

GEOMETRÍA DIFERENCIAL: UN TRATADO DE CURVAS Y SUPERFICIES

Por
Malón Mendoza

TRABAJO DE ASCENSO PRESENTADO PARA OPTAR A LA
CATEGORÍA DE ASOCIADO EN EL ESCALAFÓN DEL PERSONAL
DOCENTE Y DE INVESTIGACIÓN

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”
U.C.L.A

BARQUISIMETO, Julio, 2007.

Trabajo Aprobado Por

Jurado Calificador:

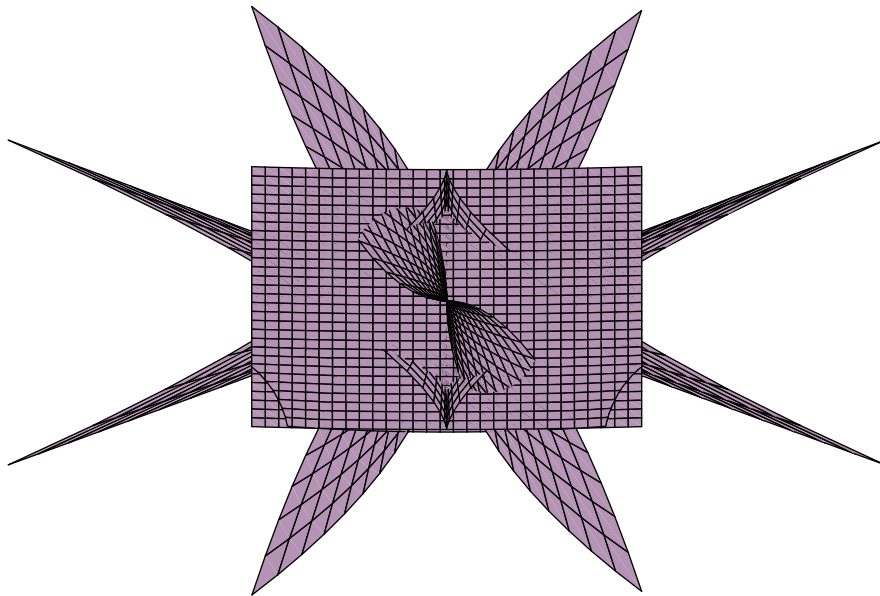
Coordinador : *Dr. Angel Mastromartino*

Principal : *Dr. Jorge Saenz*

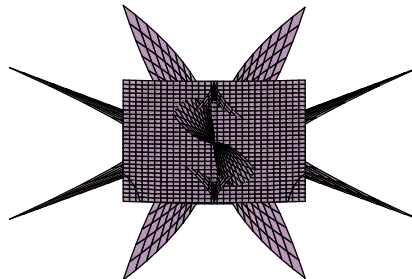
Principal : *Magister Eibar Hernandez*

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Geometría Diferencial: Un Tratado de Curvas y Superficies



por Mendoza, Malón Rafael, 20 de Julio de 2007.



“ Jamás debería un hombre abandonar su servicio, aunque no pudiera acometerlo en su totalidad, o no pudiera acabarlo a la perfección. Pues en toda obra humana hay imperfecciones, del mismo modo que el humo acompaña siempre al fuego.”

Bhavad-Gita XVII-48.

*“ En primera instancia le doy gracias a Dios el motivador interno.
No puedo dejar de nombrar a los colegas Abelardo y Miguel, porque siempre estaban allí para
que no desmayara;insistentes y vaya que si!
Otro fueron, Rómulo y Bernal que no dudaron en prestarme su ayuda, a la hora de las dudas
con el Latex; aquí también debo nombrar a Javier, quien recién llegado me ha brindado su
apoyo.
A Eibar y Kathy, a Carmela por ayudarme en gran parte de la transcripción; que grandes!
Dios siempre los bendiga!
En fin, a todos los que de una u otra manera dieron su granito para que este trabajo se
diera. Dios les bendiga de todo corazón...”*

INTRODUCCIÓN

Un *Tratado de Curvas y Superficies* está hecho de la experiencia de varios años en el curso de Introducción a la Geometría Diferencial, dirigidos a los estudiantes de los últimos semestres de la *Licenciatura en Matemática*. Por supuesto, es para ayudar a que comprendan los temas, las ideas que entrañan las definiciones, los teoremas etc., que son presentados en el Do Carmo; libro texto del curso y por el cual está presentado el *Programa Curricular* en que se fundamenta. Lejos de ser una traducción, aunque hay temas que son obligados presentarlos de formas similares, se pretende incentivar al estudiante a motivarse por la Geometría, la cual últimamente, en nuestro ámbito, se ha disminuido su simpatía por los mismos; quizás por lo abstracto, por la conjunción y habilidades que tienen que hacer de los conocimientos previos, que en su mayoría son presentados ante ellos, sin la visión geométricas que envuelven, llevándolos a la unidireccionalidad de enfoque y al enclaustramiento mental. Pero este es el trabajo, que deberá enfrentar el estudiante al estudiar este *Tratado de curvas y superficies*. Pues, por una parte, tiene que aplicar los conocimientos previos, como son el Álgebra Lineal, el Análisis Matemático, la Topología, el Algebra Abstracta, las Ecuaciones Diferenciales, etc., y por la otra, fundamentar e incentivar el carácter de investigación científica que todo matemático a lo largo de su carrera debe abordar. Por eso, se ha tratado que en cada tema, estén presente los ejemplos oportunos, que deberán ser estudiados con especial detalle; para utilizar las técnicas presentados en los mismos, y resolver los *Ejercicios*, que se han puestos al final de cada capítulo.

Hemos colocado, hasta donde fue posible, la representación o el enfoque geométrico, añadiendo gráficos para la comprensión de los temas. Podemos decir aquí, que estas gráficas algunas fueron hechas a mano alzada utilizando Power Point, otras con MATLAB, y un gran grupo con el paquete MATHEMATICA. Invito al estudiante o al lector, utilizar este último paquete, pues permite ver los gráficos de curvas y superficies, y conjugar con estos, el análisis correspondiente; inclusive calcular elementos particulares de los mismos, como son el aparato de Frenet, la curvatura, la torsión, la curvatura de Gauss, curvaturas principales, las geodésicas, etc. (la portada de este trabajo se ha realizado, de manera original, con la ayuda de este paquete). No quitamos aquí, méritos para utilizar otros software matemáticos, como el MAPLE, el DERIVE; de hecho, al final hacemos referencia a otros paquetes para hacer y analizar gráficos de curvas y superficies.

