UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"CODISTRIBUCIONES CON SINGULARIDADES"

Trabajo Especial de Grado presentado por

GILMER ANTONIO GONZÁLEZ BRICEÑO

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Geometría Diferencial.
Tutor: Dr. Ángel Mastromartino Pérez

Barquisimeto, Venezuela. Mayo de 2008

A Carmen y Guillermo mis queridos padres que me dieron la vida y siempre estuvieron alli presentes en las buenas y en las malas.

AGRADECIMIENTOS

- A mi Dios Jehová por ser la fuente absoluta del conocimiento y de la sabiduria y bendecirme con este gran logro.
- A Rosangela mi amada esposa la cual me acompañó incondicionalmente dandome su apoyo en cada momento a lo largo de mi carrera.
- A mis hijos Gilmer De Jesús y Roberth Efraín quienes fueron razones sobrepujantes para alcazar mi meta.
- A mi tutor el Dr. Angel Mastromartino Pérez, por su constante guia, dedicación y paciencia en el desarrollo de este trabajo.
- A mi alma mater UCLA por su alojamiento como una madre para mi.
- A mis compañeros de estudio Teodoro Cordero y Ramón Padilla quienes me prestaron su ayuda siempre que la necesité.

"CODISTRIBUCIONES CON SINGULARIDADES"

RESUMEN

En éste trabajo estudiaremos algunos resultados de la teoría de codistribuciones con singularidades la cual es dual a la teoría de distribuciones con singularidades. Se presentan la nociones de codistibución puntual y local e integrabilidad, según Cartan y Pfaff. Se estudian algunos ejemplos ilustrativos y resultados puntuales que relacionan codistribuciones localmente integrables, en ambos sentidos.

Índice

Introducción

Alrededor del 1900, el matemático Élie Joseph Cartan,quien trabajó esencialmente en la teoría de grupo de Lie, establece el concepto de forma diferencial y el de sistema involutivo (completamente integrable) o codistribución, que está relacionado con un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por 1-formas, conocido como un sistema de Pfaff.

En este trabajo se estudian las nociones de codistribución puntual y local, y la noción de integrabilidad según Cartan, y Pfaff. Veremos ejemplos que ilustran la independencia entre ambos tipos de integrabilidad, y veremos que el caso de una codistribución localmente integrable, según Cartan, es equivalente a integrabilidad según Pfaff.

Este trabajo está constituido por 3 capítulos. En los capítulo 1 y 2 se estudian las nociones básicas sobre una variedade diferenciable, el fibrado tangente y cotangente y la noción de k-forma difencial. En el capítulo 3 se estudian las nociones de codistribución puntual y local e integrabilidad según Cartan y Pfaff. A continuación describiremos algunos conceptos desarrollados en este trabajo.

Se consideran M una variedad compacta y conexa de dimensión finita de clase $\mathcal{C}^r$, $\mathcal{F}(M)$ el anillo de las funciones de valor real de clase $\mathcal{C}^r$ definidas sobre M, y $V^r(M)$ el campo de vectores de módulo $\mathcal{F}(M)$ de clase $\mathcal{C}^r$ y $\Lambda^k(M)$ el módulo $\mathcal{F}(M)$ de las k-formas de clase $\mathcal{C}^r$ sobre M.

Por una *forma Pfaffian* entenderemos una 1-forma de clase $\mathcal{C}^r$. Llamaremos *sistema diferencial* de clase $\mathcal{C}^r$-(*Pfaffian*) sobre M a un módulo $\mathcal{F}(M)$ de una 1-forma de clase $\mathcal{C}^r$. Denotado por $\mathcal{P}$. Llamaremos codistribución sobre M, a la aplicación $P : x \in M \to P(x) \subset T_x^*M$ donde $P(x)$ es un subespacio vectorial del subespacio cotangente a M en x. La dimensión (o rango) de la codistribución es $dimP(x)$ (puntualmente definida).

Sea S el conjunto de las 1-formas de clase $\mathcal{C}^r$ definida en todas partes. La codistribución generada por el conjunto S es:

$$P(x) = span_{\mathbf{R}}\{\omega|_x, \omega \in S\}\, \forall x \in M.$$

Llamaremos codistribución de clase $\mathcal{C}^r$ sobre M, a una codistribucion P generada por el conjunto S de las 1-formas de clase $\mathcal{C}^r$. La codistribución P se dice que es *integrable en el sentido de Cartan en* $x_0 \in M$ si existe una subvariedad $\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0} \overset{i}{\hookrightarrow} M$ (siendo i la inclusión canónica) que pasa a traves de x_0, tal que

$$T_x\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0} = (P(x))^{\perp}, \forall x \in \mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$$

(Mas aún, tenemos que: $i^*_{,x}(P(x)) = 0$ y $dimP(x)+dim\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0} = dimM \, \forall x \in \mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$, donde $i^*_{,x}$ es el pull-back estandar de i en x). Diremos que $\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$ es una *variedad integral* de la codistribución y tambien que P es puntualmente integrable en x_0. De la definición se tiene directamente que P es también puntualmente integrable en todo punto $q \in \mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$.

La codistribución es llamada *localmente integrable* si para cada punto en M existe una variedad integrable de la codistribución (a saber si esta es puntualmente integrable en cada punto de M).

El sistema diferencial $\mathcal{P}$ se dice que es integrable en el sentido *Pfaff* si existe un conjunto finito de generadores de formas exactas (es decir, si $\exists f_i : M \to \mathbf{R}, 1 \leq i \leq p$, tal que: $\mathcal{P} = span_{\mathcal{F}(M)}\{df_1, \ldots, df_p\}$).

Consideremos la codistribución P y un punto $x_0 \in M$. Si existe una vecindad de x_0 donde la codistribución tiene dimensión constante, entonces el punto x_0 se llama *punto ordinario* (o *punto regular*) , de lo contrario este es llamado punto singular. Si la codistribucion tiene puntos singulares entonces decimos que esta es una codistribución con singularidades.

Capítulo 1
Variedades Diferenciables

En este capítulo, introducimos la noción de variedad diferenciable y función diferenciable, además, estudiamos las propiedades básicas de las estructuras diferenciables, topología de una variedad como también estudiaremos el concepto de función diferenciable, espacio tangente a una variedad y el fibrado tangente a una variedad, conceptos que serán necesarios posteriormente para desarrollar nuestro trabajo sobre las codistribuciones.

§1.1. La Noción de Variedad Diferenciable

Definición 1.1. Un espacio topológico M no vacío es un espacio localmente euclidiano si para cada punto $p \in M$ existe una vecindad abierta U de p, un entero $n \geq 0$ y un homeomorfismo $x : U \longrightarrow x(U)$ de U sobre un subconjunto abierto $x(U)$ de $\mathbb{R}$. El entero $n \geq 0$ es la dimensión del espacio M en el punto p.

Si $x : U \longrightarrow x(U) \subset \mathbb{R}$ es uno de los homeomorfismos que aparecen en la definición anterior y $\Pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ son las proyecciones, consideramos las funciones continuas $x^i = \Pi_i \circ x : u \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, y, tenemos que

$$x = (x^1, \ldots, x^n).$$

En consecuencia, para cada punto $q \in U$ el punto $x(q) \in \mathbb{R}^n$ queda expresado del modo siguiente:

$$x(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q)).$$

Por este motivo, al par (U, x) se le llama **sistema de coordenada local** o **carta local**. Usamos la palabra local para indicar que, en general, U es un subconjunto propio de M.

Definición 1.2. Una variedad topológica M de dimensión n es un espacio topológico no vacío (no necesariamente conexo) que cumple:

a. M es localmente euclidiano de dimensión n en todos sus puntos.

b. M es 2° enumerable, es decir, la topología de M tiene una base enumerable.

c. M es de Hausdorff, esto es, dados $p, q \in M$, existen subconjuntos abiertos disjuntos de M digamos V, W tal que $p \in V$ y $q \in W$.

Definición 1.3. Un **atlas** para un espacio topológico M es una colección de cartas locales $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ de M tales que los dominios U_α de estas cartas forman un cubrimiento abierto de M, esto es:

$$M = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{A}} U_\alpha.$$

Un atlas es finito, enumerable, o no enumerable según si el conjunto de indices A es finito, enumerable, o no enumerable respectivamente.

Nota 1.1. Notar que la primera condición de la definición de variedad topológica es equivalente a decir que M tiene un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ tal que el rango $x(U_\alpha)$ de todas las cartas $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow x_\alpha(U_\alpha)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Para indicar que una variedad topológica tiene dimensión n escribimos M^n.

Ejemplo 1.1. Un subconjunto abierto N no vacío de una variedad topológica M^n de dimensión n, con la topología de subespacio, es una variedad topológica de dimensión n (la misma dimensión de M). En efecto, N es de Hausdorff y 2° enumerable. Además, si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ es un atlas para M^n entoces $\{(U_\alpha \bigcap N, x_\alpha/U_\alpha \bigcap N)\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ es un altas para N.

Nuestra intención ahora es enriquecer la idea de variedad topológica en forma tal que nos permita hablar también de diferenciabilidad.

Definición 1.4. Dos cartas (U, x) y (V, y) de una variedad topológica M^m diremos que son C^k-**relacionadas** si $U \bigcap V = \emptyset$ ó si $U \bigcap V \neq \emptyset$, entonces las siguientes funciones deben ser de clase C^k:

1. $y \circ x^{-1} : x(U \bigcap V) \longrightarrow y(U \bigcap V)$.

2. $x \circ y^{-1} : y(U \bigcap V) \longrightarrow x(U \bigcap V)$.

Observar que $x(U \bigcap V)$ y $y(U \bigcap V)$ son dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto pedir que $y \circ x^{-1}$ y $x \circ y^{-1}$ sean C^k tiene sentido.

Definición 1.5. Un atlas $\mathcal{A}$ de una variedad topológica se dice que es C^k si cualquier par de cartas de $\mathcal{A}$ son C^k-relacionadas.

Definición 1.6. Un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^k de una variedad topológica Mse dice que es maximal si este no esta propiamente contenido en otro atlas de clase C^k de M. Esto es si Θ es otro atlas de clase C^k de M tal que $\mathcal{A} \subset \Theta$, entonces $\mathcal{A} = \Theta$.

Una **estructura diferenciable** de clase C^k sobre una variedad topológica M^m es un atlas maximal.

