UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Aproximación Por Funciones Racionales, Teorema de Runge"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Efren D. Escalona L.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Complejo.
Tutor: M.Sc. Miguel J. Vivas C

Barquisimeto, Venezuela. Noviembre de 2008

Universidad Centroccidental
“Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“Aproximación Por Funciones Racionales, Teorema de Runge”

presentado por el ciudadano Efren D. Escalona L. titular de la Cédula de Identidad No. 15.445.331, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ______________________ de ___________.

______________________	______________________
TUTOR	FIRMA
______________________	______________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________	______________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios todopoderoso...
Y a la mejor bendición que Dios me ha dado, mis Padres y mis hermanos...

Agradecimientos

De todo corazón quiero agradecer con mis más sinceros sentimientos a las siguientes personas: Antes que todo quiero agradecer a mi Dios Jehová todopoderoso, omnipotente, creador de la tierra, creador del universo, por darme la vida y permitir vivir este momento. A ti agradezco, porque tanto en las buenas como en las malas, no me has dejado solo. Sin ti, soy nadie. A mi señor Jesucristo Rey de Reyes, Señor de Señores, porque escuchas mis palabras, en ti he confiado y me has respondido, eres luz que alumbra mi camino, eres mi consejero, mi escudo, mi protector.

A mi madre que con mucha humildad y trabajo, siempre me ha llevado por el camino correcto. A ti debo mucho. . . . A mi padre que aunque no está conmigo, te llevo presente siempre en mi mente y se que te sientes contento de mi, allá en el cielo donde te encuentras.

A mi hermano Robin y mi cuñada Omaira mis segundos padres, gracias por todo el apoyo y confiar en mi. Que Dios bendiga su familia.

A José, Tania, Yosmar, Zoa, Yovanny y Pablo en quienes siempre he confiado, porque tanto en los momentos gratos como difíciles de mi vida, siempre han estado presente. Le pido a Dios que los proteja y que los bendiga, así como también a sus hijos. Los adoro con toda mi alma y me siento feliz de que sean mis hermanos.

A todos mis profesores, pero con especial sentimiento, respeto y gratitud a mi tutor Miguel Vivas y la profesora Jurancy Ereú, tremenda colaboración la que me prestaron, a Dios todopoderoso gracias le doy por haberlos puesto en mi camino. Le pido salud y sabiduría para ustedes y sus familias.

A quienes siempre han compartido conmigo y apoyado, mis primos: Ilse, Richard, Rokmer, Mireya, Marelbys, la gorda, Felipa, Maryluz, Dinna, Víctor y mis amigos: Miguel, Miguelito, Carlos, Javier, El bobo, Kojac y muchos otros que no mencione de los cuales estoy también agradecido.

Y por ultimo pero no menos importante, a todos los muchachos de la promoción 39, en especial a Yankis, Javier, Rafael y los borrachos Manuel y Elifer, mis grandes panas.

Resumen

El teorema de Runge permite aproximar funciones analíticas por una sucesión de funciones racionales. En este trabajo se presentan tres versiones distintas del teorema de Runge. Para esto desarrollaremos las versiones encontradas en [1], así como la teoría preliminar que permite llegar a estos resultados.

Índice

Introducción

El auge al que el Cálculo Complejo llegó en el siglo XIX, luego de los trabajos de Riemann, Cauchy, Weierstrass y otros, no se detuvo con el paso del tiempo, dando origen a diversas ramas del análisis con numerosas aplicaciones en Teoría de Números, Teoria de Cuerdas, Ecuaciones Diferenciales y Geometría Diferencial, Algebraica y Fractal.

La teoría de aproximación comienza al final del siglo XIX con el estudio de aproximación de funciones por polinomios y funciones racionales. Es una rama de la matemática que interactúa con varios aspectos del análisis real, el análisis complejo y el análisis funcional. Su importancia radica en el desarrollo de algoritmos numéricos y en la solución de problemas de optimización.

En el año 1885, Weierstrass publicó uno de los teoremas más importantes para la teoría de la aproximación, el cual afirma que cualquier función continua sobre un compacto de R puede ser aproximada uniformemente por polinomios (ver : Mathematische Werke, vol. 3 p.p 1-37).

Dado un dominio Ω en $\mathbb{C}$, y una función f analítica definida en Ω, para todo conjunto compacto contenido en dicho abierto nos preguntamos.

¿Es posible aproximar uniformemente esa función con funciones racionales cuyos polos yacen fuera del abierto ?

Carl David Tolmé Runge (matemático y físico nacido en la ciudad de Breme, Alemania en 1856) dió la respuesta, con su teorema publicado en Acta Math., vol. 6, 1885 (Casualidad el mismo año en que Weierstras publicó su teorema antes mencionado).

La demostración del teorema de Runge aquí presentada sigue más que nada la dada por Sandy Grabiner en en American Math Montly, 83 (1976), 807-808 y encontrada en [1].

En el primer capítulo desarrollaremos la teoría preliminar, repasaremos algunas definiciones y teoremas del análisis matemático y complejo, en el segundo capítulo se procedera con la prueba del teorema de Runge, no sin antes ver y demostrar algunos lemas importantes del cual haremos uso para dicha prueba. En el capítulo tres desarrollaremos las versiones encontradas en [1].

Capítulo 1
Preliminares

En esta sección estableceremos la nomenclatura y notación de los conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo, además de algunos teoremas conocidos en cursos de análisis matemático y/o complejo. Como referencia básica [3], [4], [6], [7].

Definición 1.1. Sea Ω un conjunto en el plano complejo. Supongamos que f es una función compleja definida en Ω.

Si $z_0 \in \Omega$ y si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, diremos que f es **derivable** en z_0. A este límite lo denotaremos por $f'(z_o)$ y lo llamaremos la **derivada de f en el punto** z_o.

Definición 1.2. Si para cada $z_o \in \Omega$, $f'(z_o)$ existe, diremos que f es **holomorfa ó analítica** en Ω.

Definición 1.3. Una sucesión de numeros complejos $\{z_n\}$ **converge** a z_0 y escribiremos $z_n \longrightarrow z_0$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que: } \ n \geq N \ \Rightarrow \ |z_n - z_o| < \varepsilon.$$

Definición 1.4. Una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ definida en un conjunto $R \subset \mathbb{C}$ se dice que **converge uniformemente a una función** $f(z)$ **en R**, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que: } n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z_o)| < \varepsilon, \ \ \forall z \in R.$$

Y escribiremos $f_n \rightarrow f$ uniformemente en R.

