UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

El espacio Cociente y Algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach.

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Mujica Cruz Gaby J.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Análisis .

Tutor: Msc Bracamonte Mireya.

Barquisimeto - Venezuela
Novienbre 2008

Este trabajo ha estado bajo la guia y sabiduria de DIOS, es muestra de todo el apoyo que me han dado mis padres y hermanas, es reflejo de la confianza de mis amigos, mi novio, compañeros de clase y conocimiento y apoyo académico del Prof. Ismael y de la Prof. Mireya.

Resumen

Esta monografía se basa en el trabajo realizado por el profesor José Morales en [11] y el objetivo central de este trabajo es dar a conocer algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach, entre las que podemos señalar: espacios uniformemente convexos, espacios uniformemente no cuadrados, espacios localmente uniformemente convexos, espacios estrictamente convexos, entre otros; seguido de un análisis de cuando tales propiedades se trasladan al espacio cociente.

Índice

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

Este capitulo tiene como objetivo dar una breve introducción a la teoría de espacios de Banach; las definiciones y propiedades básicas; y se establecen notaciones, que son necesarias para el buen desarrollo del trabajo y con ello hacer la tarea menos ardua al lector que no este familiarizado.

Merece una atención especial las definiciones y propiedades del espacio cociente; por ser parte central de nuestro trabajo.

El campo de los números reales y complejos son denotados por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. El símbolo $\mathbb{K}$ denota a un campo que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, cuyos elementos son llamados **escalares**.

§1.1. Definiciones y notaciones

Un Espacio Vectorial o Espacio lineal sobre $\mathbb{K}$, es un conjunto X de objetos llamados vectores dotado de una operación $+$ de $X \times X$ en X llamada **Adición** de vectores y una operación $\cdot$ de $\mathbb{K} \times X$ en X, llamada **multiplicación** de vectores por escalar que satisfacen las siguientes condiciones:

1. La adición es conmutativa y asociativa.
2. Existe el **vector nulo** $0 \in X$, a veces llamado el **origen** de X, tal que $x+0 = x$ para todo $x \in X$.
3. Para todo escalar α, β y $x, y \in X$, se cumple $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ y $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
4. Para cada vector $x \in X$, existe el vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. Para cada vector x, $1x = x$.

En un espacio topológico, la clausura de un conjunto A, se denota por: $\overline{A}$.

Un espacio **vectorial topológico** es un espacio vectorial dotado de una topología de forma que las operaciones suma y producto por escalares sena funciones continuas.

Definición 1.1. *Sea X un espacio vectorial.* ***La norma en*** *X, es una función de valor real $\|\cdot\|$, en X que satisface las siguientes condiciones para todo elemento $x, y \in X$, y cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:*

1. $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La definición general de norma se basa en generalizar a espacios vectoriales abstractos de la noción de módulo de un vector de un espacio Euclídeo.

Definición 1.2. *Un espacio vectorial dotado de una norma, es llamado* ***espacio normado*** *y denotado por $(X, \|\cdot\|)$.*

Observación 1.1. *Todo espacio normado genera una métrica, en la cual la distancia $d(x, y)$ entre dos puntos x, y se define por*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

La importancia de esto radica en que todo espacio normado se convierte en un espacio vectorial topológico.

Y para completar las definiciones y notaciones sobre espacios normados, sólo resta definir los abiertos básicos en estas topología: la **esfera** S_X y la **bola** unitarias B_X en X:

$$S_X := \{x \in X : \ \|x\| = 1\}, \qquad B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

§1.2. Convexidad.

Definición 1.3. *Sea K un subconjunto de un espacio normado X, se dice que K es* ***convexo*** *si para todo par de puntos $x, y \in K$ el segmento*

$$[x, y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$$

está totalmente contenido en K.

Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ una combinación lineal convexa es un elemento $x \in X$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

donde $0 \leq t \leq 1$, para todo $i = 1, 2, ..., n$ y $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$.

Se define la cápsula o envolvente convexa de A, como el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A, equivalentemente la definición que sigue:

Definición 1.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si A es un subconjunto cualquiera de X. Se define la* ***cápsula convexa*** *de A en X como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A, o lo que es equivalente; el menor conjunto convexo que contiene a A.*

Usualmente se denota por $Conv(A)$ ó $Co(A)$.

De forma similar, se define la cápsula **convexa cerrada** de X como la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que contienen a A, y es denotado por $\overline{Conv}(A)$ ó $\overline{Co}(A)$.

Podemos citar las siguientes propiedades:

Lema 1.1. *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio lineal X,*

1. $Co(\alpha A) = \alpha Co(A)$

2. $Co(A + B) = Co(A) + Co(B)$

3. $\overline{Co}(A) = \overline{Co(A)}$

4. $\overline{Co}(\alpha A) = \alpha \overline{Co}(A)$

5. *Si $\overline{Co}(A)$ es compacto,* $\overline{Co}(A + B) = \overline{Co}(A) + \overline{Co}(B)$

6. *Si las cápsulas de A y B son compactos,*

$$\overline{Co}(A \cup B) = Co(\overline{Co}(A) \cup \overline{Co}(B))$$

Teorema 1.1. *Sean X un espacio de Banach y $A \subseteq X$ un subconjunto compacto. Entonces $\overline{Co}(A)$ es compacto.*

Las pruebas pueden encontrarse en [6] y [2].

Una función T se dice *operador lineal*, o *transformación lineal*, si su dominio y rango son espacios lineales sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. Específicamente, se define:

Definición 1.5. *Sean X y Y espacios vectoriales con campo de escalares $\mathbb{K}$. La función función $T : X \to Y$ es llamada **Operador Lineal** si, para $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:*

1. *T es lineal, es decir, $T(x + y) = T(x) + (y)$*

2. *T es homogéneo, es decir, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$*

*Se reserva el término **Funcional lineal** para aquellos operadores lineales cuyo rango está el campo de coeficientes de X, $\mathbb{K}$.*

Definición 1.6. *Sean X, Y espacios topológicos. Un funcional $f : X \to Y$ es:*

1. ***continuo en un punto** $x \in X$ si para cada vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$.*

2. ***continuo en** X si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*

Definición 1.7. *En un espacio normado X se dice que una sucesión (x_n) es una **sucesión de Cauchy** si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo n, m mayores que N se tiene que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.*

Definición 1.8. *Sea X un espacio normado. Si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X, se dice que X es **Completo**.*

§1.3. Espacios de Banach.

Definición 1.9. *Un **Espacio de Banach** es un espacio normado el cual es completo en la métrica definida por su norma.*

Ejemplo 1.10. *Podemos citar algunos ejemplos de espacios de Banach importantes como son:*

- *Sea X el espacio vectorial de todas las n-uplas de números reales o complejos ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$). La norma del supremo definida como*

$$\|\cdot\|_\infty = \max_i(|x_i|), \qquad donde \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

El espacio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es denotado por ℓ_∞^n.

- *Sea $X = (\mathbb{R}^n), \mathbb{C}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces la función*

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad donde \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

El espacio X conjuntamente con la norma $\|\cdot\|_p$ es denotado por ℓ_p^n.

- *Para $1 \leq p < \infty$ el espacio $\ell_\infty(\mathbb{N})$ de todos las sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, las cuales satisfacen $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$ dotado de la norma*

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad donde \quad x = (x_i)_{i=1}^\infty.$$

es un espacio de Banach.

- *El espacio $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ denota el espacio normado de todas las sucesiones de valores escalares acotadas cuya norma se define como*

$$\|\cdot\|_\infty = \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\} \qquad para \quad x = (x_i)_{i=1}^\infty.$$

En adelante $\ell_\infty(M)$ denota el espacio normado de todas las funciones acotadas $f : M \to \mathbb{F}$ con $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$, donde $\mathbb{F}$ denota el campo de escalares.

- *El espacio $c = c(\mathbb{N})$ es el subespacio lineal de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ formado por todas las sucesiones de valores escalares $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ en las cuales $\lim_{i\to\infty}(x_i)$ existe y es finito.*

- *El espacio* $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ *es un subespacio lineal de* c *formado por todas las sucesiones escalares* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ *en las cuales* $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i) = 0$.

Definición 1.11. *Sea* X *un espacio vectorial topológico.* ***El espacio dual*** *de* X*, o conjugado de* X*, que denotaremos por* X^**, es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos sobre* X*.*

La suma y multiplicación de elementos de X^* son definidos por

$$(x_1^* + x_2^*)(x) := x_1^*(x) + x_2^*(x), \qquad (\alpha x_1^*)(x) := \alpha . x_1^*(x).$$

Ejemplo 1.12. *Podemos mencionar los duales de algunos de los espacios considerados anteriormente:*

- $c_0^* = \ell_1$,
- $\ell_1^* = \ell_\infty$
- *Si* $p, q \in (1, +\infty)$ *son tales que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, entonces* $\ell_p^* = \ell_q$.

Teorema 1.2. *Un funcional lineal* f *definido en un espacio vectorial normado* X *es acotado si y sólo si es continuo.*

Demostración: La prueba se puede encontrar en [1].

Teorema 1.3. *Si* X *es un espacio normado,* X^* *es un espacio de Banach.*

Debido a esto, una manera de demostrar que un espacio normado es un espacio de Banach es demostrar que es el dual de algún espacio normado.

Teorema 1.4. *Suponga que* x *es un elemento de un espacio normado* X*. Entonces*

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_{X^*}\}$$

Además, el supremo es alcanzado en algún punto de B_{X^*}*.*

§1.3.1. El bidual y la Reflexividad.

Definición 1.13. *Sea X un espacio normado. El* ***doble dual*** *o bidual de X, es el dual del espacio X^*, y lo denotaremos por por X^{**}.*

Así tomando como referencia el ejemplo (1.12) podemos concluir que $c_0^{**} = \ell_\infty$ y para $1 < p < \infty$ se tiene que $\ell_p^{**} = \ell_p$. Recordemos que estas igualdades sólo significan la existencia de isomorfismos entre estos espacios, y que el abuso del lenguaje usualmente nos permite escribirlo de esta forma.

