UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Grafos de línea hamiltonianos-conexos”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Ramón Antonio Padilla Hernández

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Combinatoria.
Tutora: Dra. Isabel Márquez de Mastromartino

Barquisimeto, Venezuela. Octubre de 2008

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Grafos de línea hamiltonianos-conexos"

Presentado por el ciudadano Br. Ramón Antonio Padilla Hernández titular de la Cédula de Identidad Nº 17.572.847. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ______ días del mes de ______________________ de ____________.

______________________	______________________
TUTORA	FIRMA
______________________	______________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________	______________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

___

___

___

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios primeramente.

A Ninibeth. Marín. de Padilla.

A Martín. N. Padilla. M.

Agradecimientos

- A mi padrino Felix y mi madrina Cruz por ser mis padres y brindarme su apoyo en el momento más vulnerable de mi vida.
- A mi tutora la Doctora Isabel Márquez de Mastromartino por su paciencia, buenos consejos, dedicacion y sobre todo por ser mí amiga.
- A mi alma mater UCLA por su alojamiento como casa de estudio para mí.
- A mis compañeros de estudio Teodoro Cordero y José Yovera por ser mis compañeros y amigos.
- A mi compañera de estudio Maira por su humildad y dedicación.
- A mi mamá por ser el ser que me dio la vida y darme la oportunidad de conocer parte de este mundo.

NOTACIONES

G	grafo $G=(V(G),E(G))$
$V(G)$	conjunto de vértices de un grafo G
$E(G)$	conjunto de lados de un grafo G
$\|V(G)\|$	orden de G
$\|E(G)\|$	tamaño de G
$\|A\|$	cardinalidad de un conjunto A
$N_G(v)$	vecindad del vértice v en G
K_n	grafo completo de orden n
$K_{p,q}$	grafo bipartito completo donde $V(G)=V_1\bigcup V_2$ con $\|V_1\|=p, \|V_2\|=q$
$d_G(v)$	grado del vértice v en G
$\delta(G)$	mínimo grado de G
$G[X]$	subgrafo inducido por X

N_n	grafo nulo de orden n
$\omega(G)$	número de componentes de G
$R(G)$	grafo reducido de G
$L(G)$	grafo de línea de G
D	conjunto dominante de G
P	representa una cadena de G
uPv	cadena de G con vértices extremos u y v
xPy	cadena de G con lados extremos x e y
xP_dy	cadena dominante de G con lados extremos x e y
xP_gy	cadena dominante generadora de G con lados extremos x e y
uP_dv	cadena dominante de G con vértices extremos u y v
uP_gv	cadena dominante generadora de G con vértices extremos u y v
$k(G)$	conectividad del grafo G
$\lambda(G)$	lado de conectividad del grafo G
$K_{1,n}$	grafo estrella de $n+1$ vértices
$m(u,v)$	multiplicidad entre los vértices u y v
$m(G)$	multiplicidad del grafo G

“Grafos de línea hamiltonianos-conexos”

Resumen

En el año 1985 C. Thomasen [1] conjeturo que Todo grafo de línea 4-conexo es hamiltoniano.
En este trabajo demostraremos que todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo. Por lo tanto, este trabajo mejora lo planteado por Thomasen. Esta demostración fue dada por Siming Zhan [11] en el año 1989.

Palabras claves: grafo, grafos hamiltonianos, grafos hamiltonianos-conexos, grafo de línea, grafos conexos, conjunto dominante, cadena dominante y cadena dominante generadora, grafo dominante, grafo dominante generador, grafo reducido.

Índice

Índice de figuras

Introducción

El grafo de línea de un grafo $G = (V(G), E(G))$, denotado por $L(G)$, es el grafo que tiene como vértices las aristas de G, es decir, $V(L(G)) = E(G)$ y en el cual dos vértices x, y de $L(G)$ son adyacentes, si como aristas de G son incidentes, esto es, x e y en G tienen un extremo en común.

Un grafo es hamiltoniano-conexo si entre cada par de vértices del grafo existe una cadena hamiltoniana que los une. Una cadena dominante de un grafo G es una cadena simple a la cual le inciden todos los lados de G si además contiene todos los vértices del grafo es denominada dominante generadora. Un grafo G es dominante si entre cada par de lados de G existe una cadena dominante y si entre cada par de lados de G existe una cadena dominante generadora es denominado dominante generador.

En el año 1985 C. Thomassen [1] da la siguiente conjetura.
"Todo grafo de línea 4-conexo es hamiltoniano".
Esta conjetura es consecuencia de haber probado en el año 1981 por el mismo Thomassen [3] que todo grafo de línea 4-conexo por lados es hamiltoniano. Además, en el año 1986 Siming Shan en [10] probó que si G es 4-conexo por lados entonces el grafo de línea $L(G)$ es hamiltoniano-conexo. El resultado principal de este trabajo, también dado por Siming Shan [11] es el siguiente teorema.
"Todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo".
Este trabajo consta de tres capítulos:

En el capítulo 1 daremos las definiciones básicas de la teoria de grafos necesarias en el desarrollo de este trabajo.
En el capítulo 2 definiremos grafos hamiltonianos y grafos de línea.
En el capítulo 3 presentaremos la demostración de que todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos los cuales son necesarios para el desarrollo de este trabajo.

§1.1. Terminología básica

Definición 1.1.1. Un $k-$subconjunto de un conjunto C es un subconjunto de C que tiene k elementos.

Ejemplo 1.1.1. Consideremos $C = \{u, v, w, z\}$ entonces

$$\mathbb{P}(C)_2 = \{\{uv\}, \{uw\}, \{uz\}, \{vw\}, \{vz\}, \{wz\}\}$$

es un $2-$subconjunto de C

Definición 1.1.2. Un **grafo**[1] G es un par $(V(G), E(G))$ formado por un conjunto no vacío $V(G)$ cuyos elementos son llamados vértices y un subconjunto $E(G)$ de la colección de todos los $2-$subconjuntos de $V(G)$ cuyos elementos se denominan **lados o aristas**. Lo denotaremos por $G = (V(G), E(G))$.
Con cierto abuso consideraremos a los pares $\{vv\}$ como elementos de $E(G)$. Estos $2-$subconjuntos los denominaremos **lazos**.

Observación 1.1.1. De ahora en adelante denotaremos a los elementos de $E(G)$ por uv en lugar de $\{u, v\}$.

[1] Otra manera de dar la definición de grafo es através de la función de incidencia, es decir, un grafo G es una terna $[V(G), E(G), g]$ formada por un conjunto no vacío $V(G)$, cuyos elementos se denominan vértices, un conjunto $E(G)$ cuyos elementos se denominan lados o aristas y una aplicación g que a cada elemento x de $E(G)$ le asocia un par no ordenado de vértices $\{u, v\}$ puede ser $u = v$, a g se le conoce como función de incidencia

Definición 1.1.3. Sea $G = (V(G), E(G))$ un **grafo**. Si $V(G)$ y $E(G)$ son conjuntos finitos, diremos que G es un **grafo finito**. Un grafo que no sea finito es llamado **grafo infinito**.

Definición 1.1.4. El **orden** de $G = (V(G), E(G))$ viene dado por $|V(G)|$ y el **tamaño** por $|E(G)|$.

Observación 1.1.2.

- De ahora en adelante, al hablar de grafos, nos estaremos refiriendo a **grafos finitos**.
- Los grafos finitos pueden representarse mediante diagramas, en los cuales los vértices se denotan por puntos y los lados que unen a dos puntos, por medio de líneas rectas o curvas entre esos dos puntos.

Definición 1.1.5. Diremos que un grafo G es etiquetado, si cada uno de sus vértices se distinguen de los demás por un nombre o símbolo que se les adjudica.

Ejemplo 1.1.2. La Figura 1.1, nos muestra un grafo finito etiquetado de orden 5 y tamaño 4, $G = (V(G), E(G))$ por medio de un diagrama, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_0, v_3, v_4\}$ y $E(G) = \{x, y, z\}$, donde $y = v_1v_2$, $x = v_1v_0$ y $z = v_3v_4$. El lado v_3v_3 representa un lazo.