En el Capítulo 1, hacemos referencias a algunos preliminares; pero se pueden obviar para empezar en el Capítulo 2, que trata sobre curvas parametrizadas que se estudian canónicamente, conociendo su aparato de Frenet, su curvatura, su torsión y dando algunos métodos para plasmar sus gráficas. Por ejemplo, para las curvas planas, se conjugan los criterios para hallar puntos críticos de funciones reales, con las ecuaciones paramétricas que representan tales curvas. Se presenta el *teorema fundamental de curvas*, tanto para curvas planas y

curvas en el espacio. También el estudio global de curvas planas, donde los teoremas de la *Desigualdad Isoperimétrica*, el *Teorema de Cuatro Vértices* junto con la *Indicatriz Tangente*, completan tal estudio. En el capítulo 3, comenzamos con superficies regulares, dando dos maneras equivalentes de definir las y, enfocándolas como variedades de dimensión 2; por supuesto, el objetivo primordial, es el estudio intrínseco de las mismas. Por eso se define lo que es diferenciabilidad sobre superficies y entre superficies, el plano tangente, la diferencial o aplicación tangente, la orientabilidad que se estudia en el Capítulo 4. Todo esto, prepara el terreno para definir la métrica de Riemann, dada por la Primera forma Fundamental. Así, entramos en el Capítulo 5 para estudiar la aplicación de Gauss, que nos llevará a través de su diferencial, al punto central del estudio de la geometría intrínseca de las superficies: la Curvatura de Gauss. Se estudia con ella, la forma que tienen las superficies en cada uno de sus puntos; descrita por dos números, llamados las curvaturas principales, que no pertenecen a la geometría intrínseca, pero que Gauss descubrió que su producto sí lo es. Aparece la curvatura media gaussiana que nos permitirá conocer las *superficies minimales*. Los ejemplos al respecto, se dan sin la utilización de las parametrizaciones. Se presenta el cálculo de la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales, en las cartas coordenadas; obteniéndose así, los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental, que nos permitirá verlas, en términos de estos y de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental. En el Capítulo 6, abordaremos los Campos de vectores, que utilizaremos en el capítulo 7 para resolver las ecuaciones diferenciales que satisfacen ciertas curvas que minimizan distancias. Ejemplos de, superficies minimales de curvatura media gaussiana nula y de las superficies regladas generadas por una recta que se mueve a lo largo de una curva sobre la que se apoya, son expuestos con algunas caracterizaciones de estas últimas. Bien, finalizamos con el Capítulo 7, donde se estudia la geometría intrínseca de superficies; aparecen los invariantes de éstas mediante las isometrías, los símbolos de Christoffel, las fórmulas de Gauss-Codazzi, el famoso *Teorema de Egregium de Gauss*, y las *Ecuaciones de Mainardi-Codazzi* que conforman las ecuaciones de compatibilidad, dando así, el *Teorema Fundamental de Superficies* de Bonnet. Aparece la Diferenciación Covariante, que permite la derivación de campos tangentes sobre superficies y la definición del transporte paralelo, para caracterizar las curvas que minimizan distancias sobre las superficies: las *geodésicas*. Cerramos, con la aplicación exponencial y con un esbozo de las superficies geodésicamente completas dado por el *teorema de Hopf-Rinow*.

Índice general

Introducción	vii
1. Preliminares	3
1.1. El Espacio \mathbb{R}^n	3
1.1.1. El Producto Interior en \mathbb{R}^n	4
1.1.2. El Producto Vectorial en \mathbb{R}^3	5
1.2. Ejercicios.	7
2. Teoría de Curvas	9
2.1. Curvas Parametrizadas	9
2.1.1. Curvas regulares. Longitud de arco.	20
2.2. Teoría Local de Curvas Parametrizadas por Longitud de Arco.	26
2.2.1. Curvatura y Torsión de Curvas Parametrizadas por Longitud de Arco. Sistema de Referencia de Frenet	27
2.2.2. Las fórmulas de Frenet.	34
2.2.3. La forma canónica local de una curva respecto al sistema de Frenet.	38
2.2.4. Existencia y unicidad de una Curva en el Espacio para $k_\alpha(s)$ y $\tau(s)$ dados.	40
2.3. El Sistema de Referencia de Frenet para curvas con velocidad arbitraria.	43
2.4. Teoría Global de Curvas Planas.	48
2.4.1. Desigualdad Isoperimétrica	51
2.4.2. Índice de rotación.	55
2.4.3. Teorema de los cuatro vértices	58
2.5. Ejercicios.	64
3. Superficies en \mathbb{R}^3	73
3.1. Superficies Regulares.	73
3.2. Gráficas.	76
3.3. Superficie de Traslación:	78
3.4. Superficies definidas implícitamente(de nivel).	78
3.5. Superficies de Revolución.	82
3.6. Cambio de Parámetro. Funciones Diferenciables sobre superficies.	88
3.7. El Plano Tangente; la diferencial de una aplicación.	96
3.7.1. La Primera Fórmula Fundamental. Área	106
3.8. Ejercicios.	115

4. Superficies Orientables.	119
4.1. Identificación Topológica	123
4.1.1. La banda de Möbius.	126
4.2. Una caracterización de Superficies Orientables Compactas.	127
4.3. Ejercicios.	129
5. Aplicación de Gauss	131
5.1. La Segunda Forma Fundamental	135
5.1.1. Curvaturas Principales.Líneas de Curvatura. Curvatura de Gauss y Curvatura Media gaussiana.	139
5.1.2. Puntos Umbilicales.Líneas Asintóticas.Indicatriz de Dupin.Líneas Conjugadas.	141
5.2. Técnica de cálculo utilizando parametrizaciones.	145
5.2.1. Interpretación geométrica de la curvatura gaussiana.	154
5.3. Ejercicios.	157
6. Campos y vectores	163
6.1. Presentación Geométrica.Curva integral de un Campo de Vectores.Flujo de un Campo de Vectores.	163
6.1.1. Campo de Direcciones.	166
6.2. Campos de vectores sobre superficies regulares.	168
6.3. Superficies Minimales.	172
6.3.1. Superficies minimales caracterizada por parametrizaciones armónicas.176	
6.3.2. Ejemplos de superficies minimales.	177
6.4. Superficies Regladas,Alabeadas y Doblemente Regladas.	178
6.5. Ejercicios.	182
7. La Geometría Intrínseca de Superficie	185
7.1. Métricas sobre Superficies	185
7.2. Teorema de Gauss. Ecuaciones de Compatibilidad	193
7.2.1. Fórmulas intrínsecas para la curvatura de Gauss	196
7.3. Transporte paralelo. Geodésicas	200
7.3.1. La Aplicación Exponencial	223
7.3.2. Completitud y el teorema de Hopf-Rinow.	224
7.4. Ejercicios.	225
7.5. Paquetes matemáticos para geometría.	233
7.6. Enlaces Interesantes.	234
Bibliografía	237

“ Los matemáticos pueden usar dibujos y razonar sobre ellos, pero sabiendo que no están pensando en esos dibujos en concreto, sino en lo que ellos representan; así, son el cuadrado absoluto y el diámetro absoluto los objetos de su razonamiento, no el diámetro que ellos dibujaron”.
Platón

En Geometría Diferencial hay dos instrumentos básicos de mucha utilidad: Uno en *Algebra Lineal* y el otro en *Cálculo*. Por supuesto, ya para cuando estemos leyendo este trabajo, el lector, tendrá el conocimiento suficiente para encarar las diversas situaciones que se le presentarán más adelante. Para lo que sigue, un repaso de algunos hechos básicos no vendría mal.

1.1. El Espacio \mathbb{R}^n

Ya que se van a estudiar curvas y superficies en los espacios \mathbb{R}^n (aquí trataremos los casos $n = 2$ y $n = 3$), se presentan en esta sección, de forma resumida, alguna de sus propiedades algebraicas.

