UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“ El Teorema del Número Primo”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Javier Enrique Colmenarez.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Complejo.
Tutor: M.Sc. Miguel J. Vivas C

Barquisimeto, Venezuela. Noviembre de 2008

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

" El Teorema del Número Primo"

presentado por la ciudadana Javier Enrique Colmenarez. titular de la Cédula de Identidad No. 16.139.489, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios Todopoderoso, ya que sin Él nada es posible. Y a mi Madre por su ejemplo de lucha y tenacidad.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de todo corazón a todas aquellas personas que me ayudaron y compartieron conmigo esta bonita etapa de mi vida y mucho antes de esta.

Principalmente a Dios Todopoderoso por ser mi guía espiritual, ayudarme a creer en mi mismo para lograr con éxitos mis metas trazadas y mantener viva esa fe que siento por todas las cosas que se logran mediante la bendición de mi Dios.

A mi madre Maria del Carmen Colmenarez Guedez que ha sido madre y padre a la vez desde mi niñez. Madre te doy las gracias por educarme y enseñarme a ser un hombre de bien en el mundo, todos mis exitos también te lo debo a tí.

A mi padrasto Nicolás Jiménez por ayudarme y apoyarme siempre en mi vida a seguir adelante.

A mis hermanos Wilfredo, Katiusca, David y Frederick quienes comparten conmigo días tras días grandes emociones de mi vida y son testigos de mi dedicación y lucha durante este tiempo.

A mi novia Elvimar Pinto Sanchez gran pilar fundamental por su apoyo incondicional y amor hacia mí para llegar obtener con éxito mis metas a trazar , ¡Gracias mi vida!, también agradezco a toda su familia por estar a mi lado tendiendome una mano amiga y alentadora.

A mis compañeros de estudio Efren Escalona, Rafael Martinez y Yankis Linarez por su valiosa ayuda y gran apoyo por incentivarme en este ámbito matemático.

También les doy mis gracias a todos los profesores que me ayudaron en mi formación como estudiante y en especial al profesor Miguel Vivas por su gran paciencia y valiosa colaboración fue posible mi trabajo de grado. La UCLA mi segunda casa en donde me forme profesionalmente.

Resumen

Los números primos y sus propiedades fueron estudiados de manera exhaustiva por los matemáticos de la antigua Grecia, que estaban interesados en los números, por su misticismo y sus propiedades numerológicas. Desde esa fecha hasta entonces se ha trabajado mucho acerca de los números primos, teniendo un gran desarrollo en el siglo XVIII y siglo XIX, entre los cuales se tiene el famoso Teorema del Número Primo (T.N.P), cuyo enunciado es: "Si $\pi(x)$ es el número de primos menor o igual a x, entonces $x^{-1}\pi(x)\ln(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$" . El Teorema del Número Primo, fue conjeturado por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) en 1778 y la conjetura fue posteriormente refinada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) con la expresión que actualmente se asocia más frecuentemente al teorema. Sin embargo, a finales del siglo XIX el teorema fue finalmente establecido (independientemente) por Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) y Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962) en el año 1896. Así, todas las pruebas del T.N.P, datan desde Hadamard y de la Vallée Poussin hasta el año 1949 cuando Paul Erdös (1913-1996) y Atle Selberg (1917-2007) consiguieron exitosamente una prueba elemental, donde usaron métodos de variable compleja en un camino esencial. En 1980, Donald.J.Newman (1930-2007) publica una nueva prueba del Teorema del Número Primo, el cual hizo un buen uso del análisis complejo; sin embargo, esta prueba representa una significante simplificación de las pruebas anteriores. En este trabajo desarrollaremos una prueba del T.N.P, cuya demostración es basada en el artículo publicado por Donald.J.Newman.

Índice

Capítulo 1

Función Zeta de Riemann y Algunos Conceptos Preliminares

En este capítulo se presentaran algunas definiciones básicas, proposiciones y teoremas clásicos del análisis complejo y análisis matemático, además se presentará la función Zeta de Riemann y algunas de sus propiedades que serán de gran utilidad para la demostración del Teorema del Número Primo y finalmente presentaremos "Una Versión Equivalente del Teorema del Número Primo".

Definición 1.1. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un dominio, se dice que una función $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ es **analítica** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si f es diferenciable en una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ de z_0, así la función f **es analítica en** $\mathcal{D}$ si es analítica en todo $z_0 \in \mathcal{D}$.

Definición 1.2. Un punto z_0 es llamado un **punto singular** o una singularidad de la función $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en z_0, pero toda vecindad de z_0 contiene al menos un punto donde $f(z)$ es analítica. z_0 es una **singularidad aislada**, si $f(z)$ no es analítica en z_0, pero es analítica en cualquier vecindad de z_0 suprimiendo z_0.

Definición 1.3. Se define la ***Transformación de Mellin*** de f como,

$$\mathcal{M}\{f\} = \int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx,$$

donde f es una función real a valores reales definida sobre $(0, +\infty)$.

Ejemplo 1.1. Si $f(x) = e^{-nx}$, donde $n > 0$, entonces

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-nx} dx,$$

tomando $nx = t$, se tiene

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = \frac{1}{n^p} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p)}{n^p}.$$

Para saber más sobre las *transformaciones de Mellin* y sus aplicaciones ver [3]. Cap8 págs. 339-365.

Definición 1.4. (*Función O grande*): Sean f, g definidas sobre $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $g(x) > 0$, se dice $f = O(g)$ (se lee f es O grande de g), si existen constantes C y $k > 0$ tales que

$$f(x) \leq Cg(x) \quad \text{para todo } x > k.$$

Ejemplo 1.2. Demostrar que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es $O(x^2)$.

Tomemos $k = 1$, supongamos que $x > 1$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} < \frac{x^2 + 2x^2 + x^2}{x^2} = 4,$$

escogiendo $C = 4$, se concluye que $x^2 + 2x + 1$ es $O(x^2)$.

Proposición 1.1. *(M.Weierstrass). Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números reales no-negativos tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mid f_n(z) \mid \leq M_n$, $\forall z \in \Omega$, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre Ω.*

Demostración: Ver [4].

Proposición 1.2. *(Sumas por Parte). Sea* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones de números complejos. Si* $\Delta b_k = b_{k-1} - b_k$*. Entonces*

$$\sum_{k=r}^{s} a_k \Delta b_k \;=\; a_{s+1}b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{k=r}^{s} b_{k+1}\Delta a_k.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{s} a_k \Delta b_k &= \sum_{k=r}^{s} a_k(b_{k+1} - b_k) \\
&= a_r(b_{r+1} - b_r) + a_{r+1}(b_{r+2} - b_{r+1}) + ... + a_{s-1}(b_s - b_{s-1}) + a_s(b_{s+1} - b_s) \\
&= a_r b_{r+1} - a_r b_r + a_{r+1}b_{r+2} - a_{r+1}b_{r+1} + ... + a_{s-2}b_{s-1} - a_{s-2}b_{s-2} \\
&+ a_{s-1}b_s - a_{s-1}b_{s-1} + a_s b_{s+1} - a_s b_s
\end{aligned}$$

luego, sumando y restando $a_{s+1}b_{s+1}$

$$\begin{aligned}
&= -a_r b_r + b_{r+1}(a_r - a_{r+1}) + b_{r+2}(a_{r+1} - a_{r+2}) + ... + b_{s-1}(a_{s-2} - a_{s-1}) \\
&+ b_s(a_{s-1} - a_s) + a_s b_{s+1} - a_{s+1}b_{s+1} + a_{s+1}b_{s+1} \\
&= -a_r b_r + b_{r+1}(a_r - a_{r+1}) + b_{r+2}(a_{r+1} - a_{r+2}) + ... + b_s(a_{s-1} - a_s) \\
&+ b_{s+1}(a_s - a_{s+1}) + a_{s+1}b_{s+1} \\
&= a_{s+1}b_{s+1} - a_r b_r - b_{r+1}(a_{r+1} - a_r) - b_{r+2}(a_{r+2} - a_{r+1}) - .... - b_s(a_s - a_{s-1}) \\
&- b_{s+1}(a_{s+1} - a_s) \\
&= a_{s+1}b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{k=r}^{s} b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\
&= a_{s+1}b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{k=r}^{s} b_{k+1}\Delta a_k.
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.3. *Suponga que* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *y sea* φ *una función continua de variable compleja en el espacio producto* $\Omega \times [a,b]$*. Suponga que para cada* $t \in [a,b]$*, la función* $z \to \varphi(z,t)$ *es analítica en* Ω*. Definamos* F *en* Ω *por* $F(z) = \int_a^b \varphi(z,t)dt$*,* $z \in \Omega$*. Entonces,* F *es analítica en* Ω *y* $F'(z) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,t)dz$*,* $z \in \Omega$*.*

Demostración: Ver [5].