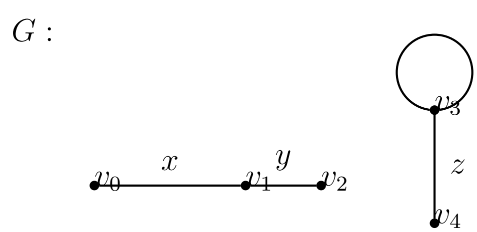


Figura 1.1: Ejemplo de grafo etiquetado

Definición 1.1.6. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Sean $u, v \in V(G)$, si uv esta en $E(G)$ diremos que el grafo G tiene un lado $x = uv$ cuyos extremos son u y v. Además que x une a u con v, u e v son **adyacentes**, **vecinos** si $u \neq v$, y que x incide en u y en v.

Denotaremos por $N_G(v)$ al conjunto de los vecinos de v. A este conjunto

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : u \text{ es vecino de } v\}$$

lo denominaremos **la vecindad** de v.
Diremos que un **vértice** v **es universal** cuando $N_G(v) = V(G) \setminus \{v\}$.

Ejemplo 1.1.3. En el grafo dado por la Figura 1.1, los vértices v_3 y v_4 son adyacentes y vecinos, ya que el lado $z = v_3v_4$ los une. Además los vértices v_2 y v_3 no son vecinos ni adyacentes ya que no existe ningún lado que los una. Mientras que en el grafo dado por la Figura 1.2 el vértice v es universal.

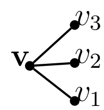


Figura 1.2: Vértice universal

Definición 1.1.7. Diremos que dos lados x e y son **incidentes** o **adyacentes**, si tienen un extremo en común.

Ejemplo 1.1.4. En el grafo dado por la Figura 1.3(b) se tiene que los lados z y t son adyacentes, mientras que los lados s y z no lo son ya que no tienen extremos en común.

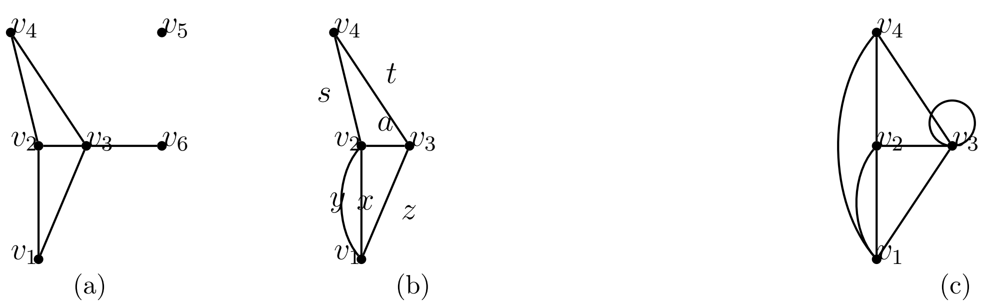


Figura 1.3: Ejemplo de multigrafos y pseudografos.

Definición 1.1.8. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo, diremos que, dos lados $x, y \in E(G)$ son **paralelos** si ambos tienen iguales extremos.

Ejemplo 1.1.5. En el grafo dado por la Figura 1.3(b) se tiene que los lados x e y son paralelos.

Definición 1.1.9. Un grafo G se denomina **simple** si no tiene lazos ni lados paralelos.

Ejemplo 1.1.6. El grafo dado por la Figura 1.3(a) es un ejemplo de grafo simple.

Definición 1.1.10. Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es denominado:

- **Multigrafo** si tiene lados paralelos y no tiene lazos.
- **Pseudografo** si tiene lados paralelos y lazos.

Ejemplo 1.1.7. El grafo dado por la Figura 1.3(b) es un ejemplo de multigrafo, mientras que el grafo dado por la Figura 1.3(c) es un ejemplo de pseudografo ya que tiene lazos y lados paralelos.

Observación 1.1.3. En este trabajo al referirnos a grafos entenderemos grafos finitos ó multigrafos finitos.

Definición 1.1.11. La multiplicidad de un par de vértices u y v, denotada por $m(u, v)$ en un grafo G es el número de lados que los une.
Denominaremos la multiplicidad de G, como $max\{m(u, v) : u, v \in V(G)\}$ y la denotaremos por $m(G)$.

Ejemplo 1.1.8. En el grafo dado por la Figura 1.3(b) se tiene que $m(v_1, v_3) = 1$ mientras que la multiplicidad de ese mismo grafo es igual a 2.

Definición 1.1.12. Sean $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ grafos. Diremos que H es:

- Un **subgrafo** de G si Si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G) \bigcap P(V(H))_2$.
- Un **subgrafo parcial** de G si Si $V(H) = V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.
- Un **subgrafo inducido o generado** de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) = E(G) \bigcap P(V(H))_2$.
- Para cualquier conjunto $X \subset V(G)$ con $X \neq \varnothing$, definimos el subgrafo inducido por X, denotado por $G[X]$ al grafo dado por: $G[X] = [X, E(G) \cap \mathbb{P}(X)_2]$.

Ejemplo 1.1.9. El grafo H mostrado en la Figura 1.4(b) es un subgrafo inducido por el conjunto $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del grafo G.

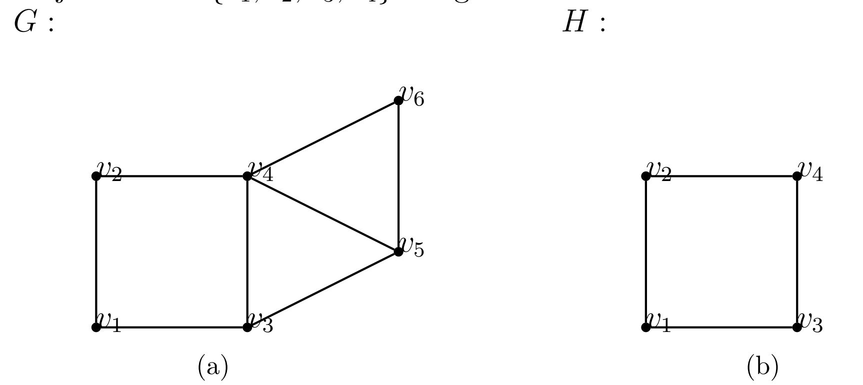


Figura 1.4: H subgrafo de G inducido por el conjunto X

Definición 1.1.13. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Denominaremos **grado de un vértice** $v \in V(G)$ al número de lados que inciden en v. Lo denotaremos por $d_G(v)$. Un lazo se cuenta doble.
Denotaremos por $\delta(G)$ al mínimo grado de G, es decir, $\delta(G) = min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$.

Ejemplo 1.1.10. En el grafo dado por la Figura 1.4(a), se tiene $d_G(v_1) = 2 = d_G(v_2)$, $d_G(v_4) = 4$ y $d_G(v_5) = 3$, mientras que $\delta(G) = 2$.

Definición 1.1.14. Diremos que v vértice de G es:

- **Aislado** si $d_G(v) = 0$.
- **Colgante** si $d_G(v) = 1$.

Ejemplo 1.1.11. En el grafo dado por la Figura 1.3(a) el vértices v_5 es aislado y el vértice v_6 es colgante.

Definición 1.1.15. Diremos que G es un grafo regular si $d_G(v) = r$ para todo $v \in V(G)$.

Ejemplo 1.1.12. La Figura 1.5 representa un grafo regular donde $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = 2$.

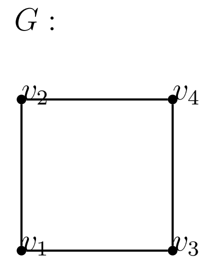


FIGURA 1.5: GRAFO REGULAR

Definición 1.1.16. Diremos que dos grafos $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ son **isomorfos** si existe una biyección $\alpha : V(G_1) \to V(G_2)$ tal que $\alpha(u)\alpha(v)$ es un lado de G_2 si, y sólo si, uv es un lado de G_1. Denominaremos a α como un **isomorfismo** de grafos.