Definición 1.1.1 *El espacio \mathbb{R}^n es el conjunto de todas las n -adas de números reales:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n\}.$$

A los elementos de \mathbb{R}^n se le llaman *vectores n -dimensionales*. Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los x_i con $i = 1, \dots, n$ se les llama la i -ésima componente del vector \mathbf{x} . Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son dos elementos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces definimos la suma vectorial y la multiplicación por un escalar mediante

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

\mathbb{R}^n con esas dos operaciones es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Con esto se da por entendido que las propiedades estudiadas en algebra lineal sobre espacios vectoriales están presentes en \mathbb{R}^n

1.1.1. El Producto Interior en \mathbb{R}^n

La estructura lineal de \mathbb{R}^n no es suficiente para medir distancias, área, ángulos, volúmenes, longitudes, etc. Así que necesitamos una métrica: *El Producto Interior* denotado por \langle , \rangle o el punto (\bullet) , esta asociada a la métrica de \mathbb{R}^n . Éste es una función bilineal

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a cada par de vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ el número real

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.1)$$

Con el producto interior, podemos definir la *norma* o longitud de un vector y la *distancia* entre dos puntos como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad \text{y} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

respectivamente, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Estas funciones tienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.1.1 *La distancia en \mathbb{R}^n tiene las siguientes propiedades:*

- (i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ con igualdad si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (Simetría)
- (iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ (Desigualdad Triangular)

Demostración

En (iii) basta tomar los vectores $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$ y obtenemos

$$\|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{w} + \mathbf{u}\|$$

o

$$\|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{u}\| \geq \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$$

Así

$$\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{u}\| \geq 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{Cauchy} - \text{Schwarz})$$

Pero esto último se obtiene del hecho de que el polinomio en la variable λ ,

$$P(\lambda) = (\mathbf{w} + \lambda\mathbf{u})^2 = \lambda^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\lambda\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{w}\|^2,$$

siendo positivo $P(\lambda) \geq 0$ para todo λ , no puede tener discriminante positivo, esto es

$$0 \geq 4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 - 4\|\mathbf{w}\|^2\|\mathbf{u}\|^2$$

Las demás propiedades se dejan como ejercicio. \diamond

La métrica obtenida nos permite medir ángulo entre vectores

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \right) \quad (1.2)$$

lo que permite decir que:

1. \mathbf{x} es ortogonal a \mathbf{y} si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
2. Siendo $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, la proyección de \mathbf{x} a lo largo de \mathbf{y} , dada por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$ es

$$\mathcal{P}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}$$

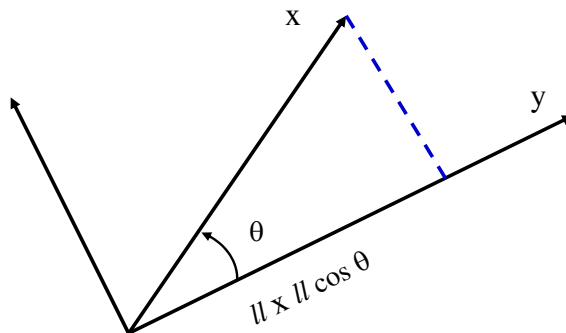


Figura 1.1: El producto escalar de vectores

3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
4. $\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

1.1.2. El Producto Vectorial en \mathbb{R}^3

Otro tipo de producto que involucra a dos vectores y de mucha utilidad es el *producto vectorial*, el cual se define para $n = 3$: El producto vectorial de \mathbf{x} y \mathbf{y} es un nuevo vector \mathbf{z} definido como

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{z} = (\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\theta) \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

en el cual \mathbf{u} es un vector unitario ortogonal a \mathbf{x} y \mathbf{y} , tomados de tal manera que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}\}$ forman un *sistema de la mano derecha* (ver figura 1.2).

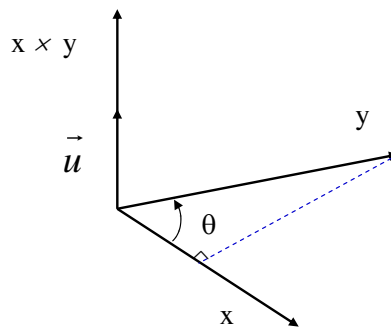


Figura 1.2: El producto vectorial

Siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, el producto vectorial o cruz de \mathbf{x} con \mathbf{y} es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\end{aligned}$$

Dejamos las siguientes propiedades como ejercicio:

(P1) $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(P2) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$

(P3) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$ y $(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{x} + \mathbf{z} \times \mathbf{x}$

(P4) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene, $(\alpha\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times (\alpha\mathbf{y})$

(P5) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$

(P6) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, (*Identidad de Jacobi*)

(P7) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2$.

Si $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, obtenemos que

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| |\operatorname{sen}\theta|$$

con lo que $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ da la medida del área del paralelogramo con una orientación determinada por \mathbf{x} y \mathbf{y} , (ver figura 1.3)

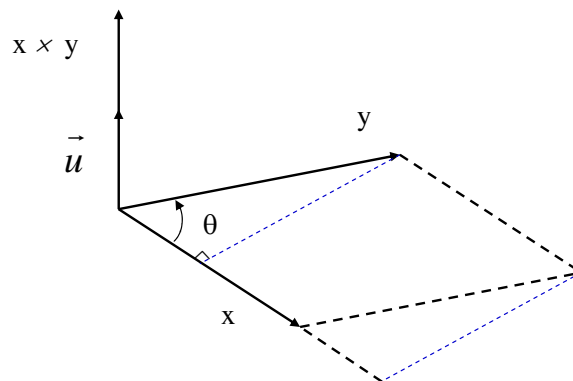


Figura 1.3: $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ es el área orientada del paralelogramo dado por \mathbf{x} y \mathbf{y}

Por último, podemos definir otro tipo especial de producto que involucra a tres vectores, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, el *producto mixto* o *triple producto escalar*, denotado por $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, y definido como

$$\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Las siguientes propiedades se deducen fácilmente utilizando (1.4):

$$(TP_1) \quad \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y} \times \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} \times \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

$$(TP_2) \quad \langle \mathbf{y} \times \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = -\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

$$(TP_3) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} \rangle = 0$$

Geoméricamente, $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ es el volumen del paralelepípedo expandido por \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . [vea la figura 1.4]

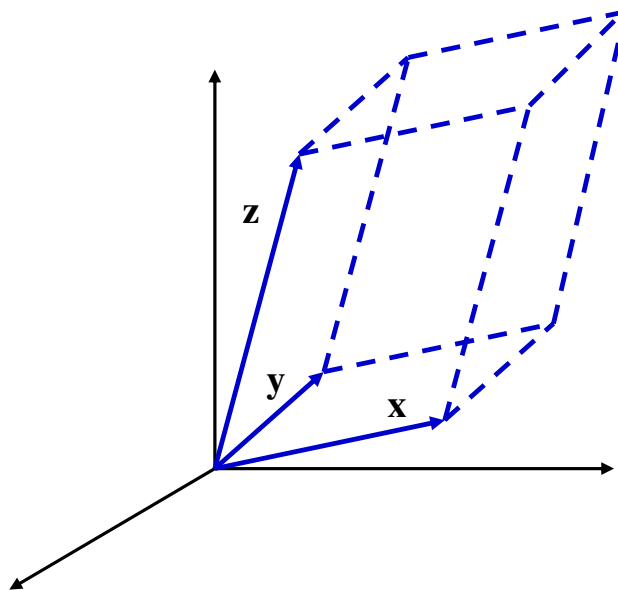


Figura 1.4: El triple producto escalar

1.2. Ejercicios.

1.1 Probar que el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ forman un espacio vectorial real. ¿Cuál es su dimensión? ¿Los polinomios cuyo grado es exactamente n forman un espacio vectorial?

