a que $N(A) \subset N(A^m)$ se tiene, más aún que $N(A) \cap A^m(E) = \{0\}$.

De $x \in N(A^{m+1})$; esto es $A(A^m x) = 0$ se sigue de esta forma que $A^m x \in N(A) \cap A^m(E) = \{0\}$, así $x \in N(A^m)$. Por lo que tenemos $N(A^m) = N(A^{m+1})$ y consecuentemente $p(A) \leq m$. □

Proposición 3.2. *Tenemos que $q(A) \leq m < \infty$ si, y sólo si para $A^n(E)$ existe un subespacio complementario $C_n \subseteq E$ contenido en $N(A^m)$, aquí n es un número natural arbitrario.*

Demostración. Sea $q := q(A) \leq m < \infty$, sea $n \in \mathbb{N}$ y C algún complemento algebraico de $A^n(E)$ en E, es decir,

$$E = C \oplus A^n(E) \tag{3.1}$$

Para todo elemento x_l de una base $\{x_l : l \in J\}$ de C existe, debido a que $A^q(C) \subset A^q(E) = A^{q+n}(E)$, un $y_l \in E$ con $A^q x_l = A^{q+n} y_l$, si definimos $z_l := x_l - A^n y_l$, entonces $A^q z_l = A^q x_l - A^{q+n} y_l = 0$. Se sigue que el espacio generado C_n de los z_l está contenida en $N(A^q)$, y más aún, en $N(A^m)$. De (3.1) obtenemos, para todo x en E una representación de la forma

$$\begin{aligned} x &= \sum \alpha_l x_l + A^n y \\ &= \sum \alpha_l (z_l + A^n y_l) + A^n y \\ &= \sum \alpha_l z_l + A^n z \end{aligned}$$

Así $E = C_n + A^n(E)$. Esta suma es directa, en efecto, para $x \in C_n \cap A^n(E)$ se tiene $x = \sum \beta_l z_l = A^n v$.

Luego,

$$\sum \beta_l x_l = \sum \beta_l A^n y_l + A^n v \in A^n(E)$$

Y así, de acuerdo a (3.1), $\beta_l = 0$, para todo $l \in J$ y también $x = 0$. Se sigue que C_n es, en efecto, un complemento algebraico de $A^n(E)$ perteneciente a $N(A^m)$. Ahora, sea n un número natural y asumamos que para $A^n(E)$ existe un complemento algebraico C_n contenido en $N(A^m)$, esto es, sea $E = C_n \oplus A^n(E)$. Entonces $A^m(E) = A^m(C_n) + A^{m+n}(E)$, y de esta forma $q(A) \leq m$.

□

Proposición 3.3. *Si ambas longitudes de las cadenas de A son finitas entonces son iguales*

Demostración. Llamemos $p := p(A), q := q(A)$ y asumamos primero que $p \leq q$ entonces, $A^q(E) \subset A^p(E)$. Además sea $q > 0$, de la proposición 3.2 se sigue la representación $E = N(A^q) + A^q(E)$; así para todo elemento $y := A^p x$ de $A^p(E)$ tenemos la descomposición $y = z + A^q w$ con $z \in N(A^q)$. El elemento $z = A^p x - A^q w$ perenece a $A^p(E)$, de aquí $z \in N(A^q) \cap A^p(E)$. De acuerdo a la proposición 3.1 esta intersección contiene sólo al 0, por lo tanto $y = A^q w$ y y pertenece a $A^q(E)$. Así, tenemos demostrado la igualdad $A^p(E) = A^q(E)$. De donde se sigue que $p \geq q$. De esta forma tenemos $p = q$.

Supongamos ahora que $q \leq p$ y $p > 0$, entonces $N(A^q) \subset N(A^p)$. Obtenemos de la Proposición 3.2 la repesentación $E = N(A^q) + A^p(E)$, tal que para un elemento arbitrario x de $N(A^p)$ tenemos la descomposición $x = u + A^p v$ con $u \in N(A^q) \subseteq N(A^p)$.

Ya que, $A^p x = A^p u = 0$ obtenemos de aquí que $A^{2p} v = 0$. Así $v \in N(A^{2p}) = N(A^p)$ tal que $A^p v = 0$ y de esta forma $x = u \in N(A^q)$. Se sigue que $N(A^q) = N(A^p)$, de aquí $q \geq p$. Así tenemos de nuevo $p = q$. □

Proposición 3.4. *Si en A, $p = p(A) = q(A) = q < \infty$, entonces la descomposición*

$$E = N(A^p) \oplus A^p(E) \tag{3.2}$$

es válida, y A mapea el espacio $A^p(E)$ biyectivamente sobre sí mismo. Recíprocamente, si para un número natural m tenemos

$$E = N(A^m) \oplus A^m(E) \tag{3.3}$$

entonces, $p(A) = q(A) \leq m$.