Definición 1.14. *Sea X un espacio de normado. La aplicación*

$$Q : X \quad \to \quad X^{**}$$

definida por

$$Q(x) : x^* \to x^*(x)$$

para cada $x \in X$ y $x^* \in X^*$ es llamada ***aplicación canónica*** *de X en X^{**}.*

Note que si α, β son escalares y x, $y \in X$ y $x^* \in X^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} Q(\alpha x + \beta y)(x^*) &= x^*(\alpha x + \beta y) \\ &= x^*(\alpha x) + x^*(\beta y) \\ &= \alpha x^*(x) + \beta x^*(y) \\ &= \alpha Q(x)(x^*) + \beta Q(y)(x^*) \\ &= (\alpha Q(x) + \beta Q(y))(x^*) \end{aligned}$$

Es decir, la linealidad de x^* garantiza la linealidad de Q.
Además, para cada $x \in X$ se tiene que

$$\|Q(x)\|_{X^{**}} = \sup_{f \in B_{X^*}} |Q(x)(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| \leq \sup_{f \in B_{X^*}} \|f\| \|x\| = \|x\|.$$

El teorema de Banach garantiza la existencia de $f_0 \in S_{X^*}$ tal que $f_0(x) = \|x\|$, en cuyo caso tenemos que $\|Q(x)\| \geq |f_0(x)| = \|x\|$. Con lo cual se concluye que Q es una isometría sobre X^{**}.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio normado. Entonces Q es un isomorfismo de X en X^{**} . Y el subespacio $Q(X)$ es cerrado si y sólo si X es un espacio de Banach.*

Definición 1.15. *Un espacio de Banach X se dice* ***reflexivo*** *si la aplicación Q, de la definición (1.14), de X en X^{**} es sobreyectiva.*

En este caso, haciendo nuevamente un abuso del lenguaje, escribimos $X = X^{**}$.

Teorema 1.5. *Todo subespacio de un espacio normado reflexivo es reflexivo.*

§1.4. Espacio Cociente.

La idea ahora es, conocido un espacio vectorial, normado o Banach, X generar nuevos espacios; espacios cocientes.

En esta sección consideramos X, un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{K}$, y consideramos la familia $\mathfrak{F}$ de todos los subespacios lineales de X.

Dadas $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ en $\mathfrak{F}$ se define:

$$\mathbf{E} + \mathbf{F} := \{x + y : x \in \mathbf{E} \text{ y } y \in \mathbf{F}\},$$

el cual sigue siendo un elemento de $\mathfrak{F}$.

Un caso particular ocurre cuando $\mathbf{E} + \mathbf{F} = X$ y $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \varnothing$. Cuando esto ocurre se dice que X es la **suma directa** de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$; que se denota usualmente por $X = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$.

Las condiciones dadas garantiza que todo elemento $x \in X$, tiene una única representación de la forma $x = e + f$ donde $e \in \mathbf{E}$ y $f \in \mathbf{F}$.

Cada vez que en un espacio lineal X se pueda descomponer en la **suma directa** de dos de sus subespacios se dice que dichos subespacios son **algebraicamente complementarios**.

F. J. Murray en el año de 1937, noto la existencia de subespacios no complementados en espacios de Banach. De hecho, su descubrimiento se refiere a ℓ_p con $p = 2, p > 1$.

Mas tarde, en el año de 1940, R.S. Phillips demostró que c_0 no es complementado en ℓ_∞.

Definición 1.16. *Sea M un subespacio lineal del espacio vectorial X. Se define el* ***espacio Cociente*** *$X/_M$ por*

$$X/_M := \{x + M : x \in X\}$$

$[x] = x + M = \{x + y : y \in M\}$ es llamada ***clase lateral*** *de M en X.*

La adición y multiplicación por un escalar se definen por: $[x]+[y] = [x+y]$, o lo que es equivalente $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ y $\alpha[x] = [\alpha x]$ o $\alpha(x+M) = (\alpha x)+M$.

Observación 1.2.

1. *$0 + M = M$,*
2. *$[x] = x + M = y + M = [y]$ si y sólo si $y - x \in M$*
3. *De lo anterior se sigue que para $x, y \in X$, se tiene que $[x] \cap [y] = \emptyset$ ó $[x] = [y]$*
4. *$[x] = [x + y]$ para cada $y \in M$.*

Con estas observaciones es fácil verificar que $X/_M$ es un espacio vectorial, lo cual nos permite definir ahora una norma en dicho espacio.

Definición 1.17. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Se define la* ***norma cociente*** *de $X/_M$ es dada por la fórmula*

$$\|x + M\|_{X/_M} := \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$$

Teorema 1.6. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, entonces la* norma cociente *definida en $X/_M$ satisface las condiciones de la definición (1.2).*

Demostración: En efecto, si $x + M$ es un elemento del cociente, es claro que

$$\|x + M\|_{X/_M} \geq 0$$

puesto que está definido como el ínfimo de números que son no negativos.

Si suponemos que $\|x + M\|_{X/_M} = 0$, eso implica que $d(x, M) = 0$. Cómo M es un subespacio cerrado, eso implica que $x \in M$, que por la observación (1.2) se tiene que $x + M = 0 + M$.

Ahora, si $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$ y $x + M \in X/_M$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha(x+M)\|_{X/_M} &= \|\alpha x + M\|_{X/_M} \\
&= \inf_{m\in M}\{\|\alpha x - m\|_X\} \\
&= \inf_{m\in M}\left\{\alpha\left\|x - \frac{m}{\alpha}\right\|_X\right\} \\
&= \alpha \inf_{m\in M}\{\|x - m\|_X\} \\
&= \alpha\|x + M\|
\end{aligned}$$

Finalmente, sean $x+M$, $y+M$ y $z+M$ clases en $X/_M$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(x+M)-(y+M)\|_{X/_M} &= \|(x-y)+M\|_{X/_M} \\
&= \inf_{m\in M}\|(x-y)+m\|_X \\
&\leq \| x - m_1\|_X + \|x - m_2\|_X \qquad \text{para} \quad m_1, m_2 \in M
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo en cada uno de los lados de la desigualdad sobre elementos de M, encontramos que

$$\|(x+M)-(y+M)\|_{X/_M} \leq \| x + M\|_{X/_M} + \|y+M\|_{X/_M}.$$

Esto concluye la prueba de que hemos definido una norma sobre $X/_M$. ■

Proposición 1.2. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X.*

(i) *Si $x \in X$, entonces $\|x\| \geq \|x+M\|_{X/_M}$.*

(ii) *Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $x' \in X$ tal que $x' + M = x + M$ y $\|x'\| < \|x+M\| + \epsilon$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
d(x,M) &= \|x+M\|_{X/_M} \\
&= \inf\{\ \|x - z\|\ : z \in M\}^1 \\
&\leq \|x - 0\| = \|x\|.
\end{aligned}$$

Así queda demostrada la primera parte de la proposición, $\|x+M\| \leq \|x\|$.

Para demostrar la segunda parte supongamos que $x \in X$ y $\epsilon > 0$.

Podemos elegir $m \in M$ tal que $\|x - m\| < d(x, M) + \epsilon = \|x + M\| + \epsilon$

Entonces el x' buscado es $x - m$, con lo cual se concluye la demostración. ■

Como consecuencia inmediata tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 1.7. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, entonces X/M también es un espacio de Banach.*

Demostración:. La prueba se puede hallar en [9].

Definición 1.18. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado X, M un subespacio cerrado de X. La **aplicación cociente** se define*

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X/_M \\ x &\mapsto x + M \end{aligned}$$

Proposición 1.3. *Si X es un espacio normado reflexivo y M un subespacio normado de X. Entonces $X/_M$ es reflexivo.*

Observación 1.3.

1. *Si toda sucesión de cauchy es convergente en $\|\cdot\|_X$, entonces $X/_M$ es un espacio de Banach. En particular si X es un espacio de Banach $X/_M$ es un espacio de Banach.*

2. *$\|\pi(x)\|_{X/_M} \leq \|x\|_X$, lo cual quiere decir que π es continua; y si $M = \{y \in X : \|y\|_X = 0\}$, entonces se cumple la igualdad.*

3. *Si $\boldsymbol{U}$ es un abierto en X entonces $\pi(\boldsymbol{U})$ es abierto en $X/_M$, esto es: π es una aplicación abierta.*

Proposición 1.4. *Sean $x + M, y + M \in B_{X/_M}$ entonces se cumple que:*

- $\left\| \dfrac{(x + M) + (y + M)}{2} \right\| \leq \left\| \dfrac{x + y}{2} \right\|$
- $\left\| \dfrac{(x + M) - (y - M)}{2} \right\| \leq \left\| \dfrac{x - y}{2} \right\|$

Demostración: En el primer caso:

$$\begin{aligned}\|(x+M)+(y+M)\| &\leq \|(x+y)+M\| \\ &= \text{ínf}\{\|(x+y)-z\| \ : z\in M\} \\ &\leq \|x+y\|.\end{aligned}$$

Para el segundo caso usamos lo anterior y sustituyendo y *por* $-y$. ■

Proposición 1.5. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y π la aplicación cociente de X en $X/_M$ entonces la imagen sobreyectiva de π de la bola cerrada unitaria de X es la bola cerrada unitaria de $X/_M$*

Demostración:

($\supseteq$) Sea $x \in B_X$.

Note que:

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\|_{X/_M} &= \|x+M\|_{X/_M} \\ &\leq \|x\|_X \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Así $\pi(B_X) \subseteq B_{X/_M}$

($\subseteq$) Sea $y+M \in B_{X/_M}$. Si $\|y+M\|_{X/_M} < 1$, haciendo uso de la proposición (1.2) podemos hallar $y' \in X$ de tal forma que

$$y+M = y'+M \qquad \text{y} \qquad \|y'\|_X < \|y+M\|_{X/_M} + (1-\|y+M\|_{X/_M}) = 1$$

De lo cual se sigue

$$\pi(y') = y'+M = y+M \qquad \text{donde} \qquad y' \in B_X.$$

Obteniendo así la igualdad de conjuntos deseada. ■

Ejemplo 1.19. *Consideremos el espacio de las funciones $\varphi : X \to \boldsymbol{C}$, medibles tales que*

$\left(\int_X |\varphi|^P d\mu\right) < \infty$.
Se define la seminorma como:

$$\|\varphi\|_P = \left(\int_X |\varphi|^P d\mu\right)^{1/P}.$$

Tomemos el subespacio de las funciones con seminorma nula, esto es:

$$\mathbf{S} = \{\varphi \in \mathbb{L}^P : \int_X |\varphi|^P d\mu = 0\}$$

Y observemos que por teoría de la medida de conjuntos se cumple:

$$\mathbf{S} = \left\{\varphi \in \mathbb{L}^P : \int_X |\varphi|^P d\mu = 0\} = \{\varphi \in \mathbb{L}^P : \varphi = 0 \text{ c.t.p.}\right\}$$

El espacio $\mathbb{L}^P/_M$ es un espacio normado completo con la norma $(\|\cdot\|)_{\mathbb{L}^P/_M}$ y $(\|\varphi + M\|_P)_{\mathbb{L}^P/_M} = \|\varphi\|_P$.