1.2 Represente el producto interior estandar en \mathbb{R}^3 con respecto a la base

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, -2, 3)\}.$$

1.3 Sean $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ seis vectores en \mathbb{R}^3 . Sea $a_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$. Pruebe que

$$\det(a_{ij}) = \langle (u_1 \times u_2), u_3 \rangle \langle (v_1 \times v_2), v_3 \rangle$$

“ La geometría ilumina el intelecto y templada la mente. Todas sus pruebas son claras y ordenadas. Apenas caben errores en el razonamiento geométrico, pues está bien dispuesto y ordenado. Así, no es probable que la mente que se aplica a la geometría con regularidad cometa errores. De este modo, quien sabe geometría adquiere inteligencia”.

Ibn Khaldun

De aquí en adelante vamos a restringir nuestra atención a los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$; es decir, al plano \mathbb{R}^2 y al espacio tridimensional \mathbb{R}^3 ; el caso general sobre \mathbb{R}^n se estudia de forma similar.

2.1. Curvas Parametrizadas

En esta sección vamos a caracterizar ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 , que denominaremos, *curvas*, que como veremos más adelante, en cierto sentido son unidimensionales, y que el cálculo diferencial nos permitirá definirlos, mediante una función diferenciable (lo suficientemente diferenciable; por lo menos hasta orden 4).

Definición 2.1.1 *Una curva diferenciable parametrizada es una aplicación*

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la recta real \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 .

Esto es si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3$) es una función diferenciable de todo orden; diremos que α es una aplicación suave. Lo de parametrizada se debe a la variable t , que llamaremos el parámetro de la curva. La imagen $\alpha(I) \in \mathbb{R}^3$ se le llama *traza* de la curva. Se debe distinguir una curva parametrizada, como el rango de una función vectorial continua, de una variable real t a valores vectoriales $(x(t), y(t), z(t))$ en \mathbb{R}^3 ; la recta, una circunferencia, una parábola, una elipse y una rama de una hipérbola son ejemplos de curva. Toma importancia para nosotros la traza o curva geométrica, más que la función que la describe; pues nos encontraremos que tal curva se podrá describir a través de distintas funciones. Por ejemplo, la circunferencia C formada por todos los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 0$ es una curva geométrica que se puede expresar como la imagen de la función

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

o como la imagen de la función

$$\begin{aligned} \gamma: (-3, 3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (\sin(t^2 - 1), \cos(t^2 - 1), 0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

o también como la imagen de

$$\begin{aligned} \beta: (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

En la figura 2.1 están las gráficas de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$; ésta última recorre la traza con el doble de la velocidad que $\alpha(t)$.

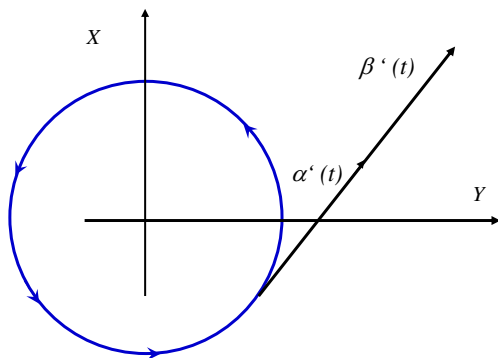


Figura 2.1: Circunferencia parametrizada.

El vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \in \mathbb{R}^3$ se le llama *vector tangente* o *vector velocidad* de α por t . Geométricamente este vector señala en la dirección en la que crece el parámetro t o en la cual, se despliega la curva (ver figura 2.2).

Si t y $t+h$ están en el $\text{Dom}(\alpha)$, entonces $\frac{1}{h}(\alpha(t+h) - \alpha(t))$ es un vector paralelo a la cuerda que une $\alpha(t)$ con $\alpha(t+h)$. Si $\alpha'(t) \neq 0$ entonces la dirección $\frac{1}{h}(\alpha(t+h) - \alpha(t))$, se aproxima a la dirección de $\alpha'(t)$ cuando $h \rightarrow 0$; pues

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h};$$

así obtenemos un *vector tangente* (Apéndice A) a la curva α en el punto $\alpha(t)$ como lo muestra la figura 2.2

Podemos definir la recta L dada en la figura 2.2 para $\alpha'(t) \neq 0$, como

$$L = \{\alpha(t) + r\alpha'(t) : r \in \mathbb{R}\},$$

la cual es la recta tangente a la curva por $\alpha(t)$.

En el ejemplo anterior, las gráficas de las diferentes funciones es una circunferencia, pero de acuerdo al estudio de sus derivadas, se tienen dos sentidos en los cuales se hace el trazado de la curva:

Para (2.1),

$$\begin{aligned} \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) &\Rightarrow \alpha'(t) = -\sin(t)e_1 + \cos(t)e_2 \\ &= -\sin(t)(1, 0, 0) + \cos(t)(0, 1, 0). \end{aligned}$$

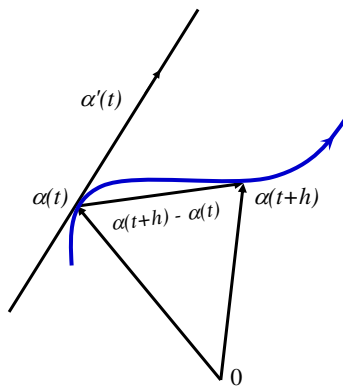


Figura 2.2: $\alpha'(t)$ vector tangente a la curva por $\alpha(t)$.

Basta sumar estos vectores, de acuerdo a los valores que el parámetro t tome, para ver la dirección (es este caso antihoraria), en que se hace el trazado de la curva o en la que el parámetro t crece (ver figura 2.3).

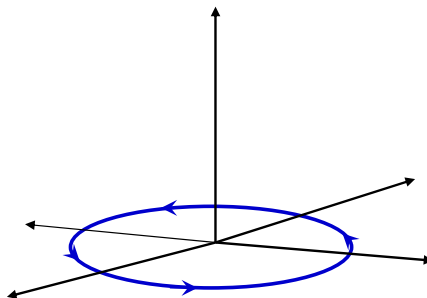


Figura 2.3: $\alpha(t)$ trazada en el sentido antihorario.

Para (2.2),

$$\begin{aligned} \gamma(t) = (\sin(t^2 - 1), \cos(t^2 - 1), 0) &\Rightarrow \gamma'(t) = (2t \cos(t^2 - 1), -2t \sin(t^2 - 1), 0) \\ &= 2t(\cos(t^2 - 1), -\sin(t^2 - 1), 0); \end{aligned}$$

aquí, el recorrido es en el sentido horario como lo muestra la figura 2.4

Para (2.3),

$$\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0);$$

esta curva tiene el mismo sentido que la figura 2.1, pero duplica el recorrido de esta, como dijimos anteriormente.

Si imaginamos que un móvil se está moviendo a lo largo de la trayectoria dada por α , entonces $\alpha'(t)$ define el *vector velocidad* $v(t)$ de la misma con rapidez igual a

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$$

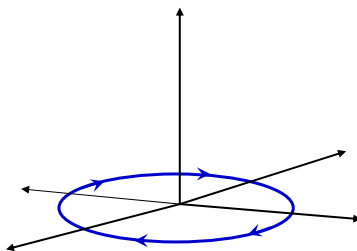


Figura 2.4: $\gamma(t)$ trazada en el sentido horario.

; la *aceleración* $a(t)$, viene dada por

$$a(t) = \alpha''(t).$$

Veremos más adelante algunas aplicaciones sobre este último comentario. Por ahora, veamos algunas técnicas que se utilizan para trazar la gráfica de curvas, especialmente para las curvas planas; que tendrán más adelante un tratamiento intrínseco especial.