Teorema 1.1. *f(z) tiene un polo de orden m, si y sólo si,* $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ *donde* $g(z)$ *es analítica en* z_0 *y* $g(z_0) \neq 0$.

Demostración: Ver [6].

Teorema 1.2. *Suponga que* f *es una función de valores complejos la cual es contínua en la trayectoria* γ *y* $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \gamma$. *Si* L *es la longitud de la trayectoria, entonces*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML.$$

Demostración: Ver [4].

Lema 1.1. ***(Vitali)****.* *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones acotadas en* $A(\Omega)$ *donde* Ω *es conexo. Suponga que* $\{f_n\}$ *convergen puntualmente en* $S \subseteq \Omega$ *y* S *tiene un punto límite en* Ω. *Entonces* $\{f_n\}$ *es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de* Ω, *por lo tanto converge uniformemente en subconjuntos compactos de* Ω *a alguna* $f \in A(\Omega)$.

Demostración: Ver [5].

Corolario 1.1. *Si* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una serie de funciones analíticas* $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, *que converge uniformemente sobre cada* $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset \Omega$, *entonces f(z) es analítica en* Ω *y*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, *converge uniformemente sobre cada* $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset \Omega$.

Demostración: Ver [4].

1.1. Función Zeta de Riemann y sus propiedades.

La función Zeta de Riemann, llamada así en honor a Bernhard Riemann, tiene una gran importancia en la teoría de números, por su relación con la distribución de números primos.

Definición 1.5. La función Zeta de Riemann ζ es definida por $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, donde $n^z = e^{zln(n)}$. En general solo se pide que $z \in \mathbb{C}$ con $R_e(z){>}1$

Teorema 1.3. *La función Zeta de Riemann ζ, converge absolutamente en Ω donde $\Omega{=}\{z \in \mathbb{C} : R_e(z){>}1\}$ y converge uniformemente en $\Omega_\delta{=}\{z \in \mathbb{C} : R_e(z){\geq}1 + \delta; \forall\delta{>}0\}$.*

Demostración:
Sea $z = x + iy$, con $x > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{(-x-iy)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{(-x-iy)ln(n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{-xln(n)}\right| \left|e^{-yln(n)i}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{-xln(n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

la serie converge ya que $R_e(z){=}x > 1$, así la función ζ converge absolutamente.

Ahora, sea $\{M_n\}$ la sucesión $M_1 = 1, M_2 = 1/2^p, M_3 = 1/3^p, .., M_n = 1/n^p, ...$ donde $1 < p \leq x$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \text{ ya que } p > 1$$

tomando $p = 1 + \delta$ con $\delta > 0$

como $1 < p \leq x \Rightarrow n^p \leq n^x \Rightarrow \dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^p}$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z)| = \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^p} = M_n$$

para todo $z \in \Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : R_e(z) \geq 1 + \delta;\ \delta > 0\}$

así, por proposición 1.1 (M.Weierstrass), la serie converge uniformemente sobre Ω_δ.

■

1.1.1. Propiedades acerca de la Función Zeta de Riemann.

Proposición 1.4. *Para $R_e(z) > 1$, la función Zeta de Riemann $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ es equivalente al producto $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-z}}$ donde $\{p_j\}$ es la sucesión creciente de números primos.*

Demostración:

Sea $R_e(z) > 1$ y sea $\{p_j\}$ la sucesión creciente de números primos ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...$)

$$\frac{1}{1 - p_j^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_j^z}\right)^n \text{ converge si } \left|\frac{1}{p_j^z}\right| = \frac{1}{p_j^{R_e(z)}} < 1$$

consideremos para m=2 el siguiente producto parcial:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{2} \frac{1}{1 - p_j^{-z}} &= \prod_{j=1}^{2} (1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + ...) \\
&= (1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{2^{2z}} + ...)(1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{3^{2z}} + ...) \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{nz}})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{nz}})
\end{aligned}$$

Sea $a_n = \dfrac{1}{2^{nz}}, b_n = \dfrac{1}{3^{nz}}$ y $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, luego como cada serie es absolutamente convergente tenemos por el producto de Cauchy que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ es también convergente, ahora

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{kz}}\frac{1}{3^{(n-k)z}} &= 1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^{2z}}+\frac{1}{2^z3^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\frac{1}{3^{3z}}+\frac{1}{2^z3^{2z}}+\frac{1}{2^{2z}3^z}+\frac{1}{2^{3z}}\\ &+\frac{1}{3^{4z}}+\frac{1}{2^z3^{3z}}+\frac{1}{2^{2z}3^{2z}}+\frac{1}{2^{3z}3^z}+\frac{1}{2^{4z}}+....\end{aligned}$$

Luego, ordenando los términos de la serie de acuerdo al crecimiento de los denominadores, obtenemos la siguiente serie cuyo término general es $\dfrac{1}{2^{a_1z}3^{a_2z}}$

$$\sum\frac{1}{2^{a_1z}3^{a_2z}}=\sum\frac{1}{p_1^{a_1z}p_2^{a_2z}}=\sum\frac{1}{n^z}\quad \text{donde n}=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\quad \text{con } a_i\geq 0\qquad i\in\{1,2\}$$

Así, para el caso m=k tenemos el siguiente producto parcial

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-p_j^{-z}}=\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j^z}+\frac{1}{p_j^{2z}}+...\right)$$

De manera análoga al caso anterior, si multiplicamos todas estas series (absolutamente convergente) y ordenamos los términos de acuerdo al crecimiento de los denominadores obtenemos otra serie convergente cuyo término general es:

$$\frac{1}{p_1^{a_1z}p_2^{a_2z}p_3^{a_3z}...p_k^{a_kz}}=\frac{1}{n^z}\quad \text{donde}\quad n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}...p_k^{a_k}\quad \text{con } a_i\geq 0\quad i\in\{1,2\}$$

$\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-p_j^{-z}}=\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j^z}+\frac{1}{p_j^{2z}}+...\right)=\sum_{1}\frac{1}{n^z}$ donde $\displaystyle\sum_{1}\frac{1}{n^z}$ está extendida a aquellos n cuyos factores primos son todos menores o iguales a p_k, luego

$\zeta(z)-\sum_{1}\frac{1}{n^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}-\sum_{1}\frac{1}{n^z}=\sum_{2}\frac{1}{n^z}$ donde $\sum_{2}\frac{1}{n^z}$ está extendida a aquellos n que poseen por lo menos un divisor primo mayores que p_k, luego

$$\left|\zeta(z)-\sum_{1}\frac{1}{n^z}\right|=\left|\sum_{2}\frac{1}{n^z}\right|\leq\sum_{2}\left|\frac{1}{n^z}\right|\leq\sum_{n>p_k}\frac{1}{n^{R_e(z)}};\ \text{ con } n\in\mathbb{N}$$

Cuando $k\to\infty$ la ultima suma tiende a 0 ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ converge.