Demostración. Si $p(A) = q(A) = \rho < \infty$ (donde asumiremos $\rho > 0$), entonces la descomposición (3.2) se sigue inmediatamente de la proposición 3.1 y 3.2. Si denotamos por $\tilde{A}$ la restricción de A sobre $A^p(E)$, entonces $N(\tilde{A}) \subset N(A) \subset N(A^p)$ pero también $N(\tilde{A}) \subset A^p(E)$, y se sigue de (3.2) que $N(\tilde{A}) = \{0\}$ de aquí $\tilde{A}$ es inyectiva. Además $\tilde{A}(A^p(E)) = A(A^p(E)) = A^{p+1}(E) = A^p(E)$, esto es $\tilde{A}$ mapea $A^p(E)$ sobre sí mismo. Recíprocamente, si (3.3) es válida, entonces, $p(A), q(A) \leq m$ (Prop. 3.1 y 3.2), y como $p(A) = q(A) \leq m$ por Prop.3.3. □

Proposición 3.5. **(a)** *Si $p(A) < \infty$, entonces $\alpha(A) \leq \beta(A)$*

(b) *Si $q(A) < \infty$, entonces $\beta(A) \leq \alpha(A)$*

Demostración. (a) Sea $p := p(A) < \infty$. Si $\beta(A) = \infty$, entonces no habría nada que probar, de esta forma asumamos que $\beta(A) < \infty$. Por la proposición 3.1 tenemos que

$N(A) \cap A^p(E) = \{0\}$; así junto con $\beta(A)$ también $\beta(A^p)$ es finita; se sigue que $\alpha(A) < \infty$. Así A es un endomorfismo con deficiencia finita; de acuerdo al teorema del índice obtenemos para todo $n \geq p$ la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} n \cdot ind(A) &= ind(A^n) \\ &= \alpha(A^n) - \beta(A^n) \\ &= \alpha(A^p) - \beta(A^n) \end{aligned}$$

Si también $q := q(A) < \infty$, entonces, obtenemos de aquí que para todo $n \geq max(p,q)$ la relación $n \cdot ind(A) = \alpha(A^p) - \beta(A^q) = ctte$, tal que $ind(A) = 0$ esto es $\alpha(A) = \beta(A)$.

Si, además, $q = \infty$, esto es, si $\beta(A^n) \to \infty$ entonces $n \cdot ind(A)$ se hace eventualmente negativo, de aquí, $ind(A) < 0$ y también $\alpha(A) < \beta(A)$.

(b) Ahora, sea $q := q(A) < \infty$. Si $\alpha(A) = \infty$ entonces no hay nada que probar. De esta manera, asumamos que $\alpha(A) < \infty$. Entonces, también $\alpha(A^q)$ es finito y tenemos que $E = C \oplus A(E)$ con $C \subset N(A^q)$ de aquí, se sigue que $\beta(A) = dimC \leq \alpha(A^q) < \infty$. Así, A en este caso es un endomorfismo con deficiencia finita. Si aplicamos cambios apropiados en el índice con el mismo argumento usado en (a), entonces obtenemos $\beta(A) = \alpha(A)$ si $p(A) < \infty$ y $\beta(A) < \alpha(A)$ si $p(A) = \infty$. □

Proposición 3.6. **(a)** *Si ambas longitudes son finitas, entonces* $\alpha(A) = \beta(A)$

(b) *Si* $\alpha(A) = \beta(A) < \infty$*, y si una longitud de cadena es finita, entonces* $p(A) = q(A)$

Demostración. (a) Se sigue de forma inmediata por la proposición anterior

(b)Es fácil consecuencia de la igualdad $\alpha(A^n) - \beta(A^n) = ind(A^n) = n \cdot ind(A) = 0$, válido para $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

En el caso $\alpha(A) < \infty$ deducimos un criterio útil para la finitud de la nulicadena, para ello necesitamos lo siguiente:

Lema 3.1. *El endomorfismo A de E mapea el espacio lineal* $\cap_{n=1}^{\infty} A^n(E)$ *en sí mismo, y en el caso de* $\alpha(A) < \infty$ *también es aplicado sobre sí mismo.*