Ejemplo 2.1.1 *Dibuje la curva α dada por*

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

Solución

Como $\alpha_1(t) = t^3 - 4t$ es una función impar y $\alpha_2(t) = t^2 - 4$ es una función par, la curva es simétrica respecto al eje Y ; si $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ entonces $\alpha(-t_0) = (-x_0, y_0)$. Podemos pues restringir nuestra atención a valores no negativos de t . Aquí $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$ es un vector tangente a la curva en cada punto $\alpha(t)$. Al dibujar la curva α , los puntos donde $\alpha'(t)$ es horizontal (con segunda componente cero) o vertical (con primera componente cero), son de interés particular. En $\alpha(0) = (0, -4)$ tiene un vector tangente horizontal $\alpha'(0) = (-4, 0)$ y en $\alpha(2/\sqrt{3}) = (-16/9\sqrt{3}, -8/3)$, la curva tiene un vector tangente vertical $\alpha'(2/\sqrt{3}) = (0, 4/3\sqrt{3})$. Considerando, además, la expresión general del vector tangente $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$ tenemos:

Si $t \in [0, 2/3\sqrt{3}]$, entonces $\alpha'(t)$ apunta hacia la izquierda y hacia arriba puesto que $3t^2 - 4$ es negativa y $2t$ es positiva.

Si $t \in [2/3\sqrt{3}, +\infty)$, entonces $\alpha'(t)$ apunta a la derecha y hacia arriba puesto que $3t^2 - 4$ y $2t$ son positivos.

Marcando ahora algunos puntos (entre los que deben incluirse todas las intersecciones con los ejes coordenados) podemos dibujar α (ver figura 2.5). El punto $(0, 0)$ se llama punto doble de α : con $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$. Nótese que α tiene dos vectores tangentes en ese punto

$$\alpha'(-2) = (8, -4)$$

$$\alpha'(2) = (8, 4)$$

$$\alpha(0) = (0, -4)$$

$$\alpha(2) = (0, 0)$$

$$\alpha\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = (-3,07; -2,6)$$

$$\alpha\left(\frac{5}{2}\right) = (5,62; 2,25)$$

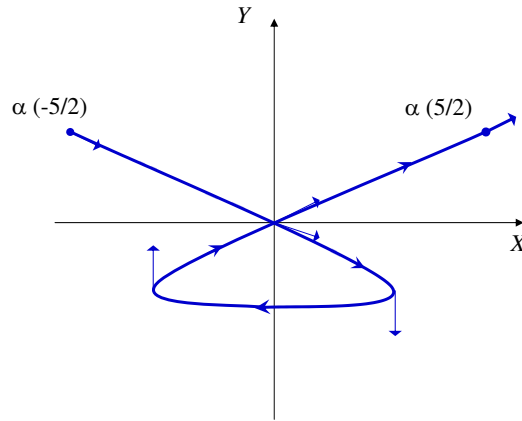


Figura 2.5: Gráfica de $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$.

No se define ningún vector tangente en el punto $\alpha(t)$ si $\alpha'(t) = 0$. En tal punto puede suceder que la curva tenga un cambio de dirección abrupto.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.2 Dibuje la curva α dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Solución

Como $\alpha_1(t)$ es una función par y $\alpha_2(t)$ es una función impar, α es simétrica respecto al eje X ; esto es, si $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ entonces $\alpha(-t_0) = (x_0, -y_0)$. Considerando el vector tangente

$$\alpha'(t) = \left(\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{t^4 + 3t^2}{(1+t^2)^2} \right),$$

vemos que α no tiene tangentes horizontales ni verticales. Sin embargo $\alpha'(0) = \vec{0}$. En $\alpha(0) = (0, 0)$, se tiene lo siguiente:

$$\alpha'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} (2, t^3 + 3t);$$

vemos que, para $t < 0$, $\alpha'(t)$ tiene la misma dirección que $-(2, t^3 + 3t)$ y para $t > 0$, $\alpha'(t)$ tiene la misma dirección que $(2, t^3 + 3t)$. Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} -(2, t^3 + 3t) = (-2, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (2, t^3 + 3t) = (2, 0),$$

la curva tiene un salto o cambio de dirección en $\alpha(0)$. A tal punto se le llama *cúspide* o *punto cuspidal*. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de α :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{1+t^2} = +\infty,$$

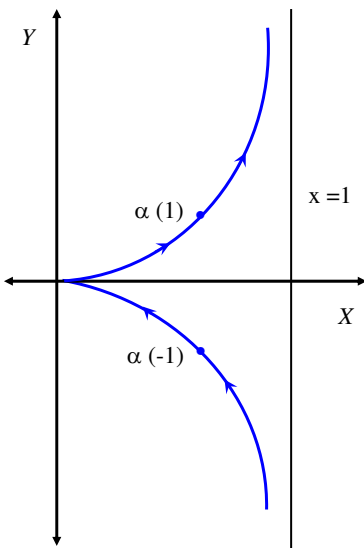


Figura 2.6: Gráfica de la Parábola Cúbica

Podemos valer nos de resultados ya conocidos en cálculo, para facilitar el trazado de curvas planas, utilizando las ecuaciones paramétricas correspondientes.

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Aquí y es función de t y t es función (inversa) de x , así que al derivar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}, \quad \circ$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Si denotamos $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ resulta que \dot{y} es una función de t ,

$$\dot{y} = h(t) \quad \text{con} \quad h(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{\frac{d\dot{y}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{x'(t)} \\ &= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \\ &= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3} \end{aligned}$$

Con lo anterior estamos escribiendo en forma implícita a y como función de x , y con ello, saber en términos de la primera derivada \dot{y} , donde crece o decrece la curva, sus puntos críticos, sus máximos y mínimos relativos. Además, la segunda derivada \ddot{y} nos permite hacer el estudio de la concavidad de α .

Ejemplo 2.1.3 *Estudiar la curva dada por las ecuaciones*

$$\begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin^3(t) \end{cases} \quad a > 0 \quad (2.4)$$

Solución Los valores de x e y están determinados para todos los valores de t . Siendo periódicas las funciones $\cos^3(t)$ y $\sin^3(t)$ de período 2π , será suficiente considerar la variación del parámetro t en el intervalo $[0, 2\pi]$. El intervalo $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y . Por consiguiente, la curva estudiada no tiene asíntotas. Hallemos ahora:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3a \cos^2(t) \sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2(t) \cos(t) \end{cases} \quad a > 0 \quad (2.5)$$

Estas derivadas se anulan para $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Determinemos:

$$\dot{y} = \frac{3a \sin^2(t) \cos(t)}{-3a \cos^2(t) \sin(t)} = -\tan(t) \quad (2.6)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (2.5) y (2.6) componemos la tabla siguiente:

Dominio de variación de t	Dominio de variación de x	Dominio de variación de y	Signo de dy/dx	Carácter de la variación de $y = f(x)$
$0 < t < \pi/2$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	-	Decrece
$\pi/2 < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	Crece
$\pi < t < 3\pi/2$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	-	Decrece
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	Crece

De la tabla se deduce que las ecuaciones (2.4) define dos funciones continuas de tipo $y = f(x)$; para $0 \leq t \leq \pi$ tenemos que $y \geq 0$ (véase los primeros renglones de la tabla),

para $\pi < t \leq 2\pi$ tenemos que $y < 0$ (véase los últimos renglones de la tabla). De la ecuación (2.6) se deduce:

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{dy}{dt} = +\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \frac{dy}{dx} = +\infty,$$

En estos puntos la tangente a la curva es vertical. Hallemos ahora

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2\pi} = 0$$

En estos puntos la tangente a la curva es horizontal. Calculemos ahora

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4(t) \sin(t)}$$

De aquí se deduce:

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ para $0 < t < \pi$, la curva es cóncava hacia arriba. $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ para $\pi < t < 2\pi$, la curva es cóncava hacia abajo. Los resultados obtenidos permiten construir la curva correspondiente (ver figura 2.7). Esta curva se llama *astroide*.