Así, tenemos $\zeta(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_j^{-z}}$. ■

Teorema 1.4. *$\zeta(z)$ es analítica en el semiplano $R_e(z)>1$.*

Demostración:

Sean Ω_0=$\{z\in\mathbb{C}:R_e(z)>1\}$, $\zeta:\Omega_0\longrightarrow\mathbb{C}$, dada por $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, luego tomando $f_n:\Omega_0\longrightarrow\mathbb{C}$, una sucesión de funciones analíticas dadas por: $f_n(z)$=$\frac{1}{n^z}$. Por teorema 1.3, la función ζ converge uniformemente sobre $\Omega_\delta\subset\Omega_0$, Ω_δ como en el teorema 1.3, en particular converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω_δ, luego el corolario 1.1, nos garantiza que ζ es analítica en Ω_0. ■

Lema 1.2. *Para $R_e(z)>1$ se cumple*

$$n\left[\frac{1}{(n+1)^z}-\frac{1}{n^z}\right]=-nz\int_{n}^{n+1}t^{-z-1}dt=-z\int_{n}^{n+1}[t]t^{-z-1}dt \tag{1.1}$$

y también se cumple

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z}=1+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z} \tag{1.2}$$

Demostración:

Para obtener la primera igualdad de (1.1)

$$\int_{n}^{n+1} t^{-z-1}dt = \left[\frac{t^{-z}}{-z}\right]_{n}^{n+1} = -\frac{1}{z(n+1)^z} + \frac{1}{zn^z} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right]$$

por tanto

$$n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right] = -nz\int_{n}^{n+1} t^{-z-1}dt.$$

Como t varía entre n y $n+1$, se tiene que n puede escribirse como $[t]$(parte entera), $\forall t \in [n, n+1]$, así

$$-nz\int_{n}^{n+1} t^{-z-1}dt = -z\int_{n}^{n+1} [t]t^{-z-1}dt$$

con lo cual se obtiene la segunda igualdad de (1.1) por tanto se obtiene (1.1).

Ahora, veamos que se verifica la igualdad (1.2)

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{1^z} + \sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z}$$

■

Teorema 1.5. *La función $\zeta(z) - 1/(z-1)$ tiene extensión analítica en el semiplano derecho $R_e(z) > 0$. Así ζ tiene extensión analítica en $\{z \in \mathbb{C}/R_e(z) > 0, z \neq 1\}$ y tiene un polo simple con residuo 1 en z=1.*

Demostración:

Para los $R_e(z) > 1$, aplicando la fórmula de sumas por partes con $a_n = n$ y $b_n = \dfrac{1}{n^z}$ obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{k-1} n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right] = \frac{1}{k^{z-1}} - 1 - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z}$$

luego,

$$1+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z} \;=\; \frac{1}{k^{z-1}}-\sum_{n=1}^{k-1}n\left[\frac{1}{(n+1)^z}-\frac{1}{n^z}\right],$$

el lema 1.2 garantiza que

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z} \;=\; \frac{1}{k^{z-1}}+z\sum_{n=1}^{k-1}\int_{n}^{n+1}[t]t^{-z-1}dt,$$

por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{k-1}\int_{n}^{n+1}[t]t^{-z-1}dt \;=\; \int_{1}^{k}[t]t^{-z-1}dt,$$

para obtener

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z} \;=\; \frac{1}{k^{z-1}}+z\int_{1}^{k}[t]t^{-z-1}dt,$$

cuando $k\to\infty$, obtenemos la fórmula integral

$$\zeta(z) \;=\; z\int_{1}^{\infty}[t]t^{-z-1}dt, \quad \text{para los } R_e(z)>1. \tag{1.3}$$

Consideremos ahora la integral en (1.3) con [t]=t,

$$z\int_{1}^{\infty}tt^{-z-1}dt \;=\; 1+\frac{1}{z-1} \tag{1.4}$$

combinando (1.3) y (1.4) nosotros podemos escribir

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1} \;=\; 1+z\int_{1}^{\infty}([t]-t)t^{-z-1}dt.$$

Fijemos $k>1$, $[1,k]\subset\mathbb{R}$, se define $\varphi:\mathbb{C}\text{x}[1,k]\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua dada por:

$$\varphi(z,t) \;=\; ([t]-t)t^{-z-1},$$

la cual es analítica, en efecto:

$([t]-t)<1,\ \forall t\in[1,k]$ y $t^{-z-1}=t^{-(z+1)}=e^{-(z+1)(\ln|t|+iArg(t))}$, es analítica para todo $z\in\mathbb{C}$, luego φ es analítica para todo $z\in\mathbb{C}$, así aplicando la proposición 1.3,

$$\int_1^k \varphi(z,t)dt \quad = \quad \int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt$$

es analítica para todo $z\in\mathbb{C}$. También para $R_e(z)>0$, la integral es acotada, puesto que

$$\left|\int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt\right| \leq \int_1^k t^{-R_e(z+1)}dt \leq \int_1^\infty t^{-1-R_e(z)}dt \quad = \quad \frac{1}{R_e(z)}$$

Así, la sucesión de funciones analíticas $f_k(z)=\int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt$ es uniformemente acotadas en subconjuntos compactos $S\subset\Omega=\{z\in\mathbb{C}/R_e(z)>0\}$. Por tanto, por lema 1.1 (Vitali) la función límite

$$f(z) \quad = \quad \int_1^\infty ([t]-t)t^{-z-1}dt$$

(en este caso es límite uniforme en $S\subset\Omega$) es analítica en Ω y así $1+zf(z)$ es analítica en Ω. Note que $1+zf(z)$ coincide con $\zeta(z)-\dfrac{1}{z-1}$, para los $R_e(z)>1$ con lo que se tiene el requerimiento de la extensión analítica de ζ a $R_e(z)>0$.

■

Observación 1.1. La fórmula producto de Euler (Proposición1.4) implica que ζ no tiene ceros en $R_e(z)>1$, ¿qué podemos decir acerca de los ceros de ζ en $0<R_e(z)\leq 1$?. El próximo teorema afirma que ζ no tiene ceros en la línea $R_e(z)=1$. El cual es un hecho crucial para la prueba del Teorema del Número Primo (T.N.P).

Teorema 1.6. *La función zeta de Riemann no tiene ceros en $R_e(z) = 1$, $(z-1)\zeta(z)$ es analítica y no-nula en una vecindad de $R_e(z) \geq 1$.*

Demostración:

Fijemos un número real $y \neq 0$ y consideremos la función auxiliar

$$h(x) \;=\; \zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \text{ con } x > 1,$$

por la fórmula producto de Euler, si $R_e(z) > 1$ entonces

$$\ln|\zeta(z)| \;=\; -\sum_{j=1}^{\infty} \ln|1-p_j^{-z}| = -R_e\left(\sum_{j=1}^{\infty} \log\left(1-p_j^{-z}\right)\right) = R_e\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nz}\right)$$

donde usamos la expasión $-\log(1-w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}$ *si* $|w| < 1$.

$$\begin{aligned}
\ln|h(x)| &= 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+iy)| + \ln|\zeta(x+i2y)| \\
&= 3R_e\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)p_j^{-nx}\right) + 4R_e\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)p_j^{-nx-iny}\right) \\
&+ R_e\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)p_j^{-nx-i2ny}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)p_j^{-nx}\right) R_e\left(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny}\right)
\end{aligned}$$

para $\theta = ny\ln(p_j)$

$$\begin{aligned}
p_j^{-iny} &= e^{-iny\ln(p_j)} = \cos(-ny\ln(p_j)) - isen(ny\ln(p_j)) = \cos(\theta) - isen(\theta) \\
p_j^{-i2ny} &= e^{-i2ny\ln(p_j)} = \cos(-2ny\ln(p_j)) - isen(2ny\ln(p_j)) = \cos(2\theta) - isen(2\theta)
\end{aligned}$$

tenemos que $R_e\left(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny}\right)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) &= 3 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1 \\
&= 2(\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + 1) \\
&= 2(\cos(\theta)+1)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

por tanto $\ln|h(x)| \geq 0$ y en consecuencia

$$|h(x)| = \left|\zeta^3(x)\right| \left|\zeta^4(x+iy)\right| |\zeta(x+i2y)| \geq 1.$$

Luego

$$\frac{|h(x)|}{x-1} = |(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 |\zeta(x+i2y)| \geq \frac{1}{x-1}. \quad (1.5)$$

Supongamos que $\zeta(1+iy)=0$, entonces la desigualdad izquierda se aproxima al límite finito $|\zeta'(1+iy)|^4 |\zeta(1+i2y)|$ cuando $x \longrightarrow 1^+$, en efecto.