Definición 1.7. Una variedad diferenciable de clase C^ky dimensión n es un par $(M, \mathcal{A})$ donde M es una variedad topológica de dimnsión n y $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable (atlas maximal) de clase C^k sobre M

Ejemplo 1.2. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es el atlas maximal que contiene al atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, I)\}$ es una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión n. $\mathcal{U}$ es la estructura usual de $\mathbb{R}$.

Como todo atlas de clase C^k está contenido en un único atlas maximal, para determinar la estructura diferenciable de una variedad basta presentar un atlas, no necesariamente el maximal, que este contenido en la estructura. Esto es lo que haremos de aqui en adelante.

Ejemplo 1.3. Un subconjunto abierto $N \neq \emptyset$ de una variedad diferenciable M de dimensión n y de clase C^k es tambien una variedad diferenciable de la misma clase y dimensión que M.

En efecto, si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ es un atlas de clase C^k para M entoces $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha \bigcap N, x_\alpha / U_\alpha \bigcap N)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ es un altas de clase C^k para N. A N le llamaremos **subvariedad abierta** de M.

§1.2. Funciones Difernciables

En esta sección introducimos el concepto de diferenciabilidad para funciones definidas en variedades. Sean M^m y N^n dos variedades y $f : M \longrightarrow N$ una función. Supongamos que tengamos (U, x) y (V, y) cartas para M y N respectivamente, para las cuales se cumple que $f(U) \subset V$.

En este caso, en el conjunto abierto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ podemos definir la siguiente función:

$$f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$$

a la cual llamaremos **función representativa** de f en las cartas (U, x) y (V, y).

Definición 1.8. Sean M^m y N^n dos variedades de clase C^k y $r \leq k$. Diremos que la función $f : M^m \longrightarrow N^n$ es diferenciable de clase C^r en un punto $p \in M$, si existe una carta (U, x) de M alrededor de p y (V, y) carta de N alrededor de $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la función representativa

$$f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V)$$

es diferenciable en el punto $x(p) \in x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Observación 1.1. En esta definición es fundamental el hecho de que esta es independiente de la representación de f . En efecto, si $f_{x'y'} = y' \circ f \circ x'^{-1}$ es otra representación total de f según las cartas (U', x') y (V', y'), con $p \in U'$, entonces la siguiente igualdad muestra que $f_{x'y'}$ es de clase C^r en $x(p)$ si y solo si f_{xy} lo es en el punto $x(p)$:

$$\begin{aligned} f_{x'y'} &= y' \circ f \circ x'^{-1} = y' \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ (x^{-1} \circ x) \circ x'^{-1} \\ &= (y' \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ x'^{-1}). \end{aligned}$$

La función $f : M \longrightarrow N$ es de clase C^r si f es de clase C^k en todo punto de M.

Definición 1.9. Sean M y N dos variedades de clase C^k y $0 \leq r \leq k$. Una función $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo local de clase C^r si para todo punto $p \in M$ existe vecindades abiertas U y V de de p y $f(p)$ respectivamente, tales que $f|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo de clase C^r.

Definición 1.10. Sean M y N dos variedades de clase C^k y $0 \leq r \leq k$. La función $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo de clase C^r, si $f$es biyectiva y si f y f^{-1} son de clase C^r. En este caso M y N son difeomorfas.

Observación 1.2. Todo difeomorfismo es un difeomorfismo local. El recíproco no se cumple. Sin embargo $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo si y solo si f es un difeomorfismo local biyectivo.

§1.3. Espacio Tangente y la Derivada

§1.3.1. Espacio Tangente

Definición 1.11. Sea M^m una variedad diferenciable y p un punto fijo de M. Sea $C^\infty(p)$ el conjunto formado por todas las funciones reales, diferenciables cuyos dominios son vecindades abiertas del punto p.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(p)$, con dominios V y W respectivamente, definimos $f + g$, fg y αf:

$$f + g = V \bigcap W \longrightarrow \mathbb{R}, (f + g)(q) = f(q) + g(p). \tag{1.1}$$
$$fg = V \bigcap W \longrightarrow \mathbb{R}, (fg)(q) = f(q)g(q). \tag{1.2}$$
$$\alpha f = V \bigcap W \longrightarrow \mathbb{R}, (\alpha f)(q) = \alpha f(q). \tag{1.3}$$

Definición 1.12. Un vector tangente a una variedad diferenciable M en el punto p es una función

$$v : C^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

1. v es lineal, es decir,
$$v(\alpha f + \beta g) = v(\alpha f) + v(\beta g).$$

2. v es una derivación, es decir,
$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

Esta definición está inspirada en las propiedades de nuestras conocidas derivadas direccionales en $\mathbb{R}^m$. Es de esperarse, por tanto, que los vectores tangentes satisfagan propiedades similares a las derivadas direccionales. Así, por ejemplo $v(f)$ debe depender únicamente del "comportamiento local de f "y en particular, si f es constante en una vecindad de p, se debe cumplir que $v(f) = 0$.

Observación 1.3. En general, el conjunto $C^\infty(p)$ no es un espacio vectorial. En efecto, tomemos dos elementos cualesquiera $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de $C^\infty(p)$ tales que $V \neq W$. Tenemos que $f - f = 0|_V$ y $g - g = 0|_W$. Si $C^\infty(p)$ fuera un espacio vectorial deberiamos tener que $0|_V = 0|_W$. Pero esta igualdad no tiene sentido a menos que $V = W$. Por eso en lugar de $C^\infty(p)$ consideremos el conjunto cociente $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$, donde $\sim$ es la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists U, \text{vecindad de } p \text{ tal que } f|_V = g|_W.$$

La adición, multiplicación por escalares y la multiplicación ya definidas en $C^\infty(p)$ inducen en $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$ sus correspondientes operaciones, las cuales si hacen de $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$ un algebra sobre $\mathbb{R}$, llamada el algebra de germenes de funciones (diferenciables) en el punto p. Un germen en el punto p es una clase de equivalencia, es decir, un elemento de $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$. Entonces, un vector tangente de M en el punto p es una fucnción lineal

$$v : \frac{C^\infty(p)}{\sim} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que además es una derivación. Esto es, v cumple las mismas condiciones exigidas en nuestra primera definición. De acuerdo a nuestros resultados anteriores, el valor solo depende del "comportamiento local" de f, en consecuencia, ambas definiciones, son en esencia, la misma.

Ahora definamos sobre el conjunto $T_pM = \{v/v \text{ es un vector tangente a } M \text{ en el punto } p\}$ operaciones de adición y multiplicación por escalares (reales):

1. Si $v, w \in T_pM$, entonces $v + w$ es el vector tangente definido por

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f), \forall f \in C^\infty(p).$$

2. Si $v \in T_pM$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αv es el vector definido por

$$(\alpha v)(f) = \alpha v(f), \forall f \in C^\infty(p).$$

T_pM bajo estas dos operaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, al cual le llamaremos **espacio tangente** de M en el punto p.

Nuestra siguiente inquietud es hallar bases para el espacio T_pM.

Sea m la dimensión (U, x) una carta de M^m alrededor del punto p. Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier elemento de $C^\infty(p)$, entonces $x(U \bigcap V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ que contiene al punto $x(p)$, y la función

$$f \circ x^{-1} : x(U \bigcap V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable. En consecuencia tenemos a nuestra disposición las derivadas parciales, $D_i(f \circ x^{-1})(x(p)), i = \ldots, m$; de esta función calculada en el punto $x(p) \in \mathbb{R}$. Esto se cumple para cualquier elemento de $C^\infty(p)$, lo que nos permite definir las siguientes m funciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)).$$

A $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f)$ también lo denotaremos con $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)).$$

Por la forma que hemos definido a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$$

es de esperar que estos sean buenos candidatos para ser vectores tangentes.

Proposición 1.1. *Las funciones*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$$

son vectores tangentes de M en p.

Demostración.

Linealidad:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(\alpha f+\beta g) &= D_i((\alpha f+\beta g)\circ x^{-1})(x(p))\\
&= D_i(\alpha(f\circ x^{-1})+\beta(g\circ x^{-1}))(x(p))\\
&= \alpha D_i(f\circ x^{-1})(x(p))+\beta D_i(g\circ x^{-1})(x(p))\\
&= \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)+\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(g).
\end{aligned}$$

Derivación:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(fg) &= D_i((fg)\circ x^{-1})(x(p))\\
&= D_i((f\circ x^{-1})(g\circ x^{-1}))(x(p))\\
&= D_i(f\circ x^{-1})(x(p))g(p)+f(p)D_i(g\circ x^{-1})(x(p))\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)g(p)+f(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(g).\blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.1. *Si (U,x) es una carta de M^m alrededor del punto p y $v\in T_pM$, entonces*

$$v=\sum_{i=1}^m v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Demostración.

Sea $x(p)=c\in\mathbb{R}^m$. Si $f\in C^\infty(p)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
v(f) &= v(f(p)+\sum_{i=1}^m(x^i-c^i)f_i)\\
&= v(f(p))+\sum_{i=1}^m v((x^i-c^i)f_i)\\
&= 0+\sum_{i=1}^m[v(x^i-c^i)f_i(p)+(x^i(p)-c^i)v(f_i)]\\
&= \sum_{i=1}^m v(x^i-c^i)f_i(p)+0\\
&= \sum_{i=1}^m v(x^i)f_i(p).
\end{aligned}$$

En particular, si tomamos a $v = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ y sabiendo que $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (x^i) = \delta^i_j$, tenemos $\left(\frac{\partial}{\partial xj}\right)_p (f) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (x^i) f_i(p) = f_j(p)$ y asi obtenemos

$$v(f) = \sum_{i=1}^m v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f).$$

De donde

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p . \blacksquare$$

Corolario 1.1. *Si (U, x) (V, y) son cartas de M^m tales que $p \in U \bigcap V$, entonces*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Teorema 1.2. *Las funciones*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$$

forman una base para T_pM

Demostración. Ver [2],teorema 2.8.

Definición 1.13. Sea M^m una variedad de clase C^k, $(k \geq 1)$, p un punto de M y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ una curva de clase C^k tal que $\alpha(0) = p$. Se llama vector tangente a la curva α en el punto p a la función $v : C^k(p) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $v(f) = (f \circ \alpha)'(0)$.

Definición 1.14. Sea M^m una variedad de clase C^k, $(k \geq 1)$, p un punto de M. Se llama espacio tangente al conjunto T_pM formado por los vectores que son tangentes a todas las curvas $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ de clase C^k tal que $\alpha(0) = p$.

§1.3.2. La Derivada

Sean M^m y N^n dos variedades diferenciables y

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

una función diferenciable.