Ejemplo 1.1.13. Los grafos G_1 y G_2 de las Figuras 1.6(a) y 1.6(b) son isomorfos dado que la aplicación $\alpha : V(G_1) \to V(G_2)$ definida por:

$\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = z$, $\alpha(c) = w$, $\alpha(d) = y$, es biyectiva y además preserva las adyacencias.

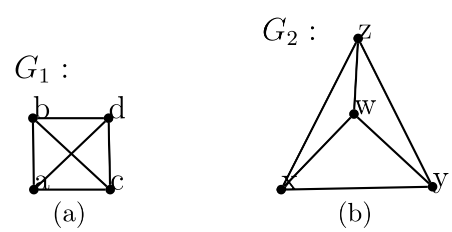
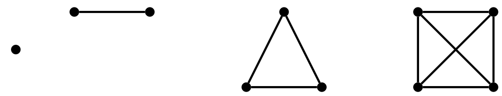


FIGURA 1.6: ISOMORFISMO DE GRAFOS

§1.2. Grafos completos y grafos nulos

Definición 1.2.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo simple de orden n. Diremos que G es un **grafo completo** si para todo $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$. Es decir, cualquier par de vértices son adyacentes. Lo denotaremos por K_n.

Ejemplo 1.2.1. Los grafos mostrados en las Figuras 1.7(a), 1.7(b), 1.7(c), 1.7(d) y 1.8 representan a los grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4 y K_5 respectivamente.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.7: Grafos completos K_1, K_2, K_3 y K_4

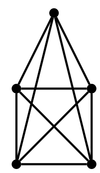


Figura 1.8: Grafo completo K_5

Observación 1.2.1. los grafos completos son grafos regulares dado que $d_{Kn}(v) = n-1, \forall x \in K_n$, el reciproco no necesariamente es cierto.

Ejemplo 1.2.2. El grafo dado por la Figura 1.9 es regular pero no es completo.

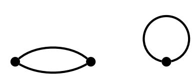


Figura 1.9: Ejemplo de grafo regular que no es completo

Definición 1.2.2. Diremos que un grafo es nulo si todos sus vértices son aislados. Lo denotaremos por N_n.

Ejemplo 1.2.3. La Figura 1.10, nos muestra un grafo nulo N_3.

Figura 1.10: Ejemplo de grafo nulo

Observación 1.2.2. Los grafos nulos son regulares dado que $\forall v \in V(G)$, $d_G(v) = 0$. Además $\delta(N_3) = 0$.

Cuando $G = (V(G), E(G))$ es un grafo simple, tenemos que $d_G(v) \leq \mid V(G) \mid -1$ para todo $v \in V(G)$. La igualdad se alcanza cuando G es un grafo completo y cuando el grafo G es nulo, tenemos que $d_G(v) = 0$, para todo $v \in V(G)$. Cuando G es simple $d_G(v) = |N_G(v)|$.

§1.3. Grafos multiestrellas

Definición 1.3.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Diremos que $X \subset V(G)$, $X \neq \varnothing$ es un **conjunto independiente** de G si $G[X]$ es nulo.
$X \subset V(G)$, $X \neq \varnothing$ es un **conjunto independiente máximo** de G, si G no tiene conjuntos independientes X' tal que $|X'| > |X|$.

Ejemplo 1.3.1. Del grafo dado en la Figura 1.11, el conjunto $X = \{u\}$ es un conjunto independiente de G, mientras que el conjunto $X' = \{v, w\}$ es un conjunto independiente máximo de G.

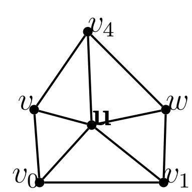


Figura 1.11: Ejemplo de conjunto independiente

Definición 1.3.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo simple. Diremos que G es un **grafo bipartito** si el conjunto de vértices $V(G)$ se puede particionar en dos conjuntos independientes, digamos V_1 y V_2.
Cuando $|V_1| = p$ y $|V_2| = q$ y cada vértice de V_1 se une mediante un lado con cada vértice de V_2 diremos que G es un **grafo bipartito completo**. Lo denotaremos por $K_{p,q}$.

Ejemplo 1.3.2. El grafo dado por la Figura 1.12(a) es un grafo bipartito, dado que el conjunto de vértices $V(G)$ se puede particionar en dos conjuntos independientes $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V_2(G) = \{u_1, u_2\}$ y el grafo $K_{3,2}$ dado en la Figura 1.12(b) es un grafo bipartito completo.

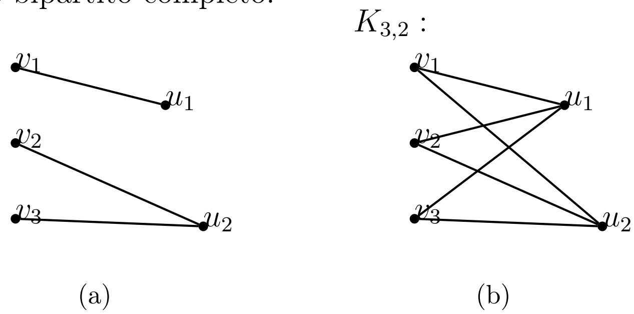


Figura 1.12: Grafo bipartito - grafo bipartito completo

Observación 1.3.1. Un grafo bipartito completo $K_{p,q}$ tiene $p+q$ vértices y $p.q$ lados.

Ejemplo 1.3.3. El grafo bipartito completo $K_{3,2}$ dado en la Figura 1.12(b) tiene 3+2= 5 vértices y 3.2= 6 lados.

Definición 1.3.3. Denominaremos **grafo estrella** de n-vértices al grafo bipartito completo $K_{1,n-1}$. Al grafo $K_{1,3}$ se le denomina **claw**

Ejemplo 1.3.4. El grafo dado en la Figura 1.13 es la estrella denominada claw.

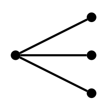


Figura 1.13: Estrella denominada claw

Definición 1.3.4. Diremos que un grafo G es **multiestrella** si se obtiene al añadir al menos un lado paralelo a cualquiera de los lados de un grafo estrella $K_{1,n}$.

Ejemplo 1.3.5. El grafo dado en la Figura 1.14 es un grafo multiestrella.

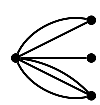


Figura 1.14: Ejemplo de multiestrella.

§1.4. Cadenas, ciclos, grafos conexos

Definición 1.4.1. Una **cadena de un grafo** $G = (V(G), E(G))$, es una secuencia alternada de vértices y de lados $P = v_0, x_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, x_k, v_k$ tal que para todo i, $1 \leq i \leq k$, los extremos de x_i son v_{i-1} y v_i. Diremos además, que P es una cadena de **longitud** k que va de v_0 a v_k, y lo denotaremos por $p(G) = k$. Por convención un vértice es una cadena de longitud cero y un lado es una cadena de longitud uno. Otra manera de denotar a una cadena es por medio de los vértices ó por los lados que la forman, esto es, $P = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ ó $P = x_1, x_x, \ldots, x_{k-1}, x_k$. Los vértices v_0 y v_k son denominados los extremos de la cadena P ó los lados x_1 y x_k respectivamente, (cualquier otro vértice $v_i \neq v_0$ y $v_i \neq v_k$ lo denominaremos interno, analogamente para los lados x_1 y x_k). Denotaremos a P por $v_0 P v_k$ ó por $x_1 P x_k$ respectivamente

- Si $v_0 = v_k$ ó $x_1 = x_k$ diremos que $v_0 P v_0$ ó $x_1 P x_1$ es una **cadena cerrada**.
- Si los terminos de la sucesión de vértices $(v_0, ..., v_k)$ son diferentes diremos que $v_0 P v_k$ es una **cadena elemental**.
- Si los terminos de la sucesión de lados $(x_1, ..., x_k)$ son diferentes diremos que $x_1 P x_k$ es una **cadena simple**.
- Denotaremos por $V(P)$ los vértices de una cadena P y los lados por $E(P)$.