Sean $f,g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = 1+iy \in D$, f,g son analíticas dadas por $f(z) = \zeta(x+iy)$ y $g(z) = x-1$, además, $f(z_0) = g(z_0) = \zeta(1+iy) = 0$ y $g'(z_0) = g'(1+iy) = 1 \neq 0$, donde $D = \{z \in \mathbb{C} : R_e(z) > 0\}$, luego

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\zeta(x+iy)}{x-1} = \frac{\zeta(x+iy)-f(z_0)}{x-1-g(z_0)} = \frac{\frac{\zeta(x+iy)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{x-1-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$\lim_{z\to z_0^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0^+} \frac{\zeta(x+iy)-\zeta(1+iy)}{x-1} = \zeta'(1+iy) = f'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0^+} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0^+} \frac{x-1-0}{x-1} = 1 = g'(z_0)$$

así

$$\lim_{z\to z_0^+} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \zeta'(1+iy). \quad (1.6)$$

Por otro lado

$$\lim_{z\to z_0^+} \zeta(1+i2y) = \zeta(1+i2y), \quad (1.7)$$

luego como ya sabemos que ζ tiene residuo 1 en $z=1$, se tiene por (1.6) y por (1.7) que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0^+} \frac{|h(x)|}{x-1} &= \lim_{z\to z_0^+} |(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 |\zeta(x+i2y)| \\ &= |\zeta'(1+iy)|^4 |\zeta(1+i2y)| < +\infty\end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{z\to z_0^+} \frac{|h(x)|}{x-1} \quad < \quad +\infty. \tag{1.8}$$

En el lado derecho de la desigualdad de (1.5) se tiene

$$\lim_{z\to z_0^+} \frac{1}{x-1} \quad = \quad +\infty, \tag{1.9}$$

luego por (1.8) y (1.9) se tiene $|\zeta'(1+iy)|^4 |\zeta(1+i2y)| \geq +\infty$, la cual es una contradicción. Por lo tanto $\zeta(1+iy) \neq 0; \forall y \neq 0$. Así, la función ζ no tiene ceros en la recta $R_e(z) = 1$. ■

Observación 1.2. La ingeniosa introducción de la función auxiliar h es debido a Mertens (1898), ahora en cuanto a los ceros de ζ en $R_e(z)>0$ deberian encontrarse en la franja $0<R_e(z)<1$. El estudio de los ceros de ζ en esta franja ha sido sujeto a una intensa investigación por varios matemáticos. Riemann publicó en un seminario de 1859 donde consideró que probablemente todos los ceros de ζ en la franja $0<R_e(z)<1$ (llamada la franja crítica), están en la línea $R_e(z) = \frac{1}{2}$. Este hecho es conocido como la hipótesis de Riemann, el cual hizo dicha conjetura y aún está sin resolver. Para más información sobre este tema visitar http://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html.

Vamos a introducir la función Von Mangoldt Λ para luego obtener una representación integral para $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$.

Se define la función

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & si \quad n = p^m \quad para \quad m \geq 1 \\ 0 & \text{E.O.C} \end{cases}$$

ahora definamos, $\psi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\psi(x) \quad = \quad \sum_{n\leq x} \Lambda(n). \tag{1.10}$$

Una expresión equivalente para ψ es $\psi(x) = \sum_{p \leq x} m_p(x)\ln(p)$; donde la suma es sobre los primos $p \leq x$ y $m_p(x)$ es el entero más grande tal que $p^{m_p(x)} \leq x$.

Ejemplo 1.3. $\psi(10{,}4) = 3\ln(2) + 2\ln(3) + \ln(5) + \ln(7)$.

Notemos que $p^{m_p(x)} \leq x$, si y sólo si, $m_p(x)\ln(p) \leq \ln(x)$, si y sólo si, $m_p(x) \leq \dfrac{\ln(x)}{\ln(p)}$, así $m_p(x) = \left[\left|\dfrac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right]$; la función ψ será usada para obtener la representación integral para $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$.

Teorema 1.7. *Para $R_e(z) > 1$*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z\int_1^{\infty} \psi(t)t^{-z-1}dt \tag{1.11}$$

donde ψ es definida en (1.10).

Demostración:

Para $R_e(z) > 1$ y partiendo del producto de Euler

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right) \\
\ln(\zeta(z)) &= \ln\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-z}}\right) = \sum_p \ln\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right),
\end{aligned}$$

luego derivando en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p -\frac{p^{-z}\ln(p)(1-p^{-z})}{(1-p^{-z})^2}.$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{p^{-z}\ln(p)}{(1-p^{-z})} = \sum_p \sum_{n=0}^{\infty} p^{-z}\ln(p)p^{-nz} &= \sum_p \sum_{n=0}^{\infty} p^{-z(1+n)}\ln(p) \\
&= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} p^{-nz}\ln(p) \\
&= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^{nz}}.
\end{aligned}
$$

Esta suma iterada converge absolutamente para $R_e(z) > 1$, pues esta suma puede ser reordenada como una sola suma

$$
\sum_{(p,n),n\geq 1} (p^n)^{-z}\ln(p) \;=\; \sum_k k^{-z}\ln(p), \quad \text{donde } k = p^n \; \text{ para algún } n.
$$

Así

$$
-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}\Lambda(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}(\psi(k)-\psi(k-1)) \;\text{ por definición de } \Lambda \text{ y } \psi,
$$

usando sumas por partes (Proposición 1.2), obtenemos con $a_n = k^{-z}$, $b_{k+1} = \psi(k)$ y $b_1 = \psi(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} k^{-z}(\psi(k)-\psi(k-1)) &= (s+1)^{-z}\psi(s) - \sum_{k=1}^{s}\psi(k)((k+1)^{-z}-k^{-z}) \\
&= (s+1)^{-z}\psi(s) + \sum_{k=1}^{s}\psi(k)(k^{-z}-(k+1)^{-z}).
\end{aligned}
$$

De la definición de ψ tenemos que $\psi(k) \leq k\ln(k)$, en efecto.

$$
\psi(k) \;=\; \sum_{n\leq k}\Lambda(k) \leq n\ln(k) \;\text{ donde } n \geq 1,
$$

como,

$$
n \leq k \Longrightarrow n\ln(k) \;\leq\; k\ln(k) \Longrightarrow \psi(k) \leq k\ln(k).
$$

Para $R_e(z) > 1$, $\psi(s)(s+1)^{-z} \longrightarrow 0$ cuando $s \longrightarrow +\infty$. Más aún podemos escribir por un argumento similar que obtuvimos en el teorema 1.5

$$\sum_{k=1}^{s} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z}) \;=\; \sum_{k=1}^{s} \psi(k) z \int\limits_{k}^{k+1} t^{-z-1} dt = \sum_{k=1}^{s} z \int\limits_{k}^{k+1} \psi(t) t^{-z-1} dt = z \int\limits_{1}^{s} \psi(t) t^{-z-1},$$

ψ es constante en cada intervalo $[k, k+1)$, luego tomando límite cuando $s \longrightarrow +\infty$

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \;=\; z \int\limits_{1}^{\infty} \psi(t) t^{-z-1} dt, \quad \text{para } \; R_e(z) > 1$$

$\blacksquare$

1.2. Una Versión Equivalente del Teorema del Número Primo

La función ψ definida en (1.10) proporciona otra conexión, a través de (1.11), entre la función Zeta de Riemann y las propiedades de los números primos. La integral en (1.11) se llama la transformada de Mellin de ψ. Estableceremos una reducción, debido a, Chebyshev, del Teorema del Número Primo a un enunciado que involucra a la función ψ, más adelante en el teorema 1.8.