Observar que si $p \in M$ y $f \in C^\infty(\varphi(p))$, entonces tenemos que $f \circ \varphi \in C^\infty(p)$.

Esta observación nos permite definir la siguiente función:

$$\varphi_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$$

$$v \longrightarrow \varphi_{*p}(v)$$

donde $\varphi_{*p}(v)$ es la función:

$$\varphi_{*p}(v) : C^{\infty}(\varphi(p)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi_{*p}(v))(f) = v(f \circ \varphi)$$

A la función $\varphi_{*p}(v) : C^{\infty}(\varphi(p)) \longrightarrow \mathbb{R}$ la llamaremos **la derivada de φ en el punto p**

Ejemplo 1.4. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ una curva diferenciable. Si $\alpha(0) = p$, tenemos la derivada:

$$\alpha_{*0} : T_0\mathbb{R} \longrightarrow T_pM.$$

Resulta que $\alpha_{*0}((\frac{\partial}{\partial t})_0) \in T_pM$ es el vector tangente a la curva α en el punto p. En efecto, si $f \in C^{\infty}(p)$ tenemos :

$$\begin{aligned} \alpha_{*0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 (f \circ \alpha) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))|_0 \\ &= (f \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

§1.4. El Fibrado Tangente

En esta sección presentamos el concepto de fibrado vectorial y luego nos abocamos a uno de los fibrados más importantes de la geometría: El Fibrado Tangente de una variedad.

§1.4.1. Fibrados Vectoriales

La noción de fibrado apareció alrededor de los años 30, motivados por el deseo de linealizar los problemas no lineales de la Geometría y la Topología. Desde entonces este concepto es de uso muy frecuente en muchas ramas de la matemática, sobre las que ha ejercido gran influencia.

Definición 1.15. Un **Fibrado Vectorial** diferenciable es un triple (E, M, π) donde E y M son variedades diferenciables y $\pi : E \longrightarrow M$ es una función diferenciable; y se cumple que:

1. $\forall p \in M, E_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial de dimensión n.

2. E es Localmente Trivial. Esto es, para todo punto $p \in M$ existe una vecindad abierta U y un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tal que:

a. $\pi = \pi_1 \circ \psi$ donde π_1 es la proyección $\pi_1 : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

b. $\psi : E_p \longrightarrow p \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Al conjunto E se le llama espacio total; a M espacio base; a π la proyección; a $E_p = \pi^{-1}(p)$, la fibra sobre p; a n la dimensión de las fibras.

Observación 1.4. Si M tiene dimensión m, entonces E tiene dimensión $m + n$.

Muchas veces cuando no hay confusión en lugar de decir el fibrado (E, M, π) diremos simplemente el fibrado E.

Definición 1.16. Una sección del fibrado (E, M, π) es una función $s : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = I_M$.

Observación 1.5. La condición $\pi \circ s = I_M$, implica que $s(p) \in E_p, \forall p \in M$.

Denotemos con $\Gamma(E)$ es conjunto formado por todas las secciones diferenciables del fibrado (E, M, π).

Nota 1.2. Si $C^\infty(M)$ es el conjunto formado por todas las funciones reales diferenciables definidas en M, entonces $C^\infty(M)$, con las operaciones de suma de funciones, multiplicación de un escalar (real) por una función y multiplicación de funciones, es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

A $\Gamma(E)$ le damos la estructura de módulo sobre $C^\infty(M)$, definiendo las siguientes opaciones:

1. $(s+t)(p) = s(p) + t(p), p \in M$ y $s, t \in \Gamma(E)$.

2. $(fs)(p) = f(p)s(p), p \in M, s \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M)$.

Ejemplo 1.5. Sea M una variedad, $E = M \times \mathbb{R}^n$ y $\pi : E \longrightarrow M$ la proyección natural. El fibrado $(M \times \mathbb{R}^n, M, \pi)$ es un fibrado vectorial, al cual se le llama **Fibrado Trivial**.

Si $s : M \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$, es una sección del fibrado, entonces s es de la forma $s(p) = (g(p), f(p))$,donde $g : M \longrightarrow M$ y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Pero $p = (\pi \circ s)(p) = g(p)$, luego g es la función identidad de M.

En consecuencia $s(p) = (p, f(p)), \forall p \in M$. Esto nos dice que toda sección del fibrado trivial $(M \times \mathbb{R}, M, \pi)$ puede identificarse con una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.6. Sea (E, M, π) un fibrado vectorial diferenciable. Si U es un subconjunto abierto de M, entonces $\pi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de E.

En consecuencia, U y $\pi^{-1}(U)$ son subvariedades de M y E respectivamente.

Notese que $(\pi^{-1}(U), U, \pi/U)$ es un fibrado vectorial de las mismas dimensiones que (E, M, π). A este fibrado le llamaremos **la restricción del fibrado** E a U.

Definición 1.17. Un sistema de referencias del fibrado vectorial (E, M, π) es un conjunto de secciones $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ de este fibrado tal que, para cualquier $p \in M$ se tiene que $s_1(p), s_2(p), \ldots, s_n(p)$ es una base para la fibra E_p.

Ejemplo 1.7. Sea M una variedad diferenciable. Consideremos el fibrado trivial dado por $(M \times \mathbb{R}^n, M, \pi)$. Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, definimos las n siguientes secciones diferenciables de este fibrado:

$$s_i : M \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, n$$

tal que

$$s_i(p) = (p, e_i)$$

Es obvio que para cualquier $p \in M$, $s_1(p), s_2(p), \ldots, s_n(p)$ es una base para la fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$. Luego $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ es un sistema de referencias diferenciable del fibrado $(M \times \mathbb{R}, M, \pi)$.

Observación 1.6. No todo fibrado tiene un sistema de referencias. Más adelante veremos que un fibrado E admite un sistema de referencias si y sólo si E es *isomorfo* a un fibrado trivial. Sin embargo todo fibrado admite sistemas de referencias locales; es decir , si (E, M, π) es un fibrado cualquiera, entonces para todo punto $p \in M$ existe una vecindad U tal que el fibrado restricción $(E/U, U, \pi)$ tiene un sistema de referencias diferenciable. En efecto, si tomamos U, la vecindad para la cual se cumple la propiedad de trivialidad local de E.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

tenemos las n secciones siguienetes:

$$\begin{aligned} s_i : U \longrightarrow \pi^{-1}(U) &= E/U \quad i = 1, \ldots, n \\ s_i(p) &= \psi^{-1}(p, e_i) \end{aligned}$$

que constituyen in sistema de referencias para E/U.

De acuerdo con lo anterior podemos cubrir a M con una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tales que el fibrado E/U tiene un sistema de referencias

$$S^\alpha = \{s_1^\alpha, s_2^\alpha, \ldots, s_n^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

Si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$, entonces sobre $U_\alpha \bigcap U_\beta$ tenemos dos sistemas de referencias diferenciables S^α y S^β. Luego si $p \in U_\alpha \bigcap U_\beta$, tenemos que:

$$s_j^\beta(p) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i(p) s_j^\alpha(p)$$

de este modo obtenemos las funciones

$$a_j^i : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}$$

que resultan ser diferenciables. Aún más, la matriz

$$g_{\alpha\beta}(p) = (a_j^i(p))$$

es invertible y la función $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tal que $p \longrightarrow g_{\alpha\beta}(p)$ es también diferenciable.

A estas funciones $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$, se les llama las funciones de transición del fibrado (E, M, π) respecto al cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Estas funciones cumplen las siguientes propiedades:

1. $g_{\alpha\beta} = g^{-1}_{\beta\alpha}$
2. $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$, en $U_\alpha \bigcap U_\beta$

Las funciones de transición caracterizan al fibrado en sentido de que mediante ellas se puede reconstruir al fibrado.

§1.4.2. Variedades definidas por una familia de inyecciones

Hacemos un parentesis en el estudio de fibrados para obtener algunos resultados que nos ayudaran a construir fibrados.

Anteriormente, para definir el concepto de variedad diferenciable comenzamos con un espacio topológico M de Hausdorff y 2° enumerable, al cual luego le proveímos de un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^k. Nuestra intención es ver que hemos podido comenzar solamente con el conjunto M, sin ninguna construcción topológica, y reconstruir la topología de M mediante el atlas $\mathcal{A}$.

Lema 1.1. *Sea M un conjunto no vacío (sin estructura topológica) y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una familia de pares (U_α, x_α) donde $U_\alpha \subset M$ y $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una inyección que cumple las siguientes condiciones:*

1. *$x_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n, \forall\alpha \in A$.*
2. *Los U_α cubren a M:*
$$M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$
3. *Si $(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta) \in \mathcal{A}$ y $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $x_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ y $x_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y la función: $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \longrightarrow x_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ y su inversa $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ son $\mathcal{C}^k$.*

Entonces existe una y sólo una topología de M para la cual $\mathcal{A}$ es un altlas de M de clase $\mathcal{C}^k$

Demostración. Ver [2], lema 4.1.

Lema 1.2. *La topología de M definida en el lema anterior es 2° enumerable si y solo si el cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, formado por los dominios de todas las cartas (U_α, x_α) del atlas $\mathcal{A}$ tiene un subcubrimiento enumerable.*

Demostración. Ver [2], lema 4.2.

Corolario 1.2. *Si M tiene un atlas enumerable, entonces la topología de M definida en el lema 1.1 es 2° enumerable.*

§1.4.3. El Fibrado Tangente

Sea M^m una variedad diferenciable y

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

Definimos la función

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

del modo siguiente:

Si $v \in TM$, entonces existe un único $p \in M$ tal que $v \in T_pM$. Hacemos $\pi(v) = p$, a la función π le llamaremos proyección.

Lema 1.3. *TM es una variedad diferenciable de dimensión $2m$.*

Demostración. Sea (U_α, x_α) una carta de un atlas $\mathcal{A}$ de M. Definimos la función :

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$$

Si $v \in T_pM$ y $\pi^{-1}(v) = p$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)_p$$

Hacemos $\phi_\alpha(v) = (x_\alpha(p), a_1, \ldots, a_m)$. Es inmediato ver que ϕ_α es biyectiva, además, su rango $x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$

Sea (U_β, x_β) otra carta de del atlas $\mathcal{A}$ tal que $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$, esta carta da lugar a su correspondiente biyección:

$$\phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow x_\beta(U_\beta) \times \mathbb{R}^m$$

Luego tenemos,

$$\begin{aligned} \phi(\pi^{-1}(U_\alpha) \bigcap \pi^{-1}(U_\beta)) &= \phi(\pi^{-1}(U_\alpha \bigcap U_\beta)) \\ &= x(U_\alpha \bigcap U_\beta). \end{aligned}$$

Es un abierto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$.