Definición 1.5. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces,

- $D(z_0, r)$ es el **disco abierto ó bola abierta** con centro en z_0 y radio r, esto es $D(z_0, r) = \{z : |z_0 - z| < r\}$.
- $\overline{D}(z_0, r)$ es el **disco cerrado ó bola cerrada** con centro en z_0 y radio r, esto es $\overline{D}(z_0, r) = \{z : |z_0 - z| \leq r\}$.
- $C(z_0, r)$ es el **círculo** con centro en z_0 y radio r, esto es $C(z_0, r) = \{z : |z_0 - z| = r\}$.

Definición 1.6. Sea $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$.

- Diremos que z_0 es **punto interior** de S si existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq S$.
- El **interior** de S es el conjunto que consiste de los puntos interiores de S y es denotado por S°, es decir

$$S^{\circ} = \{z_0 \in S / z_0 \text{ es punto interior de} S\}.$$

- S es un **conjunto abierto** si $S \subset S^{\circ}$.

Definición 1.7. Un punto z $\in S \subset \mathbb{C}$ es **punto frontera** si, para cada $r > 0$, $D(z, r)$ contiene al menos un punto de S y al menos un punto que no está en S, es decir,

$$\forall\, r > 0,\, D(z, r) \cap S \neq \emptyset \;\wedge\; D(z, r) \cap (\mathbb{C} - S) \neq \emptyset.$$

La **frontera** de S es el conjunto que consiste de los puntos frontera de S, denotado por ∂S, esto es

$$\partial S = \{z \in \mathbb{C} / \forall r > 0, D(z, r) \cap S \neq \emptyset \wedge D(z, r) \cap (\mathbb{C} - S) \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.8. Sea $S \subset \mathbb{C}$ y $z \in S$, diremos que z es un **punto de adherencia** de S, si

- $\forall r > 0$, $D(z, r) \cap S \neq \emptyset$

La **clausura** de S es denotado por $\overline{S}$ y es el conjunto,

$$\overline{S} \;=\; \{z \in \mathbb{C} /\; z \text{ } es\ punto\ de\ adherencia\ de\ S\}.$$

Definición 1.9. Sea $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$, entonces

- z_0 es **punto de acumulación** de S, si para cada $r > 0$, $D(z_0, r)$ contiene infinitos puntos de S.
- S es **cerrado** si $\overline{S} =$ S.
- S es **denso** en $\mathbb{C}$ si $\overline{S} = \mathbb{C}$.

Definición 1.10. Un conjunto de números complejos S es **acotado** si existe $M > 0$ tal que $|z| < M$, para cada $z \in S$.

Definición 1.11. En $\mathbb{C}$ un conjunto cerrado y acotado es llamado **compacto**.

Definición 1.12. Un conjunto X es **disconexo ó separable** si existen conjuntos no vacíos y abiertos A y B tal que

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$

X es **conexo**, si no es disconexo.

Definición 1.13. Una **región ó dominio** en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto conexo no vacío de $\mathbb{C}$.

Definición 1.14. Definimos una **componente** como un sub-conjunto conexo máximal, esto es, un subconjunto conexo que no está propiamente contenido en otro sub-conjunto conexo.

Definición 1.15. Una **curva** en $\mathbb{C}$ es una función continua γ de un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

Definición 1.16. Si γ es una curva en el plano continuamente diferenciable a trozos entonces γ es llamada un **camino**.

Definición 1.17. Una camino con $\gamma(a) = \gamma(b)$ es llamado un **camino cerrado**.

Definición 1.18. Un camino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es llamado **simple** si para dos puntos cualesquiera distintos $z_1, z_2 \in [a, b]$ se cumple $\gamma(z_1) \neq \gamma(z_2)$, excepto posiblemente en $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Una camino cerrado y simple a la vez, es llamado un **camino simple cerrado**.

Definición 1.19. Si $z = \gamma(t)$ se define la **longitud L** de un camino γ como $long\ \gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$, $(z = \gamma(t) = x(t) + iy(t))$. Una curva γ con longitud finita se le llama **curva rectificable**.

Definición 1.20. Si a y b son números complejos, [a,b] es el **segmento de linea cerrado** con puntos finales a y b.

Si t_1 y t_2 son números reales arbitrarios con $t_1 < t_2$, entonces podemos escribir

$$[a,b] = \{a + \tfrac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a) : \ t_1 \leq t \leq t_2\}$$

La notación se puede extender como sigue. Si a_1,....,a_{n+1} son puntos en $\mathbb{C}$, un **polígono** de a_1 a a_{n+1} es definido como $\bigcup_{j=1}^{n} [a_j, a_{j+1}]$ o de forma abreviada $[a_1, .., a_{n+1}]$.

Definición 1.21. Sean $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_m$ caminos cerrados. Si $k_1, k_2, ..., k_m$ son enteros entonces la suma formal $\gamma = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_m\gamma_m$ es llamado un **ciclo**.

Definición 1.22. Una función f tiene una **singularidad aislada** en $z = a$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es analítica en $D(a, R) - \{a\}$ pero no en $D(a, R)$.

Definición 1.23. Si $z = a$ es una singularidad aislada de f, entonces, a es un **polo** de f si, $\lim\limits_{z\to a} |f(a)| = \infty$, equivalentemente puede expresarse como

$$\forall\ M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: } 0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Definición 1.24. Una función f es llamada **meromorfa** en un dominio Ω si los únicos puntos de Ω en los que f no es analítica son polos.

Definición 1.25. Las siguientes afirmaciones con respecto a un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ son equivalentes

a) K es acotado y cerrado.

b) Todo cubrimiento abierto de K posee un sub-cubrimiento finito.

c) Todo sub-conjunto infinito de K posee un punto de acumulación perteneciente a K.

d) Toda sucesión de puntos de K posee una sub-sucesión que converge a un punto en K.

Teorema 1.1. *Sea S un conjunto de números complejos compacto y sea f una función continua en S. Entonces la imagen de S a través de f es compacto.*

Demostración: *Ver* [3], *cap. 4, pág. 23.*

Teorema 1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: *Ver* [3], *pág. 74, cap. 3.*

Lema 1.1. *Si A es cerrado y B es compacto entonces $A \cap B$ es compacto.*

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $A \cap B$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \ \ y \ \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$$

Como B es compacto, toda sucesión en B posee una subsucesión convergente,digamos $x_{n_k} \to b \in B$.