Lema 1.3. *Sea $\psi : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\psi(x) \;=\; \sum_{p \le x} m_p(x) \ln(p), \quad \textit{donde } \; m_p(x) = \left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right]$$

y sea $\pi(x)$ el número de primos menor o igual a x, entonces se cumple

$$\frac{\psi(x)}{x} \;\le\; \frac{\ln(x)}{x}\pi(x) \le \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))}\frac{\psi(x)}{x}.$$

Demostración:

$$\psi(x) \;=\; \sum_{p \le x} \left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right] \ln(p) \le \sum_{p \le x} \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \ln(p) = \ln(x) \sum_{p \le x} 1 = \ln(x)\pi(x). \quad (1.12)$$

Note que, $1 < y < x$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} 1 \\
&\leq \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} \frac{\ln(p)}{\ln(y)} \\
&< y + \frac{1}{\ln(y)} \sum_{y<p\leq x} \ln(p) \\
&\leq y + \frac{1}{\ln(y)} \psi(x),
\end{aligned}$$

donde $1 < y < p \Rightarrow \ln(y) < \ln(p) \Rightarrow 1 < \dfrac{\ln(p)}{\ln(y)}$, así

$$\pi(x) \leq y + \frac{1}{\ln(y)} \psi(x), \tag{1.13}$$

para $y = \dfrac{x}{(\ln(x))^2}$ en (1.13) obtenemos que

$$\pi(x) \leq \frac{x}{(\ln(x))^2} + \frac{1}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} \psi(x),$$

multiplicando por $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en ambos lados de la desigualdad,

$$\pi(x) \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} \frac{\psi(x)}{x}, \tag{1.14}$$

luego de (1.12) y (1.14) tenemos que

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \pi(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} \frac{\psi(x)}{x}.$$

■

Teorema 1.8. *El Teorema del Número Primo equivale a* $x^{-1}\pi(x)\ln(x) \longrightarrow 1$, *si y sólo si,* $x^{-1}\psi(x) \longrightarrow 1$ *cuando* $x \longrightarrow +\infty$.

Demostración:

Partiendo de la desigualdad del lema 1.3

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \pi(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 2\ln(\ln(x))} \frac{\psi(x)}{x},$$

aplicando la regla de L'Hospital a $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)-2\ln(\ln(x))}$ obtenemos

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-2\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{\ln(x)}}=1=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(x)}{\ln(x)-2\ln(\ln(x))}.$$

$(\Rightarrow)$ Si $\dfrac{\psi(x)}{x}\longrightarrow 1$ cuando $x\longrightarrow\infty$, se sigue de la desigualdad del lema 1.3

$$1\leq\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\ln(x)\pi(x)}{x}\right)\leq 1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(x)}{x}\pi(x)=1.$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\dfrac{\ln(x)}{x}\pi(x)\longrightarrow 1$ cuando $x\longrightarrow\infty$, se sigue que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leq 1\leq\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\psi(x)}{x} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1.$$

Por tanto $x^{-1}\pi(x)\ln(x)\longrightarrow 1$, si y sólo si, $x^{-1}\psi(x)\longrightarrow 1$.

■

Teorema 1.9. *Existe $C>0$ tal que $\psi(x)\leq Cx$, $x>0$, es decir $\psi(x)=O(x)$.*

Demostración: Recordando que $\psi(x)=\sum_{p\leq x}\left[\left|\dfrac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)$; $x>0$. Fijemos $x>0$ y m un entero tal que

$$2^m < x\leq 2^{m+1}. \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(2^m)+\psi(x)-\psi(2^m)\\
&\leq \psi(2^m)+\psi(2^{m+1})-\psi(2^m)\\
&= \sum_{p\leq 2^m}\left[\left|\frac{\ln(2^m)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)+\sum_{p\leq 2^{m+1}}\left[\left|\frac{\ln(2^{m+1})}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)-\sum_{p\leq 2^m}\left[\left|\frac{\ln(2^m)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)\\
&= \sum_{p\leq 2^m}\left[\left|\frac{\ln(2^m)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)+\sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}}\left[\left|\frac{\ln(2^{m+1})}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p).
\end{aligned}$$

Por otra parte, consideremos para cualquier entero positivo n

$$\sum_{n<p\leq 2n} \ln(p) \;=\; \ln\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right).$$

Ahora para cualquier primo p tal que $n < p \leq 2n$, se tiene que p divide a

$$\frac{(2n)!}{n!} \;=\; n!\binom{2n}{n} = n!\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}, \quad \text{en efecto}$$

$$\frac{(2n)!}{n!} \;=\; \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)n!}{n!} = (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)$$

$$n < p \leq 2n \implies p = 2n - i + 1 \qquad \text{para algún i} \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

así p no divide a n! y se obtiene que p divide a $\binom{2n}{n}$, además

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \;\leq\; \binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} = 2^{2n}, \qquad \text{en efecto,}$$

de la segunda desigualdad de donde,

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} \;&=\; \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \\
&=\; \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{2n} \\
&=\; 2^{2n},
\end{aligned}$$

por eso

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \;<\; 2^{2n}.$$

Luego

$$\ln\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right) \;<\; \ln(2^{2n}) \Longrightarrow \sum_{n<p\leq 2n} \ln(p) < 2n\ln(2), \tag{1.16}$$

y en consecuencia

$$\sum_{p\leq 2^m} \ln(p) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{2^{k-1}<p\leq 2^k} \ln(p)\right) < \sum_{k=1}^{m} 2^k \ln(2) < 2^{m+1}\ln(2) \tag{1.17}$$

donde $2n = 2^k \Leftrightarrow n = 2^{k-1}$.

La primera desigualdad en (1.17) es directa por (1.16) mientras la segunda desigualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} 2^k \ln(2) &= \ln(2)\left(\sum_{k=1}^{m} 2^k\right) \\
&= \ln(2)\left(2 + 2^2 + \cdots\cdot + 2^m\right) \\
&= 2^{m+1}\left(2^{-m} + 2^{-m+1} + 2^{-m+2} + \cdots\cdot + 2^{-1}\right)\ln(2) \\
&= 2^{m+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdot + \frac{1}{2^m}\right)\ln(2) \\
&= 2^{m+1}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m \ln(2) \\
&< 2^{m+1}\ln(2)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2^{m+1}\ln(2)\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2^{m+1}\ln(2)
\end{aligned}$$

así

$$\sum_{p\leq 2^m} \ln(p) \;<\; 2^{m+1}\ln(2) \tag{1.18}$$

y

$$\sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}} \ln(p) \;<\; 2^{m+1}\ln(2), \qquad \text{por (1.16).} \tag{1.19}$$

Ahora,

$$p \;\leq\; x \qquad \text{tal que} \left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right] > 1 \Longrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \geq 2,$$

así estos términos en la suma $\displaystyle\sum_{p\leq x}\left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)$, donde, $\left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right] > 1$, ocurre sólo cuando $p \leq \sqrt{x}$ y la suma de los términos de esta forma contribuye no más que $\displaystyle\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\ln(p) = \pi(\sqrt{x})\ln(x)$. Siguiendo de la discusión anterior cuando $2^m{<}x{\leq}2^{m+1}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\leq \sum_{p\leq 2^m}\left[\left|\frac{\ln(2^m)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p) + \sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}}\left[\left|\frac{\ln(2^{m+1})}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)\\
&= \sum_{p\leq 2^m} 1.\ln(p) + \sum_{p\leq 2^m}\left[\left|\frac{\ln(2^m)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p) + \sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}} 1.\ln(p) + \sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}}\left[\left|\frac{\ln(2^{m+1})}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)\\
&< 2^{m+1}\ln(2) + 2^{m+1}\ln(2) + \pi(\sqrt{x})\ln(x)\\
&= 22^{m+1}\ln(2) + \pi(\sqrt{x})\ln(x)\\
&= 2^{m+2}\ln(2) + \pi(\sqrt{x})\ln(x)\\
&< 4x\ln(2) + \pi(\sqrt{x})\ln(x) \qquad \text{ya que } \; 2^m < x\\
&\leq 4x\ln(2) + \sqrt{x}\ln(x) \qquad \text{ya que } \; \pi(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}\\
&= \left[4\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)\right]x
\end{aligned}$$

como $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$ concluimos que $\psi(x) = O(x)$.