Veamos quien es

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow x_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^m.$$

Si $v \in \pi^{-1}(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ y $\pi(v) = p$, entonces tenemos dos expresiones para v:

$$v = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right) \qquad v = \sum_j b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\right).$$

Ahora, por el corolario 1.1 tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\right)_p$$

por consiguiente,

$$b_j = \sum_j \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}(p) \quad \text{ y } \quad a_i = \sum_i D_i(x_\beta^j \circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p)).$$

Esto es, si $a = (a_1, \ldots, a_m)$ y $b = (b_1, \ldots, b_m)$, entonces

$$b = J_{x_\beta \circ x_\alpha^{-1}}(x(p))(a).$$

Ahora, si $c = x_\alpha(p)$ se tiene que $x_\beta(p) = (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(c)$ y

$$\begin{aligned} \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(c, a) &= \phi_\beta(v) \\ &= (x_\beta(p), b) \\ &= (x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(c), J_{x_\beta \circ x_\alpha^{-1}}(c)(a)). \end{aligned}$$

Luego, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha$ es diferenciable.

Aplicando el lema 1.1 conseguimos que TM tiene una única topología para la cual

$$\mathcal{A}' = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)/(U_\alpha, x_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

es un atlas diferenciable.

Además, TM, con esta topología , es de Hausdorff y 2° enumerable.■

Lema 1.4. *La función π es una función diferenciable.*

Demostración. Sea (U, x) una carta de M y $(\pi^{-1}(U), \phi)$ la carta de TM asociada a la primera.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "x"] & U \arrow[d, "x"] \\ x(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] & x(U) \end{tikzcd}$$

Tenemos que $f(x(p), a) = (x \circ \pi \circ \phi^{-1})(x(p), a) = x(p), f = x \circ \pi \circ \phi^{-1}$. Luego $x \circ \pi \circ \phi^{-1}$, es diferenciable y por tanto, π es diferenciable.■

Ya tenemos el camino allanado para probar el siguiente teorema:

Teorema 1.3. (TM, M, π) *es un fibrado vectorial diferenciable, llamado el Fibrado Tangente.*

Demostración. Ya tenemos que TM y M son variedades diferenciables y que $\pi : TM \longrightarrow M$ es diferenciable. Además, para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = T_pM$ es un espacio vectorial.

Veamos pues la propiedad de trivialidad local.

Dado $p \in M$, sea (U, x) una carta de M alrededor de p y $(\pi^{-1}(U), \phi)$ la carta de TM inducida por (U, x).

Asi, se tienen las funciones

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m$$

$$(x^{-1}, I) : x(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m.$$

Donde I es la función identidad de $\mathbb{R}^m$.

Definamos entonces la función

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$$

Dada por: $\psi = (x^{-1}, I) \circ \phi$.

Claramente vemos que ψ es biyectiva y que $\pi_1 \circ \psi = \pi$. Veamos que ψ es un difeomorfismo.

Tenemos que

$$(x, I) \circ \psi \circ \phi^{-1} = (x, I) \circ (x^{-1}, I) \circ \phi \circ \phi^{-1}$$

esla función identidad de $x(U) \times \mathbb{R}^m$.

Luego la función anterior es un difeomorfismo. Por lo tanto, $\psi : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo.■

§1.5. Campos Vectoriales y Corchete de Líe

§1.5.1. Campos Vectoriales

Definición 1.18. Un campo vectorial sobre una variedad M es una sección X del fibrado tangente TM. Esto es

$$X : M \longrightarrow TM \quad \text{y} \quad \pi \circ X = I_M$$

Ejemplo 1.8. Si (U, x) es uan carta de M^m, tenemos los siguientes m campos sobre U:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow TM/U$$
$$p \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Estos m campos nos proporcionan un sistema de referencias para TM/U. Además estos son diferenciables. En efecto , si $(\pi^{-1}(U), \phi)$ es una carta de TM correspondiente a (U, x), se tiene que la función F, representativa de $\frac{\partial}{\partial x^i}$, es (x, e_i)

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} & TM \\ \Big\downarrow x & & \Big\downarrow \phi \\ x(U) & \xrightarrow{F} & x(U)\times\mathbb{R}^m \end{array}$$

donde $e_1, \ldots, e_m$ forman la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Al valor (vector tangente) $X(p)$ de un campo X en un punto p de M también se le acostumbra denotar por X_p, esto es $X_p = X(p)$.

Nota 1.3. Nos interesaremos sólo en campos vectoriales diferenciables. A todos estos los juntaremos en un conjunto que lo denotaremos por $V^r(M)$, ($r = \tau$ ó ∞ según sea el caso).

Consideremos ahora, a una variedad M de clase C^r. Sea $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto formado por todas las funciones reales de clase C^r , definidas sobre M. Veamos que $\mathfrak{F}(M)$ es un anillo, es decir, un conjunto con dos operaciones (+,.),tal que:

1. $\mathfrak{F}(M)$ es un grupo abeliano.

2. $x \in M : (fgh)(x) = [f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)], \forall f, g, h \in \mathfrak{F}(M)$.

3. $x \in M : [f(g + h)](x) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$ y
   $[(f + g)h](x) = f(x)h(x) + g(x)h(x); \forall f, g, h \in \mathfrak{F}(M)$.

Verifiquemos la primera condición.
Claramente $\mathfrak{F}(M) \neq \emptyset$, pues $\exists\ \mathbb{O} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ se tiene que $\mathbb{O}(p) = 0$ (función nula), la cual es de clase C^r.
Consideremos a +,la suma usual en $\mathbb{R}$ y dotemos a $\mathfrak{F}(M)$ de esta operación binaria.

Entonces, para $x \in M$:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= f(x)+g(x)+h(x) \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)] \\ &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= [f+(g+h)](x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists\ \mathbb{O} \in \mathfrak{F}(M), \forall f \in \mathfrak{F}(M) : (f+\mathbb{O})(x) &= f(x)+\mathbb{O}(x)\\ &= f(x)+0\\ &= f(x)\\ &= 0+f(x)\\ &= (\mathbb{O}+f)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathfrak{F}(M), \exists -f \in \mathfrak{F}(M) : (f+(-f))(x) &= f(x)+(-f(x))\\ &= f(x)\\ &= 0+f(x)\\ &= (\mathbb{O}+f)(x).\end{aligned}$$

Además, $f, g \in \mathfrak{F}(M) : (f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$. Así pues, $(\mathfrak{F}(M), +)$ es un grupo abeliano.
Las condiciones 2 y 3 se cumplen automáticamente ya que son heredadas de $\mathbb{R}$. Luego $\mathfrak{F}(M)$ es un anillo.■

§1.5.2. El módulo $V^r(M)$

Sobre $V^r(M)$ definimos las siguientes dos operaciones: Sean $X, Y \in V^r(M), f \in \mathfrak{F}(M), p \in M$

$$\begin{aligned}(X+Y)(p) &= X(p)+Y(p)\\ (fX)(p) &= f(p)X(p).\end{aligned}$$

Probemos que $V^r(M)$ con estas dos operaciones es un módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$. Para ello probemos que $V^r(M)$ es un grupo abeliano aditivo.

Veamos que $V^r(M) \neq \emptyset$. Sea (U, x) una carta de M. $\exists X : M \longrightarrow TM$ dada por $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq 1 \leq m$ tal que $\forall p \in M : (\pi \circ X)(p) = \pi(X(p)) = \pi(\frac{\partial}{\partial x^i}|) = p$, la cual es una sección de TM.
Consideremos ahora la operación suma definida sobre $V^r(M)$ como sigue:

$$(X+Y)(p) = X(p)+Y(p), X, Y \in V^r(M)$$

$$\begin{aligned}
\forall p \in M : [(X+Y)+Z](p) &= (X+Y)(p) + Z(p) \\
&= X(p) + Y(p) + Z(p) \\
&= X(p) + (Y+Z)(p) \\
&= [X + (Y+Z)](p), X, Y, Z \in V^r(M).
\end{aligned}$$

Sea $p \in M$ como $T_pM \subset TM$ es un espacio vectorial, entonces existe $\tilde{O}_p \in T_pM$ tal que $\tilde{O}_p + v = v + \tilde{O}_p = v$, para todo $v \in T_pM$.

Por definición si $X \in V^r(M)$, entonces $X(p) \in T_pM$ luego:

$$X(p) = X(p) + \tilde{O}_p = (X + \tilde{O})(p) \text{ y } X(p) = \tilde{O}_p + X(p) = (\tilde{O} + X)(p)$$

donde $\tilde{O} : M \longrightarrow T_pM \subset TM$, la cual cumple :

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \tilde{O})(p) &= \pi(\tilde{O}(p)) \\
&= \pi(\tilde{O}_p) \\
&= p.
\end{aligned}$$

Asi, $\tilde{O}$ es un campo vectorial. Por otro lado, si $X \in V^r(M)$, entonces $\forall p \in M$: $X(p) \in T_pM \subset TM$ y como T_pM es un espacio vectorial existe el vector $-X(p) \in T_p$ tal que $\tilde{O}_p = X(p) + (-X(p)) = (X + (-X))(p)$ donde

$$\begin{aligned}
-X : M &\longrightarrow TM \\
p &\longrightarrow -X(p)
\end{aligned}$$

cumpliendo que

$$(\pi \circ -X(p)) = \pi(-X(p)) = p$$

lo que implica: $-X \in V^r(M)$. Por lo tanto, para todo $X \in V^r(M)$, existe $-X \in V^r(M)$ tal que $X + (-X) = \tilde{O}$.

Sean $X, Y \in V^r(M)$.

$$(X+Y)(p) = X(p) + Y(p) = (Y+X)(p)$$

En consecuancia de todo lo anterior tenemos que $V^r(M)$ es un grupo abeliano.