Consideremos la subsucesión indizada con los mismos índices que la subsucesión convergente en B, $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ en A, esta subsucesión también es convergente (por la unicidad del límite), por ser A cerrado, $b \in A$ entonces $x_{n_k} \to b \in A \cap B$. Luego toda sucesión en $A \cap B$ posee una subsucesión convergente, de donde deducimos que $A \cap B$ es secuencialmente compacto, y así $A \cap B$ es compacto.

Definición 1.26. Sea Ω abierto. Entonces $A(\Omega)$ es denotado como el espacio de las funciones analíticas en Ω y $C(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones continuas en Ω. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$
Denotemos por:

$$K_n = \overline{D}(0, n) \cap \{z : |z - w| \geq \frac{1}{n}, \forall w \in \mathbb{C} \backslash \Omega\}.$$

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades sobre la sucesión K_n.

Proposición 1.1. *La sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface las siguientes tres propiedades :*

1. *$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$*

2. *Si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces $K \subseteq K_n$ para n suficientemente grande.*

3. K_n *es compacto.*

Antes de probar estas propiedades veamos quien es $[K_n]^c$

$$\begin{aligned} [K_n]^c &= [\ \overline{D}(0,n) \ \cap \ \{z : |z-w| \geq \frac{1}{n}, \ \forall w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}]^c. \\ &= [\ \overline{D}(0,n)]^c \ \cup \ [\{z : |z-w| \geq \frac{1}{n}, \ \forall w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}]^c. \\ &= \{z : |z| > n\} \ \cup \ (\bigcup_{w \in \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n})). \end{aligned}$$

Prueba de la proposicíon 1.1

Es fácil demostrar que $K_n \subset K^{\circ}_{n+1}$, procedemos con la prueba de la propiedad 2.

Supongamos que $K \subset \Omega$ es compacto y veamos que $K \subseteq K_n$ para algún n suficientemente grande.

Existe $\overline{N}$ tal que $K \subset \overline{D}(0,\overline{N})$.
Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que, para cada $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, se cumpla $|z-w| \geq \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
Por propiedad arquimediana, $\exists N' \in \mathbb{N}$, tal que : $|z-w| \geq \frac{1}{N'}$

Tomemos $n = \max\{\overline{N}, N'\}$, entonces, $N' \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N'}$

Luego,

$$K \subset \overline{D}(0,\overline{N}) \subset \overline{D}(0,N) \wedge |z-w| \geq \frac{1}{n}, \forall w \in \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

Por lo tanto $K \subset K_n$.

Probar que K_n es compacto se deduce inmediatamente del lema (1.1) ya que $\overline{D}(0,n)$ es compacto y $\{z : |z-w| \geq \frac{1}{n}, \ \forall w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}$ es cerrado.■

Lema 1.2. *Sea U una región y $K \subseteq U$ un sub-conjunto compacto. Existe un compacto $\widehat{K} \subseteq U$ conteniendo a K tal que su interior $(\widehat{K})^\circ$ es denso en $\widehat{K}$.*

Demostración:

Sean U y K como en la hipótesis. U es abierto, entonces para cada $x \in K$ existe $D(x, r_x) \subseteq U$. Por ser K compacto, podemos cubrir K con una cantidad finita de discos abiertos $\{D(x, r_x)\}_{x \in I}$ donde $I \subseteq K$, con cardinal de I finito, es decir, $K \subset \bigcup\limits_{x \in I} \{D(x, r_x)\}$.

Definamos $\widehat{K} = \bigcup\limits_{x \in I} \overline{D(x, r_x)}$ entonces

$$K \subset \bigcup_{x \in I} D(x, r_x) \subset \bigcup_{x \in I} \overline{D}(x, r_x) = \widehat{K}$$

es claro que $\overline{(\widehat{K})^\circ} = \widehat{K}$. ■

Capítulo 2

Prueba del Teorema de Runge

En este capítulo procedemos a demostrar el teorema de Runge, el cual nos permite aproximar funciones analíticas por sucesiones de funciones racionales. Esta versión fue publicada por Sandy Grabiner en American Math Montly, 83 (1976), 807-808.

Lema 2.1. *Sean $K \subseteq U$ y U una región, existen segmentos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ en $U \backslash K$ (formando poligonales cerradas) tales que para cualquier $f \in A(U)$*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw, \ \ para \ \ cada \ \ z \in k$$

Demostración:

Supongamos que U es una región y que $K \subseteq U$, entonces por lema (1.2) existe K, tal que $\overline{K^\circ} = K$.

Como K es compacto y U^c es cerrado en $\mathbb{C}$, entonces $d(K, U^c) > 0$.

Consideremos $\delta < \frac{1}{2} d(K, U^c)$ y vamos a partir el plano complejo con rectas verticales y horizontales, formando cuadrados de lado δ.(ver figura 2.1)

Sean $R_1, R_2, ..., R_m$ cuadrados que intersectan a K. Por la forma como definimos δ, es claro $R_k \subseteq U$, para cada k.

Considerando los bordes ∂R_k como poligonales orientadas en sentido anti-horario, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \phi = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial R_k} \phi$$

para cada función continua ϕ definida en $\bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$, donde $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ son los lados de los cuadrados que están contenidos en $U \backslash K$.

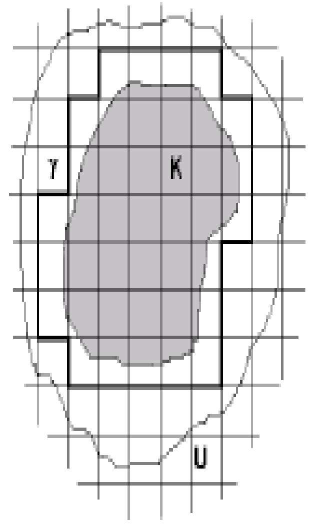

Figura 2.1:

Para $f \in A(U)$ *y* $z \in K \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$ *tenemos que la función*

$$\phi(w) = \frac{1}{2\pi i} . \frac{f(w)}{w-z}$$

es continua en $\bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$.
Supongamos que $z \in R_j^{\circ}$, *por la fórmula de Cauchy*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$$

para cada $z \in K \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$.
Así $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw$ *y* $f(z)$ *son continuas sobre* K *como funciones en* z *e iguales en* $K \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$.
Por hipótesis $\overline{K^{\circ}} = K$, *entonces* $K \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$ *es denso en* K, *por lo que la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$$

de las funciones se da en todo K.