Este es un espacio de Banach muy importante que se le denomina espacio de clase de funcionales $\mathbb{L}^P$ y generalmente se denota simplemente por $(\mathbb{L}^P, \|\cdot\|_P)$.

§1.5. Topología Débil y Débil estrella.

La idea de esta sección es hacer una breve introducción sobre la topología débil; puesto que un trabajo en análisis funcional que pretenda tener un buen grado de seriedad no podría pasar por alto esta topología.

Informalmente, si tenemos un espacio vectorial topológico X, y notamos X^* por su dual, vamos a definir la topología débil en Xcomo la topología más débil en X que nos da el mismo dual, o sea, si notamos por ς_w a la topología débil entonces tenemos que $(X, \tau_w)^* = X^*$. La topología débil siempre va a ser localmente convexa. La importancia de esta topología es que el estudio de ésta nos da información valiosa sobre la topología original.

Lema 1.2. *Sean $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \psi$ funcionales lineales de un espacio vectorial X, entonces son equivalentes:*

1. *Dado $\epsilon > 0$ existen constantes $k_1, k_2, ..., k_n$ tales que $|\varphi_i(x)| < k_i$ implica que $|\psi(x)| < \epsilon$.*

2. *ψ es combinación lineal de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$,*

3. *$Ker\,\psi \supseteq \bigcap Ker\,\varphi_i$.*

Proposición 1.6. *Sea X un espacio vectorial y ϕ un subespacio del dual algebraico de X, X^*, que separa puntos. La mínima topología lineal que hace continuos a todos los elementos de ϕ es una topología y su dual es ϕ.*

Definición 1.20. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico tal que X^* separa puntos, la topología de la proposición anterior para X^* se llama topología débil de (X, τ).*

Si consideramos la aplicación canónica $Q : X \to X^{**}$ dada por $Q(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para cada $\varphi \in X^*$ se tiene que $Q(X)$ es un subespacio de X^{**} que separa puntos, y aplicando la proposición (1.6) se obtiene una topología lineal en X^*. La topología inducida por $Q(X)$ en X^* es llamada **topología débil estrella** y denotada por ω^*.

La topología ω^* es la mínima topología vectorial que hace continuas a todas las evaluaciones.

Definición 1.21. *Un conjunto dirigido es un conjunto I con una relación $\preceq$ tal que:*

- *$x \preceq x$ para cada $x \in I$,*

- *Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$ entonces $x \preceq z$, para cada $x, y, z \in I$,*

- *Para cada $x, y \in I$ existe $z \in I$ tal que $x \preceq z$ y $y \preceq z$.*

*Una **red** o **sucesión Moore-Smith** en un conjunto X es una función desde un conjunto dirigido I en X. El conjunto I es un conjunto de indices para la red.*

Definición 1.22. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red en un espacio topológico X y sea $x \in X$. Entonces (x_α) converge a x, y x es llamada el límite de la (x_α) , si, para cada entorno U de x, existe un α_U en I tal que $x_\alpha \in U$ siempre que sea $\alpha_U \preceq \alpha$. Esta convergencia se escribe generalmente por $x_\alpha \to x$ o $\lim_\alpha x_\alpha = x$.*

Definición 1.23. *La topología débil de un espacio normado es la topología mas pequeña para la cual cada miembro de la doble dual es continuo con respecto a que la topología.*

Es importante tener presente la convergencia de redes en esta topología, la cual se expresa en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7. *Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, donde I es un conjunto no vacío dirigido, con relación $\preceq$, es una red en X y que x es un elemento de X. Entonces $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$ si y sólo si $f(x_\alpha) \to f(x)$ para cada $f \in X^*$.*

Proposición 1.8. *Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, con I como en la proposición anterior, una red en X y $f \in X^*$. Entonces $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ si y sólo si $f_\alpha(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$.*

Note que en las proposiciones (1.7) y (1.8) nos hacen ver que la convergencia en la topología débil en X y la topología débil estrella en X^* coinciden con la topología de la convergencia puntual.

Observación 1.4. *Cuando consideremos un conjunto abierto en la topología débil nos referiremos a él como un w-abierto y los abiertos en la topología fuerte se denotaran como $\|\cdot\|$-abierto, o simplemente abiertos.*

Las pruebas se pueden hallar en [2]

Teorema 1.8. *Si (x_α) es una red w-convergente en un espacio normado, entonces*

$$\|w - \lim_\alpha x_\alpha\| \leq \liminf_\alpha \|x_\alpha\|.$$

Teorema 1.9 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Si X es un espacio normado, entonces B_{X^*} es compacta en la topología débil estrella. (B_{X^*} es w^*-compacta).*

Corolario 1.10. *Si X es un espacio de Banach, un subconjunto de X^* es w^*-compacto si y sólo si es w^*-cerrado y acotado.*

Teorema 1.11 (Teorema de Goldstine)**.** *Sea X un espacio normado y Q la aplicación natural de X en X^{**}. Entonces la w^*-clausura de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$. En consecuencia, X es w^*-denso en X^{**}.*

$$\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$$

Teorema 1.12. *Sea X un espacio Banach. Entonces X es reflexivo si y sólo si B_X es w-compacta.*

Proposición 1.9. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.*

Capítulo 2

Algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach.

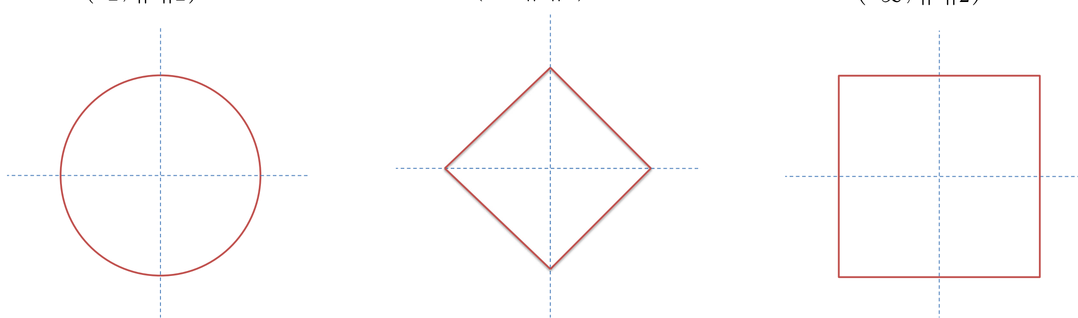
El estudio de la geometría de un espacios de Banach X está relacionada con la bola unitaria B_X.

§2.1. Propiedades uniformes de los espacios de Banach.

Comenzamos con el estudio de una importante subclase de espacios reflexivos: los *espacios de Banach uniformemente convexos*. La noción de convexidad uniforme para la bola unitaria de un espacio de Banach es un concepto geométrico, que pretende paliar las desventajas que la bola asociada a una norma cualquiera presenta en relación a la de un espacio de Hilbert.

Imaginemos la bola unitaria cerrada de los espacios

$(\ell_2, \|.\|_2)$ $\qquad$ $(\ell_1, \|.\|_2)$ $\qquad$ $(\ell_\infty, \|.\|_2)$



Note que ninguna de estas dos últimas bolas unitarias son redondas en el sentido usual de la palabra, ya que sus fronteras están formadas por segmentos de recta. Caso contrario con la primera de las esferas dada. Todo esto se conoce como las propiedades de rotundidad o redondez de los espacios de Banach, que consideramos a continuación.

Dado que es más fácil hacer un análisis sobre un espacio de Banach que tiene una norma con buenas propiedades geométricas que en espacios generales, es importante conocer aquellos espacios de Banach que puede ser equivalente a uno que sea estrictamente convexo bien sea de manera uniforme o no.

§2.1.1. Espacios uniformemente convexos.

Definición 2.1. *Un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice **uniformemente convexo**, (**UC**), si para cada* $\epsilon > 0$*, existe un* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que para todo* x *,* $y \in B_X$ *y* $\|x - y\| \geq \epsilon$ *se tiene que* $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

Algunos ejemplos de espacios uniformemente convexos son los espacios de Hilbert, los espacios ℓ_p y los espacios de funciones $L^p[0,1]$ con $1 < p < +\infty$.

Veamos a continuación dos ejemplos de espacios que son uniformemente convexos:

1. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. Se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

y su norma viene dada por

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f|^p dx\right]^{1/p}.$$

Sean $p \geq 2$, $\epsilon > 0$ y supongamos que $f, g \in B_{L^p}$ con $\|f - g\|_p > \epsilon$.

Ahora la desigualdad de Clarkson nos garantiza para $2 \leq p < \infty$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p &\leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \\ &\leq \frac{1}{2}(1+1) - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \\ &= 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \end{aligned}$$

Así $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1-\delta$ con $\delta = 1-\left(1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$

Con lo cual queda demostrado que el espacio L^p es uniformemente convexo.

2. Recordemos que para $1 \leq p < \infty$ el espacio $\ell_p(\mathbb{N})$ de todas las sucesiones $x = \{x_n\}_{i=1}^{\infty}$ las cuales satisfacen $\sum |x_i|^p < \infty$. Dotado de la norma $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p dx)^{1/p}$ donde $x = \{x_n\}_{i=1}^{\infty}$.
Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $x, y \in B_{\ell_p}$, $\|x-y\|_p > \epsilon$.