Consideremos a $X \in V^r(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$ y definamos la función

$$fX : M \longrightarrow TM$$

como sigue

$$(fX)(p) = f(p)X(p)$$

Como $f(p) \in \mathbb{R}$ y $X(p) \in T_pM$ se tiene que $(fX)(p) = f(p)X(p) \in T_pM$. Así, fX está bién definida. $V^r(M)$ bajo esta operación es un módulo. En efecto,

$$\begin{aligned}
[f(X+Y)](p) &= (fZ)(p), Z = X+Y \\
&= f(p)Z(p) \\
&= f(p)(X+Y)(p) \\
&= f(p)(X(p)+Y(p)) \\
&= f(p)X(p) + f(p)Y(p) \\
&= (fX)(p) + (fY)(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(fg)(X)](p) &= (fg)X(p) \\
&= f(p)g(p)X(p) \\
&= f(p)(gX)(p) \\
&= (f(gX))(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f+g)(X)](p) &= (f+g)(p)X(p) \\
&= (f(p)+g(p))X(p) \\
&= f(p)X(p) + g(p)X(p)
\end{aligned}$$

Para todo $X, Y \in V^r(M)$ y para cualquier par $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.■

§1.5.3. Corchete de Líe

Definición 1.19. Para $X, Y \in X(M)$ definimos $[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ de la manera siuguiente

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Proposición 1.2. *El corchete de Líe satisface:*

1. $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$.

2. $[X,Y+Z]=[X,Y]+[X,Z]$.

3. $[X,Y]=-[Y,X]$.

4. $[X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]+[Z,[X,Y]]=0$ *(Identidad de Jacobi).*

Demostración. Ver [2],capítulo 4.

Proposición 1.3. *Si $X,Y\in V^r(M)$ y $f,g\in C^\infty(M)$, entonces*

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X.$$

Demostración. Ver [2],capítulo 4.

Proposición 1.4. *Si $X,Y\in V^r(M)$, entonces $[X,Y]\in V^r(M)$.*

Demostración. Ver [2],capítulo 4.

Observación 1.7. La proposición anterior nos permite considerar el corchete de Líe como una operación binaria en $V^r(M)$:

$$V^r(M)\times V^r(M)\longrightarrow V^r(M).$$

Capítulo 2

El Fibrado Cotangente y Formas Diferenciables

En este capítulo presentamos a los fibrados tensoriales de una variedad. Un caso particular importante es el fibrado cotangente. Comenzaremos presentando algunos resultados que nos permitirán construir nuevos fibrados a partir de otro dado previamente.

Lema 2.1. *Sea M^m una variedad diferenciable, E un conjunto y $\pi : E \longrightarrow M$ una sobreyección que cumplen:*

1. *Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y una familia $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de biyecciones*
$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$
2. *Si $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_\alpha$ es la primera proyección, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*
$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd} \cdot$$
3. *$\forall \alpha, \beta$ tales que $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$,las funciones*
$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \bigcap U_\beta \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_\alpha \bigcap U_\beta \times \mathbb{R}^m$$
son difeomerfismos.

Entonces, existe una única estructura diferenciable que hace de $(E.M, \pi)$ un fibrado vectorial diferenciable, para el cual las funciones
$$\psi : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$
son trivializaciones locales.

Demostración. Ver [2],capítulo 5.

Teorema 2.1. *Si M es una variedad diferenciable tal que*

1. *Para todo p de M, existe un espacio vectorial E_p de dimensión m.*

2. *Existe un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M, tal que para cada $p \in U_\alpha$ existe un isomorfismo*

$$\psi_{\alpha,p} : E_p \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

3. *Las funciones*

$$g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^m), \quad g_{\alpha,\beta}(p) = \psi_{\alpha,p} \circ \psi_{\beta,p}^{-1}$$

son diferenciables.

4. *Si definimos $E = \bigcup_{p\in M} E_p$; $\pi : E \longrightarrow M$, la función proyección y*

$$\psi : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m, \quad \psi_\alpha(v) = (p, \psi_{\alpha,p}(v)).$$

Entonces, E tiene una única estructura diferenciable que hace (E, M, π) un fibrado vectorial para el cual las funciones

$$\psi : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$

son trivializaciones locales.

Demostración. Ver [2],capítulo 5.

Construyamos ahora el fibrado cotangente.

Sea (E, M, π) un fibrado diferenciable cualquiera. A partir de este construyamos otro fibrado (E^*, M, π^*), al que llamaremos el fibrado dual de (E, M, π).

Para cada fibra $\pi^{-1}(p)$ de E tomamos su dual $[\pi^{-1}(p)]^*$ y hacemos

$$E^* = \bigcup_{p\in M} [\pi^{-1}(p)]^*.$$

La función $\pi^* : E^* \longrightarrow M$ la definimos de la manera siguiente:

$$\pi^*(\lambda) = p, \text{ si } \lambda \in [\pi^{-1}(p)]^*.$$

Sea $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ una trivialización local de E. $\forall p \in U_\alpha$ tenemos el isomorfismo

$$\psi_{\alpha,p} = \psi_{\alpha/\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^m$$

si $p \in U_\alpha \bigcap U_\beta$, entonces $\psi_{\alpha,p}$ y $\psi_{\beta,p}$ inducen el isomorfismo

$$g_{\alpha\beta}(p) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definido por

$$\psi_{\alpha,p} \circ \psi_{\beta,p}^{-1} = (p, g_{\alpha\beta}(p)) = (p, f), f = g_{\alpha\beta}(p).$$

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(p) \arrow[dl, "\psi_{\alpha,p}"'] \arrow[d, "\psi_{\beta,p}"] \\ \{p\} \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "{(p,(f))}"'] & \{p\} \times \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(p) \arrow[d, "(\psi_{\beta,p})^*"'] \arrow[dr, "(\psi_{\alpha,p})^*"] & \\ \{p\} \times \mathbb{R}^m & \{p\} \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "{(p,(f)^*)}"] \end{tikzcd}$$

Pasando a duales conseguimos el isomorfismo

$$(g_{\alpha\beta}(p))^* : (\mathbb{R}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^*$$

y la función diferenciable

$$g_{\alpha\beta}^* : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow GL((\mathbb{R}^m)^*)$$

$$g_{\alpha\beta}^*(p) = (g_{\alpha\beta}(p))^*.$$

Pero tomando un isomorfismo de $(\mathbb{R}^m)^*$ a $\mathbb{R}^m$ fijo podemos considerar que

$$g_{\alpha\beta}^* : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^m).$$

Ahora, por el teorema 2.1, E^* tiene una única estructura diferenciable que hace de (E^*, M, π^*) un fibrado vectorial para el cual las funciones

$$(\psi_\alpha^*)^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times (\mathbb{R}^m)^*$$

inducidas por

$$(\psi_{\alpha,p}^*)^{-1} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times (\mathbb{R}^m)^*$$

son trivializaciones locales.

Como se dijo anteriormente, al nuevo fibrado (E^*, M, π^*) lo llamaremos fibrado dual de (E, M, π).

Definición 2.1. El **Fibrado Cotangente** de una variedad M es el fibrado dual del fibrado tangente (TM, M, π), al cual lo denotamos por (T^*M, M, π^*).

Definición 2.2. Una **1-forma** de una variedad M es una sección ω diferenciable del fibrado cotangente T^*M. Esto es

$$\omega : M \longrightarrow T^*M \ \text{ y } \ \pi^* \circ \omega = I_M$$

$$p \longrightarrow \omega(p)$$

donde $\omega(p)$ es una función lineal

$$\omega(p) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lema 2.2. *Sea M una variedad diferenciable y sea (U, x) una carta de la variedad.*

1. *Si $\omega : M \longrightarrow T^*M$ en una sección del fibrado cotangente y además $\omega|_U = \sum_{i=1}^m B^i dx_i$, entonces $\omega|_U$ es diferenciable si y sólo si $B^1, \ldots, B^m$ son diferenciables.*

2. *Sean u, v dos 1-formas cotangentes a M; $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, entonces la sección del fibrado cotangente $fu + vg$ definida por*

$$(fu + vg)(p) = f(p)u(p) + g(p)v(p)$$

es tambien diferenciable, por lo que $fu + vg$ es una 1-forma cotangente a M con dominio $Dom(f) \bigcap Dom(u) \bigcap Dom(g) \bigcap Dom(u)$.

Demostración. Ver [3],capítulo 6.

Dada ω una 1-forma de M, podemos definir el siguiente operador lineal inducido w que aplica una campo X tangente a M en la función $wX : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio es $Dom(\omega) \bigcap Dom(X)$ y esta definida por

$$wX(p) = \omega(p)X(p).$$

Una aplicación $w : V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ diremos que es un operador lineal sobre un abierto U de M, si $Dom(wX) = U \bigcap Dom(X)$ y $w(fX + gY) = fwX + gwY$ donde $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ y $X, Y \in V^r(M)$. De modo reciproco, dado un operador lineal $w : V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ sobre un abierto U, podemos asociarle la 1-forma ω tal que si $v \in T_pM$ y V es un campo tal que $V(p) = v$, entonces $\omega(p)(v) = wV(p)$. Notemos que el siguiente lema prueba la existencia del campo V elegido.

Lema 2.3. *Sea M una variedad diferenciable.*

1. *Si $\omega : V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ es un operador lineal y X un campo tangente a M, entonces $(\omega X)|_W = \omega(X|_W)$.*

2. *Si v es un vector tangente en un punto $p \in M$, entonces existe un campo tangente V definido en p tal que $V_p = v$.*

3. *Sea $\omega : V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ es un abierto U y sean V, V' dos campos tangentes definidos en un punto $p \in U$, si $V_p = V'_p$, entonces $\omega V_p = \omega V'_p$.*

Demostración. Probemos (1). Notemos que:

$$X - X|_W = 0(X - X|_W)$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 0\omega(X - X|_W) = \omega(0(X - X|_W)) \\ &= \omega(0(X - X|_W)) \\ &= \omega(X - X|_W) \\ &= \omega(X) - \omega(X|_W). \end{aligned}$$

De aqui se obtiene que $(\omega)|_W = \omega(X|_W)$.
Para (2), sea (U, x) una carta alrededor de un punto $p \in M$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$

Luego, el campo $V = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ verifica que $V_p = v$.
Para (3): Sea X un campo definido en p tal que $X_p = 0$ y sea (U, x) una carta para M alrededor de p. Supongamos que $X|_U = \sum_{i=1}^{m} f_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, entonces aplicando (1) se tiene que

$$\begin{aligned} (\omega X)(p) &= (\omega X|_U)(p) \\ &= \omega \left(\sum_{i=1}^{m} f_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f_i(p)\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(p). \end{aligned}$$

De la condición $X_p = 0$ se desprende que $f_i(p) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Así, $(\omega X)(p) = 0$.

Tomando ahora $X = V - V'$, notese que $X_p = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega(V - V'))(p) \\ &= \omega(V)(p) - \omega(V'(p)).\blacksquare \end{aligned}$$

Definición 2.3. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se llama **diferencial de** f a la 1-forma $df : M \longrightarrow T^*M$ de M definida por

$$df(p)(v) = v(f)$$

donde $v \in T_pM$.