En efecto, para $z_0 \in K$*, existe sucesión* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* $K \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \partial R_k$ *tal que* $z_n \to z_0$.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= f(\lim_n z_n) \\ &= \lim_n f(z_n) \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_k} \frac{f(w)}{w - z_n} dw \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_k} \lim_n \frac{f(w)}{w - z_n} dw \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_k} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \ \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.2. *Sean* γ *una curva rectificable y* K *un conjunto compacto tal que* $K \cap \gamma = \emptyset$. *Para* $f : \gamma \to \mathbb{C}$ *continua y* $\varepsilon > 0$, *existe una función racional* $R(z)$ *con sus polos en* γ *que verifica*

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw - R(z) \right| < \varepsilon$$

para cada $z \in K$.

Demostración:

Supongamos sin perdida de generalidad que $[0, 1]$ *es el dominio de* γ.

Definamos $F : \gamma \times K \to \mathbb{C}$ *por*

$$F(w, z) = \frac{f(z)}{w - z}$$

Es claro que F *es continua, ya que* $K \cap \gamma = \emptyset$ *, más aún* F *es uniformemente continua en el compacto* $K \cap \gamma$ *, esto es, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $(w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \gamma \times K$

$$|(w_1 - z_1) - (w_2 - z_2)| < \delta \ \ \Rightarrow |F(w_1, z_1) - F(w_2, z_2)| < \varepsilon$$

La función $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *es uniformemente continua en* $[0, 1]$, *por lo que existe* $\delta' > 0$ *tal que*

$$|t - t'| < \delta' \ \ \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < \delta$$

Consideremos la partición $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ *con* $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ *y sean* $w_1, w_2, ..., w_n = w_0$ *las imágenes a través de* γ $(w_k = \gamma(t_k))$

Definamos

$$R(z) = \sum_{k=1}^{n} F(w_k, z)(w_k - w_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(w_k)}{w_k - z}(w_k - w_{k-1})$$

la cual es una función racional en la variable z *cuyos polos están en* γ.
Veamos que esta función racional satisface lo pedido:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw - R(z)\right| &= \left|\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(w_k)}{w_k - z}(w_k - w_{k-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\frac{f(w_k)}{w_k - z}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'(t)dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{f(w_k)}{w_k - z}\gamma'(t)dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(w_k)}{w_k - z}\right)\gamma'(t)dt\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(w_k)}{w_k - z}\right| |\gamma'(t)|\, dt \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} |F(\gamma(t), z) - F(w_k, z)|\, |\gamma'(t)|\, dt \\
&< \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon\, |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \varepsilon\left(\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|\, dt + \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|\, dt + ... + \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\gamma'(t)|\, dt\right). \\
&= \varepsilon \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \varepsilon . long\gamma. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente lema es un resultado topológico.

Lema 2.3. *Sean* U *y* V *sub-conjuntos abiertos de* $\mathbb{C}$ *con* $V \subseteq U$ *y* $\partial V \cap U = \emptyset$. *Entonces* V *es unión de componentes conexas de* U.

Demostración:

Consideremos U_0 *componente conexa de* U *que intercepta a* V *y probemos que* $U_0 \subseteq V$.

Definamos

$$\mathcal{X}_V(z) = \begin{cases} 1 & si \;\; z \in V \\ 0 & si \;\; z \notin V \end{cases}$$

Como V *y* $(V^C)^\circ$ *son abiertos y la función* $\mathcal{X}_V$ *es constante en cada una de ellas, entonces tanto en* V *como en* $(V^C)^\circ$ *la función es continua.*

Supongamos que $\mathcal{X}_V$ *es continua en la frontera de* V.

Si $z \in \partial V$ *entonces existen sucesiones* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* V *y* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $(V^C)^\circ$ *tal que* $z_n \to z_0$ *y* $w_n \to z_0$. *Por ser* $\mathcal{X}_V$ *continua en* V *y en* $(V^C)^\circ$,

$$\mathcal{X}_V(z_n) \to \mathcal{X}_V(z_0) \;\; y \;\; \mathcal{X}_V(w_n) \to \mathcal{X}_V(z_0)$$

Pero $\mathcal{X}_V(z_0) = 0$ *y* $\mathcal{X}_V(z_0) = 1$ *lo cual es una contradicción. Por hipótesis* $\partial V \cap U = \emptyset$, *entonces* $\mathcal{X}_V : U \to \{0,1\}$ *es continua en* U. *Como* U_0 *es componente conexa de* U , *entonces,* $\mathcal{X}_V|_{U_0}$*(restricción con respecto a* U_0*) es continua, luego* $\mathcal{X}_V|_{U_0}$ *es constante ya que su dominio es conexo y su rango es discreto. Como* $U_0 \cap V = \emptyset$, *resulta que* $\mathcal{X}_V(U_0) = 1$, *es decir* $U_0 \subseteq V$. ■

Lema 2.4. *Sea* S *un sub-conjunto de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K$ *que contiene al menos un punto en cada componente de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K$.*El conjunto:*

B(S)={f: f es límite uniforme en K de funciones racionales cuyos polos están en S}

es cerrado bajo la suma y la multiplicación.