Ahora por la desigualdad:

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

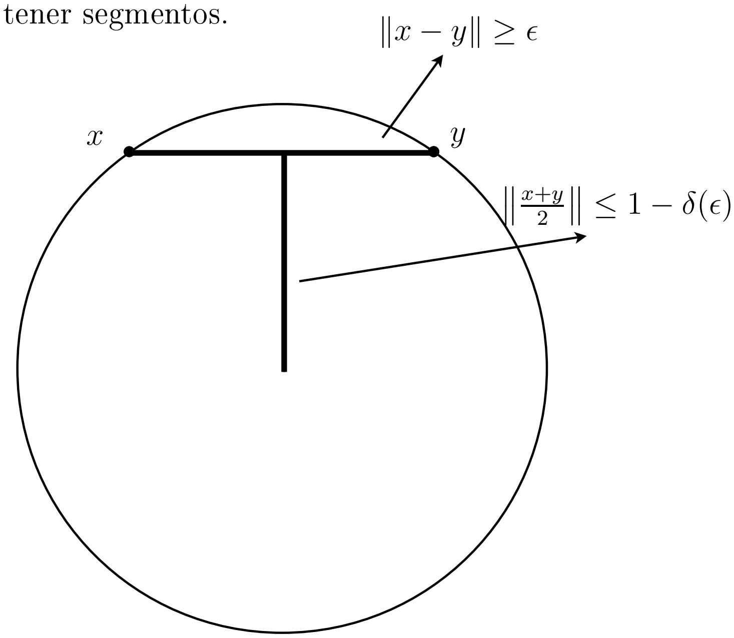
Así tenemos en nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}
|x_i+y_i|^p &\leq 2^{p-1}(|x_i|^p+|y_i|^p) - |x_i-y_i|^p \\
\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p &\leq 2^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p+\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right) - \sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p \\
\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p &\leq 2^{p-1}\left(\|x\|_p+\|x\|_p\right) - \sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p \\
\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p &\leq 2^p - \sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p \\
\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p &\leq 2^p - \|x-y\|_p^p \leq 2^p-\epsilon^p \\
\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i+y_i}{2}\right|^p &\leq 1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p, \\
\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p &\leq 1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

En cuyo caso $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq 1-\delta$ donde $\delta = 1-\left(1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$.

Geométricamente, un espacio de Banach es uniformemente convexo si que dados dos puntos diferentes en la bola unitaria del espacio tal que su distancia sea al menos

ϵ entonces su punto medio se encuentra dentro de la esfera, lo cual nos garantiza que la bola no puede tener segmentos.



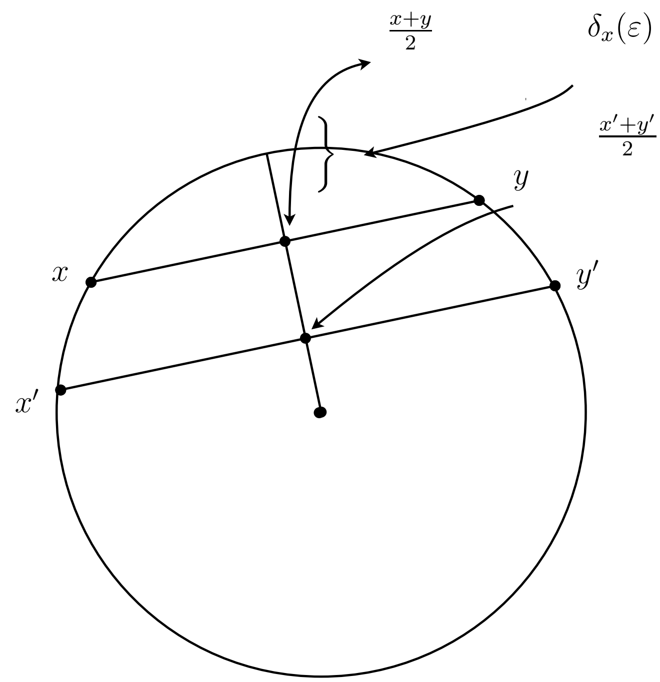
Asociado a la convexidad uniforme, se define el módulo de convexidad del espacio.

Definición 2.2. ***El módulo de convexidad o módulo de Clarkson*** *de un espacio de Banach X se define por:*

$$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ : x, y \in S_X, \ \|x-y\| \geq \epsilon\right\} \ \textit{para cada}\, 0 < \epsilon \leq 2$$

.

El módulo de convexidad estima la menor de las distancias a la esfera unitaria de los puntos medios de cada par de puntos que distan al menos ϵ.



Observación 2.1. *En [4] puede encontrarse la prueba de que*

$$\begin{aligned}
\text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,y\in S_X,\ \|x-y\|\geq\epsilon\right\} &= \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,y\in S_X,\ \|x-y\|=\epsilon\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,y\in B_X,\ \|x-y\|\geq\epsilon\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,y\in B_X,\ \|x-y\|=\epsilon\right\}
\end{aligned}$$

Proposición 2.1. *X es un espacio uniformemente convexo si y sólo si $\delta_X(\epsilon)>0$, para todo $0<\epsilon\leq 2$.*

Demostración:

($\Longrightarrow$) Sean X un espacio uniformemente convexo y $0<\epsilon\leq 2$, lo cual implica la existencia de $\delta(\epsilon)>0$ tal que para cada $x,y\in B_X$ con $\|x-y\|\geq\epsilon$ se sigue que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-\delta(\epsilon)$.

Esto garantiza que $\delta(\epsilon)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,y\in B_X \text{ y } \|x-y\|\geq\epsilon\right\}$$

en consecuencia

$$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ : x, y \in B_X \ y \ \|x-y\| \geq \epsilon\right\} \geq \delta(\epsilon) > 0.$$

Con lo cual se concluye la prueba de la condición necesaria.

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que $\delta_X(\epsilon) > 0$ para todo $0 < \epsilon \leq 2$, veamos que $\delta_X(\epsilon)$ satisface las condiciones de la definición de uniformemente convexo.

En efecto sean $x, y \in B_X$ tales que $\|x-y\| \geq \epsilon$. Haciendo uso de las propiedades de ínfimos

$$0 < \delta_X(\epsilon) \ \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|,$$

lo que es equivalente a $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X(\epsilon)$. ■

En un espacio de Hilbert H una poderosa herramienta geométrica es la ley del paralelogramo $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. En el caso particular en que $\|x\| = \|y\| = 1$ se tiene que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \dfrac{\|x-y\|^2}{4}$. De esta desigualdad se puede determinar la distancia entre el punto medio del segmento que une x y y en la esfera $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ en H mediante $1 - \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{\|x-y\|^2}{4}}$. Evidentemente, esta distancia siempre está entre 0 y 1, además si $\|x-y\| > \epsilon$ entonces

$$1 - \frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

En consecuencia el módulo de convexidad de un espacio de Hilbert H está dado por

$$\delta_H(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Note que, si

(i) $\epsilon_1 < \epsilon_2$ se tiene que $\delta_X(\epsilon_1) < \delta_X(\epsilon_2)$,

(ii) $\delta_X(0) = 0$,

(iii) $0 \leq \delta_X(\epsilon) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $\epsilon \in [0, 2]$, en consecuencia $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \delta_X(\epsilon) = 0$.

El lema siguiente nos da una caracterización de los espacios uniformemente convexo en términos de sucesiones.

Lema 2.1. *Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y sólo si dadas $(x_n),(y_n)$ dos sucesiones en B_X donde $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|=1$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-y_n\|=0$.*

Demostración:

($\Longrightarrow$) Sean X un espacio uniformemente convexo y $(x_n),(y_n)$ sucesiones en B_X tales que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|=1$ y supongamos que $\|x_n-y_n\|$ no converge a cero.

Así, existen $\epsilon>0$ y subsucesiones$(x_{n_j}),(y_{n_j})$ de $(x_n),(y_n)\subseteq B_X,$ tales que $\|x_{n_j}-y_{n_j}\|\geq\ \epsilon.$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

De lo que se sigue que

$$0<\epsilon \quad\leq\quad \|x_{n_j}-y_{n_j}\|\leq\|x_{n_j}\|+\|y_{n_j}\|\leq 1+1=2.$$

Luego, como X es uniformemente convexo existe $\delta_X(\epsilon)>0$ tal que $x,y\in B_X$ con $\|x-y\|\geq\epsilon$ se tiene que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-\delta(\epsilon).$$

En particular esto se cumple para $(x_{n_j}),(y_{n_j})$, con cada $j\geq 1$.

Es decir:

$$\begin{aligned}
\delta_X(\epsilon) &\leq 1-\left\|\frac{x_{n_j}+y_{n_j}}{2}\right\|, \qquad \text{para cada } j\geq 1\\
0\leq\left\|\frac{x_{n_j}+y_{n_j}}{2}\right\| &\leq 1-\delta_X(\epsilon).\\
0\leq\lim_{j\to+\infty}\left(\left\|\frac{x_{n_j}+y_{n_j}}{2}\right\|\right) &\leq \lim_{j\to+\infty}(1-\delta_X(\epsilon)).\\
1 &\leq 1-\delta_X(\epsilon).\\
\delta_X(\epsilon) &\leq 0
\end{aligned}$$

Lo cual contradice el hecho de que $\delta_X(\epsilon) > 0$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que X no es uniformemente convexo. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta_n = \dfrac{1}{2n}$ existen $(x_n), (y_n)$ sucesiones en B_X tales que

$$\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$$

y

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| > 1 - \frac{1}{2n}.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{2n}\right)\right) &\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|\right). \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2}\right) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Esto es, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left\|\dfrac{x_n + y_n}{2}\right\|\right) = 1$. Así por hipótesis $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ lo cual es absurdo puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon > 0$. ■

Teorema 2.1. ***(Teorema de Milman-Pettis)***
Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces X es un espacio Reflexivo.

Demostración:
Sea $x^{**} \in X^{**}$. Si $x^{**} = 0 = Q(0)$ no hay nada que probar. Así podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\|x^{**}\| = 1$.
El teorema de Goldstine nos garantiza que es $Q(B_X)$ es w^*-densa en $B_{X^{**}}$; en consecuencia, podemos elegir una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq B_X$ tal que $Q(B_X) \xrightarrow{w^*} x^{**}$ en X^{**}.

Hacemos $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2)$ si sólo si $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ y $\beta_1 \preceq \beta_2$ y consideramos la red $\left(Q\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in \mathbf{U}}$.

Para cualquier abierto $\mathbf{U}$ que contenga a x^{**}, existe $\alpha_1 \in I$ tal que $Q(x_\alpha) \in \mathbf{U}$ para $\alpha_1 \preceq \alpha$. Como $\mathbf{U}$ puede ser elegido convexo, $\left(Q\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)\right) \in \mathbf{U}$ para $(\alpha, \beta) \preceq (\alpha_1, \alpha_1)$ y como esto es para todo entorno convexo $\mathbf{U}$ de x^{**}, se sigue que $\left(Q\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \overset{w*}{\longrightarrow} x^{**}$. En consecuencia, $\|x^{**}\| \leq \lim\limits_{\alpha} \left\| Q\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)\right\|$.