Ejemplo 1.4.1. En el grafo dado por la Figura 1.15 se tiene que la secuencia $v_0 P v_0 = v_0 x_6 v_2 x_1 v_4 x_2 v_3 x_3 v_2 x_6 v_0$ es una cadena cerrada que no es ni elemental ni simple, la secuencia $v_0 P^* v_2 = v_0 x_7 v_1 x_8 v_3 x_2 v_4 x_1 v_2$ es elemental y simple, la secuencia $v_0 P^{**} v_1 = v_0 x_6 v_2 x_1 v_4 x_2 v_3 x_3 v_2 x_4 v_3 x_8 v_1$ es simple pero no es elemental ya que repite a los vértices v_2 y v_3.

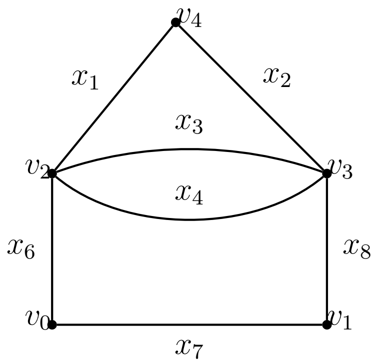


FIGURA 1.15: EJEMPLO DE CADENAS

Observación 1.4.1.

- Dos cadenas distintas $P_1 = uPv$ y $P_2 = vPw$ con un extremo común v se pueden unir para formar una nueva cadena con extremo los vértices no comunes. Por abuso de notación la cadena resultante la denotaremos por $P_1 \bigcup P_2$ y es dada por : $P_1 \bigcup P_2 = uPv \bigcup vPw = uPw$.
  Analogamente, para las cadenas $P_1 = xPy$ y $P_2 = yPz$ donde x, y y z son lados y el lado y es común en ambas cadenas, al unirlas la cadena resultante la denotaremos por $P_1 \bigcup P_2$ y es dada por: $P_1 \bigcup P_2 = xPy \bigcup yPz = xPz$.
- Una cadena elemental es simple. El reciproco no necesariamente es cierto.
- Un lazo es un ciclo elemental de longitud 1.
- Toda cadena simple es de longitud menor o igual a $\mid E(G) \mid$.
- Toda cadena elemental es de longitud menor o igual a $\mid V(G) \mid$.

Definición 1.4.2. Denominaremos **ciclo** a toda cadena elemental cerrada. La longitud de un ciclo es igual al número de sus vértices.

Ejemplo 1.4.2. En el grafo dado por la Figura 1.15 se tiene que la cadena $P = v_0x_6v_2x_3v_3x_8v_1x_7v_0$ es un ciclo elemental de longitud igual a 4.

Definición 1.4.3. Denominaremos **circuito** a toda cadena simple cerrada. La longitud de un circuito es igual al número de sus lados.

Ejemplo 1.4.3. En el grafo dado por la Figura 1.15 se tiene que la cadena $P = v_0x_6v_2x_1v_4x_2v_3x_3v_2x_4v_3x_8v_1x_7v_0$ es un circuito de longitud igual a 7.

Observación 1.4.2. De ahora en adelante al hablar de cadenas, nos estaremos refiriendo a cadenas simples.

Definición 1.4.4. Diremos que un grafo $G = (V(G), E(G))$ es **conexo**, si para todo $u, v \in V(G)$ $(u \neq v)$, existe una cadena de extremos u y v, que los une. Un grafo que no sea conexo diremos que es disconexo.

Ejemplo 1.4.4. El grafo G mostrado en la Figura 1.16 es conexo y el grafo nulo N_n de n vértices es disconexo.

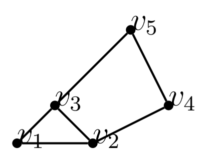


Figura 1.16: Ejemplo de grafo conexo G

Definición 1.4.5. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sean $u, v \in V(G)$. Diremos que u esta relacionado con v (uRv), si y sólo si, $u = v$ ó existe una cadena de extremos u y v.

Lema 1.4.1. *La relación R definida en la Definición 1.4.5, es de equivalencia.*

Demostración. Por Definición 1.4.5, uRu, para todo $u \in V(G)$. Luego, se cumple la reflexividad. Si uRv $(u \neq v)$ por Definición 1.4.5, existe una cadena en G que une a u con v, y dado que G es un grafo no dirigido, tenemos que existe una cadena que une a v con u. En consecuencia para todo u, v en $V(G)$ se cumple la simetría. Por lo tanto vRu. Si uRv y vRw por Definición 1.4.5, existen uPv y vPw cadenas en G. Luego, podemos construir una nueva cadena $uPw = uPv, vPw$ en G. Por lo tanto, uRw, para todo u, v, w en $V(G)$. Luego se cumple la transitividad.
De aqui, queda probado que la relación R es de equivalencia. $\square$

Definición 1.4.6. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Denominaremos las **componentes** de G, a los subgrafos generados por las clases de equivalencias que determinan la relación dada en la Definición 1.4.5.
Denotaremos por $w(G)$ **al número de componentes de** G.

Ejemplo 1.4.5. El grafo dado por la Figura 1.17(a) tiene dos componentes, mientras que el grafo dado por la Figura 1.17(b) tiene una sola componente.

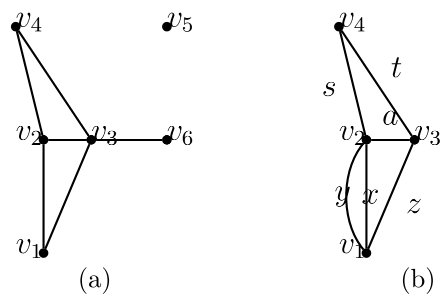


Figura 1.17: Ejemplo de componentes de un grafo.

Proposición 1.4.1. *Las componentes de un grafo G son subgrafos conexos.*

Demostración. Sea H una componente de G y sean $u, v \in V(H)$ $(u \neq v)$, entonces por la Definición 1.4.6, existe una cadena que los une. Luego, por la Definición 1.4.4, H es conexo. □

Proposición 1.4.2. *Un grafo es conexo, si y sólo si, posee una sola componente.*

Demostración. Si $G = (V(G), E(G))$ es un grafo conexo, por Definición 1.4.5 se tiene que para todo $u, v \in V(G)$ $(u \neq v)$, existe una cadena de extremos u y v que los une. Luego G posee una sola componente.
Reciprocamente, si $G = (V(G), E(G))$ posee una sola componente, entonces por la Proposición 1.4.1 G es conexo. □

Teorema 1.4.1. *Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sean $u, v \in V(G)$. Si existe una cadena que une a u con v, entonces existe una cadena simple que une u con v.*

Demostración. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Supongamos que para $u, v \in V(G)$, existe una cadena P en G que une a los vértices v_0 y v_n, donde $v_0 = u$ y $v_n = v$. Si P no repite lados es simple. Supongamos que P repite al menos un lado, digamos x_i donde $x_i = v_{i-1}v_i$, esto es, P viene dada por:

$$P = v_0x_1v_1x_2v_2...v_{i-1}x_iv_i...v_{j-1}x_jv_jx_{j+1}v_{i-1}x_iv_ix_{i+1}v_{i+1}...v_{n-1}x_nv_n$$

Luego, podemos construir otra cadena P^* como sigue. Eliminamos uno de los lados repetidos x_i y todos los vértices y lados que hacen posible que el lado x_i se repita, así, hemos construido una nueva cadena P^* que no repite al lado x_i y es dada por.

$$P^* = v_0 x_1 v_1 x_2 v_2 ... v_{i-1} x_i v_i x_{i+1} v_{i+1} ... v_{n-1} x_n v_n$$

Si existe otro lado en P^* que se repite, se aplica el mismo procedimiento que se aplicó a P, hasta tanto no existan lados repetidos en una cadena que una a u con v. Este procedimiento es finito dado que G es finito. Luego, existe una cadena simple que une a u con v. □

Corolario 1.4.1. *G es un grafo conexo, si y sólo si, existe una cadena simple entre cualesquiera dos vértices de G.*

Demostración. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo conexo, por Definición 1.4.4 tenemos que $\forall u, v \in V(G)$ $(u \neq v)$ existe una cadena de extremos u e v que los une y por Teorema 1.4.1 esta cadena es simple.
Reciprocamente, si existe una cadena simple entre cualquier par de vértices, entonces cada par de vértice está conectado por al menos una cadena de un sólo lado. Luego hay una única componente y por lo tanto el grafo G es conexo. □

§1.5. Conectividad

Definición 1.5.1. Sea G un grafo. Diremos que $A \subset V(G)$ es un conjunto de **articulación por vértices** del grafo G, si $G[V(G) \backslash A]$ tiene más de una componente ó se reduce a un vértice.