Demostración. Es trivial que $U = \cap_{n=1}^{\infty} A^n(E)$ es mapeado en sí mismo por A. Ahora asumamos que $\alpha(A) < \infty$ y mostremos que todo elemento de U es la imagen de un elemento de U a traves de A. De $N(A)\cap A^n(E) \supset N(A)\cap A^{n+1}(E)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple, ya que $\alpha(A) < \infty$, existe un número natural m con

$$D := N(A) \cap A^m(E) = N(A) \cap A^{m+k}(E) \tag{3.4}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Obviamente también $D = N(A) \cap U$. Sea ahora, y un elemento arbitrario de U. Entonces, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, existe un $x_k \in E$ tal que $y = A^{m+k}x_k$. Si definimos

$$z_k := A^m x_1 - A^{m+k-1}x_k \tag{3.5}$$

para $k = 1, 2, \ldots$, entonces z_k pertenece a $A^m(E)$ y, debido a que

$$Az_k = A^{m+1}x_1 - A^{m+k}x_k = y - y = 0$$

z_k también está contenido en $N(A)$, de aquí $z_k \in N(A)\cap A^m(E) = D$. De (3.4) se sigue que z_k también pertenece a $A^{m+k-1}(E)$ y con ayuda de (3.5) esto implica

$$A^m x_1 = z_k + A^{m+k-1}x_k \in A^{m+k-1}(E) \tag{3.6}$$

para $k = 1, 2, \ldots$, de aquí $A^m x_1 \in U$. Por causa de $A(A^m x_1) = A^{m+1}x_1 = y$, y vemos que y es en efecto la imagen de un elemento de U a través de A. $\square$

Proposición 3.7. *Para un endomorfismo A sobre E con $\alpha(A) < \infty$ las siguientes proposiciones son equivalentes*

(a) *La longitud de la nulicadena es finita*

(b) *Sobre todo subespacio F de E, el cual es mapeado por A sobre sí mismo; A es inyectiva*

(c) *A es inyectiva sobre el subespacio $U := \bigcap_{n=1}^{\infty} A^n(E)$.*

Demostración. (a)⇒(b) Si $A(F) = F$ y $\tilde{A}$ es la restricción de A en F, entonces $q(\tilde{A}) = 0$. De $N(\tilde{A}^n) = N(A^n) \cap F$ se sigue por (a) que $p(\tilde{A}) < \infty$ con ayuda de la proposición 3.3, tenemos así que $p(\tilde{A}) = q(\tilde{A}) = 0$ y además $\tilde{A}$ es inyectiva.

(b)⇒(c) Esta implicación es sencilla usando el lema 3.1

(c)⇒(a) De (c) se sigue en primer lugar que

$$D = N(A) \cap U = \{0\}$$

Por (3.4) se tiene también que $N(A) \cap A^m(E) = \{0\}$ para algún número natural m. Luego (a) es ahora una consecuencia de la Proposición 3.1. □

3.2. Operadores de Fredholm con Cadena Finita

Proposición 3.8. *Si (E, E') es un sistema dual y $\mathcal{A}(E)$ sobre el espacio dual E', entonces para todo Operador de Fredholm A en $\mathcal{A}(E)$ se tiene*

$$p(A) = q(A') \text{ y } q(A) = p(A') \tag{3.7}$$

Si además A es de cadena finita, entonces también A' es una cadena finita y se siguen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha(A) = \beta(A) = \alpha(A') = \beta(A') \text{ y } p(A) = q(A) = p(A') = q(A') \tag{3.8}$$

Capítulo 4

La Propiedad de Extensión Univaluada

4.1. Definición de La Propiedad de Extensión Univaluada

Definición 4.1. Sea X un espacio de Banach Complejo y $T \in L(X)$. El operador T se dice que tiene la Propiedad de Extensión Univaluada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abreviado SVEP en λ_0), si para todo disco abierto $\mathbb{D}_{\lambda_0}$ centrado en λ_0, la única función analítica

$$f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$$

que satisface la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \tag{4.1}$$

es la función $f \equiv 0$

También podemos considerar lo siguiente:

Un operador $T \in L(X)$ se dice que posee la SVEP si T posee la SVEP en cada punto $\lambda \in \mathbb{C}$.

4.2. Un poco de Teoría Local Espectral

La SVEP es caracterizada por medio de algunas herramientas típicas originadas por la Teoría Local Espectral.