Esto es

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \lim_{\alpha} \left\| Q\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)\right\| \\
&= \lim_{\alpha} \left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right\| \\
&\leq \lim_{\alpha} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\lim\limits_{\alpha} \left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right\| = 1$.

Como X es uniformemente convexo se sigue que $\lim\limits_{\alpha} \|x_\alpha - x_\beta\| = 0$,

lo cual implica que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red de Cauchy en X; que es un espacio de Banach.

Luego converge a algún $x \in$X y en consecuencia $Q(x_\alpha) \to Q(x)$.

Así, $Q(x) = x^{**}$ lo cual prueba la reflexividad de X. ∎

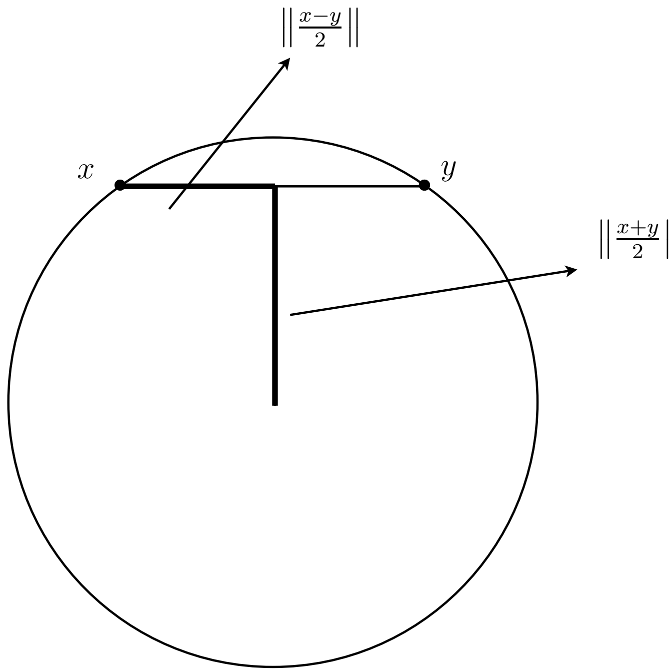
§2.1.2. Uniformemente No-Cuadrado.

En el año de 1964, R.C. James en el artículo ”Uniformly nonsquare Banach Spaces” introdujo otro tipo de espacios, llamados los espacios uniformemente No-Cuadrado.

Definición 2.3. *Un espacio de Banach X se dice* ***uniformemente no-cuadrado*** *si y sólo si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$
\min\left\{ \left\|\frac{x+y}{2}\right\|, \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \right\} \leq 1 - \delta \quad si \quad \|x\| = \|y\| = 1 \tag{2.1}
$$

Una interpretación geométrica es:



Proposición 2.2. *Un espacio normado X es uniformemente no-cuadrado si y sólo si su dual X^* es uniformemente no cuadrado.*

Demostración: Comencemos suponiendo que X es uniformemente no cuadrado y X^* no lo es. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $f_n, g_n \in S_{X^*}$ tales que

$$\left\|\frac{f_n + g_n}{2}\right\|_{X^*} > 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \left\|\frac{f_n - g_n}{2}\right\|_{X^*} > 1 - \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

Por definición de norma en X^*, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n, y_n \in S_X$ tales que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} &\leq \left|\frac{(f_n + g_n)(x_n)}{2}\right| \\ 1 - \frac{2}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} &\leq \left|\frac{(f_n - g_n)(y_n)}{2}\right| \end{aligned}$$

Note que

(i)

$$1 = \|g_n\| = \sup_{x \in S_X} |g_n(x)| \geq |g_n(x_n)|$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
2-\frac{4}{n}-g_n(x_n) &\geq 2-\frac{4}{n}-1=1-\frac{4}{n},\\
2-\frac{4}{n}+g_n(x_n) &\geq 2-\frac{4}{n}-1=1-\frac{4}{n}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

De manera semejante se puede concluir que

$$
\begin{aligned}
2-\frac{4}{n}-g_n(y_n) &\geq 2-\frac{4}{n}-1=1-\frac{4}{n},\\
2-\frac{4}{n}+g_n(y_n) &\geq 2-\frac{4}{n}-1=1-\frac{4}{n}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

(ii) Para $n \geq 2$ se sigue que $1-\dfrac{2}{n} \geq 0$, por lo tanto de (2.2) y (2.3) tendremos que

$$
\begin{aligned}
f_n(x_n)+g_n(x_n) &\geq 2-\frac{4}{n}\\
f_n(x_n) &\geq 2-\frac{4}{n}-g_n(x_n) \geq 1-\frac{4}{n}.
\end{aligned}
$$

De forma similar de (2.2) y (2.4) tendremos que

$$
\begin{aligned}
f_n(y_n)-g_n(y_n) &\geq 2-\frac{4}{n}\\
f_n(y_n) &\geq 2-\frac{4}{n}+g_n(y_n) \geq 1-\frac{4}{n}.
\end{aligned}
$$

De estas observaciones se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_X &:= \sup_{f\in S_{X^*}}\left|f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\right|\\
&\geq f_n\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\\
&= \frac{f_n(x_n)+f_n(y_n)}{2} \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{n}+1-\frac{4}{n}\right)\\
&= 1-\frac{4}{n}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|_X &:= \sup_{f\in S_{X^*}}\left|f\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)\right|\\
&\geq g_n\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)\\
&= \frac{g_n(x_n)-g_n(y_n)}{2} \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{n}+1-\frac{4}{n}\right)\\
&= 1-\frac{4}{n},
\end{aligned}
$$

lo cual contradice la hipótesis de que X es uniformemente no cuadrado. La demostración del recíproco es similar por lo cual se deja al lector. ■

Proposición 2.3. *X es uniformemente no cuadrado si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in S_X$*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1-\delta. \tag{2.5}$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que X es uniformemente no cuadrado. En este caso existe $\delta > 0$ tal que

$$\min_{x,y\in S_X} \{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\delta). \tag{2.6}$$

Si $x, y \in S_X$ tal que $\left\| \frac{x-y}{2} \right\| > 1-\delta$ entonces de inmediato de (2.6) que

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1-\delta.$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe $\delta > 0$ de tal forma que para $x, y \in S_X$ se tiene $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta \Rightarrow \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta$. Verificamos que este δ satisface (2.6).

Como $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \in \mathbb{R}$ podemos compararlo con $(1-\delta)$, así $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$ ó $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$.

Si ocurre que $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$ entonces $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$ y así $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq \|x+y\| \leq 2(1-\delta)$.

En el otro caso, si $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1-\delta$ se sigue, por hipótesis que $\left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1-\delta$. Así

$$\min_{x,y\in S_X} \{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq \|x-y\| \leq 2(1-\alpha).$$

■

En general, un espacio lineal normado X es llamado uniformemente no-$\ell^1(n)$ si existe $\delta > 0$ tal que para cada n elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ de la esfera unitaria de X, $\|x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n\| \leq n(1-\delta)$ para alguna elección de signos.

El espacio $L_p(X)$ es uniformemente no cuadrado si y sólo si X lo es.

Proposición 2.4. *Si X es un espacio uniformemente convexo entonces X es uniformemente No-Cuadrado.*

Demostración: Supongamos que X no es uniformemente no-cuadrado. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in B_X$ tales que

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| > 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \left\| \frac{x_n - y_n}{2} \right\| > 1 - \frac{1}{n}$$

Entonces, si $\|x_n - y_n\| \geq 2(\geq 2(1 - \frac{1}{n}))$ se tiene que $\left\| \frac{x_n - y_n}{2} \right\| > 1 - \frac{1}{n}$, es decir, X no es uniformemente convexo. ∎

En [8] demostró que si X es un espacio de Banach uniformemente No-Cuadrado, entonces X es un espacio Reflexivo. Sin embargo, la demostración está fuera del alcance de este trabajo, así, sólo tendremos presente este importante resultado.

§2.1.3. Fully k-convexo.

En el año de 1955, aparecen dos generalizaciones de los espacios uniformemente convexos: *los espacios Local uniformemente convexos* introducidos por A.R. Lovaglia y aparece también los espacios Fully convexo definidos por K Fan y I. Glicksberg

Fan y Glicksberg introduce la clase de espacios lineales normados fully convexos.

Definición 2.4. *Sea $k \geq 2$ un entero. Un espacio normado X se dice* ***Fully k-convexo*** *(**kC**), si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k$$

entonces (x_n) es una sucesión de cauchy en X.

Observación 2.2. *Algunas implicaciones importantes son:*

$$\boldsymbol{UC} \Rightarrow \boldsymbol{2C} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{kC} \Rightarrow \boldsymbol{(k+1)C} \Rightarrow \textit{Reflexividad.}$$

El recíproco de esta afirmación no es cierto, sin embargo, no tenemos a mano los ejemplos que lo garantizan.

§2.1.4. Débil convexo.

Mas tarde, en el año de 1991 Bor-Luh Lin - Wenyao Zhany generalizaron la definición anterior e introdujeron los espacios **wC**, como sigue:

Definición 2.5. *Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es un espacio* ***débil convexo wC****, si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_X$ con*

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) es convergente en X.

Es claro que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple la implicación **Fully k-convexo** $\Rightarrow$ **wC**.

Observación 2.3. *Si X es un espacio* ***wC****, entonces X es Reflexivo.*

§2.2. Propiedades locales de los espacios de Banach.

§Local uniformemente convexo.

Definición 2.6. *Un espacio de Banach X es* ***local uniformemente convexo*** *(**LUC**), si dado $\epsilon > 0$ y $x \in S_X$ existe $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que para todo $y \in B_X$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$ se tiene $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.*

Geométricamente esta noción difiere de los espacios uniformemente convexos en que se requiere que uno de los puntos finales de la cuerda variable permanezca fija.

Definición 2.7. *Se define el* ***módulo local uniformemente convexo*** *para un espacio de normado como sigue:*

$$\delta_X(\epsilon, x) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \ : y \in S_X \ \ \|x - y\| \geq \epsilon \right\}.$$

Para cada $0 < \epsilon \leq 2$.

TEOREMA **2.2.1.** *X es un espacio local uniformemente convexo si y sólo si $\delta_X(\epsilon, x) > 0$, para todo $0 < \epsilon \leq 2$ y $x \in S_X$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea X un espacio de Banach local uniformemente convexo, sea $0 < \epsilon \leq 2$ y $x \in S_X$ X con $\|x - y\| \geq \epsilon$, así existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon, x)$ para todo $y \in S_X$.