Demostración:

Sean $f, g \in B(S)$ *entonces por definición , existen* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de funciones racionales con polos en* S *que convergen a* f *y* g *respectivamente, de donde dado* $\varepsilon > 0$ *existen* $N_1 = N_1(\varepsilon)$ *y* $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tales que:*

$$\forall z \in K, \; n \geq N_1 \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall z \in K, \; n \geq N_2 \;\Rightarrow\; |g(z) - g_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Demostraremos primero que f+g $\in$ *B(S)*

$$\begin{aligned} n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\} \;\; &\Rightarrow \;\; |f(z) + g(z) - (f_n(z) + g_n(z))| \\ &= \;\; |f(z) - f_n(z)| + |g(z) - g_n(z)| \\ &< \;\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \;\; \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $f_n + g_n$ *converge a* $f + g$
Ahora demostremos que f.g $\in$ *B(S)*

$$\begin{aligned} n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\} \;\; &\Rightarrow \;\; |f(z).g(z) - f_n(z).g_n(z)| \\ &= \;\; |f(z).g(z) - f(z).g_n(z) + f(z).g_n(z) - f_n(z).g_n(z)| \\ &\leq \;\; |f(z)|.|g(z) - g_n(z)| + |g_n(z)|.|f(z) - f_n(z)|. \end{aligned}$$

g_n *y* f *son acotadas en K, Sea* $M = \text{máx}\{|g_n(z)|, |f(z)| : \forall z \; \in K\}$
$n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} |f(z).g(z) - f_n(z).g_n(z)| \;\; &\leq \;\; M.|g(z) - g_n(z)| + M.|f(z) - R_n(z)| \\ &< \;\; M.\frac{\varepsilon}{2} + M.\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \;\; M\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \;\; \varepsilon.M \;\; \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.5. *Si K es un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$, *entonces*

$$(z - \lambda)^{-1} \in B(S).$$

Demostración:
Consideremos dos casos:

a) $\infty \notin S$

Definamos

$$U = \mathbb{C}\backslash K \;\; y \;\; V = \{\lambda \in U/(z - \lambda)^{-1} \in B(S)\}$$

es claro que $S \subset V \subset U$.

Probemos que $U = V$

Verifiquemos que U *y* V *satisfacen las hipótesis del lema(2.3).Para ello es suficiente demostrar que* V *es abierto y* $\partial V \cap U = \emptyset$

La siguiente afirmación demostrara que V *es abierto.*

Afirmación *: Si* $\lambda \in V$ *y* $0 < |\lambda - \mu| < dist(\lambda, K) \quad \Rightarrow \quad \mu \in V$

En efecto, como $0 < |\lambda - \mu| < dist(\lambda, K)$ *se tiene que* $\mu \in \mathbb{C} - K$ *y para* $z \in K$

$$dist(\lambda, K) \leq |z - \lambda| \ \ y \ \ |\mu - \lambda| < dist(\lambda, K) \ \Rightarrow \left| \frac{\mu - \lambda}{z - \lambda} \right| < 1$$

esto es, existe $r \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ *tal que* $\left| \frac{\mu - \lambda}{z - \lambda} \right| < r$.

Entonces

$$\frac{1}{z - \mu} = \frac{1}{(z - \lambda)} . \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\mu - \lambda}{z - \lambda}\right)} = \frac{1}{(z - \lambda)} . \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu - \lambda}{z - \lambda} \right)^n$$

es límite uniforme en K de funciones racionales cuyos polos están es S. Como B(S) es cerrada bajo el producto, entonces, $(z - \mu)^{-1} \in B(S)$, *es decir* $\mu \in V$, *con lo cual queda demostrada la afirmación.*

Demostremos ahora que $\partial V \cap U = \emptyset$

Sea $w \ \in \partial V$ *y* $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *sucesión en* V *tal que* $\lambda_n \to w$.

Notemos que

$$|\lambda_n - w| \quad \geq \quad dist(\lambda_n, K) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

en caso contrario $w \ \in V$, *por afirmación anterior. Cuando* $n \to \infty$ *en (2.1), obtenemos dist(w,K)=0, lo cual garantiza que* $w \in K$ *y en consecuencia* $w \notin U$, *con lo cual se tiene lo que queremos,* $\partial V \cap U = \emptyset$

Sea U_0 *una componente conexa de* U *que intercepta a S, como* $S \subset V$ *entonces* $U_0 \cap \partial V \neq \emptyset$ *y por lema (2.3),* $U_0 \subset V$.

Pero dado que S tiene un punto en cada componente de U, toda componente conexa C_α *de* U *intercepta a* V. *Entonces*

$$U = \bigcup C_\alpha \subset V$$

y como por definición $V \subset U$,*concluimos que* $U = V$. *Por lo tanto para todo* $\lambda \ \in \mathbb{C} \backslash K$,

$$(z - \lambda)^{-1} \in B(S).$$

b) $\infty \in S$

Tomemos λ_0 *en la componente no acotada de* $\mathbb{C}\backslash K$ *tal que* $dist(\lambda_0, \infty) \leq \frac{1}{2} dist(\infty, K)$ *y* $|\lambda_0| > 2|z|$, *para todo* $z \in K$

Definamos el conjunto

$$S_0 = (\{S\backslash\infty\}) \cup \{\lambda_0\}$$

notemos que S_0 *intercepta a toda componente conexa de* $\mathbb{C}\backslash K$.

Queremos probar $B(S_0) \subseteq B(S)$.

Sea $f \in B(S_0)$, *existe una sucesión de funciones racionales con polos en* S_0, *tal que,* $R_n \to f$ *en K. Si* R_n *tiene sus polos en* $S\backslash\{\infty\}$ *en particular están en S, ahora si* R_n *tiene como polo a* $\{\lambda_0\}$, *entonces aparece la expresión* $(z-\lambda_0)^{-1}$ *en la sucesión* R_n, *la cual podemos aproximar a través de una sucesión de funciones racionales con polos en S. En efecto*

$|\lambda_0| > 2|z|$, *para todo* $z \in K \Rightarrow \left|\frac{z}{\lambda_0}\right| < \frac{1}{2} < 1$

Entonces

$$\frac{1}{z-\lambda_0} = -\frac{1}{\lambda_0}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{\lambda_0}$$

converge uniformemente en K, es decir, $(z-\lambda_0)^{-1}$ *es límite uniforme de funciones racionales con polos en* $\{\infty\} \in S$ *(polinomios), entonces,* $(z-\lambda_0)^{-1} \in B(S)$. *Por lo tanto* $B(S_0) \subseteq B(S)$.$\blacksquare$

Estamos ahora preparados para dar una breve demostración del teorema, objeto de estudio es este trabajo, el Teorema de Runge.

Teorema 2.1. *(**Teorema de Runge**) Sea K un sub-conjunto compacto de* $\mathbb{C}$, *y S un sub-conjunto de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K$ *que contiene al menos un punto en cada componente conexa de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K$. *Entonces toda función analítica f en un entorno de K está en B(S). Esto es, existe una sucesión* $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones racionales cuyos polos están en S, tal que,* $R_n \to f$ *uniformemente en K.*

Demostración:

Sea U un entorno de K, por el lema(2.1), existe $\gamma \in U - K$, tal que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad para \quad cada \quad z \in k$$

Por otra parte el lema(2.2) nos aseguran la existencia de una función racional $R(z)$ con polos en γ que aproxima a f.Ahora bien , si λ es un polo de orden m de $R(z)$,entonces

$$R(z) = \frac{1}{(z-\lambda)^m}.P(z)$$

donde $P(z)$ es analítica y no se anula en λ, luego por el lema anterior,

$$\frac{1}{(z-\lambda)^m} \in B(S)$$

y como $B(S)$ es cerrada bajo el producto, se tiene que f se puede aproximar por funciones con polos en S.