Ejemplo 1.5.1. El conjunto $A = \{v_3\}$ del grafo G dado por la Figura 1.18(a), es un conjunto de articulación por vértices ya que $G[V(G) \setminus A]$ Figura 1.18(b) tiene dos componentes.

Definición 1.5.2. Un grafo G es k-conexo si todo conjunto de articulación por vértices A de G tiene al menos k-vértices, esto es, $k \leq \mid A \mid$.

Ejemplo 1.5.2. El grafo G dado por la Figura 1.18(a) es 1-conexo.

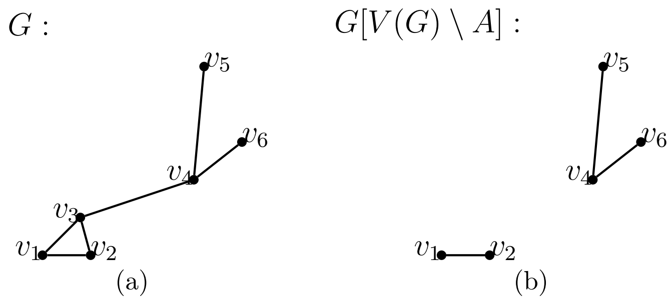


FIGURA 1.18: CONJUNTO DE ARTICULACIÓN POR VÉRTICES

Definición 1.5.3. La **conectividad por vértices** de G denotada por $k(G)$, es el minimo cardinal de un conjunto de articulación por vértices. Lo que equivale a decir que $k(G)$ es el máximo k tal que G es k-conexo. Es decir, $k \leq k(G)$.

Ejemplo 1.5.3. Para el grafo dado por la Figura 1.18(a) se tiene que $k(G) = 1$.

Proposición 1.5.1. *Si G es k-conexo ($k \geq 2$), entonces G es q-conexo, para todo $1 \leq q \leq k$.*

Demostración. Si G es k-conexo ($k \geq 2$), entonces por Definición 1.5.3 $k \leq k(G)$, pero $1 \leq q \leq k$, por lo que, $1 \leq q \leq k \leq k(G)$. Así $q \leq k(G)$. Luego por Definición 1.5.3 G es q-conexo. □

Definición 1.5.4. Sean $G = (V(G), E(G))$ un grafo conexo y $H = (V(G), E(H))$ un subgrafo parcial de G. Un conjunto $B \neq \varnothing \subset E(G)$ tal que $B \bigcap E(H) = \varnothing$ y $B \bigcup E(H) = E(G)$, es un conjunto de **articulación por lados** de G, si H tiene dos componentes y a su vez ningún subconjunto propio de B hace disconexo a G.

Ejemplo 1.5.4. El conjunto $B = \{1, 2\}$ es un conjunto de articulación por lados del grafo G dado por la Figura 1.19(a) ya que el subgrafo parcial H dado por la Figura 1.19(b) tiene dos componentes .

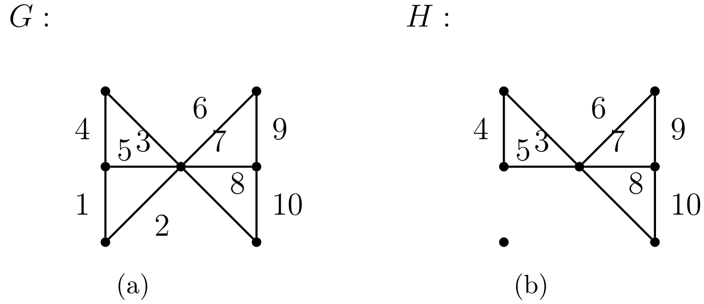


Figura 1.19: Conjunto de articulación por lados

Definición 1.5.5. Sea G un grafo conexo. **La conectividad por lados** de G denotada por $\lambda(G)$ es el minimo cardinal de un conjunto de articulación por lados de G.
Cuando $\lambda(G) \geq k$, se dice que el grafo tiene k-lados de conectividad.

Ejemplo 1.5.5. Del grafo dado por la Figura 1.19(a) se tiene que $\lambda(G) = 2$

Observación 1.5.1. De ahora en adelante al hablar de conectividad nos estaremos refiriendo a conectividad por vértices.

Capítulo 2

Grafos hamiltonianos y grafos de líneas

§2.1. Grafos hamiltonianos

Definición 2.1.1. Sea G un grafo de orden n. Una cadena elemental de G de longitud $n-1$, es decir que pasa por todos los vértices de G una y sólo una vez, es denominada **cadena hamiltoniana**.

Definición 2.1.2. Sea G un grafo de orden n. Un ciclo de G de longitud n, es denominado **ciclo hamiltoniano**.

Definición 2.1.3. Diremos que un grafo G es:

- Semihamiltoniano si posee una cadena hamiltoniana.
- Hamiltoniano si posee un ciclo hamiltoniano.

Definición 2.1.4. Diremos que un grafo G de orden n es **hamiltoniano-conexo** si existe una cadena hamiltoniana entre cada par de vértices distintos que los une.

Ejemplo 2.1.1. El grafo mostrado en la la Figura 2.1 es hamiltoniano-conexo ya que entre cada par de vértices distintos siempre es posible encontar una cadena hamiltoniana.

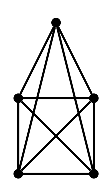


Figura 2.1: Ejemplo de grafo hamiltoniano-conexo

Afirmación 2.1.1. El grafo completo $K_{n\geq 2}$ es hamiltoniano-conexo.

Demostración. Probemos por reducción al absurdo.
Supongamos que $K_{n\geq 2}$ no es hamiltoniano-conexo. Sean $u, v \in V(K_n)$ y consideremos una cadena de longitud máxima uPv que tiene por extremos a los vértices u y v.
Supongamos que existe $w \in V(K_n)$ que no pertenece a los vértices de la cadena uPv, como K_n es completo, w es adyacente a u (también es adyacente a v), entonces $P' = uPv \cup vw$ es una cadena de mayor longitud de K_n. Contradicción. Así, $K_{n\geq 2}$ es hamiltoniano-conexo. $\square$

§2.2. Grafos de línea

Definición 2.2.1. Denominaremos **grafo de línea** de G, denotado por $L(G)$, al grafo que viene dado por: $V(L(G)) = E(G)$ y $E(L(G))= \{\{x, y\} : x \text{ y } y \textit{ inciden en } G\}$.

Ejemplo 2.2.1. La Figura 2.2(b) es el grafo de línea de la Figura 2.2(a).

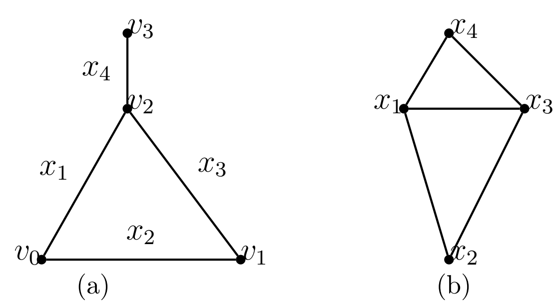


Figura 2.2: Grafo de línea

Los resultados que citaremos a continuación, establecen relaciones entre un grafo conexo y su grafo de línea.