Así $\delta(\epsilon, x)$ es cota inferior del conjunto $\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : y \in S_X, \|x - y\| \geq \epsilon\right\}$.

Luego $\delta_X(\epsilon, x) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : y \in S_X, \|x - y\| \geq \epsilon\right\} \geq \delta(\epsilon, x) > 0$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\delta_X(\epsilon, x) > 0$ para todo $0 < \epsilon \leq 2$ y $x \in S_X$, veamos que $\delta_X(\epsilon, x)$ satisface las condiciones de la definición de los espacios local uniformemente convexo.

En efecto: sea $y \in S_X$tal que $\|x - y\| \geq \epsilon$, haciendo uso de las propiedades de ínfimo tenemos $0 \leq \delta_X(\epsilon, x) \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ con lo cual se tiene $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X(\epsilon, x)$. Así el $\delta_X(\epsilon, x)$ buscado es precisamente el módulo de convexidad para los espacios local uniformemente convexo. ■

En términos de sucesiones la definición de los espacios local uniformemente convexo viene dada por:

Proposición 2.5. *Un espacio de Banach X es local uniformemente convexo si y sólo si para $x \in S_X$, $(y_n) \in S_X$, tal que* $\lim_{n\to+\infty} \left\|\frac{x + y_n}{2}\right\| = 1$ *se cumple que* $\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = 0$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sean X un espacio de Banach local uniformemente convexo y supongamos que $x \in S_X$ y $(y_n) \in S_X$ tal que

$$\left\|\frac{x + y_n}{2}\right\| \to 1 \tag{2.7}$$

pero que $\|x - y_n\|$ no converge a cero. Eso implica la existencia $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(y_{n_j})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x - y_{n_j}\| \geq \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ahora bien como X es un espacio local uniformemente convexo, posee $\delta_X(\epsilon, x) > 0$.

$$\begin{aligned}
0 &< \delta_X(\epsilon, x) \leq 1 - \left\|\frac{x - y_{n_j}}{2}\right\|, \forall j \\
\left\|\frac{x - y_{n_j}}{2}\right\| &\leq 1 - \delta_X(\epsilon, x). \\
\lim_{j\to+\infty}\left(\left\|\frac{x - y_{n_j}}{2}\right\|\right) &\leq \lim_{j\to+\infty}(1 - \delta_X(\epsilon, x)) \\
1 &\leq 1 - \delta_X(\epsilon, x) \quad \text{(por 2.7)}
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que X no es Local uniformemente convexo, lo cual implica que podemos hallar un $0 < \epsilon \leq 2$ y $x \in S_X$ con

$$\delta_X(\epsilon, x) = 0 \tag{2.8}$$

En consecuencia, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $y_{n_j} \in S_X$ tal que

$$\begin{aligned}
1 - \left\| \frac{x + y_{n_j}}{2} \right\| &\leq \frac{1}{j} \quad \text{y} \quad \|x - y_{n_j}\| \geq \epsilon, \\
\lim_{j \to +\infty} (1 - \left\| \frac{x + y_{n_j}}{2} \right\|) &\leq \lim_{j \to +\infty} \left(\frac{1}{j} \right) \quad \text{y} \quad \|x - y_{n_j}\| \geq \epsilon, \\
\lim_{j \to +\infty} \left(1 - \left\| \frac{x + y_{n_j}}{2} \right\| \right) &\leq 0 \quad \text{y} \quad \|x - y_{n_j}\| \geq \epsilon
\end{aligned}$$

Así $\left\| \frac{x+y_{n_j}}{2} \right\| \to 1$ y $\|x - y_{n_j}\| \geq \epsilon$, lo cual contradice la hipótesis que garantiza que $\lim_{j \to +\infty} \|x - y_{n_j}\| = 0$. ■

Teorema 2.2. *Si X es un espacio uniformemente convexo, entonces es local uniformemente convexo.*

Demostración:

Sea $x_0 \in S_X$ y consideremos los conjuntos:

$$L = \left\{ 1 - \left\| \frac{x_0 + y}{2} \right\| \ : y \in S_X, \|x_0 - y\| \geq \epsilon \right\}$$

y

$$M = \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \ : x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}$$

Luego $L \subseteq M$ y en consecuencia $\inf(L) \geq \inf(M)$ y por hipótesis el módulo de convexidad es positivo, de lo cual se sigue $0 < \delta_X(\epsilon) = \inf(M) \leq \inf(L) = \delta_X(\epsilon, x)$. Por tanto $\delta_X(\epsilon, x) > 0$. ■

Observación 2.4. *Los espacios local uniformemente convexo no implican la reflexividad del espacio.*

§**Localmente Fully k-convexo.**

En el año de 1988 Nan-Chao Xun y Wan-Jian-Hun localizan los espacios Fully k-convexo e introducen los espacios Localmente Fully k-convexo pero Bur-Luh Lin y W.Zhang generalizan esta noción y definen los espacios **LwC**.

Definición 2.8. *Sea $k \geq 1$ un entero. Un espacio de Banach X se dice que es un espacio **localmente Fully k-convexo** denotado por **LkC**, si para todo $x \in S_X$, y cada sucesión $(x_n) \subset X$ tal que*

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k + 1,$$

entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Note que X es un espacio **L1R** si y sólo si para cada $x \in B_X$ y toda sucesión $(x_n) \subset B_X$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x + x_n\| = 1 + 1 = 2$, entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Por tanto las definiciones de **L1R** y **LUR** coinciden.

§**Local débilmente convexo.**

Definición 2.9. *Un espacio de Banach X se dice que es un espacio **local débilmente convexo** y se denota por (**LwC**), si para todo $x \in S_X$, y toda sucesión $(x_n) \subset B_X$ tales que $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| =$ 0.*

Observación 2.5.

$$\boldsymbol{LUC} \Leftrightarrow \boldsymbol{L1C} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{LkC} \Rightarrow \boldsymbol{L(k{+}1)C} \Rightarrow \boldsymbol{LwC}.$$

§2.3. Otras propiedades de los espacios de Banach.

§**Rotundo o estrictamente convexo.**

En cuanto a los espacios estrictamente convexos, no se sabe a quien se debe su origen, sin embargo la referencia más antigua aparece en el trabajo de Clarkson.

Definición 2.10. *Un espacio de Banach X se dice **rotundo o estrictamente convexo (C)**, si para todo $x, y \in S_X$ y $\|x+y\| = 2$, entonces $x = y$.*

Note que local débilmente convexo $\Rightarrow$ estrictamente convexo.

Proposición 2.6. *Un espacio de Banach X es estrictamente convexo si y sólo si $\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1$ para cada x_1 y x_2 puntos diferentes en S_X y $0 < t < 1$.*

Teorema 2.3. *Si X es un espacio uniformemente convexo, entonces X es estrictamente convexo.*

Demostración: Sea X un espacio uniformemente convexo y sean $x_0, y_0 \in S_X$ tal que $x_0 \neq y_0$.

Así

$$\delta_X(\|x_0 - y_0\|) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ : x, y \in B_X \ \ \|x-y\| \geq \|x_0 - y_0\|\right\},$$

luego:

$$\delta_X(\|x_0 - y_0\|) \leq 1 - \left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|$$

$$\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\| \ < \ 1 - \delta_X(\|x_0 - y_0\|) < 1$$

Así, X es un espacio convexo . ■

Teorema 2.4. *Si X es un espacio de Banach **LwC**, entonces X es **C**.*

Demostración:

En efecto, si $x, y \in S_X$ y $\|x+y\| = 2$. Entonces

$\lim\limits_{n\to+\infty} \|x + x_n\| = 2$ donde $x_n = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como X es un espacio **LwC** se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Esto es $\|y - x\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|y + x\| = 0$. En cuyo caso $y = x$.

Proposición 2.7. *Suponga que X es un espacio normado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El espacio X es estrictamente convexo,*

2. *Cuando $x_1, x_2 \in X$ y $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$,uno de los dos vectores deben ser un número no negativo múltiplo del otro.*

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$
Supongamos que X es un espacio estrictamente convexo.

Sean $x_1, x_2 \in X$, y supongamos que $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Si uno de ellos es nulo, digamos x_2, entonces $x_2 = 0x_1$, así uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que x_1 y x_2 son no nulos y que $\|x_1\| \leq \|x_2\|$. Y hagamos el estudio por casos:

Caso 1 Cuando $1 = \|x_1\| \leq \|x_2\|$.

Sea $y = \|x_2\|^{-1}x_2$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
2 &\geq \|x_1 + y\| \\
&= \|x_1 + x_2 - x_2 + \|x_2\|^{-1}x_2\| \\
&= \|x_1 + x_2 - (1 - \|x_2\|^{-1})x_2\| \\
&\geq \|x_1 + x_2\| - \|(1 - \|x_2\|^{-1})x_2\| \quad \text{(por desigualdad triangular)} \\
&= \|x_1 + x_2\| - (|1 - \|x_2\|^{-1})\|x_2\| \quad \text{(porque } 1 - \|x_2\|^{-1}\|\text{es un escalar)} \\
&= \|x_1 + x_2\| - (1 - \|x_2\|^{-1}\|)\|x_2\| \\
&= \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_2\| + 1 \quad \text{(por ser convexo el espacio)} \\
&= \|x_1\| + 1 = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Así $\left\|\frac{x_1+y}{2}\right\| = 1$.

Por convexidad como $x_1, y \in S_X$, se sigue que $x_1 = y$. Y en ese caso $x_1 = \|x_2\|^{-1}x_2$ como deseaba demostrarse.

Caso 2 Cuando $1 \neq \|x_1\| \leq \|x_2\|$.

Consideremos $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ y $y_2 = \frac{x_2}{\|x_1\|}$. Veamos que $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|y_1 + y_2\| &= \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_1\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_1 + x_2}{\|x_1\|} \right\| \\
&= \left| \frac{1}{\|x_1\|} \right| \|x_1 + x_2\| \quad \text{(propiedades de la norma)} \\
&= \left| \frac{1}{\|x_1\|} \right| (\|x_1\| + \|x_2\|) \\
&= \left| \frac{1}{\|x_1\|} \right| \|x_1\| + \left| \frac{1}{\|x_1\|} \right| \|x_2\| \\
&= \left| \frac{x_1}{\|x_1\|} \right| + \left| \frac{x_2}{\|x_1\|} \right| \\
&= \|y_1\| + \|y_2\|
\end{aligned}$$

Así $1 = \|y_1\| \leq \|y_2\|$ y usando el caso 1, se tiene que $y_1 = \alpha y_2$. Entonces $\left| \frac{x_1}{\|x_1\|} \right| = \alpha \left| \frac{x_2}{\|x_1\|} \right| \Rightarrow x_1 = \alpha x_2$.