■

Capítulo 2

Prueba del Teorema del Número Primo

En este trabajo, como ya se ha dicho antes, se desarrollará el Teorema del Número Primo siguiendo los métodos aplicados por D.J. Newman en 1980 y publicado en [1], el cual es modificado por J. Korevaar en 1982 y publicado en [2].

2.1. Teoremas Centrales

Lema 2.1. *Sea F acotada y continua a trozos en $[0,+\infty)$. Sea*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

la transformada de Laplace de F. Entonces, la transformada existe y es analítica en $R_e(z) > 0$.

Demostración:

Sea F acotada y contínua a trozos en $[0,+\infty)$. Supongamos también $|F(t)|\leq 1$, $\forall t \geq 0$. Sea $G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$, la transformada de Laplace de F. Para $0 < k < \infty$ y definamos la integral

$$G_k(z) = \int_0^k F(t)e^{-zt}dt.$$

por proposición 1.3 cada G_k es una función entera de z, además si $R_e(z)>0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^k F(t)e^{-zt}dt\right| &\leq \int_0^k \left|F(t)e^{-zt}\right| dt \\
&\leq \int_0^k e^{-R_e(z)t}dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-R_e(z)t}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-R_e(z)t}}{R_e(z)}\Bigg]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-R_e(z)b}}{R_e(z)} + \frac{1}{R_e(z)}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left|\int_0^k F(t)e^{-zt}dt\right| \leq \frac{1}{R_e(z)}.$$

Así la sucesión $G_k(z)$ de funciones analíticas en $R_e(z) > 0$ es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de $R_e(z) > 0$, luego por lema 1.1 de Vitali la función límite

$$G(z) = \lim_{k\to\infty} G_k(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

es analítica en $R_e(z) > 0$.

■

Lema 2.2. *Sea G como en el lema 2.1, supongamos que G tiene una extensión analítica en una vecindad del eje imaginario, $R_e(z) = 0$. Sea γ_R^- dada por:*

$$\gamma_R^-(\theta) \;=\; \begin{cases} Re^{i\theta}, & si \quad \theta = sen^{-1}(\frac{\delta_1}{R}) \quad \wedge \quad 0 < \delta_1 < \delta(R) < R \\ -\delta(R) + i\theta, & si \quad -\sqrt{R^2 - \delta^2(R)} \leq \theta \leq \sqrt{R^2 - \delta^2(R)} \end{cases}$$

entonces se cumple,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) \left(e^{\lambda z}\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| \;\leq\; 3\frac{\epsilon}{4}.$$

Demostración: Consideremos la siguiente desigualdad triangular

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) \left(e^{\lambda z}\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} G(z) \left(e^{\lambda z}\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) \left(e^{\lambda z}\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| \\ &= |I_1(R)| + |I_2(R)|. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta primero a $|I_2(R)|$. $G_\lambda(z)$ es una función entera, nosotros podemos reemplazar la trayectoria de integración γ_R^- por la trayectoria semicircular de iR a $-iR$ en el semiplano izquierdo. para $x = R_e(z) < 0$

$$|G_\lambda(z)| = \left| \int_0^\lambda F(t)e^{-zt}dt \right| \leq \int_0^\lambda e^{-xt}dt = -\left.\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^\lambda = -\frac{e^{-x\lambda}}{x} + \frac{1}{x} < -\frac{e^{-x\lambda}}{x} \;=\; \frac{1}{|x|}e^{-x\lambda},$$

luego, para z en este arco semicircular, el módulo del integrando en $I_2(R)$ es

$$\left| G_\lambda(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \right| \;\leq\; \frac{1}{|x|}e^{-x\lambda}e^{\lambda x}\frac{2|R_e(z)|}{R^2} = \frac{2}{R^2},$$

así por el teorema 1.2

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R \\ &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Luego, considerando $|I_1(R)|$. Este será el más delicado de todo ya que sólo conocemos que sobre γ_R^-, G es una extensión analítica de la explícitamente definida G en el semiplano derecho. De acuerdo con este caso, primero escogemos una constante $M(R)>0$ tal que $|G(z)| \leq M(R)$ para $z \in \gamma_R^-$. Sea un δ_1 tal que $0 < \delta_1 < \delta(R)$ y dividamos la integral en dos partes, correspondientes a $R_e(z) < -\delta_1$ y $R_e(z) \geq -\delta_1$.

Para $R_e(z) < -\delta_1$

$$\begin{aligned} \left| G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| &\leq M(R) e^{\lambda x} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \\ &\leq M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\left| \frac{1}{z} \right| + \frac{|z|}{R^2} \right) \\ &\leq M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{R}{R^2} \right) \quad con \quad \delta(R) \leq |z| \leq R \\ &= M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

luego por teorema 1.2

$$\begin{aligned} |I_{1_a}(R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) L(\gamma_R^-) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right) \pi R \\ &= \frac{1}{2} R M(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

para la cual R y δ_1 fijos, el lado derecho tiende a cero cuando $\lambda \longrightarrow \infty$.

Ahora para $R_e(z) \geq -\delta_1$

$$\begin{aligned}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\right| &\leq M(R)e^{\lambda x}\left(\left|\frac{1}{z}\right|+\frac{|z|}{R^2}\right)\\ &\leq M(R)\left(\frac{1}{\delta(R)}+\frac{1}{R}\right),\end{aligned}$$

por teorema 1.2

$$|I_{1_b}(R)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^-} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}M(R)\left(\frac{1}{\delta(R)}+\frac{1}{R}\right)2Rsen^{-1}\left(\frac{\delta_1}{R}\right),$$

para la cual R y δ_1 fijos, el lado derecho tiende a cero cuando $\delta_1 \longrightarrow 0$.

Tomando $R = \frac{4}{\epsilon}$ y fijamos $\delta(R)$ con $0<\delta(R)<R$ tal que G es analítica en el interior y sobre la curva γ_R^-, para todo λ se tiene

$$|I_2(R)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^-} G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{\epsilon}{4},$$

ahora escogiendo δ_1 con $0<\delta_1<\delta(R)$ tal que

$$|I_{1_b}(R)| \leq \frac{1}{2\pi}M(R)\left(\frac{1}{\delta(R)}+\frac{1}{R}\right)2Rsen^{-1}\left(\frac{\delta_1}{R}\right) \leq \frac{\epsilon}{4}$$

y

$$|I_{1_a}(R)| \leq \frac{1}{2}RM(R)e^{-\lambda\delta_1}\left(\frac{1}{\delta(R)}+\frac{1}{R}\right) \leq \frac{\epsilon}{4},$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^-}\left(G(z)-G_\lambda(z)\right)\left(e^{\lambda z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| &\leq |I_1(R)|+|I_2(R)|\\ &\leq |I_{1_a}(R)|+|I_{1_b}(R)|+|I_2(R)|\\ &\leq 3\frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

■

Teorema 2.1. *(Tauberiano) Sea F acotada y contínua a trozos en $[0, +\infty)$, tal que su transformada de Laplace*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

existe y es analítica en $R_e(z) > 0$. Supongamos que G tiene extensión analítica en una vecindad del eje imaginario, $R_e(z) = 0$. Entonces $\int_0^\infty F(t)dt$ existe como una integral impropia y es igual a $G(0)$ $\left(\text{en realidad, } \int_0^\infty F(t)e^{-iyt}dt \text{ converge } \forall y \in \mathbb{R} \text{ a } G(iy)\right)$.