Observación 2.1. Notese que si X es un campo, entonces $df(X) = Xf$.

Ejemplo 2.1. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ una curva diferenciable y $\alpha(p) = 0$.

Denotemos por $\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_p$ al vector velocidad de esta curva en $\alpha(0) = p \in M$. Esto es

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0 \in T_pM \text{ y } \frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0 = \alpha_{*0}\left(\frac{\partial}{\partial t}|_0\right).$$

Tenemos que $df(p)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}|0\right) = (f \circ \alpha)'(0)$, en efecto

$$\begin{aligned} df(p)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0\right) &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0\right)(f) \\ &= \left((\alpha_{*0}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0\right)\right)(f) \\ &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}|_0\right)(f \circ \alpha) \\ &= (f \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

Sea (U, x) una carta de M^m, entonces para las funciones diferenciables

$$x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$$

sus correspondientes diferenciables dx_i; $i = 1, \ldots, m$ cumplen que

$$dx_i(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(x_i) = \delta_i^j.$$

En consecuencia, $dx_1, \ldots, dx_m(p)$, es la base de T_p^*M dual a la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ de T_pM. Luego toda uno 1-forma ω en U se escribe de una manera única como

$$\omega(p) \sum_{i=1}^{m} \omega_i(p) dx_i(p), \forall p \in U$$

o, simplemente,

$$\omega = \sum_i \omega_i dx_i \text{ en } U$$

donde $\omega_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$

Proposición 2.1. *Si (U, x) es una carta de M^m y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferencialbe, entonces*

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Demostración. Si $v \in T_pM$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$

Ahora,

$$dx_j(p)(v) = v(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x_j) = a_j$$

de donde

$$v = \sum_{i=1}^{m} dx_i(p)(v) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$

Por tanto,

$$df(p)(v) = v(f) = \sum_{i=1}^{m} dx_i(p)(v) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(p)(v)$$

En consecuencia

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \blacksquare$$

Corolario 2.1. *Si (U, x) y (V, y) son dos cartas de M^m tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces tenemos*

$$dy_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Proposición 2.2. *Existe una correspondencia biunívoca entre operadores respecto funciones de la forma $w : V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ y 1-formas $\omega : M \longrightarrow T^*M$ de una variedad M.*

Demostración. En primer lugar veamos que ω es una 1-forma, el correspondiente operador es w y X un campo diferenciable. Si (U, x) es una carta de M se tiene que $w|_U = \sum A^i dx_i$ y para el campo $X|_U = \sum B_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Entonces $(wX)|_U = \sum A^i B_j$ que es diferenciable, para cada carta (U, x). Por lo tanto wX es diferenciable. Veamos ahora que w es lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} (w(fX+gY))(p) &= \omega(p)(f(p)X(p)+g(p)Y(p)) \\ &= f(p)\omega(p)X(p)+g(p)\omega(p)Y(p) \\ &= f(p)wX(p)+g(p)wY(p) \\ &= (fwX+gwY)(p) \end{aligned}$$

para cada $p \in Dom(w) \bigcap Dom(X) \bigcap Dom(Y), f, g \in \mathfrak{F}(M), X, Y \in V^r(M)$.

Reciprocamente, supongamos que w es un operador lineal con dominio el abierto W. Para cada $p \in W$ se tiene que $\omega(p)$ es lineal. Para verlo supongamos que $v_1, v_2 \in T_pM$ y que V_1, V_2 son campos que extienden a v_1 y v_2, entonces

$$\begin{aligned} \omega(p)(\alpha v_1+\beta v_2) &= (w(\alpha V_1+\beta V_2))(p) \\ &= \alpha wV_1(p))+\beta wV_2(p) \\ &= \alpha\omega(p)(v_1)+\beta\omega(p)(v_2). \end{aligned}$$

Finalmente, queda probar que ω es diferenciable. Sea $p \in W = Dom(\omega)$ y sea (U, x) de M en p tal que $Dom(x) \subset W$. Entonces $\omega = \sum_{i=1}^m w(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i$. Puesto que para $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $w(\frac{\partial}{\partial x_i})$ es diferenciable, aplicando el lema 2.2 se obtiene que ω es diferenciable en p, para cada $p \in Dom(\omega)$. Entonces ω en una sección diferenciable.$\blacksquare$

Como consecuencia del resultado anterior utilizaremos la misma letra, digamos ω para denotar el operador lineal y la sección.

§2.1. Producto Tensorial

Para establecer una base algebraica para formas diferenciales, nosotros empezamos definiendo ciertas generalizaciones del espacio dual a un espacio vectorial real V.

Sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales reales. Además, sea

$$T : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función multilineal, es decir que cumple

$$T(v_1, \ldots, v_j + av'_j, \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + aT(v_1, \ldots, av'_j, \ldots, v_k)$$

linealidad en cada componente, entonces el conjunto formado por todas las funciones de este tipo es un espacio vectorial real, al cual denotaremos por $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_k^*$ y lo llamaremos producto tensorial de $V_1^*, \ldots, V_k^*$. A los vectores de este producto los llamaremos tensores covariantes de orden k.

En el caso que $V_1 = V_2 = \cdots = V_k = V$ al producto tensorial $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_k^*$ lo denotaremos por $\bigotimes^k V^*$.

Notese que para $k = 1$, se tiene que $\bigotimes^1 V^* = V^*$. Por razones de completitud y conveniencia estableceremos que $\bigotimes^0 V^* = \mathbb{R}$.

Si $f : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal,

$$f^* : \bigotimes^k W^* \longrightarrow \bigotimes^k V^*$$

$$T \longrightarrow f^*T$$

donde

$$f^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

Notar que para $m = 1$, f^* no es otro cosa que la tranformación

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

ya definida anteriormente. Notar también que si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow Z$, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ y que si f es un isomortfismo, f^* también lo es.

Definición 2.4. Si $T \in \bigotimes^{k} V^*$ y $S \in \bigotimes^{l} V^*$, se llama producto tensorial de T por S al elemento $T \otimes S \in \bigotimes^{k+l} V^*$ definido por

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

Proposición 2.3. *Si $T \in \bigotimes^{k} V^*$, $S \in \bigotimes^{l} V^*$ y $U \in \bigotimes^{r} V^*$, se tiene que $(T\otimes S)\otimes U = T \otimes (S \otimes U) \in \bigotimes^{k+l+r} V^*$. Además,*

1. $(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S$
2. $T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2$
3. *En general,* $T \otimes S \neq S \otimes T$

Demostración. Ver [2], capítulo 5.

Definición 2.5. Un tensor es **alternante** si el signo de T cambia siempre que dos variables son transpuestas, esto es:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Todos los 1-tensores son automaticamente alternantes. El determinante es también alternante, pero el producto punto no lo es.

Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de los números de 1 a k. Recordemos que una permutación $\pi \in S_k$ es llamada par o impar, dependiendo si es posible expresarla como producto de un número par o impar, respectivamente, de transposiciones simples. Sea $(-1)^\pi = 1$ ó -1, dependiendo si π es par o impar. Para cada k-tensor T y cada $\pi \in S_k$ se define otro k-tensor T^π por

$$T^\pi(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}).$$

Entonces, los k-tensores altenantes son aquellos que satisfacen

$$T^\pi = (-1)^\pi T.$$

Notese que siempre se cumple la igualdad $(T^\pi)^\sigma = T^{\pi\circ\sigma}$.

Existe un procedimiento para hacer tensores alternantes a partir de uno arbitrario. Si T es un k-tensor cualquiera, definimos el tensor alternante $Alt(T)$ por

$$Alt(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi}T^{\pi}.$$

Notese que $Alt(T)$ en efecto alternante, para esto se cumple que $(-1)^{\pi\circ\sigma} = (-1)^{\pi}(-1)^{\sigma}$. Así,

$$[Alt(T)]^{\sigma} = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi}(T^{\pi})^{\sigma} = \frac{1}{k!}(-1)^{\sigma}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi\circ\sigma}T^{\pi\circ\sigma}$$

Si hacemos $\tau = \pi\circ\sigma$, entonces como S_k es un grupo, tenemos que el rango de π mediante S_k es el mismo de τ. Así,

$$[Alt(T)]^{\sigma} = (-1)^{\sigma}\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k}(-1)^{\tau}T^{\tau} = (-1)^{\sigma}Alt(T).$$

Notar también que si T ya es alternante, entonces $Alt(T) = T$, para cada sumando $(-1)^{\pi}T^{\pi}$ iguales a T, y existen exactamente $k!$ permutaciones en S_k.

Ya que la suma y la multiplicación por escalar de funciones alternantes son alternantes, los k-tensores alternantes forman un subespacio vectorial $\Lambda^k(V^*)$ de $\mathfrak{J}^k(V^*)$. Los productos tensoriales de tensores alternates no producen necesariamente tensores alternantes. Pero en este caso el operador Alt puede ser útil. Si $T \in \Lambda^k(V^*)$ y $S \in \Lambda^l(V^*)$, definimos su **producto cuña** $T \wedge S \in \Lambda^{k+l}(V^*)$ como:

$$T \wedge S := Alt(T \otimes S).$$

El producto cuña es distributivo sobre la adición y multiplicación por escalar, ya que Alt es un operador lineal; sin embargo para probar la asosiatividad se requerirá cierto trabajo.

Lema 2.4. *Si $Alt(T) = 0$, entonces $T \wedge S = 0 = S \wedge T$.*

Demostración. S_{k+l} lleva una copia natural de S_k, a saber, el subgrupo G que consiste de todas las permutaciones de $(1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q)$. La correspondencia entre G y S que asigna a cada $\pi \in G$ la permutación π' inducida por la restricción de π a $(1, \ldots, p)$. Notese que $(T \otimes S)^{\pi} = T^{\pi'} \otimes S$, y $(-1)^{\pi} = (-1)^{\pi'}$. Así

$$\sum_{\pi\in G}(-1)^{\pi}(T\otimes S)^{\pi} = \left[\sum_{\pi'\in S_k}(-1)^{\pi'}T^{\pi'}\right]\otimes S = Alt(T)\otimes S = 0$$

Ahora, un subgrupo G descompone S_{k+l} en una union disjunta de clases a derecha $G \circ \sigma = \{\pi \circ \sigma : \pi \in G\}$ pero para cada clase,

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi \circ \sigma} (T \otimes S)^{\pi \circ \sigma} = (-1)^{\sigma} \left[\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi} (T \otimes \sigma)^{\pi} \right]^{\sigma} = 0.$$

Ya que $T \wedge S = Alt(T \otimes S)$ es la suma de las sumas parciales sobre las clases a derecha de G, entonces $T \wedge S = 0$. De manera similar se verifica $S \wedge T = 0$.■

Teorema 2.2. *El producto cuña es asociativo*

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R),$$

justificando la notación $T \wedge S \wedge R$.