($2 \Rightarrow 1$) Suponga que la condición 2 se cumple. Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces sean $x_1, x_2 \in X$ y tomemos $z_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ y $z_2 = \dfrac{x_2}{\|x_2\|}$, luego $z_1, z_2 \in S_X$ con $z_1 \neq z_2$. Entonces ninguno de los dos vectores es múltiplo no negativo del otro, lo cual implica que $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| = 2$ y además $\left\| \dfrac{z_1 + z_2}{2} \right\| \leq 1$ el espacio X es por tanto rotundo.

§2.3.1. Kadec-Klee.

En el año de 1959, K Fan y I. Glicksberg introducen la propiedad Kadec-klee ó propiedad **H** en los espacios de Banach estrictamente convexo y M.M. Day, quien le elimina la condición de ser espacio estrictamente conexo.

Definición 2.11. *Un espacio de Banach X se dice que posee la* ***propiedad Kadec-Klee*** *ó la propiedad* ***H****, si para todo $x \in S_X$, y toda sucesión $(x_n) \subset S_X$ tal que*

$x_n \to x$, *entonces*

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Note que **LwC** $\Rightarrow$ la propiedad Kadec-Klee.

§2.3.2. Uniformemente Kadec-klee.

En 1980, R. Huff generaliza los espacios **UC** y en términos de sucesiones introduce los espacios casi uniformemente convexos y los espacios uniformemente Kadec-Klee, además presenta una reformulación de los espacios con la propiedad **H**.

Definición 2.12. *Un espacio de Banach X se dice que es **uniformemente Kadec-klee, Ukk**, si para todo $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < 1$ tal que toda sucesión $(x_n) \subset B_X$ $x_n \xrightarrow{w} x$, y $Sep(x_n) \geq \epsilon$, entonces $\|x\| < \delta$.*

Definición 2.13. *Un espacio de Banach $\boldsymbol{X}$, se dice que es **casi uniformemente conexo, NUC**, si para todo $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < 1$ tal que toda sucesión $(x_n) \subset B_{\boldsymbol{X}}$ con $Sep(x_n) \geq \epsilon$, se tiene que $Conv(x_n) \cap ((1-\delta)B_{\boldsymbol{X}}) \neq \emptyset$.*

Capítulo 3

Resultados

Por último este capítulo final tiene por objetivo central mostrar cuales de estas propiedades estudiadas se cumplen en el espacio cociente y bajo qué condiciones se trasfieren a los espacios cocientes.

§3.1. Propiedades uniformes de los espacios de Banach.

Teorema 3.1. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces $X/_M$ también es un espacio uniformemente convexo.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Como X es un espacio de Banach uniformemente convexo, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in B_X$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$ entonces $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

Consideremos $\alpha + M, \beta + M \in B_{X/_M}$ tales que $\|(\alpha - \beta) + M\|_{X/_M} \geq \epsilon$.

Ahora por la proposición 1.5 podemos garantizar la existencia de $x, y \in B_X$ tales que

$$\pi(x) = \alpha + M \quad y \quad \pi(y) = \beta + M.$$

Ahora bien, por la proposición 1.2 se tiene $\|x - y\| \geq \|(\alpha - \beta) + M\|_{X/_M} \geq \epsilon$.

Se obtiene de la hipótesis que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$ y como consecuencia

$$\left\|\frac{(\alpha + \beta) + M}{2}\right\|_{X/_M} \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$$

concluyendo así la demostración. ■

Teorema 3.2. *Sea X un espacio de Banach uniformemente y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio uniformemente no-cuadrado.*

Demostración: Por hipótesis X es un espacio de Banach uniformemente no-cuadrado entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ y $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$ implica que $\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta$.

Ahora queremos ver que este δ es el buscado para el caso del espacio cociente. En efecto, sean $\alpha + M, \beta + M \in B_{X/_M}$ tales que

$$\left\|\frac{(\alpha+\beta)+M}{2}\right\|_{X/_M} > 1-\delta.$$

La proposición 1.5 nos garantiza la existencia de $x, y \in B_X$ tales que

$$\pi(x) = \alpha + M \quad \text{y} \quad \pi(y) = \beta + M.$$

Así, haciendo uso de la proposición 1.2 obtenemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \left\|\frac{(\alpha+\beta)+M}{2}\right\|_{X/_M} > 1-\delta,$$

lo cual implica $\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta$ y seguidamente

$$\left\|\frac{(\alpha-\beta)+M}{2}\right\|_{X/_M} \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

Probando así que el espacio cociente es uniformemente No-cuadrado. ■

Teorema 3.3. *Sea $k \geq 2$ un entero. Sea X un espacio de Banach fully k-convexo y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio fully k-convexo.*

Demostración:

Sean $k \geq 2$ y $(x_n + M)$ un sucesión de $B_{X/_M}$ tal que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|(x_{n_1} + M) + \ldots + (x_{n_k} + M)\| \tag{3.1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_n + M)$ esta contenida en la $B_{X/_M}$, ya que podemos suponer que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n + M \neq 0$ y así definimos $x'_n + M = (x_n + M)/\|x_n + M\|$, de lo contrario el limite (3.1) no se cumple, en consecuencia existe una cantidad finita de ceros en la sucesión. Veamos que $(x_n + M)$ es una sucesión de Cauchy en $X/_M$.

Cómo antes existe $x_n \in B_X$ tal que $\pi(x_n) = x_n + M$.

Ahora analicemos (3.1):

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_{n_1}+M)+\ldots+(x_{n_k}+M)\| \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_{n_1}+\ldots+x_{n_k}\| \quad \text{por la proposición 1.2} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (\|x_{n_1}\|+\ldots+\|x_{n_k}\|) \quad \text{por desigualdad triangular} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (1+\ldots+1) \quad \text{pues } x_n \in B_X \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (k) \\
&= k
\end{aligned}
$$

En consecuencia $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_{n_1}+\ldots+x_{n_k}\| = k$, y como X es Fully k-Convexo se tiene que (x_n) es una sucesión de cauchy en X.

Luego por la proposición 1.2 parte (i) sabemos $\|(x_n-x_m)+M+\|_{X/_M} \leq \|x_n-x_m\|$.

Así (x_n+M) es de cauchy en $X/_M$. Y por tanto $X/_M$ es Fully k-Convexo. ∎

Teorema 3.4. *Sea X un espacio de Banach débil convexo y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio débil convexo.*

Demostración:

Sea $(x_n+M) \subseteq B_{X/_M}$ tal que $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_{n_1}+M)+\ldots+(x_{n_k}+M)\| = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que (x_n+M) es una sucesión convergente en $X/_M$.

Por la proposición 1.5 existen $x_n \in B_X$ tal que $\pi(x_n) = x_n + M$.

Analicemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_{n_1}+M)+\ldots+(x_{n_k}+M)\| \quad \text{para todo } k\in\mathbb{N} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_{n_1}+\ldots+x_{n_k}\| \quad \text{por la proposición 1.2} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (\|x_{n_1}\|+\ldots+\|x_{n_k}\|) \quad \text{por desigualdad triangular} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (1+\ldots+1) \quad \text{pues } x_n \in B_X \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (k) \\
&= k
\end{aligned}
$$

Por tanto $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_{n_1} + ... + x_{n_k}\| = k.$

Y como X es débil convexo, tenemos que (x_n) es una sucesión convergente en X.

O sea: Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $n > N$, entonces $\|x_n - x\| < \epsilon$ para $x \in X$.

Ahora por la proposición 1.2 parte (i) sabemos que: $\|(x_n - x) + M\|_{X/_M} \leq \|x_n - x\|$.

Luego tendríamos; $\|(x_n - x) + M\|_{X/_M} \leq \epsilon$ para algún $x \in X$.

Con lo cual podemos concluir que el espacio $X/_M$ es débil convexo. ■

§3.2. Propiedades locales de los espacios de Banach.

Teorema 3.5. *Sea X un espacio de Banach local uniformemente convexo y M un subespacio cerrado del espacio X. Entonces $X/_M$ también es un espacio local uniformemente convexo.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ y $x + M \in S_{X/_M}$.

Ahora por la reflexividad de espacio $S_{X/_M} = \pi(S_X)$.

Luego existe $x \in S_X$ tales que $\pi(x) = x + M$.

Como X es Local uniformemente Convexo, existe $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que para todo $y \in B_X$ y $\|x - y\| \geq \delta(\epsilon, x)$.

Supongamos que $y + M \in B_{X/_M}$ tal que $\|(x - y) + M\|_{X/_M} \geq \epsilon$, nuevamente por la proposición 1.5 existe $y \in B_X$ tal que $\pi(y) = y + M$.

Así $\|x - y\| \geq \|(x - y) + M\|_{X/_M}$ por la proposición 1.2 parte (i), entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon, x)$. Pues satisfacen las condiciones de la definición de Local uniformemente Convexo.

Y por la proposición 1.2 parte (i) $\left\|\frac{(x+y)+M}{2}\right\|_{X/_M} \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$.

En consecuencia tenemos $\left\|\frac{(x+y)+M}{2}\right\|_{X/_M} \leq 1 - \delta(\epsilon, x)$.

Demostrando así que el espacio $X/_M$ es Local uniformemente Convexo. ■

Teorema 3.6. *Sea $k \geq 1$ un entero.Sea X un espacio de Banach reflexivo y local fully k-convexo y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio Local Fully k-Convexo.*

Demostración:

Sean $x_0 + M \in S_{X/_M}$ y $(x_n + M)$ una sucesión de $B_{X/_M}$. Supongamos que $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_0 + M) + \ldots + (x_{n_k} + M)\| = k + 1$. Veamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n - x_0) + M\|_{X/_M} = 0.$$

Por la reflexividad del espacio tenemos que $S_{X/_M} \subset \pi(S_X)$.