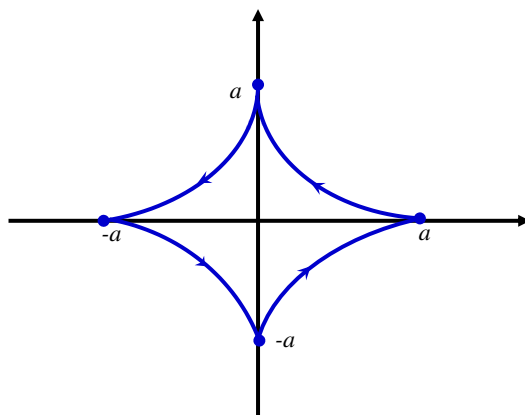


Figura 2.7: La gráfica del *astroide*

Otras de las técnicas que se recomiendan para el trazado de gráfica de curvas, es la eliminación del parámetro t , para trabajar en las coordenadas cartesianas correspondientes; cosa que puede no ser siempre tan fácil de ejecutar, esto puede verificarse en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.1.4 Dibuje la curva α dada por

$$\alpha(t) = (t - 1, 2 + t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

Solución

Aquí $x(t) = t - 1$ y $y(t) = 2 + t^2$ son las ecuaciones paramétricas, correspondientes. Así, $x = x(t)$ y $y = y(t)$, resulta que:

$$\begin{aligned}x &= t - 1 \Rightarrow t = x + 1 \\y &= 2 + t^2 \Rightarrow y = 2 + (x + 1)^2\end{aligned}$$

Se observa que la gráfica es una parábola que abre hacia arriba, con vértice $(-1, 2)$, como en la figura 2.8; las flechas indican la *orientación*, es decir, la dirección de los valores crecientes de t .

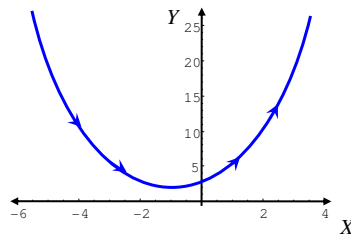


Figura 2.8: La gráfica de $\alpha(t) = (t - 1, 2 + t^2)$

Ejemplo 2.1.5 Dibuje la curva α dada por

$$\alpha(t) = (4 \cos(t), -3 \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Solución Paramétricamente las ecuaciones son: $x = 4 \cos(t)$ y $y = -3 \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Aquí, para eliminar t , debe buscarse alguna relación entre las variables:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

que es la curva de la elipse (véase figura 2.9).

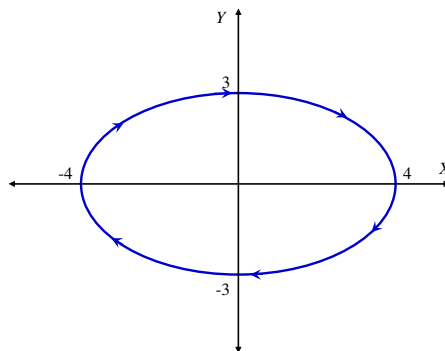


Figura 2.9: La gráfica de $x = 4 \cos(t)$, $y = -3 \sin(t)$

En el caso de curvas de tres dimensiones, constituye un reto su trazado a mano alzada. Pero, afortunadamente existen paquetes matemáticos como el Derive, Maple, MatLab, Mathematica, etc, en sus versiones mejoradas, que facilitan el trazado de estas curvas y de superficies, que estudiaremos más adelante. Por el momento algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.6 *Graficar la curva*

$$\beta(t) = \text{sen}(t)i - 3 \cos(t)j + 2tk, \quad t \geq 0$$

Solución

Paramétricamente, la curva dada es:

$$x = \text{sen}(t), \quad y = -3 \cos(t), \quad z = 2t, \quad t \geq 0$$

No es tarea fácil, como ya se ha dicho, el reconocer una curva tridimensional, sin embargo, podemos establecer aquí una relación entre x e y :

$$x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad (2.7)$$

veamos que (2.7), representa una elipse en el plano XY ; aún cuando no aparezca la variable z vemos que (2.7) es la ecuación de un cilindro elíptico cuyo eje es el Eje Z . Así que, cada punto de la curva definida por $\beta(t)$ esta en el cilindro; el recorrido es en el sentido opuesto a las manecillas del reloj (¿Por qué?). La curva se enrolla alrededor del cilindro, mientras el parámetro t crece. Por otra parte, como $z = 2t$, z crecerá cuando t crezca, de tal forma que, la curva ascenderá por el cilindro, a medida que t crece. Esta curva se llama *espiral elíptica*, la cual se muestra en la figura 2.10 abajo.

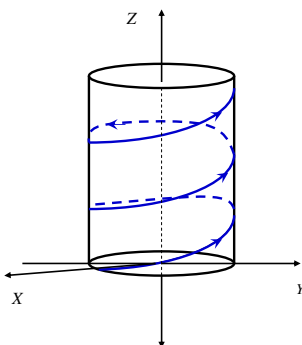


Figura 2.10: La grafica de la *espiral elíptica*

Ejemplo 2.1.7 *Haga corresponder cada una de las funciones con valores vectoriales:*

- $\alpha_1(t) = (\cos(t), \ln(t), \text{sen}(t))$
- $\alpha_2(t) = (t \cos(t), t \text{sen}(t), t)$
- $\alpha_3(t) = (t, 3 \text{sen}(2t), t)$
- $\alpha_4(t) = (5 \text{sen}^3(t), 5 \cos^3(t), t)$

con la gráfica respectiva, que se presentan a continuación, en la figura 2.11.