Demostración:

Sea F acotada tal que $|F(t)| \leq 1, \forall t \geq 0$ y contínua a trozos en $[0, +\infty)$, luego por lema 2.1

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

existe y es analítica en $R_e(z) > 0$.

Comenzaremos el análisis usando la fórmula integral de Cauchy para obtener un estimado preliminar de $|G_\lambda(0) - G(0)|$. Para cada $R>0$ sea $\delta(R)>0$ suficientemente pequeño tal que G es analítica en el interior y sobre la trayectoria cerrada γ_R, $\delta(R)\longrightarrow 0$ cuando $R \longrightarrow +\infty$. γ_R^+ denota la porción de γ_R que está en $R_e(z)>0$ y γ_R^- denota la porción de γ_R que está en $R_e(z) < 0$.

Por la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} (G(z) - G_\lambda(z))\frac{1}{z}dz, \tag{2.1}$$

luego para $z\in\gamma_R^+$ y $x = R_e(z)$, aplicando el teorema 1.2 a la integral del lado derecho de (2.1), se sigue que

$$\left|\frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{R}\frac{1}{R_e(z)}. \tag{2.2}$$

$\dfrac{1}{R_e(z)}$ no es acotada sobre γ_R^+, vemos que se requiere una delicada aproximación para demostrar que $G(0) - G_\lambda(0) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow \infty$. Newman reemplaza el factor $\dfrac{1}{z}$ por $\left(\dfrac{1}{z}\right) + \left(\dfrac{z}{R^2}\right)$ en (2.1), de manera que $(G(z) - G_\lambda(z))\dfrac{z}{R^2}$ es analítica, el valor de la integral a lo largo de γ_R permanece constante. La idea de Newman es modificar (2.1) reemplazando $G(z)$ y $G_\lambda(z)$ por sus respectivos productos con $e^{\lambda z}$. Además $e^{\lambda z}$ es entera y tiene el valor de 1 en $z = 0$, así

$$G(0) - G_\lambda(0) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} [G(z) - G_\lambda(z)]\, e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz.$$

Note que para $|z| = R$, nosotros tenemos que $\left(\dfrac{1}{z}\right) + \left(\dfrac{z}{R^2}\right) = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} + \dfrac{z}{R^2} = \dfrac{2R_e(z)}{R^2}$, así

$$\begin{aligned}
\left|(G(z) - G_\lambda(z))\left(e^{\lambda z}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)\right| &= \left|\int_\lambda^\infty F(t)e^{-zt}dt\right|\left(e^{\lambda R_e(z)}\right)\frac{2R_e(z)}{R^2}\\
&\leq \int_\lambda^\infty \left|F(t)e^{-zt}\right| dt\left(e^{\lambda R_e(z)}\right)\frac{2R_e(z)}{R^2}\\
&\leq \int_\lambda^\infty e^{-R_e(z)t}dt\left(e^{\lambda R_e(z)}\right)\frac{2R_e(z)}{R^2}\\
&= \frac{e^{-\lambda R_e(z)}}{R_e(z)}\left(e^{\lambda R_e(z)}\right)\frac{2R_e(z)}{R^2}\\
&= \frac{2}{R^2},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|(G(z) - G_\lambda(z))\, e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)\right| \;\leq\; \frac{2}{R^2}; \quad \forall z \in \gamma_R^+.$$

Por otro lado para $\gamma_R^+ = Re^{it}$ con $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ su longitud es $L = R\pi$, luego por el teorema 1.2, se sigue que:

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) \left(e^{\lambda z}\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi}.\frac{2}{R^2}.R\pi$$
$$= \frac{1}{R}.$$

Luego para, $R = \dfrac{4}{\epsilon}$ y aplicando el lema 2.2 sobre la trayectoria γ_R^-, para todo λ suficientemente grande, digamos para un $\lambda \geq \lambda_0$, se tiene que

$$|G_\lambda(0) - G(0)| < \epsilon.$$

$\blacksquare$

Corolario 2.1. *Sea f una función no-negativa, contínua a trozos y no decreciente en $[1, +\infty)$ tal que $f(x) = O(x)$, entonces su transformada de Mellin*

$$g(z) = z \int\limits_1^\infty f(x) x^{-z-1} dx$$

existe y es analítica para $R_e(z) > 1$. Si para alguna constante c la función

$$g(z) - \frac{c}{z-1}$$

tiene una extensión analítica en una vecindad de la línea $R_e(z) = 1$, entonces

$$\frac{f(x)}{x} \longrightarrow c \quad \textit{cuando } x \longrightarrow +\infty.$$

Demostración:

Sea $f(x)$ como en el enunciado del corolario, sea

$$g(z) = z \int\limits_1^\infty f(x) x^{-z-1} dx$$

reexpresando

$$g(z) \;=\; z\int\limits_{1}^{\infty} f(x)e^{(-z-1)\log x}dx$$

esta integral es una función entera de z. Si $R_e(z) > 1$, para $1 < k < \infty$

$$\left|\int\limits_{1}^{k} f(x)e^{(-z-1)\log x}dx\right| \leq C\int\limits_{1}^{\infty} x^{-R_e(z)}dx \;=\; \frac{C}{R_e(z)-1},$$

luego de manera similar a la prueba del teorema 1.5 se tiene que

$$g(z) \;=\; z\int\limits_{1}^{\infty} f(x)x^{-z-1}dx, \quad \text{(transformada de Mellin de } f)$$

existe y es analítica para $R_e(z) > 1$.

Definamos F sobre $[0, +\infty)$ por:

$$F(t) \;=\; e^{-t}f(e^{t}) - c,$$

note que F es acotada en $[0, +\infty)$ ya que,

$$\begin{aligned}
|F(t)| &= \left|e^{-t}f(e^{t}) - c\right| \\
&\leq \left|e^{-t}f(e^{t})\right| + |c| \\
&\leq e^{-t}Ke^{t} + |c| \\
&= K + c \\
&= M \quad \text{donde M=K+c.}
\end{aligned}$$

Entonces F satisface la primera parte de la hipótesis de el teorema Auxiliar Tauberiano 2.1, así consideramos la transformada de Laplace de F

$$G(z) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} F(t)e^{-zt}dt = \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-t}f(e^{t}) - c\right)e^{-zt}dt$$

haciendo el cambio de variable $x = e^t$, se sigue que

$$G(z) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}f(x) - c\right) x^{-z}\frac{dx}{x} = \int_1^\infty f(x)x^{-z-2}dx - c\int_1^\infty x^{-z-1}dx, \tag{2.3}$$

ahora

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-z-1}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-z-1}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-z}}{z}\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b^{-z}}{z} + \frac{1^{-z}}{z}\right),\end{aligned}$$

vemos que

$$b^{-z} = e^{-z\log(b)} = \frac{1}{e^{z\log(b)}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow +\infty,$$

así

$$\int_1^\infty x^{-z-1}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{ze^{z\log(b)}} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z},$$

que al sustituir en (2.3), obtenemos

$$\begin{aligned}G(z) &= \int_1^\infty f(x)x^{-z-2}dx - \frac{c}{z} \\ &= \frac{g(z+1)}{z+1} - \frac{c}{z} \quad \text{por definición de g} \\ &= \frac{1}{z+1}\left(g(z+1) - \frac{c}{z}(z+1)\right) \\ &= \frac{1}{z+1}\left(g(z+1) - \frac{c}{z} - c\right).\end{aligned}$$

Se tiene, de la hipótesis, que $g(z+1) - \frac{c}{z}$ tiene extensión analítica en una vecindad de la línea $R_e(z) = 0$, y en consecuencia G también lo es. Así, se satisfacen las hipótesis del teorema Auxiliar Tauberiano y podemos concluir que la integral impropia $\int_0^\infty F(t)dt$

existe y converge a $G(0)$. En términos de f, se dice que $\int\limits_0^\infty (e^{-t}f(e^t)-c)\,dt$ existe ó equivalentemente (con el cambio de variable $x{=}e^t$) $\int\limits_1^\infty \left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x}$ existe. Recordando que f es no-decreciente, nosotros podemos inferir que

$$\frac{f(x)}{x} \longrightarrow c \quad \text{cuando } x \longrightarrow \infty.$$