Demostración. $(T \wedge S) \wedge R = Alt((T \otimes S) \otimes)$, asi la linealidad de Alt implica que

$$(T \wedge S) \wedge R - Alt(T \otimes S \otimes R) = Alt([T \wedge S - T \otimes S] \otimes R).$$

Como $T \wedge S$ es alternante

$$Alt(T \wedge S - T \otimes S) = Alt(T \wedge S) - Alt(T \otimes S) = T \wedge S - T \wedge S = 0.$$

Luego, por el lema anterior

$$Alt([T \wedge S - T \otimes S] \otimes R) = 0$$

como se queria. Similarmente se puede probar que

$$T \wedge (S \wedge R) = Alt(T \otimes S \otimes R).■$$

Nuestra siguiente tarea es ver como se definen las k-formas de manera general, donde k puede ser 0, 2, 3,etc..., asi como 1. Sin embargo, en este caso hay que señalar que existen distintos criterios para la definición de formas diferenciales, en nuestro caso lo veremos como "productos" de funciones lineales. Una idea poco formal para las k-formas es la siguinte: si M es de dimensión 3, entonces

1. Las 0-formas son fiunciones diferenciables $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Las 1-formas son expresiones de la forma $fdx + gdy + hdz$.
3. Las 2-formas son expresiones de la forma $fdxdy + gdydz + hdxdz$.
4. Las 3-formas son expresiones de la forma $fdxdydz$.

Finalmente podemos dar la definición formal para las k-formas.

Definición 2.6. Una **k-forma** con dominio abierto U de una variedad M es una aplicación multilineal (respecto funciones) y alternada de la forma

$$\omega : V^r(M) \times V^r(M) \times \cdots \times V^r(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

verificando que $Dom(\omega(X_1, \ldots, X_k)) = Dom(\omega) \bigcap Dom(X_1) \bigcap \ldots \bigcap Dom(X_k)$. Denotemos por $\Lambda^k(M)$ el espacio de las k-formas de M y por $\Lambda^k_U(M)$ el espacio de las k-formas el espacio de las k-formas con dominio un abierto U. En particular $\Lambda^k_M(M)$ es el espacio de las k-formas globales de M.

Capítulo 3

Codistribuciones con Singularidades

En este capítulo estudiaremos la noción de codistribuciones con singularidades la cual es la dual a la teoria de las distribuciones con singularidades. Aqui presentaremos algunos resultados sobre la integrabilidad de las codistribuciones en el sentido puntual y local. Veremos diferencias entre la integrabilidad en el sentido de Cartan y el sentido Pffaf.

Definición 3.1. Una **forma Pffafiana** es una 1-forma de clase $\mathcal{C}^r$. LLamaremos **sistema diferencial Pffafiano** $\mathcal{P}$ sobre M, al $\mathfrak{F}(M)$-módulo de las 1-formas de clase $\mathcal{C}^r$.

Ejemplo 3.1. Sea $M = \mathbb{R}^3$ y consideremos $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$f(x, y, z) = (x^2 - 1)y + (y^2 + 2)z$, luego la 1-forma definida por el diferencial de f:

$$\begin{aligned} df &= 2xydx + (x^2 - 1)dy + 2xzdy + (y^2 + 2)dz \\ &= 2xydx + (x^2 + 2yz - 1)dy + (y^2 + 2)dz \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^r$, asi, la 1-forma df es Pffafiana.

Definición 3.2. Llamaremos codistribución sobre M a la aplicación

$$P : x \in M \longrightarrow P(x) \subset T_x^*M$$

donde $P(x)$ es un subespacio vectorial del espacio cotangente a M en x. La dimensión (o rango) de la codistribución P es $\dim P(x)$ (definida puntualmente).

Definición 3.3. Sea S el conjunto de las 1-formas de clase $\mathcal{C}^r$ definidas en todas partes. La codistribución generada por el conjunto S es:

$$P(x) = span_{\mathbb{R}}\{\omega|_x, \omega \in S\}, \forall x \in M.$$

Definición 3.4. Llamaremos codistribución de clase $\mathcal{C}^r$ en M, a una codistribución P generada por un conjunto S de 1-formas de clase $\mathcal{C}^r$.

Ejemplo 3.2. Sea f como en el ejemplo anterior y sea S el conjunto formado por la 1-forma $df = 2xydx + (x^2 + 2yz - 1)dy + (y^2 + 2)dz$, esto es, $S = \{df\}$.
Si $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$df(p) = 2x_0y_0dx + (x_0^2 + 2y_0z_0 - 1)dy + (y_0^2 + 2)dz = a_xdx + a_ydy + a_zdz \in T_p^*\mathbb{R}^3.$$

Por tanto, para cada $p \in \mathbb{R}^3, P(x, y, z) = span_{\mathbb{R}}\{df(x, y, z)\}$ es subespacio de $T_p^*\mathbb{R}^3$, esto implica que S genera a la codistribución P.

Ejemplo 3.3. Sea $M = \mathbb{R}^3$ y concideremos al conjunto de 1-fromas $S = \{\omega, \lambda\}$, donde $\omega = ydx, \lambda = zdy - ydz$. Luego S genera la codistribución

$$P : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow P(x, y, z) \subset T^*_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$$

donde $P(x) = span_{\mathbf{R}}\{\omega(x, y, z), \lambda(x, y, z)\}$ el cual es un subespacio de $T_p^*\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 y asi $\dim P(x) = 2$

Definición 3.5. La codistribución P es **integrable en el sentido de Cartan** en $x_0 \in M$ si existe una subvariedad $\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$ de M que pasa por x_0, tal que:

$$T_x\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0} = (P(x))^{\perp}, \forall x \in \mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}.$$

$\mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$ es llamada **variedad integral** de la codistribución y decimos que P es puntualmente integrable en cada punto $q \in \mathcal{N}_{\varepsilon.x_0}$.

Observación 3.1. Si la codistribución P está generada por las 1-formas $\omega^1, \ldots, \omega^q$, entonces en la formulación clásica, lo que se tiene es un sistema de ecuaciones diferenciales totales de q ecuaciones en $n = \dim M$ variables:

$$\begin{gathered} \omega^1 = a_1^1dx^1 + \cdots + a_n^1dx^n = 0 \\ \vdots \\ \omega^q = a_1^qdx^1 + \cdots + a_n^qdx^n = 0 \end{gathered}$$

Con a_j^i funciones de $(x^1, \ldots, x^n)$ y se desea hallar localmente soluciones de ese sistema que depende de s variables, $s \leq n$.

Ejemplo 3.4. En $M = \mathbb{R}^3$, si $P(\bar{x}) = span_{\mathbb{R}}\{\omega|_{\bar{x}}\}$ y $\omega = Qdx+Tdy+Ldz \neq 0$, entonces hallar la variedad integral de P, significa encontrar $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, tales que $Q(x,y,z)(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv)+T(x,y,z)(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv)+L(x,y,z)(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv) = 0$.

Ejemplo 3.5. En $M = \mathbb{R}^3$, si $P(\bar{x}) = span_{\mathbb{R}}\{\omega_1|_{\bar{x}}, \omega_2|_{\bar{x}}\}$ con $\omega_1 = Q_1dx+T_1dy+L_1dz$ y $\omega_2 = Q_2dx + T_2dy + L_2dz$, entonces hallar la variedad integral de P, significa encontrar $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, tales que

$$Q_1(x,y,z)(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv) + T_1(x,y,z)(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv) + L_1(x,y,z)(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv) = 0$$

$$Q_2(x,y,z)(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv) + T_2(x,y,z)(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv) + L_2(x,y,z)(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv) = 0.$$

Definición 3.6. El sistema diferencial $\mathcal{P}$ se dice que es **integrable en el sentido de Pffaf** si existe un conjunto finito de generadores de formas exactas, es decir, si existen $f_i : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq p$, funciones diferenciables, tal que $\mathcal{P} = span_{\mathfrak{F}(M)}\{df_1, \ldots, df_p\}$.

Ejemplo 3.6. El sistema $\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Pfaff, no implica necesariamente que la codistribución P es integrable en el sentido de Cartan.

En efecto, Sean $f_1 = x + y$ y $f_2 = \sin x + y$ y $\mathcal{P} = span_{\mathfrak{F}(M)}\{df_1, df_2\}, M = \mathbb{R}^2$. Por definición $\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Pfaff. Por otro lado, si $P(\bar{x}) = span_{\mathbb{R}}\{df_1|_{\bar{x}}, df_2|_{\bar{x}}\}$, tenemos que para encontrar la variedad integral de P debemos considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \omega_1 = & df_1 = 0 \\ \omega_2 = & df_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = C_1 \\ \sin x + y & = C_2 \end{cases}$$

Donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son constantes reales. Ya que este sistema tiene una única solución: $x = x(C_1, C_2)$ y $y = y(C_1, C_2)$ para cada par (C_1, C_2), esto implica que la codistribución P no es puntualmente integrable en el origen. Si $(C_1, C_2) = (0,0)$, entonces $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$, ahora como $P(x) = span_{\mathbb{R}}\{df_1|_{\bar{x}}, df_2|_{\bar{x}}\} = span_{\mathbb{R}}\{\cos x dx + dy|_{\bar{x}}, dx + dy|_{\bar{x}}\}$. Si $\bar{x} = (0,0)$, entonces

$$\omega_1(\bar{x}) = \omega_1(0,0) = \cos 0 dx + dy = dx + dy \text{ y}$$

$$\omega_2(\bar{x}) = \omega_2(0,0) = dx + dy.$$

Además, $(P(\bar{x}))^{\perp} = \{v \in T_{\bar{x}}\mathbb{R}^2 / \langle v, \omega_i(\bar{x})\rangle = 0, \omega_i \in P(\bar{x}), i = 1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\langle v, \omega_i(\bar{x})\rangle = 0 &\Leftrightarrow \omega_i(\bar{x})(v) = 0\\
&\Leftrightarrow (dx + dy)(v) = 0\\
&\Leftrightarrow dx(v) + dy(v) = 0\\
&\Leftrightarrow v_x + v_y = 0\\
&\Leftrightarrow v_y = -v_x.
\end{aligned}$$

Así, $(P(\bar{x}))^{\perp} = \{v \in T_{\bar{x}}\mathbb{R}^2 / v = (v_x, -v_x)\} \neq \{(0,0)\} = \mathcal{N}_0$. Por lo tanto, P no es integrable según Cartan en el origen.