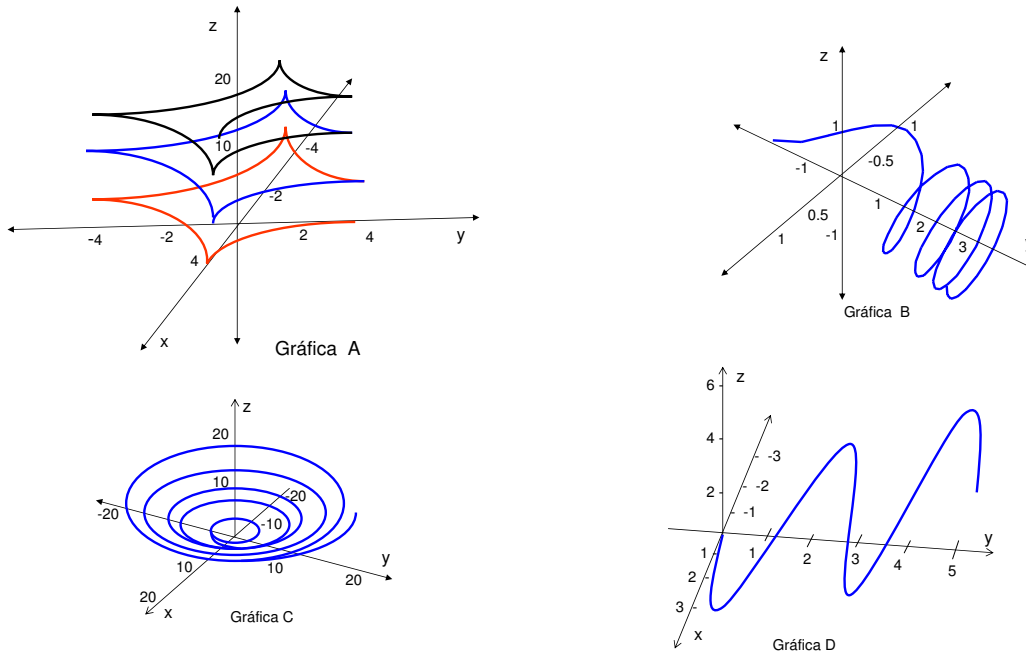


Figura 2.11: Diversas gráficas de curvas.

Solución En primer lugar, hay que darse cuenta de que no hay un único procedimiento correcto

para resolver este problema. Es necesario hacer corresponder funciones conocidas con propiedades de gráficas conocidas. Recuerde que ciertas combinaciones de *seno* y *coseno* como vimos en el ejemplo anterior, producirán curvas que están sobre un cilindro. Obsérvese que para la función $\alpha_1(t)$, se tiene $x = \cos(t)$, $z = \text{sen}(t)$; de modo que

$$x^2 + z^2 = \cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1.$$

Esto quiere decir que cada punto de la curva esta en el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. (Éste es un cilindro circular recto de radio 1 cuyo eje es el Eje Y). Por otra parte, la función $y = \ln(t)$ tiende rápidamente hacia $-\infty$ cuando $t \rightarrow 0$ y crece lentamente cuando t crece más allá de $t = 1$. Observe que la curva de la gráfica B parece estar en un cilindro circular recto y que las espirales tienden a acercarse unas a otras, a medida que se avanza hacia la derecha (cuando $y \rightarrow \infty$), y se apartan mucho cuando se avanza hacia la izquierda (cuando $y \rightarrow -\infty$) A primera vista, podría esperarse que la curva trazada por $\alpha_2(t)$ también estuviera en un cilindro circular recto, pero hay que mirar con más cuidado. Aquí se tiene, $x = t \cos(t)$, $y = t \text{sen}(t)$, $z = t$, de modo que,

$$x^2 + z^2 = t^2 \cos^2(t) + t^2 \text{sen}^2(t) = t^2 = z^2.$$

Esto expresa que la curva está sobre la superficie definida por $x^2 + y^2 = z^2$ (un cono circular recto, con eje a lo largo del Eje Z). Se ve que solamente la curva que se muestra en la gráfica C se ajusta a esta descripción. Se observa a continuación que para $\alpha_3(t)$, las componentes x, z son idénticas y, por tanto, la curva debe estar en el plano $x = z$. Reemplazando t por x , tenemos $y = 3 \text{sen}(2t) = 3 \text{sen}(2x)$, una curva seno en el plano $x = z$. Claramente, la curva de la gráfica D se ajusta a esta descripción. Esto nos deja

con la gráfica A para la función $\alpha_4(t)$. Sin tener en cuenta que A es la única curva que falta por hacer corresponder, observe que si los términos coseno y seno no estuvieran elevado al cubo, se tendría simplemente la *espiral* del ejemplo anterior. Los cubos tienden a transformar en cuadrados la apariencia suave de la *espiral*. Como $z = t$, cada punto de la curva es un punto del cilindro definido paramétricamente por $x = 5 \operatorname{sen}^3(t)$, $y = 5 \operatorname{cos}^3(t)$. Se necesita solamente mirar la gráfica de la sección transversal del cilindro (que se haya haciendo la gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 5 \operatorname{sen}^3(t)$, $y = 5 \operatorname{cos}^3(t)$ en 2 dimensiones) para decir si la gráfica A es la elección obvia. En la figura 11.7 se muestra esta sección transversal.

2.1.1. Curvas regulares. Longitud de arco.

Vamos a restringir nuestra atención a curvas sin puntos *singulares*; es decir, aquellos donde $\alpha'(t) \neq \tilde{0}$ para todo $t \in \operatorname{Dom}(\alpha)$. Obviamente $\alpha'(t) = \tilde{0}$ denotará un punto singular. Necesitamos que se pueda definir la recta tangente a lo largo de la curva α en cuestión.

Definición 2.1.2 Una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice regular, si $\alpha'(t) \neq \tilde{0}$ para todo $t \in I$. Esto es, su velocidad $v(t) = \alpha'(t)$ es diferente de cero. Si $\|v(t)\| = 1 \forall t \in I$, se dice que la curva es de rapidez unitaria.

Ejemplo 2.1.8 Sean u y v vectores fijos de \mathbb{R}^3 . Entonces la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = u + tv$ es regular si y sólo si $v \neq \tilde{0}$

Ejemplo 2.1.9 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t^3, 0, 0)$. Aquí $\gamma'(t) = (3t^2, 0, 0)$ y $\gamma'(0) = (0, 0, 0)$. así que, γ no es regular, aunque tiene la misma imagen de $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ que si es regular.

Ejemplo 2.1.10 Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (t^3 + t, 0, 0)$. Tenemos que $\beta'(t) = (3t^2 + 1, 0, 0) \neq \tilde{0}$. Esta curva es regular y su imagen es la misma del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.1.11 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $\alpha(t) = (t, g(t), 0)$. Entonces $\alpha'(t) = (1, g'(t), 0) \neq \tilde{0}$; con lo que α es regular. El gráfico de α es el de g excepto para la coordenada extra. La recta tangente para $t = t_0$ es

$$\{(t_0 + \lambda, g(t_0) + \lambda g'(t_0), 0) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

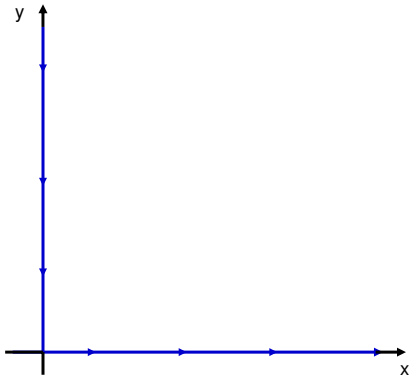
En términos de t, y, z esta recta es

$$z = 0, \quad y - g(t_0) = (t - t_0) g'(t_0).$$

Ejemplo 2.1.12 Considere $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, e^{1/t}) & , \quad t < 0; \\ (0, 0) & , \quad t = 0; \\ (e^{-1/t}, 0) & , \quad t > 0. \end{cases} ,$$

cuya gráfica en azul se muestra abajo, en la figura 2.12.



Se puede probar (se deja al lector), que γ no es regular; lo que su gráfica evidencia.

Figura 2.12: La gráfica de $\gamma(t)$

Ejemplo 2.1.13 *La gráfica 2.10 de*

$$\lambda(t) = \begin{cases} (e^{-1/t}, e^{-1/t} \operatorname{sen}(e^{1/t})) & , t > 0; \\ (0, 0) & , t = 0; \\ (e^{1/t}, e^{1/t} \operatorname{sen}(e^{-1/t})) & , t < 0. \end{cases}$$

está limitada o acotada entre las rectas $y = \pm x$, y tiene infinitas tangentes por $(0, 0)$ ¿Qué se puede decir de su regularidad? .