Teorema 2.2.1. *[6] Un grafo conexo G es isomorfo a su grafo de línea $L(G)$, si y sólo si, G es un ciclo.*

Proposición 2.2.1. *[6]*

- *Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo simple no necesariamente conexo, diremos que G y $L(G)$ son isomorfos, si y sólo si, G es regular de grado 2.*

- *Si* G_1 *y* G_2 *son grafos isomorfos, entonces* $L(G_1)$ *y* $L(G_2)$ *también lo son.*

Teorema 2.2.2. *[6] Si* G *y* G' *son grafos conexos con sus grafos de línea isomorfos. Entonces* G *es isomorfo al grafo completo* K_3 *y* G' *es isomorfo a la estrella* $K_{1,3}$*.*

Teorema 2.2.3. *(Harary y Nash-Williams[5]) Si* G *es un grafo con al menos 4 vértices, entonces el grafo de línea* $L(G)$ *es hamiltoniano, si y sólo si,* G *tiene un circuito* P *donde cada lado de* G *tiene al menos un extremo en* P *ó* G *es isomorfo al grafo* $K_{1,s}$ *para algún entero* $s \geq 3$*.*

Capítulo 3

Condición para que un grafo de línea sea hamiltoniano-conexo

En este capítulo daremos las definiciones y ejemplos de: conjunto dominante, cadena dominante y cadena dominante generadora, grafo dominante y grafo dominante generador, necesarios en el desarrollo de nuestro trabajo. El objetivo principal de este capítulo es dar la demostración de que todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo, la cual fue presentada por Siming Zhan[11] en el año 1989. Este resultado representa el objetivo general de nuestro trabajo y previamente daremos los resultados que nos permitiran lograr lo planteado.

§3.1. Grafos dominantes

Definición 3.1.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Diremos que $D \subset V(G)$ es un **conjunto dominante**, si cada lado de G incide en al menos un vértice de D.
Un conjunto dominante D es minimal, si no existe otro conjunto dominante D' tal que $|D'| < |D|$.

Ejemplo 3.1.1. Los conjuntos $A = \{v_1, v_3, v_4\}$ y $B = \{v_2, v_3, v_4\}$ son conjuntos dominantes del grafo dado por la Figura 3.1. Notese que A y B son conjuntos dominantes minimales. El conjunto $C = \{v_5, v_4, v_6\}$ no es un conjunto dominante, ya que los lados v_2v_3, v_1v_2 y v_1v_3 no inciden en ningún vértice de C.

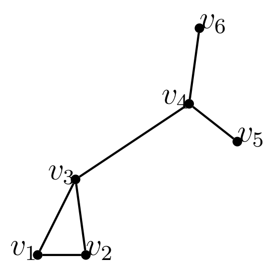


Figura 3.1: Ejemplo de conjunto dominante

Teorema 3.1.1. *[2] Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Un conjunto $X \subset V(G)$ es un conjunto independiente de G, si y sólo si, $V(G) \setminus X$ es un conjunto dominante de G.*

Definición 3.1.2. Sean $G = (V(G), E(G))$ un grafo y xPy una cadena simple de lados extremos x e y. Diremos que xPy es:

- **dominante** si cada lado de G incide en al menos un vértice interno de xPy. La denotaremos por xP_dy.

- **dominante generadora** si xPy es dominante y posee todos los vértices de G. La denotaremos por xP_gy.

Ejemplo 3.1.2. En el grafo G dado por la Figura 3.2 la cadena $v_3Pv_3 = v_3x_2v_4x_1v_2x_5v_1x_8v_3$ es dominante dado que todo los lados de G inciden en al menos un vértice interno de v_3Pv_3. La cadena $v_0Pv_0 = v_0x_7v_1x_8v_3x_2v_4x_1v_2x_6v_0$ es dominante generadora.

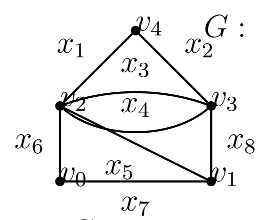


Figura 3.2: Cadenas dominantes

Definición 3.1.3. Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es:

- **Dominante** si para cada par de lados $x, y \in E(G)$ existe una cadena dominante xP_dy.

- **Dominante generador** si para cada par de lados $x, y \in E(G)$ existe una cadena dominante generadora xP_gy.

Ejemplo 3.1.3. El grafo dado en la Figura 3.2 es un grafo dominante generador ya que entre cualquier par de lados del grafo siempre es posible encontrar una cadena dominante generadora. El grafo dado en la Figura 3.3 es dominante, pero no es dominante generador, ya que no es posible encontrar una cadena que sea dominante y tenga todos los vértices del grafo.

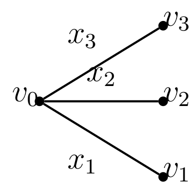


Figura 3.3: Grafo dominante

Definición 3.1.4. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo, definamos las operaciones de **reducción** $R1$ y $R2$ sobre G como sigue:

- $R1$ consiste en borrar un vértice, que tiene grado a lo más 3 y es adyacente a un único vértice, y se eliminan los lados que inciden en el.

- $R2$ consiste en borrar un vértice u con grado 2 y que incide en los lados uv y uw con $(v \neq w)$ y añadir un nuevo lado vw.

El grafo obtenido de G al aplicar una sucesión de operaciones $R1$ y $R2$ hasta tanto no se puedan aplicar más $R1$ y $R2$ es llamado **grafo reducido de** G y lo denotaremos por $R(G)$, diremos que G es reducible. En caso contrario diremos que G es irreducible.

Ejemplo 3.1.4. Los grafos completos K_n con $(n \geq 4)$ son grafos irreducibles ya que no es posible aplicar las operaciones de reducción a ninguno de sus vértices. Mientras que el grafo G dado en la Figura 3.4(a) es reducible y su grafo reducido $R(G)$ es el grafo G_5 dado en la Figura 3.4(f). La notación $Ri(v_j)$, $i = 1, 2$ significa que se esta aplicando la operación de reducción Ri sobre el vértice v_j .

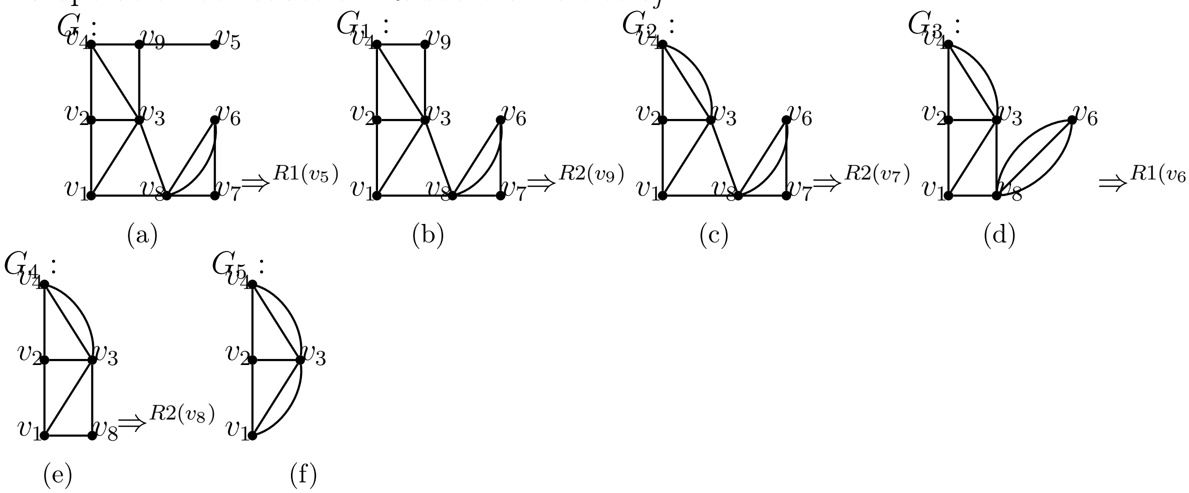


Figura 3.4: Ejemplo de grafo reducido.

§3.2. Preliminares del teorema de Siming Zhan[11]

El siguiente lema nos da condiciones para que un grafo G sea reducible.

Lema 3.2.1. *[11] Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo no multiestrella con multiplicidad a lo más 3. Si el grafo de línea $L(G)$ tiene conectividad al menos 4, entonces existe un único grafo reducido $R(G)$ de G (salvo un isomorfismo) tal que:*
i) $\delta(R(G)) \geq 3$,
ii) $k(L(R(G))) \geq k(L(G))$,
iii) $V(R(G))$ *es un conjunto dominante de* G.