Definición 4.2 (Resolvente Local). Sea $T \in L(X)$ un operador acotado, el Resolvente Local de T en el punto $x \in X$, es definido como la unión de todos los subconjuntos abiertos U de $\mathbb{C}$ tales que exista una función analítica $f : U \to X$ que satisface

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \forall \lambda \in U. \tag{4.2}$$

Definición 4.3 (**Espectro Local**). Sea $T \in L(X)$ un operador acotado, el Espectro Local $\sigma_T(x)$ de T en X es el definido por $\sigma_T(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$.

De manera sencilla, y sabiendo la definición anterior, podemos afirmar que $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$, donde $\sigma(T)$ denota el espectro de T. Claramente, toda función analítica que verifique (4.2) sobre esta unión es una extensión local de la función analítica $R(\lambda, T)x := (\lambda I - T)^{-1}x$ definida sobre el conjunto resolvente $\rho(T)$ de T. Generalmente, las soluciones analíticas de (4.2) no son únicas. De la definición 4.1 se sigue que si T posee la SVEP en λ_0 entonces la solución analítica de (4.2) es determinado de forma única en un disco abierto centrado en λ_0.

Definición 4.4 (**Subespacio Espectral Analítico**). Para todo subconjunto F de $\mathbb{C}$, denotaremos por $X_T(F)$ al Subespacio Espectral Analítico de T asociado con Ω:

$$X_T(F) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}.$$

Definición 4.5 (**Subespacio Glocal**). Para un operador arbitrario $T \in L(X)$ y un subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$, el Subespacio Glocal denotado por $\chi_T(F)$ es definido como el conjunto de todas las $x \in X$ para la cual existe una función analítica $f : \mathbb{C} \setminus F \to X$ que satisface la identidad

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C} \setminus F.$$

Una de las afirmaciones importantes que involucran a estos dos subespacios es la siguiente:

Observación 4.1. T posee SVEP si, y sólo si $X_T(F) = \chi_T(F)$ para todo conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{C}$.

Una demostración de la observación anterior se puede encontrar en [10] (Proposición 3.3.2).

4.3. Teoría Local Espectral y La Teoría de Fredholm

En la Teoría Local Espectral se encuentran dos subespacios que son muy importantes en la Teoría de Fredholm y que se definen a continuación:

Definición 4.6 (**Core Analítico**). Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. El Core Analítico de T es el conjunto $K(T)$ de todos los $x \in X$ para los cuáles existe una sucesión $(u_n) \subset X$ y $\delta > 0$ que satisfacen

(a) $x = u_0$, y $Tu_{n+1} = u_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$

(b) $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Definición 4.7 (**Parte Quasi-Nilpotente**). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. La Parte Quasi-Nilpotente de T es el conjunto

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}\} = 0$$

Observación 4.2. Se sigue de la definición, que $K(T)$ es un subespacio lineal de X y que $T(K(T)) = K(T)$. En general, $K(T)$ no es cerrado.

Definición 4.8 (**Hiperrango**). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. El hiperrango de T está dado como sigue

$$T^{\infty}(X) := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X)$$

Observación 4.3. $K(T) \subseteq T^{\infty}(X)$. Si T es quasi-nilpotente, entonces $K(T) = \{0\}$.

Observación 4.4. $H_0(T)$ es un subespacio lineal de X, generalmente no es cerrado.

Definición 4.9 (**Hipernúcleo**). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. El Hipernúcleo de T está dado como sigue

$$\mathcal{N}^{\infty}(T) := \bigcap_{n=1}^{\infty} N(T^n)$$

Observación 4.5. $\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq H_0(T)$, y T es quasi-nilpotente si, y sólo si $H_0(T) = X$

Teorema 4.1. *Supongamos que $T \in L(X)$, X un Espacio de Banach. Entonces T no posee SVEP en 0 si, y sólo si existe $0 \neq x \in N(T)$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que existe un elemento $0 \neq x \in N(T)$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$. Entonces por teorema tenemos que $x_0 \in K(T)$.Asumamos que $\|x_0\| = 1$. Por la definición de $K(T)$, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$u_0 = x_0,\ Tu_n = u_{n-1} \text{ y } \|u_n\| \leq \delta^n$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$. Claramente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ converge para $\|\lambda\| < \frac{1}{\delta}$, como la función $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ es analítica sobre el disco abierto $\mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta})$. Tenemos

$$(\lambda I - T) \sum_{n=0}^{k} \lambda^n u_n = \lambda^{k+1} u_k$$

y $\|\lambda^{k+1} u_k\| \leq \delta^k \mid \lambda \mid^{k+1}$. Además, para todo $\|\lambda\| < \frac{1}{\delta}$ tenemos

$$\lim_{k \to +\infty} \delta^k \mid \lambda \mid^{k+1} = 0$$

así

$$(\lambda I - T) f(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} (\lambda I - T)(\sum_{n=0}^{k} \lambda^n u_n) = 0$$

Como $f(0) = x_0 \neq 0$, se sigue que T no posee SVEP en 0.