Sea $\epsilon{>}0$, supongamos, por absurdo, que para algún $x_0{>}0$, $(f(x_0))/x_0)-c{\geq}2\epsilon$. De esto se deduce que

$$f(x) \;\geq\; f(x_0) \geq x_0(c+2\epsilon) \geq x(c+\epsilon) \quad \text{para} \quad x_0 \leq x \leq \left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0,$$

así

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x} &\geq \int\limits_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \frac{\epsilon}{x}dx \\
&= \epsilon \ln(x)\,\Big]_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)} \\
&= \epsilon \ln\left[\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0\right] - \epsilon\ln(x_0) \\
&= \epsilon \ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right) + \epsilon\ln(x_0) - \epsilon\ln(x_0) \\
&= \epsilon \ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int\limits_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x} \;\geq\; \epsilon\ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right). \tag{2.4}$$

Como $\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x} \longrightarrow 0$ cuando $x_1, x_2 \longrightarrow \infty$, para todo x_0 suficientemente grande,

$$\int\limits_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x} \;<\; \epsilon\ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right). \tag{2.5}$$

Por (2.4) y (2.5)

$$\int_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} \;<\; \int_{x_0}^{\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right)x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x},$$

lo cual es una contradiccion, por tanto para todo x_0 suficientemente grande, $(f(x_0)/x_0) - c<2\epsilon$.

Probemos ahora que $(f(x_0)/x_0)-c>-2\epsilon$, para todo x_0 suficientemente grande. Supongamos que $(f(x_0)/x_0) - c\leq-2\epsilon$. De lo cual se sigue

$$f(x) \;\leq\; f(x_0) \leq x_0(c-2\epsilon) \leq x(c-\epsilon) \quad \text{para} \quad \left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0 \leq x \leq x_0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0}^{x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} \leq \int_{\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0}^{x_0} -\frac{\epsilon}{x}dx &= -\,\epsilon\ln|x|\Big]_{\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0}^{x_0} \\
&= -\epsilon\ln(x_0) + \epsilon\ln\left[\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0\right] \\
&= -\epsilon\ln(x_0) + \epsilon\ln(x_0) + \epsilon\ln\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right) \\
&= \epsilon\ln\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0}^{x_0} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} \;\leq\; \epsilon\ln\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right) < 0 \quad \text{ya que} \quad c-2\epsilon < c-\epsilon$$

pero,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x_1, x_2 \longrightarrow \infty \quad \text{ya que} \quad \int_{1}^{\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} \text{ existe.}$$

Siguiendo de manera similar al caso anterior

$$\lim_{x_0\to\infty}\int\limits_{\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)x_0}^{x_0}\left(\frac{f(x)}{x}-c\right)\frac{dx}{x} \quad = \quad 0\leq \epsilon\ln\left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}\right)<0$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\dfrac{f(x_0)}{x_0}-c>-2\epsilon$.Se tiene entonces que

$$-2\epsilon < \quad \tfrac{f(x)}{x}-c \quad < 2\epsilon,$$

es decir $\dfrac{f(x)}{x}\longrightarrow c$ cuando $x\longrightarrow\infty$.

$\blacksquare$

2.2. Teorema Principal (T.N.P)

Teorema 2.2. *Si $\pi(x)$ es el número de primos menor ó igual a x, entonces*

$$x^{-1}\ln(x)\pi(x)\longrightarrow 1 \quad \textit{cuando} \quad x\longrightarrow +\infty.$$

Demostración:

Sea $\psi:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por:

$$\psi(x) \quad = \quad \sum_{p\leq x}\left[\left|\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right|\right]\ln(p)$$

luego, ψ es no negativa, contínua a trozos y no-decreciente sobre $[1,+\infty)$.

Ahora por teorema 1.9, $\psi(x)=O(x)$, y aplicando el corolario 2.1 a ψ, vemos que la transformada de Mellin para ψ

$$g(z) \quad = \quad z\int\limits_1^{\infty}\psi(x)x^{-z-1}dx$$

existe y es analítica para $R_e(z) > 1$. Adem as, por teorema 1.7 se tiene para $R_e(z)>1$

$$g(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}.$$

Sabemos que ζ es analítica y no tiene ceros en $R_e(z)>1$, por teorema 1.5 y teorema 1.6, ζ es analítica para $\{z \in \mathbb{C} : R_e(z) > 0 \ z \neq 1\}$ y no tiene ceros en $\{z \in \mathbb{C} : R_e(z) = 1 \ z \neq 1\}$ respectivamente, ahora la derivada de ζ (derivada de función analítica)[1] , también es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : R_e(z) > 0 \ z \neq 1\}$. Por tanto $\frac{\zeta'}{\zeta}$ es analítica en una vecindad de $\{z \in \mathbb{C} : R_e(z) \geq 1 \ z \neq 1\}$. Por teorema 1.5 sabemos que ζ tiene un polo simple en $z = 1$ y $Res(\zeta, 1) = 1$, también $\frac{\zeta'}{\zeta}$ tiene un polo simple en $z = 1$, pero con $Res(\frac{\zeta'}{\zeta}, 1) = -1$,en efecto.

ζ tiene un polo simple en $z = 1$, luego por el teorema 1.1, existe una función h tal que ζ se escribe de la forma

$$\zeta(z) = \frac{h(z)}{z-1}$$

donde h es analítica y no-nula en $z = 1$, ahora

$$\zeta'(z) = \frac{h'(z)(z-1) - h(z)}{(z-1)^2},$$

luego

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\frac{h'(z)(z-1)-h(z)}{(z-1)^2}}{\frac{h(z)}{z-1}} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{1}{z-1}, \tag{2.6}$$

donde $\frac{h'(z)}{h(z)}$ es analítico, en $|z-1| < R$ con $R>0$, luego $\frac{h'(z)}{h(z)}$ admite una representación en serie de potencias

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-1)^n \ ; \ \ |z-1| < R,$$

[1] La derivada de una función analítica en $\Omega \subset \mathbb{C}$, también es analítica en Ω. Demostracion: Ver[4] Cap 5

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-1)^n - \frac{1}{z-1}, \tag{2.7}$$

luego la ecuación en 2.7 representa una serie de Laurent y en consecuencia, $z = 1$ es un polo simple, y

$$Res\left(\frac{\zeta'}{\zeta}, 1\right) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right] = -1.$$

Ahora despejando de la ecuación 2.6 a $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$, se sigue que la expresión

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$$

tiene una extensión analítica en una vecindad de cada punto de $R_e(z) = 1$, también

$$-\frac{h'(z)}{h(z)} = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{1}{z-1} = g(z) - \frac{1}{z-1},$$

en consecuencia por corolario 2.1 se tiene que

$$\frac{\psi(x)}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow +\infty,$$

luego por el teorema 1.8 concluimos

$$x^{-1}\pi(x)\ln(x) \longrightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow +\infty.$$

■

Referencias Bibliográficas

[1] DJ.Newman, (Simple Analytic Proof of the Primer Number Theorem, American Math. Monthly 87 (1980), 693-696).

[2] J.Korevaar, (On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem, Math. Intelligencer 4 (1982), 108-115).

[3] L.Debnath and D.Bhatta, Integral Transforms and Their Applications, Second Edition, Chapman & Hall/ CRC, Boca Raton, 2006.

[4] M.Vivas, Guia Analísis en una Variable Compleja, Año 2008.

[5] R.B.Ash and W.P.Novinger, Complex Variables, Second Edition, version electronica (http://www.math.uiuc.edu/∼r-ash/CV.html)

[6] Ruel.V.Churchill y J.W.Brown, Variable Compleja y Aplicaciones, Séptima Edición(en español), McGraw-Hill, New York, 2004.