El siguiente ejemplo nos presenta un caso de integrabilidad puntual.

Ejemplo 3.7. $\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Cartan, pero P no es necesariamente integrable en el sentido de Pfaff.

Sea $\mathcal{P} = span_{\mathfrak{F}(M)}\{\omega = dx - xzdy\}, M = \mathbb{R}^3$. Veamos,

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(dx - xzdy)\\
&= d(dx) - d(xzdy)\\
&= -d(xzdy)\\
&= -(zdx + xdz) \wedge dy\\
&= -zdx \wedge dy - xdz \wedge dy.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d\omega \wedge \omega &= (-zdx \wedge dy - xdz \wedge dy) \wedge (dx - xzdy)\\
&= -zdx \wedge dy \wedge (dx - xzdy) - xdz \wedge dy \wedge (dx - xzdy)\\
&= -zdx \wedge dy \wedge dx + zdx \wedge dy \wedge xzdy - xdz \wedge dy \wedge dx + xdz \wedge dy \wedge xzdy\\
&= -xdz \wedge dy \wedge dx\\
&= -xdx \wedge dy \wedge dz\\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\mathcal{P}$ es integrable según Pfaff, así, existe $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $df = \omega$. En consecuencia $d\omega = d(df) = 0 \Rightarrow d\omega \wedge \omega = 0 \wedge \omega = Alt(0 \otimes \omega)$.

Además,

$$Alt(0) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^k 0 = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k} 0 = 0$$

y por lema 2.4 tenemos que $d\omega \wedge \omega = 0 \wedge \omega = 0$, lo que nos da una contradicción pues teniamos que $d\omega \wedge \omega \neq 0$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ no es integrable en el sentido de Pfaff.

Ahora, sea $P(\bar{x}) = span_{\mathbb{R}}\{\omega|_{\bar{x}} = dx - xzdy|_{\bar{x}}\}$, para todo $\bar{x} \in M$. Consideremos al conjunto $\mathcal{N}_0 = \{(0, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$. Veamos que $\mathcal{N}_0$ es una variedad integral de P que pasa por el origen. Es decir,

$$T_{\bar{x}}\mathcal{N}_0 = (P(\bar{x}))^{\perp}, \text{ Para cada, } \bar{x} \in \mathcal{N}_0.$$

Para ello basta probar que para cada $v \in P(\bar{x}) : \langle v, w\rangle|_{\bar{x}} = 0, \forall w \in T_{\bar{x}}\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0$.
Dado que $w \in T_{\bar{x}}\mathcal{N}_0$ y $v \in P(\bar{x})$ tenemos:
$\langle v, w\rangle|_{\bar{x}} = (v(\bar{x}))(w) \Rightarrow \langle \lambda(dx - xzdy), (0, y, z)\rangle|_{\bar{x}}\ v = \lambda(dx - xzdy)$
$\Rightarrow (\lambda(dx - xzdy))(0, y, z) = \lambda dx(0, y, z) - \lambda(xzdy)(0, y, z)$
$\Rightarrow \langle v, w\rangle|_{\bar{x}} = \lambda 0 - \lambda 0zy = 0.$

Así, $\mathcal{N}_0$ es una variedad integral de P que pasa por el origen. Por lo tanto P es integrable según Cartan en el origen.

Definición 3.7. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ una función diferenciable y $x \in M$. **La aplicación dual** φ^* es la función

$$\varphi^* : (T_{\varphi(x)}N)^* \longrightarrow (T_xM)^*$$

dada por $(\varphi^*(\omega))_x(v) = \omega_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v))$.

Observación 3.2. Sea N subvariedad de M contenida en un abierto $V \subset M$ pasando por x. Consideremos la inclusión $i : N \longrightarrow M$. Sea $y \in N, \delta \in T_yN$. Se tiene que

$$i^* : (T_{i(y)}M)^* \longrightarrow (T_yN)^*; i(y) = y$$

$$(i^*(\omega^j))_y(\delta) = \omega^j_{i(y)}(di_y(\delta)).$$

Si N es una variedad integral de la codistrubución P generada por el conjunto de 1-formas $\{\omega^1, \ldots, \omega^q\}$, ya que $T_yN = (P(y))^{\perp}$, tenemos: $di_y(T_yN) = T_yN$. Luego, $i^*(\omega^j) = 0,\ j = 1, \ldots, q$. Pero $i^*(\omega^j)$ no es mas que $\omega^j/_N$, es decir, $\omega^1, \ldots, \omega^q$ restringidos a N se anulan.

Proposición 3.1. *Sean $\omega^1, \ldots, \omega^{n-r=q}$ 1-formas en una vecindad V de $x \in M$ que generan un sistema diferencial $\mathcal{P}$. Entonces las condiciones siguientes son equivalenentes:*

F1. *Existen q^2 formas σ_j^h en V tal que $d\omega^h = \sum_{j=1}^{q} \sigma_j^h \wedge \omega^j$.*

F2. $d\omega^h \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q = 0, \forall h = 1, \ldots, q = n - r.$

Demostración. **F1⇒F2**.

$$\begin{aligned} d\omega^h \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q &= \left(\sum_{j=1}^{q} \sigma_j^h \wedge \omega^j \right) \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \\ &= \sum_{j=1}^{q} \left(\sigma_j^h \wedge \omega^j \right) \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pues al conmutar y asociar convenientemente aparecen los factores $\omega^i \wedge \omega^i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, q$.

F2⇒F1.

Extendamos en una vecindad V de x las formas:
$\omega^1, \ldots, \omega^{q=n-r}$ a $\omega^1, \ldots, \omega^{n-r}, \omega^{n-r+1}, \ldots, \omega^n$ tal que formen una base para las 1-formas en cada punto $y \in V$.
Sea $d\omega^h = \sum_{1 \leq k < j \leq n} a_{kj}^h \omega^k \wedge \omega^j, (k < j)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 = d\omega^h \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q &= \left(\sum_{1 \leq k < j \leq n}^{q} a_{kj}^h \omega^k \wedge \omega^j \right) \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq n}^{q} a_{kj}^h \omega^k \wedge \omega^j \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \\ &= \sum_{n-r < k < j \leq n}^{q} a_{kj}^h \omega^k \wedge \omega^j \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \end{aligned}$$

Ya que $\omega^i \wedge \omega^i = 0, \forall i = 1, \ldots, q$.

Así, $a^h_{kj} = 0, k, j = n - r + 1, \ldots, n; h = 1, \ldots, r$, implicando que

$$\begin{aligned} d\omega^h &= \sum_{1 \leq k < j \leq n}^{q} a^h_{kj} \omega^k \wedge \omega^j \\ &= \sum_{j=1}^{q} \sigma^h_j \wedge \omega^j \end{aligned}$$

Donde $\sum_{1 \leq k < j \leq n}^{q} a^h_{kj} \omega^k = \sigma^h_j, h = 1, \ldots, n - r.$ ■

Definición 3.8. Consideremos la codistribución P y un punto $x_0 \in M$. Si existe una vecindad de x_0 donde una codistribución tiene dimensión constante, entonces el punto x_0 se llama **punto ordinario** o **punto regular**, de lo contrario es llamado **punto singular**. Si la codistribución tiene puntos singulares, entonces decimos que esta es una **codistribución con singularidades**.

Para el caso de codistribución con rango constante el problema de integrabilidad es resuelto por el clásico teorema de Frobenius:

Teorema 3.1. *Si P es una codistribución de clase $\mathcal{C}^r$ sin singularidades, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es localmente integrable (esto significa: P es integrable en el sentido de Cartan para cada punto).*

2. *$\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Pfaff.*

3. ***F1** o **F2** (pues son equivalentes).*

Demostración. Ver [6].

En el caso de codistribuciones con singularidades se tiene la proposición:

Proposición 3.2. *$\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Pfaff $\Rightarrow$ **F2** $\Rightarrow$ **F1***

Demostración. Si $\mathcal{P}$ es integrable en el sentido de Pfaff, entonces existen $f_i : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq p,$ funciones diferenciables, tal que $\mathcal{P} = span_{\mathfrak{F}(M)}\{df_1, \ldots, df_q\}$.
Denotemos $\omega^h = df_h, h = 1, \ldots, q$.
Luego,

$$\begin{aligned} d\omega^h \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q &= d(df_h) \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q,\ h = 1, \ldots, q \\ &= 0 \wedge \omega^1 \ldots \wedge \omega^q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que se cumple **F2**.

Ahora, según la proposición anterior **F2** $\Rightarrow$ **F1**. ■

El recíproco de este resultado esta dado en los articulos de Malgrange (ver [7] y [8]) donde se imponen condiciones suplementarias sobre la codimensión del conjunto de singularidades.

Conclusión

Como se dijo en la introducción, el objetivo de esta tesis es estudiar las nociones de codistribución con singularidades: puntual y local y la de integrabilidad segun Pfaff y segun Cartan. Se estudiaron ejemplos con el objetivo de comparar los dos tipos de integrabilidad. Además, Vimos que ambos tipos de integrabilidad son equivalentes cuando la codistribución tiene rango constante (teorema de Frobenius). Cuando la codistribución tiene singularidades probamos que la integrabilidad segun Pfaff inplicaba una condición necesaria del teorema de Frobenius.

En esta teoria queda abierto el estudio de resustados que involucran las condiciones de integrabilidad cuando la codistribución tiene singularidades.

Bibliografía

[1] R. Balan, Codistributions with singularities: puntual and local study, Bucharest, (1992).

[2] J. Saenz, Variedades Diferenciables, Ucla, Barquisimeto.

[3] L. Hernandez, Introducción a la Geometría Diferencial, Apuntes de Geometría Diferencial.

[4] R.L y CCrittenden, R.J., Geometry of Manifolds. Academic Press, New York, 1964.

[5] D. Cervean, Distributions Involutives singulieres, Ann. Iust. Fourier,Grenoble,29 (1979), 261-294.

[6] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol.I y II. Publish or Perish, Inc. Boston, Mass. 1970.

[7] B. Malgrange, Frobenius avec Siingularités 1. Codimension un, Publ.Math. IHES 46(1976), 163-173.

[8] B. Malgrange, Frobenius avec Siingularités 2.Le cas général,Inv.Math. 39(1977),67-89.