Capítulo 3

Versiones Teorema de Runge

Como comentamos anteriormente, en esta sección demostraremos dos versiones del teorema de Runge. El teorema 3.11 y el teorema 3.12, que podemos encontrar propuestas como ejercicio en [1]. Primero daremos algunas definiciones, teoremas y lemas, la cual serán de gran utilidad para el objetivo de está sección.

Definición 3.1. Sea $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y sea f continua en γ, esto es, $f: \gamma \to \mathbb{C}$ es continua. Definimos la integral de f en γ como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Teorema 3.1. ***(Teorema de la antiderivada)***
Supongamos que $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y que f tiene una primitiva F en Ω, esto es, $F' = f$ en Ω. Entonces para cualquier camino $\gamma \subset \Omega$ se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

en particular, si γ es un camino cerrado en Ω, entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b f'(\gamma(t)).\gamma'(t)dt \\
&= \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) \\
&= F(\gamma(t))|_a^b \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
\end{aligned}$$

Como γ es cerrado en Ω,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0.\blacksquare$$

Corolario 3.1. *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple, $\int_{\gamma} P(z)dz = 0$ donde $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, con $a_k \in \mathbb{C}$*

Demostración:

Basta notar que $F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ es una antiderivada de $P(z)$ y haciendo uso del teorema anterior se obtiene lo deseado.$\blacksquare$

Teorema 3.2. ***(Teorema de Cauchy)***

Supongamos que f es analítica en Ω y $\Gamma = [z_1, z_2, z_3, z_1]$ es un triangulo tal que $\widehat{\Gamma} \subseteq \Omega$ entonces $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ($\widehat{\Gamma}$ es la union de Γ con su interior)

Demostración:

Ver [1], *pág. 5, Cap. 3*

Teorema 3.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, donde Ω es un conjunto simplemente conexo y $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω, entonces f tiene primitiva en Ω.*

Demostración:

Fijemos $z_0 \in \Omega$ y para cada $z \in \Omega$ sea γ_z el camino poligonal que une a z_0 con z y que esta contenido en Ω.

Definamos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw, \ \forall z \in \Omega$$

Probemos $\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0, z]} f(w)dw.$$

Como Ω es abierto, para $z \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$.

Tomemos $|h| < r$, *entonces* $z + h \in D(z, r)$ *y el segmento* $[z + h, z]$ *que une a* $z + h$ *con* z *esta contenido en* $D(z, r) \subset \Omega$.

Así,

$$\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0,z]} f(w)dw = \int_{[z,z+h]} f(w)dw$$

Por teorema 3.2, $\int_\Gamma f(w)dw = 0$ *pues* $\Gamma = [z_0, z + h] \cup [z_0, z] \cup [z, z + h] \subset \Omega$ *forma un triángulo.*

Ahora , como el objetivo es estimar $\left|\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z)\frac{h}{h} \\ &= \frac{f(z)}{h} \int_{[z,z+h]} dw \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)dw \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)dw$$

luego:

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_{[z,z+h]} f(w)dw - \int_{[z,z+h]} f(w)dw\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z,z+h]} |f(w) - f(z)||dw| \end{aligned}$$

Como f *es continua en* $z \in \Omega$, *entonces*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0,\ tal\ que\ |w - z| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(w) - f(z)| < \varepsilon$$

Como $h \to 0$, *tomemos* $|h| < \delta_1$, *así para* $h \in D(0, \delta_1)$ *se tiene* $h+z \in D(z, \delta_1)$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *escogemos* $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, *así* $h \in D(0, \delta)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &\leq \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)||dw| \\ &< \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]}\varepsilon|dw| \\ &= \frac{1}{|h|}.\varepsilon\int_{[z,z+h]}|dw| \\ &= \frac{1}{|h|}.\varepsilon Long([z,z+h]) \\ &= \frac{1}{|h|}.\varepsilon.|h| \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $F'(z) = f(z)$.■

Definición 3.2. Sea f analítica en Ω. Diremos que g es un logaritmo analítico de f si g es analítica en Ω y $e^g = f$.

Teorema 3.4. *Sea f analítica y no nula en el conjunto abierto* Ω.
a) f tiene un logaritmo analítico en Ω *si y solo si la derivada logarítmica* $\frac{f'}{f}$ *tiene una primitiva en* Ω.
b) Equivalentemente $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ *para todo camino cerrado* γ *en* Ω.

Demostración:

a) Si g es un logaritmo analítico de f, entonces $e^g = f$ *y g es analítica en* Ω.

Probemos que la derivada logarítmica $\frac{f'}{f}$ *tiene una primitiva en* Ω. *Basta demostrar que* $g' = \frac{f'}{f}$.

Derivando la ecuación $e^g = f$ *tenemos* $e^g.g' = f'$, *luego despejando* g' *y sustituyendo* $f = e^g$ *se obtiene* $g' = \frac{f'}{f}$.