($\Rightarrow$) Supongamos que para todo $0 \neq x \in N(T)$ tenemos que $\sigma_T(x) \neq \emptyset$

Consideremos el disco abierto $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ y sea $f : \mathbb{D}(0, \epsilon) \to X$ una función analítica tal que $(\lambda I - T) f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$. Entonces $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$, para una sucesión conveniente $(u_n) \subset X$. Claramente, $T u_0 = T(f(0)) = 0$, así, $u_0 \in N(T)$. Además, de las igualdades

$$\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset$$

, para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$ obtenemos que $\sigma_T(f(0)) = \sigma_T(u_0) = \emptyset$, así, por lo supuesto, concluimos que $u_0 = 0$. Para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T) f(\lambda) \\ &= (\lambda I - T)(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n) \\ &= \lambda(\lambda I - T)(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_{n+1}), \end{aligned}$$

y por tanto

$$0 = (\lambda I - T)(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1})$$

para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$.

Por la continuidad, esto es verdadero para cada $\lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$. En este punto, usando el mismo argumento que al inicio de la prueba es posible demostrar que $u_1 = 0$, e iterando este procedimiento, concluimos que $u_2 = u_3 = \ldots = 0$. Esto prueba que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ y por tanto T posee la SVEP en 0. $\square$

Ahora veamos lo siguiente, la SVEP, así como la SVEP en un punto $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, es caracterizada de forma sencilla en el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sea $T \in L(X)$, X un Espacio de Banach. Entonces*

(i) *T posee el SVEP en λ_0 si, y sólo si $N(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$.*

(ii) *T posee la SVEP si, y sólo si $X_T(\emptyset) = \{0\}$, y este es el caso si, y sólo si $X_T(\emptyset)$ es cerrado.*

Demostración. (i) Es consecuencia directa del teorema 4.1.

(ii)Ver [10] *(Proposición 1.2.16)* □

La investigación sistemática de los espacios $K(T)$ y $H_0(T)$ fue iniciada por Mbekhta [11], posterior a un trabajo de Vrbová [13]. En particular estos autores establecieron la siguiente caracterización local espectral de $K(T)$ y $H_0(T)$

Teorema 4.3. *Para un operador acotado $T \in L(X)$, X es un espacio de Banach se tiene.*

(i) $K(\lambda_0 I - T) = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\})$

(ii) *$H_0(\lambda_0 I - T) = \chi_T(\{\lambda_0\})$, también, Si T posee SVEP, $H_0(\lambda_0 I - T) = X_T(\{\lambda_0\})$.*

Nótese que, para todo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes inclusiones

$$X_T(\emptyset) \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}) = K(\lambda_0 I - T) \subseteq (\lambda_0 I - T)^\infty(X) \tag{4.3}$$

y

$$N(\lambda_0 I - T) \subseteq \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T) \subseteq X_T(\{\lambda_0\}) \tag{4.4}$$

Teorema 4.4. *Para un operador $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach, las siguientes implicaciones son válidas*

(i) *$H_0(\lambda_0 I - T)$ cerrado $\Rightarrow H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T)$ cerrado $\Rightarrow H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\} \Rightarrow T$ posee SVEP en λ_0.*

(ii) *$X = H(\lambda_0 I - T) + K(\lambda_0 I - T) = \{0\} \Rightarrow T'$ posee SVEP en λ_0.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad consideremos $\lambda_0 = 0$.
(i) Asumamos que $H_0(T)$ es cerrado y denotemos por $\tilde{T}$ la restricción de T con el espacio de Banach $H_0(T)$. Obviamente, $H_0(T) = H_0(\tilde{T})$, tal que $\tilde{T}$ es quasi-nilpotente y de aquí $K(\tilde{T}) = \{0\}$. Es fácil ver que $H_0(T) \cap K(T) = K(\tilde{T})$. Esto demuestra la primera inclusión, la segunda implicación de (i) es consecuencia inmediata del Teorema anterior. En efecto, tenemos

$$N(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\emptyset) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T)$$

así, si la intersección anterior es $\{0\}$, entonces T posee el SVEP en λ_0 por Teorema 4.2. □

Ahora vamos a demostrar el resultado principal de este trabajo

Proposición 4.1. *Para un operador acotado T sobre un espacio de Banach X las siguientes implicaciones se cumplen:*

1. $p(\lambda_0 I - T) < \infty \Rightarrow \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = \{0\} \Rightarrow T$ *posee SVEP en* λ_0.