Así existe $x_0 \in S_X$ tal que $\pi(x_0) = x_0 + M$ además por la proposición 1.5 existe $x_n \in B_X$ tal que $\pi(x_n) = x_n + M$.

Ahora veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
k+1 &= \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_0 + M) + (x_{n_1} + M) + \ldots + (x_{n_k} + M)\| \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_0 + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| \quad \text{por la proposición}\,1.2\,\text{parte}\,(i) \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (\|x_0\| + \|x_{n_1}\| + \ldots + \|x_{n_k}\|) \quad \text{por desigualdad triangular} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} (1 + 1 + \ldots + 1) \quad \text{pues } x_{n_i} \in B_X \text{ y } x_0 \in S_X \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} k+1 \\
&= k+1
\end{aligned}$$

En consecuencia $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_0 + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k + 1$. Pero por hipótesis sabemos que X es Local Fully k-convexo, así tenemos $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0$

Pero por la proposición sabemos que:

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|(x_n - x_0) + M\|_{X/_M} \leq \lim_{n_1,\ldots,n_k\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Con lo cual podemos concluir que el espacio $X/_M$ es Local Fully k-convexo. ■

Teorema 3.7. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y local débilmente Convexo y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio local débilmente convexo.*

Demostración:

Sean $x + M \in S_{X/_M}$ y $(x_n + M) \subseteq B_{X/_M}$ tal que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|(x + M) + \ldots + (x_{n_k} + M)\| = k + 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Verifiquemos que $\lim_{n \to +\infty} \|(x_n - x) + M\|_{X/_M} = 0$.

Por la reflexividad del espacio tenemos que $S_{X/_M} \subset \pi(S_X)$.

Así existe $x \in S_X$ tal que $\pi(x) = x + M$ además por la proposición 1.5 existe $x_n \in B_X$ tal que $\pi(x_n) = x_n + M$.

Ahora veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
k + 1 &= \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|(x + M) + (x_{n_1} + M) + \ldots + (x_{n_k} + M)\| \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| \quad \text{por la proposición 1.2 parte } (i) \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} (\|x\| + \|x_{n_1}\| + \ldots + \|x_{n_k}\|) \quad \text{por desigualdad triangular} \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} (1 + 1 + \ldots + 1) \quad \text{pues } x_{n_i} \in B_X \text{ y } x_0 \in S_X \\
&\leq \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} k + 1 \\
&= k + 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_0 + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k + 1$. Recordemos que por hipótesis sabemos X es local débilmente Convexo, así tenemos $\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_n - x_0\| = 0$

Pero por la proposición sabemos que:

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|(x_n - x_0) + M\|_{X/_M} \leq \lim_{n_1,\ldots,n_k \to +\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Así el espacio cociente también es **LwC**. ■

§3.3. Otras propiedades de los espacios de Banach.

Teorema 3.8. *Sean X un espacio de Banach reflexivo, estrictamente convexo y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio estrictamente convexo.*

Demostración:

Sean $\alpha + M, \beta + M \in S_{X/_M}$ tal que $\|(\alpha + \beta) + M\| = 2$

Ahora por ser X un espacio reflexivo se cumple que $S_{X/_M} \subseteq \pi(S_X)$, así existen $x, y \in S_X$ tal que $\pi(x) = \alpha + M$ y $\pi(y) = \beta + M$.

Por la proposición 1.2 parte (i) tenemos $2 = \|x + y\| \geq \|(\alpha + \beta) + M\|_{X/_M} = 2$.

Así $\|x + y\| = 2$ y en consecuencia $x = y$, pues x, y cumplen con la definición de estrictamente convexo, con lo cual $\alpha + M = \beta + M$.

Y por tanto el espacio $X/_M$ es un espacio estrictamente convexo. ∎

Teorema 3.9. *Sean X un espacio de Banach reflexivo, con la propiedad Kadec-Klee y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio con la propiedad Kadec-Klee.*

Demostración:

Sean $x + M \in S_{X/_M}$, y una sucesión $(x_n + M) \subset S_{X/_M}$ tal que $(x_n + M) \xrightarrow{w} x + M$

Ahora existen elementos $x \in S_X$ y $(x_n + M) \subset S_X$ tales que $\pi(x) = x + M$ y $\pi(x_n) = x_n + M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, esto por ser X un espacio de Banach reflexivo $S_{X/_M} \subseteq \pi(S_X)$,

Veamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(x_n - x) + M\|_{X/_M} = 0$.

Por otro lado sabemos que (x_n) es una sucesión acotada en X un espacio espacio reflexivo, entonces por el lema existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$(x_{n_k}) \xrightarrow{w} z$ para algún $z \in X$.

Luego como la norma es débilmente continua inferiormente tenemos

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \liminf \|x_{n_k}\| \\ &\leq \liminf 1 = 1. \end{aligned}$$

Así tenemos $\|z\| \leq 1 \quad (i)$

Ahora bien $x_{n_k} + M = \pi(x_{n_k}) \xrightarrow{w} \pi(z) = x + M$.

Observemos que $1 = \|x + M\|_{X/_M} = \|\pi(z)\|_{X/_M} = \|z + M\|_{X/_M} \leq \|z\| \;\; (ii)$

De (i) y (ii) tenemos que $\|z\| = 1$. Luego como $z \in S_X$ con $x_{n_k} \xrightarrow{w} z$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - z\| = 0$ por ser X un espacio que posee la propiedad Kadec-Klee. ∎

Teorema 3.10. *Sean X un espacio de Banach reflexivo, con la propiedad uniformemente Kadec-klee y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio con la propiedad uniformemente Kadec-klee.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ y $(x_n + M) \subset B_{X/_M}$ tal que $(x_n + M) \xrightarrow{w} x + M$ y $Sep(x_n + M) \geq \epsilon$.

Veamos que existe $0 < \delta < 1$ tal que $\|x + M\| < 1 - \delta$.

Ahora por la proposición 1.5 existe $x_n \in B_X$ tal que $\pi(x_n) = x_n + M$.

Por otro lado es claro que x_n es una sucesión acotada en el espacio reflexivo X, entonces por el lema existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$(x_{n_k}) \xrightarrow{w} z$ para algún $z \in X$.

Como la norma es débilmente semicontinua inferiormente se tiene que $\|z\| \leq 1$.

Además sabemos que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\epsilon &< Sep(x_n + M) \\
&= \inf\{\|(x_n - x_m) + M\|_{X/_M} : n \neq m\} \\
&\leq \|(x_n - x_m) + M\|_{X/_M} \\
&\leq \|x_n - x_m\|
\end{aligned}$$

Luego ϵ es cota inferior para el conjunto $\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\}$.

Así $Sep(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \epsilon > 0$, con lo cual $Sep(x_n) \geq \epsilon$, luego por hipótesis X es uniformemente Kadec-Klee, entonces $\|z\| < 1 - \alpha$

Y como $x_{n_k} + M = \pi(x_{n_k}) \xrightarrow{w} \pi(z)$, por convergencia débil $\pi(z) = x + M$.

Ahora $\|x + M\|_{X/_M} = \|\pi(z)\|_{X/_M} = \|z + M\|_{X/_M} \leq \|z\| < 1 - \delta$

Por tanto el espacio $X/_M$ es uniformemente Kadec-klee. ■

Teorema 3.11. *Sean X un espacio de Banach reflexivo, con la propiedad casi uniformemente convexo y M de un subespacio cerrado de X. Entonces $X/_M$ es un espacio con la propiedad casi uniformemente convexo.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$, como X es casi uniformemente convexo, existe $0 < \delta < 1$ tal que se cumplen las condiciones de la definición.

Sea $(x_n + M) \subset B_{X/_M}$ tal que $Sep(x_n + M) \geq \epsilon$.

Como X es un espacio reflexivo, así existe una sucesión $(y_n) \subseteq B_X$ tal que $\pi(y_n) = x_n + M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \epsilon \leq Sep(x_n + M) &= \text{ínf}\{\|(x_n - x_m) + M\|_{X/_M} : n \neq m\} \\ &\leq \text{ínf}\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \\ &\leq Sep(x_n). \end{aligned}$$

Luego $Sep(x_n) = \{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq Sep(x_n + M) \geq \epsilon$. Así $Sep(x_n) > \epsilon$, así la hipótesis garantiza $Conv(x_n) \cap ((1 - \delta)B_X) \neq \emptyset$.

Faltaría demostrar que $x + M \in Conv(x_n + M) \cap ((1 - \delta)B_{X/_M})$.

Note que $1 - \delta \geq \|x\| \geq \|x + M\|$. Luego, $x + M \in (1 - \delta)B_{X/_M}$.

Además, $x \in Conv(x_n)$, tenemos $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{n_j}$. En consecuencia $x + M = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j x_{n_j} + M)$.

Luego $x + M \in Conv(x_n + M)$ con lo cual se concluye la demostración. ■

REFERENCIAS

[1] Bachman G., NARICI L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] Bracamonte P.Mireya. *Teorema de compacidad de James y algunas aplicaciones.* Trabajo Especial de Grado para optar al Título de Magister Scientiae en Matemáticas ante la Universidad de Los Andes. Mérida - Venezuela. 2002.

[3] Brito W. *Compacidad Débil en Espacios de Banach y aplicaciones de un teorema de R.C. James*. Notas de matemática de la Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias. Mérida - Venezuela. 1998.

[4] Day, M.M. *Uniformly Convexty in factor and conjugate Spaces, Annals of Math*, 45 (1944), 375-385.

[5] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces, Selected Topics.* Lect. Notes Math. 485. Berlin, Heidelberg, New York: Springen 1975.

[6] Dunford N., *Linear Operators, spectral theory.* Interscience publishers., New York 1957.

[7] P. Habala, P. HAJEK, V. ZIZLER. *Introduction to Banach Spaces I, II.* Matfyspress, Prague. 1996. 173-184.

[8] James, R.C, *Uniformly non-square Banach Space*, Ann. Math. 2. 80: 542-550.

[9] Megginson R. An Introduction to Banach Spaces Theory. Springer, Verlag New York. 1998.

[10] Morales José R. *Propiedad* $(K-M)$ *en espacios de Banach*, Notas de Matematica ULA No. 118, Mérida, 1992.

[11] Morales José R. *El espacio cociente y algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach*, Notas de Matematica ULA No. 179, Mérida, 1998.

[12] Rudin W. *Functional Analysis.* Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Parin, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.

[13] B. J. Pettis, *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. Volume 5, Number 2 (1939), 249-253