Recíprocamente $\dfrac{f'}{f}$ *tiene una primitiva* g *en* Ω *, entonces,* $\dfrac{f'}{f} = g$ *y por lo tanto*

$$(f.e^{-g})' = e^{-g}.\, f' - e^{-g}.f.g' = e^{-g}(f' - f.g')$$

es idénticamente nula en Ω*. Esto es,* $f.e^{-g}$ *es constante en cada componente de* Ω*. Si* $f.e^{-g} = K_A$ *en cada componente de* A*, entonces* K_A *nunca es cero y podemos escribir* $K_A = e^{L_A}$ *para alguna constante* L_A*. Entonces* $f = e^{g+L_A}$ *donde* $g + L_A$ *es el logaritmo analítico de* A*.*

Finalmente $U_A\ (g + L_A)$ *es un logaritmo analítico de* f *en* Ω*.*

b)⇒) $\dfrac{f'}{f}$ *tiene una primitiva* g *en* Ω*, entonces* $g' = \dfrac{f'}{f}$*.*

Queremos probar $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Sea γ *un camino cerrado en* Ω*,*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_\gamma g'(z)dz \\
&= \int_a^b g'(\gamma(t)).\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) \\
&= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

⇐) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$*, para todo camino cerrado* γ *en* Ω *y que* f *tiene un logaritmo analítico en* Ω *entonces* $f = e^g$ *con* g *analítica en* Ω*.*

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \int_\gamma \frac{g'.e^g}{e^g} dz = \int_\gamma \frac{d}{dz} g = g$$

Por lo tanto $\dfrac{f'}{f}$ *tiene una primitiva en* Ω*.*

Recíprocamente como $\frac{f'}{f}$ *tiene primitiva en* Ω *entonces* $\frac{f'}{f} = g'$. *Luego*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} log(f) &= \frac{f'}{f} \\ &= g' \\ &= \frac{d}{dz} g \end{aligned}$$

Entonces integrando y aplicando exponencial a ambos lados en la igualdad anterior obtenemos $f = e^g$. ■

Teorema 3.5. *Si* Ω *es un conjunto abierto tal que* $\int_\gamma h(z)dz = 0$ *para toda función analítica* h *en* Ω *y todo camino cerrado* γ *en* Ω, *entonces toda función analítica* f *en* Ω *tiene un logaritmo analítico.*

Demostración:

El resultado es consecuencia del teorema 3.4

Observación 3.1. Si g es un logaritmo analítico de f en Ω, entonces f tiene una raíz n-ésima analítica, a saber $f^{\frac{1}{n}} = \exp^{\frac{g}{n}}$.

Si $f(z) = z$ y $g = Logz$ obtenemos,

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}(log|z|+iarg(z))} \\ &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}arg(z)} \end{aligned}$$

Recordemos que si w es un número complejo tal que $e^w = z$ ($z \neq 0$), entonces w es llamado un logaritmo de z y es denotado por $w = Logz = log|z| + iArgz$ donde

$$Argz = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0,\ y \geq 0 \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Definición 3.3. Sea S un sub-conjunto de $\mathbb{C}$ y $f:\ S \rightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ continua.

Una función $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ es un argumento continuo de f si θ es continua en S y $f(s) = |f(s)|e^{i\theta(s)}$ para cada s $\in$S.

Definición 3.4. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada. Sea $z_0 \notin \gamma$ y θ_{z_0} el argumento continuo de $\gamma - z_0$. El índice o número de vueltas de z_0 con respecto a γ, denotado por $n(\gamma, z_0)$, es

$$n(\gamma, z_0) = \frac{\theta_{z_0(a)} - \theta_{z_0}(b)}{2\pi}$$

Teorema 3.6. *Sea γ un camino cerrado y $z_0 \ \notin \gamma^*$. Entonces*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}dz.$$

Más aún, si f es analítica en un conjunto abierto Ω conteniendo γ^*, y $z_0 \notin (f_\circ\gamma)^*$, entonces

$$n(f_\circ\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}dz.$$

Demostración: *Ver* [1]*, pág. 5, cap.3*

Teorema 3.7. ***(Teorema de Cauchy)***

Sea γ un camino cerrado en Ω tal que $n(\gamma, z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

i) Para toda función analítica f en Ω, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

ii) Si $z \in \Omega\backslash\gamma,$ entonces $n(\gamma, z_0)f(z) = \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{w - z}dw.$

Demostración: *Ver* [1]*, pág. 9, cap.3*

Teorema 3.8. *Sea γ un camino cerrado (o ciclo) en el abierto Ω. Entonces* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *para toda función analítica f en Ω si y solo si* $n(\gamma, z_0) = 0,\ \forall z_0 \notin \Omega$.

Demostración:

Aplicamos el teorema 3.7 para el recíproco y para probar el directo sustituimos $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ *en el teorema 3.6.*■

Teorema 3.9. *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Entonces $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ es conexo si y solo si cada curva cerrada (y cada ciclo) γ en Ω es $\Omega-$homologo a 0, esto es,* $n(\gamma, z) = 0,\ \forall z \notin \Omega$

Demostración:

Ver [1], *Capitulo 3, pág. 15.*

Lema 3.1. *Sea f una función analítica no nula en Ω. Las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *f tiene un logaritmo analítico en Ω.*
2. *f tiene una raíz k-ésima analítica en Ω, $\forall k \in \Omega$.*
3. *f tiene una raíz k-ésima analítica en Ω para infinitos valores enteros positivos de k.*

Demostración:

a)$\Rightarrow$ b) y b)$\Rightarrow$ c) Son obvias por observación 1.

c)$\Rightarrow$ d) Sea g_k analítica en Ω con $f = g_k^k$, entonces $\dfrac{f'}{f} = k.\dfrac{g_k'}{g_k}$. *Sea γ camino cerrado en Ω,*

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}dz = \frac{1}{2k\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \ \rightarrow 0$ *cuando* $k \rightarrow \infty$ *para una subsucesión apropiada.*

Por teorema 3.6,

$$n((g_k)_{\circ}\gamma, 0) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Entonces el índice es un entero, $n((g_k)_{\circ}\gamma, 0) = 0$ *para* k *grande. Por tanto* $\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$.

Por teorema 3.4, f *tiene un logaritmo analítico en* Ω.■

Teorema 3.10. ***(Teorema de Cauchy)***

Sea Ω *un conjunto abierto de* $\mathbb{C}$. *Las siguientes propiedades son equivalentes*

1. $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ *es conexo.*
2. $n(\gamma, z) = 0$ *para cada camino cerrado* γ *en* Ω *y cada punto* $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.
3. $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ *para cada camino cerrado* γ *en* Ω *y cada funcion analítica* f *en* Ω.
4. *Toda función analítica en* Ω *tiene primitivas en* Ω.
5. *Toda función analítica no nula en* Ω *tiene un logaritmo analítico.*
6. *Toda función analítica no nula en* Ω *tiene una raíz n-esima analítica,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

1)$\Leftrightarrow$ *2) Aplicar teorema 3.9*

2)$\Leftrightarrow$ *3) Aplicar teorema 3.8*

3)$\Leftrightarrow$ 4) Aplicar teorema 3.3 y Aplicar teorema 3.1

3)$\Rightarrow$ 5) Aplicar teorema 3.5

5)$\Leftrightarrow$ 6) Lema 3.1.