El siguiente lema nos da una condición suficiente para que un grafo de línea $L(G)$ sea hamiltoniano-conexo, es decir, nos muestra que para probar que un grafo de línea $L(G)$ es hamiltoniano-conexo basta probar que un grafo G de al menos cuatro vértices es dominante. Cabe destacar que si un grafo G es dominante generador, es dominante.

Lema 3.2.2. *[11] Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo con al menos 4 vértices. Entonces G es dominante, si y sólo si, el grafo de línea $L(G)$ es hamiltoniano-conexo.*

El siguiente lema nos da condiciones para que un grafo G no multiestrella sea dominante en función de su grafo reducido $R(G)$.

Lema 3.2.3. *Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo no multiestrella con multiplicidad a lo más 3. Si el grafo de línea $L(G)$ tiene conectividad al menos 4 y el grafo reducido $R(G)$ es dominante generador, entonces G es dominante.*

Demostración. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo que verifica las hipótesis. Dado que G también verifica las hipótesis del Lema 3.2.1, existe un único grafo reducido $R(G)$ de G.

Por hipótesis $R(G)$ es dominante generador. Para probar que G es dominante, basta probar que entre dos lados cualesquiera de G, digamos $x = uv$, $y = st$; existe una cadena dominante que los une.

Como $x, y \in E(G)$ y dado que por (iii) del Lema 3.2.1 $V(R(G))$ es un conjunto dominante de G, existe al menos un extremo de los lados x e y que estan en $V(R(G))$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $v \in V(R(G))$ y que el lado y de G es un lado de $R(G)$.

Caso 1: $y \in E(R(G))$

Caso 1.1: $x \in E(R(G))$. Es decir, $u \in V(R(G))$

Como x e y son lados del grafo $R(G)$ se tiene que los vértices extremos de x e y son vértices de $R(G)$. Luego existe una cadena dominante generadora en $R(G)$ que también es una cadena dominante en G.

Caso 1.2: $x \notin E(R(G))$

Como $x \notin E(R(G))$ entonces $u \notin V(R(G))$ y $v \in V(R(G))$. Supongamos que v tiene grado 2 en G, esto es, existe $w \in V(G)$, pero $w \notin V(R(G))$. Además, $uv \in E(G)$ y $uv \notin E(R(G))$. Luego, aplicando $R2$ a v, tenemos que existe un nuevo lado $uw \in E(R(G))$. Luego, por hipótesis $R(G)$ es un grafo dominante generador, de aquí, existe una cadena $x'P_g y$ en $R(G)$.

Como $x'P_g y$ es dominante generadora de $R(G)$ posee todos los vértices de $R(G)$ y como todos los lados de G inciden en al menos un vértice de $R(G)$ se tiene por el Lema 3.2.1 que $V(R(G))$ es un conjunto dominante. Así, x e y estan unidos por una cadena dominante en G.

Caso 1.2.1: $x \notin E(R(G))$

Como $x \notin E(R(G))$ entonces $u \notin V(R(G))$ y $v \in V(R(G))$, si u tiene grafdo 1, entonce aplicamos la operción $R1$ al vértice u y así, cualquier otro lado esta en $R(G)$ y por el Lema 3.2.1 $V(R(G))$ es un conjunto dominante de G, por lo que todos los lados de G

inciden en al menos un vértice de $V(R(G))$. Luego al algregar el lado x a la cadena obtenida en $R(G)$ se tiene que esa nueva cadena es dominante en G.
Luego, entre cualquier par de lados x e y de G existe una cadena dominante que los une. Por lo tanto, G es dominante. □

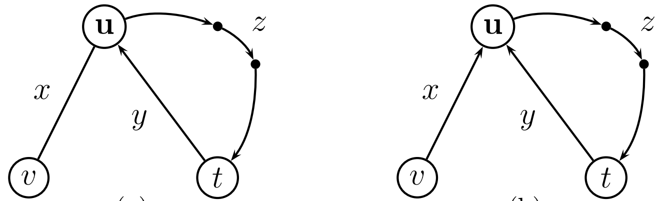
El siguiente lema nos garantiza la existencia de una cadena dominante cerrada de un grafo G siempre que $\delta(G) \geq 3$ y $k(L(G)) \geq 7$.

Lema 3.2.4. *[11] Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo tal que $\delta(G) \geq 3$ y $k(L(G)) \geq 7$, sean $x, y, z \in E(G)$. Si $x = vu$ e $y = ut$ son incidentes en un vértice u de grado 3, entonces existe un circuito $P = yPy$ que le inciden todos los lados de G conteniendo a los lados z e y pero no conteniendo al lado x, además contiene a todos los vértices de G excepto un extremo de x. Si $x = vu$ e $y = wt$ no son incidentes con un vértice u de grado 3, entonces existe un circuito $P = zPz$ que le inciden todos los lados de G, pero no contiene a los lados x ó y, además contiene todos los vértices de G excepto un extremo de x ó un extremo de y.*

El siguiente lema nos da condiciones para que un grafo G sea dominante generador, las figuras que ilustran la prueba del mismo no son digrafos, las flechas son sólo para señalar la orientación de circuitos y cadenas dominantes.

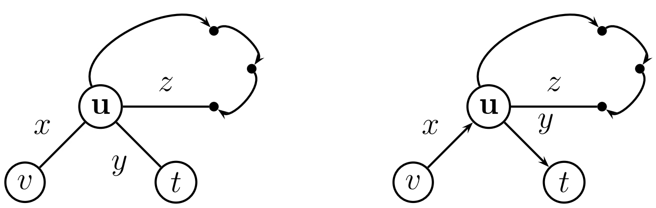
Lema 3.2.5. *Si $G = (V(G), E(G))$ es un grafo tal que $\delta(G) \geq 3$ y $k(L(G)) \geq 7$. Entonces G es dominante generador.*

Demostración. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo tal que $k(L(G)) \geq 7$ y $d_G(v) \geq 3$ para todo vértice $v \in V(G)$. Sean $x = uv$ e $y = wt$ lados cualesquiera de G, debemos probar que existe una cadena xP_dy dominante de G que une a los lados x e y . Supongamos que los vértices u y w son iguales, es decir, x e y son adyacentes y que el vértice u tiene grado 3. Así, por el Lema 3.2.4 existe un circuito $P = yPy$ tal que todos los lados de G inciden en el, pero el lado x no esta contenido en el circuito (ver Figura a). Luego, v no pertenece a los vértices del circuito P, es decir, $V(P) = V(G) \setminus \{v\}$. Como el vértice v es adyacente al vértice $u \in V(P)$, ya que $x = uv$, podemos construir una nueva cadena $P' = x \bigcup yPy = xPy$ (ver Figura b), que se obtiene al añadir al lado $x = uv$ al circuito P. Esta nueva cadena P' de extremos x e y contiene todos los vértices del grafo G, ya que $V(P') = V(P) \bigcup \{v\}$ y además todos los lados del grafo G inciden en P' puesto que todos los lados de G incidian en P. Así, P' es una cadena dominante generadora que une a los lados x e y.



(a) (b)

Supongamos ahora que $x = vu$ e $y = ut$ son adyacentes con un vértice u que no es de grado 3. Luego por el Lema 3.2.4, existe un circuito $P = zPz$ donde el lado z es un extremo del vértice $u \in V(P)$, este circuito no contiene a los lados x ó y. Además todos los lados del grafo G inciden en P incluyendo a los lados x ó y (ver Figura c). Luego, los vértices v y t no pertenecen el circuito P, pero son adyacentes a un vértice $u \in V(P)$, es posible construir una nueva cadena P' que contenga todos los vértices de G, es decir, $V(P') = V(P) \bigcup \{v, t\}$, donde $P' = x \bigcup zPz \bigcup y = xPy$ (ver Figura d). Así, P' contiene todos los vértices de G y por lo tanto P' es una cadena dominante generadora de G que une a los lados x e y.