2. $q(\lambda_0 I - T) < \infty \Rightarrow X = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) + (\lambda_0 I - T)^\infty(X) \Rightarrow T'$ *posee la SVEP en* λ_0.

Demostración. (i) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_0 = 0$.

Sea $p := p(T) < \infty$. Entonces $\mathcal{N}^\infty(T) = N(T^p)$ y de aquí, por la proposición 3.1, $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^p(X) = \{0\}$. Como $T^\infty(X) \subseteq T^p(X)$, obtenemos que $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$. Así, tenemos la primera implicación. Ahora mostremos la segunda, continuemos suponiendo que $\lambda_0 = 0$.

Por el teorema 4.2 tenemos que $N(T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$ implica que T posee el SVEP pero haciendo uso de (4.3) y (4.4) tenemos que $N(T) \subseteq \mathcal{N}^\infty$ y $X_T \subseteq T^\infty(X)$. Luego, $N(T) \cap X_T(\emptyset) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$.

Así, $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\} \Rightarrow T$ posee el SVEP en 0, esto por el teorema 4.2.

De esta manera queda mostrado (i).

(ii) Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_0 = 0$.

Sea $q := q(T) < \infty$, entonces $T^\infty(X) = T^q(X)$ y $X = T^n(X) + N(T^q)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la proposición 3.2 y como $N(T^q) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T)$ tenemos

$$\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X) = \mathcal{N}^\infty(T) + T^q(X) \supseteq N(T^q) + T^q(X) = X$$

De está forma queda mostrada la primera implicación. Completemos la demostración, notemos que, si $X = \mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X)$, entonces, $\mathcal{N}^\infty(T)^\perp \cap T^\infty(X)^\perp = \{0\}$.

Ahora, consideremos un elemento $x' \in N(T') \cap X_{T'}(\emptyset)$. De forma clara tenemos

$$x' \in N(T') \subseteq N(T')^n = N(T^n)' = \overline{T^n(X)}^\perp \subseteq T^n(X)^\perp,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de esta forma, $x' \in T^\infty(X)^\perp$. Por otro lado, del hecho que, $\sigma_{T'}(x') = \emptyset$, obtenemos por el teorema 4.3, que

$$x' \in K(T') \subseteq (T')^n(X') = (T^n)'(X') \subseteq (N(T^n))^\perp$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $x' \in \mathcal{N}^\infty(T)^\perp$ y de esta forma $x' \in \mathcal{N}^\infty(T)^\perp \cap T^\infty(X)^\perp$, lo cual implica que $x' = 0$. Nuevamente, por el teorema 4.2 concluimos que T' posee el SVEP en 0.

$\square$

Referencias Bibliográficas

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers.* Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] P. Aiena, *Semi-Fredholm operators perturbation theory and localized SVEP*. Ediciones IVIC (2007)

[3] P. Aiena, M.T. Biondi *Ascent, Descent, Quasi-Nilpotent part and Analytic Core of Operators* (2002) **57-70**.

[4] P. Aiena, O. Monsalve *Operators which do not have the single valued extension property*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000) **435-448**.

[5] Bachman G., Narici L. *Functional Analysis*. Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[6] N. Dunford *Spectral Operators*. Pacific J. Math. 4, (1954), **321–354**.

[7] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators*. Part I (1967), Part II (1967), Part III, Wiley, New York (1971).

[8] H. Heuser. *Functional Analysis*. Marcel Dekker, New York (1982).

[9] Hungerford. *Algebra*. Springer Verlag, New York

[10] K.B Laursen, M.M Neumann, *An Introduction to Local Spectral Theory*, Clarendon Press, Oxford, (2000).

[11] M. Mbekhta, *Sur la théorie spectrale locale et limite des nilpotents*. Proc. Amer. Math. Soc. 110, (1990), **621–631**.

[12] Rudin W. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill, Inc. New York. 1991.

[13] P. Vrbová *On local spectral properties of operators in Banach spaces*. Czechoslovak Math. J. 23(98), (1973a), **483-492**.