5)$\Rightarrow$ 2) Sea $f(z) = z - z_0,\ z \in \Omega,\ z_0 \in \Omega$. *Entonces* f *tiene un logaritmo analítico en* Ω. *Sea* γ *un camino cerrado en* Ω, *entonces por teorema 3.4,* $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ *para todo camino cerrado* γ *en* Ω.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = 0\\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = 0\end{aligned}$$

Es decir $n(\gamma, z) = 0$ *(por teorema 3.6)*$\blacksquare$

Definición 3.5. Un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que satisfaga alguna (ó todas) de las condiciones del teorema anterior es **simplemente conexo**.

Lema 3.2. *Demostrar que cada componente de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ *contiene una componente de* $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$. *Donde* K_n *son los conjuntos compacto dados en la definición (1.26).*

Demostración:

Sea $\Omega_n = \widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$.

En el capitulo 1, antes de demostrar la proposición (1.1) obtuvimos que

$$[K_n]^c = \{z : |z| > n\} \ \cup \ (\bigcup_{w\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n}))$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= \widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n \\
&= \widehat{\mathbb{C}} \cap (K_n)^c \\
&= (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \cap (K_n)^c \\
&= [(\mathbb{C} \cup \{\infty\})] \cap [\{z : |z| > n\} \cup (\bigcup_{w\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n}))] \\
&= [[\mathbb{C} \cup \{\infty\}] \cap \{z : |z| > n\}] \cup [[\mathbb{C} \cup \{\infty\}] \cap (\bigcup_{w\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n})] \\
&= \{z : |z| > n\} \cup \{\infty\} \cup (\bigcup_{w\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n}) \cup \{\infty\} \\
&= \{\infty\} \cup \{z : |z| > n\} \cup (\bigcup_{w\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega} D(w, \frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Sea T una componente en Ω_n, ya que T es un conjunto conexo máximal de Ω_n entonces $\{\infty\} \cup \{z : |z| > n\} \subseteq T$ ó $D(w, \frac{1}{n}) \subseteq T$ (para algún $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$).
y en cualquiera de los casos T está en $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ ya que $\Omega_n \supseteq \widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ y T debe contener alguna componente conexa de $\Omega_n \supseteq \widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$.$\blacksquare$

Teorema 3.11. *Sea Ω un conjunto abierto y sea S un conjunto conteniendo al menos un punto en cada componente de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$. Demostrar que si $f \in A(\Omega)$, entonces existe una sucesión $\{R_n\}$ de funciones racionales con polos en S tal que $R_n \to f$ uniformemente en sub-conjuntos compactos de Ω.*

Demostración:

Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compactos como en la definición (1.26) y satisfaciendo las propiedades de la proposición (1.1).

Fijemos $n\in \mathbb{N}$.

Por lema anterior, cada componente de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ contiene una componente de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$, entonces cada componente de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ contiene al menos un punto de S. (por hipótesis)

Supongamos que $f \in A(\Omega)$, entonces por teorema 2.1 existe una sucesión $\{R_n\}$ de funciones racionales cuyos polos pertenecen a S, tal que, $R_n \to f$ uniformemente en K_n. Esto es $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n \geq N_1 \;\Rightarrow\; |R_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \;\; \forall z \in K_n.$$

Sea K un conjunto compacto en Ω, por propiedad 2 de la proposición (1.1), existe $N_2 \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que $K \subset K_{N_2}$.

$$n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\} \Rightarrow |R_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \;\; \forall z \in K. \blacksquare$$

Teorema 3.12. *Sea Ω un sub-conjunto abierto de $\mathbb{C}$ equivalen :*

1. *Ω es simplemente conexo.*

2. *Para toda $f \in A(\Omega)$, existe una sucesión $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios tal que $P_n \to f$ uniformemente sobre sub-conjuntos compactos de Ω.*

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2) Como Ω es simplemente conexo, $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ es conexo, ahora bien, cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ contiene una componente de $\mathbb{C}\backslash\Omega$, luego, si $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ no fuera conexo, tendría al menos dos componentes y así $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ también tendría al menos dos componentes, es decir, $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ no sería conexo, lo cual es una contradicción ya que $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ es conexo.
En consecuencia $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ es conexo (tiene una única componente conexa). Ahora bien, como K_n es compacto (es acotado), $\{\infty\} \in \widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$.
Sea $S = \{\infty\}$, entonces S intercepta a cada componente conexa (una sola) de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash K_n$ para cada n. Entonces por teorema de Runge existe R_n función racional con polos en $S = \{\infty\}$(un polinomio) que aproxima a f. Luego f puede aproximarse por polinomios.
2) $\Rightarrow$ 1) Demostremos que Ω es simplemente conexo, veamos que el teorema de Cauchy se satisface.

Sea $\gamma \subset \Omega$ *(curva de Jordan) y* $f \in A(\Omega)$ *entonces*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} P_n(z)dz \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\gamma P_n(z)dz \\ &= o \ \ (\ Por\ teorema\ anti - derivada) \end{aligned}$$

luego por definición (3.5) Ω *es simplemente conexo.*■

Referencias Bibliograficas

[1] R.B.Ash and W.P.Novinger, Complex Variables, Second Edition, version electronica ($http://www.math.uiuc.edu/\sim r-ash/CV.html$), 2004.

[2] Walter Rudín, Real Complex Analysis, Tercera Edición, McGraw-Hill,EUA,1998.

[3] S.Lang, Complex Analysis, Fourth Edition, Springer-Verlag, New york,1999.

[4] J. Duncan, The Elements of Complex Analysis, John Wiley δ Sons, London.New York.Sydney, 1968.

[5] John B. Conway, Functions of One Complex Variable, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] Jame W. Brown y Ruel V. Churchill, Variable Compleja y Aplicaciones, Séptima Edición, McGraw-Hill, España, 2004.

[7] Louis L. Pennisi, Elements of Complex Variables, Primera Edición, Holt Rinehart and Winston, New York,Toronto,London, 1963.

[8] Sandy Grabiner (1976).American Math. Montly 83. 807-808.

[9] Martín Mereb, El teorema de aproximacion de Runge y sus aplicaciones, version electronica ($http://www.union-matematica.org.ar/\ reunion\_anual/reunion05/trabajos05/mereb.pdf$), 2005.