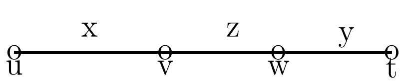


(c) (d)

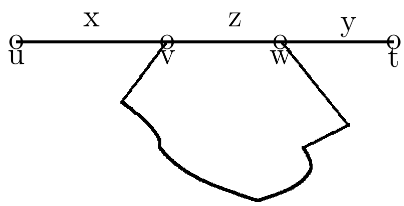
Supongamos que x e y no son adyacentes.

Caso 1:

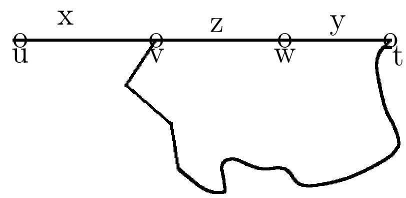
Supongamos que $x = vu$, $y = wt$ y $z = vw$



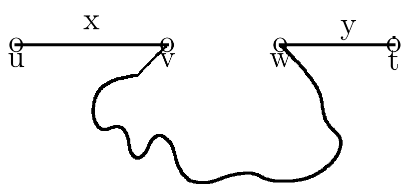
Por el Lema 3.2.4, existe un circuito $P = zPz$ que le inciden todos los lados de G y que no contiene a los lados x ó y.



ó



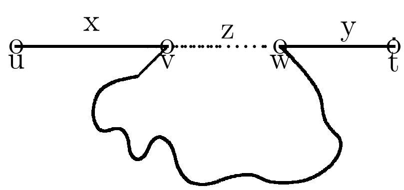
Si los lados x e y no estan ambos en P, entonces podemos construir una nueva cadena P' que contiene a los lados x e y de la siguiente manera. $P' = uxv \bigcup vPw \bigcup wyt = x \bigcup zPz \bigcup y = xPy$ (vPw es una cadena que se obtiene de zPz eliminando al lado z).



Observese que $z \notin E(P')$ pero incide en P'. Luego, P' es una cadena que contiene todos los vértices de G, es decir, $V(P') = V(P) \bigcup \{u, t\}$ y por lo tanto todos los lados de G inciden en P'. Así, P' es una cadena dominante generadora que une a los lados x e y.

Caso 2:

Supongamos que $x = vu$, $y = wt$ y $z \notin E(G)$, es decir, no existe el lado $z = vw$ en el grafo G. Si añadimos el lado $z = vw$ al grafo G, podemos construir un nuevo grafo G' donde $G' = (V(G), E(G') = E(G) \bigcup z)$



Notemos que G' tambien satisface que $\delta(G) \geq 3$ y $k(L(G)) \geq 7$. Luego, por el Lema 3.2.4, existe un circuito $P = zPz$ que le inciden todos los lados de G y que no contiene a los lados x ó y. Por el caso 1, existe una cadena P' dominante generadora tal que $z \notin E(P')$ y $V(P') = V(P) \bigcup \{u, t\}$. P' es una cadena dominante generadora que une a los lados x e y.

Como entre cualquier par de lados x e y existe una cadena dominante generadora que los une, se tiene que el grafo G es dominante generador. $\square$

En la siguiente sección daremos la demostración presentada por Siming Zhan [11] en el año 1989. La cual es nuestro objetivo, es decir es el resultado principal dado en este trabajo. A continuación presentamos la demostración de que todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo.

§3.3. Teorema de Siming Zhan[11]

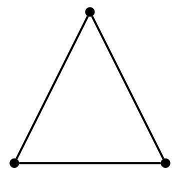
Teorema 3.3.1. *Todo grafo de línea 7-conexo es hamiltoniano-conexo.*

Demostración. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo tal que su grafo de línea $L(G)$ es 7-conexo. Entonces, como G no posee lazos se satisface que $|V(G)| \geq 2$ y además que $|E(G)| \geq 8$.
Se presentan dos casos:

Caso 1: G es multiestrella.
Existe un vértice $v \in V(G)$ tal que para todo lado $x \in E(G)$, x incide en v. Luego, para todo lado $y \in E(G)$, se tiene que x e y son adyacentes. Por lo tanto, en $L(G)$ cualquier par de vértices x, y los une un lado. Así, $L(G) = K_{|E(G)| \geq 8}$. Luego, por Afirmación 2.1.1, $L(G) = K_{|E(G)| \geq 8}$ es hamiltoniano-conexo. Así, queda probado el teorema cuando G es multiestrella.

Caso 2: G no es multiestrella.
Si G no es multiestrella, dado que $L(G)$ es 7-conexo y G no posee lazos, entonces $|V(G)| \geq 3$.

Caso 2.1: $|V(G)| = 3$.
Si $|V(G)| = 3$, entonces dado que $k(L(G)) \geq 7$ y $|E(G)| \geq 8$, G posee un subgrafo parcial isomorfo al grafo completo K_3.



Por lo tanto, cada par de lados en G son adyacentes. Así, $L(G) = K_{|E(G)| \geq 8}$, en consecuencia, por la Afirmación 2.1.1, se tiene que $L(G)$ es hamiltoniano-conexo.
Supongamos ahora que $|V(G)| \geq 4$.

Caso 2.2: $|V(G)| \geq 4$ y $m(G) \leq 3$.
Como G tiene multiplicidad a lo más 3 y $k(L(G)) \geq 7$, se satisfacen las hipótesis del Lema 3.2.1, por lo tanto, existe un único grafo reducido $R(G)$ tal que:

$$\delta(R(G)) \geq 3, \qquad (I)$$

$$k(L(R(G))) \geq k(L(G)), \qquad (II)$$

$$V(R(G)) \text{ es un conjunto dominante de } G, \qquad (III)$$

Así, dado que $k(L(G)) \geq 7$ y por (II), tenemos que: $k(L(R(G))) \geq k(L(G)) \geq 7$.
De aquí,

$$k(L(R(G))) \geq 7, \qquad (II{,}1)$$

Luego, por (I) y (II,1), utilizando el Lema 3.2.5 tenemos que, $R(G)$ es dominante generador.
Hasta ahora, hemos llegado a que; G es un grafo no multiestrella que tiene multiplicidad a lo más 3, $k(L(G)) \geq 7$, y $R(G)$ **es dominante generador**. Entonces, por el Lema 3.2.3, G **es dominante**.
Luego, como G es dominante y $|V(G)| \geq 4$, entonces, por el Lema 3.2.2, el grafo de línea $L(G)$ es hamiltoniano-conexo. Queda entonces probado el teorema para el **caso 2.2**.

Caso 2.3: $|V(G)| \geq 4$ y $m(G) \geq 4$.
Cuando $m(G) \geq 4$, Por el Lema 3.2.4, existe un circuito P al cual le inciden todos los

lados del grago G, es decir, el grafo G, es un grafo dominante. Luego, por el Lema 3.2.2, el grafo de línea $L(G)$ es hamiltoniano-conexo. Queda entonces probado el teorema para el **caso 2.3**. $\square$

[]

Referencias

[1] B.R. Alspach and C.D. Godsil, *ed, Cycles in Graphs, Ann,* Discrete Mathematics Vol. 27 (North-Holland, Amsterdam, 1985) Unsolved problems 2.6, 463.

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty,*Graph Theory and Applications,* (Elsevier, Amsterdam, 1980).

[3] J.C. Bermond and C. Thomassen,*Cycles in digraphs-a survey,* J. Graph Theory 5 (1981), 1-45.

[4] R. Gould, *Graph Theory ,* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.(1988).

[5] F. Harary and C.St.J.A. Nash-Williams, *On Eulerian and hamiltonian graphs and line graphs,* Canad. Math. Bull. 8(6)(1965)701-709.

[6] F. Harary, *Graph Theory ,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1969).

[7] I. Márquez , Notas de Matemáticas Discreta, Enero 2007.

[8] I. Márquez,*Condición Chvatal-Erdös para hamiltonicidad en grafos,* Trabajo especial de grado, Caracas-Venezuela, Octubre. 1986.

[9] D. West,*Introduction to Graph Theory,* Publisher Prentice Hall. 1996.

[10] S. Zhan, *Hamiltonian Connectedness of Line Graphs ,* Ars Combin. XXII (1986) 89-95.

[11] S. Zhan, *On hamiltonian line graphs and connectivity,* Discrete Math 89 (1991), 89-95.