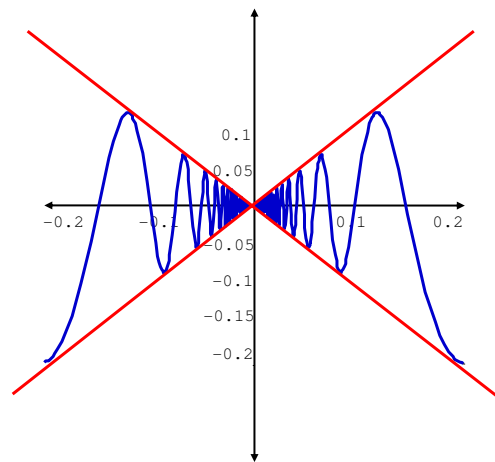


Figura 2.13: La gráfica senoidal

A partir de una curva α , se pueden construir muchas curvas nuevas que siguen la misma trayectoria que α , aunque viajen con rapidez diferentes.

Definición 2.1.3 *Dos curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ son equivalentes, denotada por $\alpha \sim \beta$, si existe $h : J \rightarrow I$ función diferenciable tal que $\beta = \alpha \circ h$.*

Esta definición permite formar, clases de equivalencias, en las curvas parametrizadas en \mathbb{R}^3 . Obviamente, \sim es de equivalencia. Bajo esta condición, la función β se llama *reparametrización* de α por h [Ver figura 2.14].

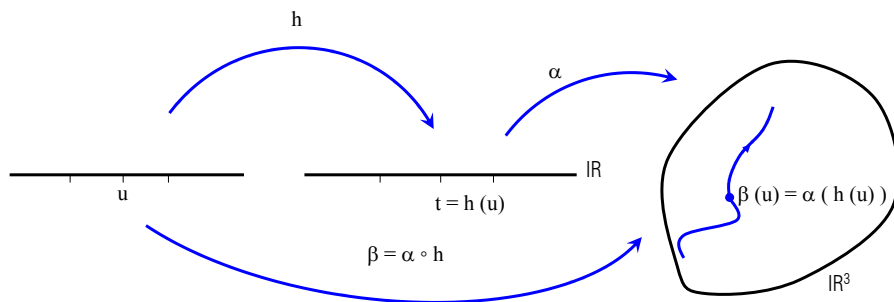


Figura 2.14: β es una parametrización de α

En el caso en que $h'(u) > 0$, β es una *reparametrización positiva* de α (que conserva la orientación positiva de la curva como en la figura 2.15);

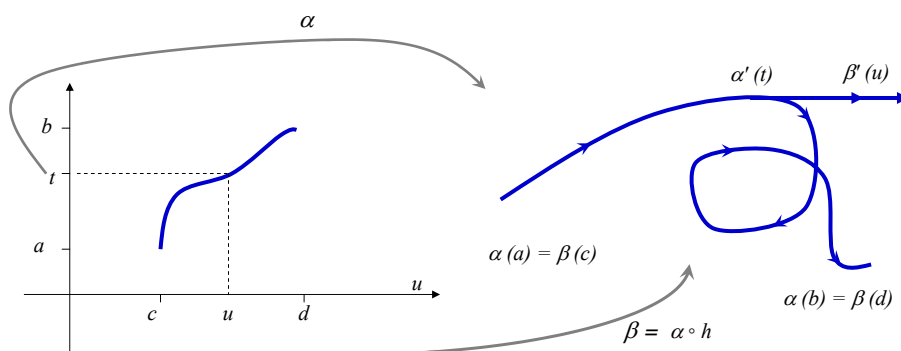


Figura 2.15: β es reparametrización positiva de α

y en el caso $h'(u) < 0$, β es una *reparametrización negativa* de α (que invierte la orientación de la curva como en figura 2.16).

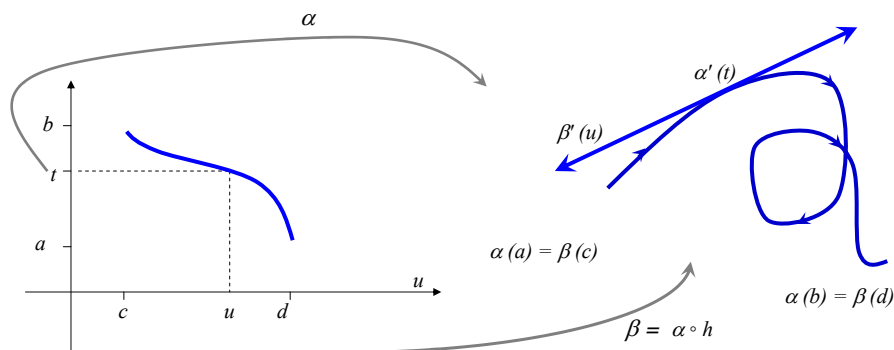


Figura 2.16: β es reparametrización negativa de α

Para $u \in J$, la curva β estará en el punto $\beta(u) = \alpha(h(u))$, que α alcanza en el momento $h(u)$ del intervalo I . Por tanto, β sigue el mismo camino de α , pero en general β llega a un punto dado del mismo, en un momento diferente del de α . En la práctica, para calcular las coordenadas de β , se sustituye sencillamente $t = h(u)$ en las coordenadas de α . Por ejemplo,

Ejemplo 2.1.14 Suponga que $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$ en $t \in I = [0, 4]$. Si $h(u) = u^2$ con $u \in J = [0, 2]$, entonces

$$\beta(u) = \alpha(h(u)) = \alpha(u^2) = (u, u^3, 1-u^2).$$

Por tanto, la curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha sido parametrizada por h para obtener la curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$; como $h'(u) > 0$, β es una reparametrización positiva de α .

Ejemplo 2.1.15 Las curvas $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ con $0 \leq t < \pi$ y $\beta(v) = (a \frac{1-v^2}{1+v^2}, \frac{2av}{1+v^2}, 2b \arctan v)$ con $0 \leq v < \infty$ son equivalentes (existe h).

Para ello, tome $v = h(t) = \tan \frac{1}{2}t$ para verificarlo.

Como se dijo al principio de este tema, al reparametrizar una curva se modifica la velocidad de recorrido de la traza de la curva, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 2.1.1 Supongamos que β es una reparametrización de α . Escribamos $\beta = \alpha \circ h$ donde $h : J \rightarrow I$. Entonces

$$\beta'(u) = h'(u) \alpha'(h(u))$$

Demostración: Supongamos que

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \quad y \quad \beta(u) = (\beta_1(u), \beta_2(u), \beta_3(u)).$$

Entonces $\beta_i(u) = \alpha_i(h(u))$ para $i = 1, 2, 3$. Aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas tendremos,

$$\begin{aligned} \beta'(u) &= \alpha'(h(u)) h'(u) \\ &= h'(u) \alpha'(h(u)) \end{aligned}$$

; con lo que el lema se sigue. ■

Como se nota en lema anterior, al reparametrizar una curva no se cambia la traza de la curva, pero sí su rapidez en un factor dado por la derivada de la función h .

A veces lo único que interesa al que estudia el problema es la trayectoria el problema es la trayectoria que sigue la curva, y no la rapidez con que la recorre. Así que, podríamos hacer el viaje a través de la trayectoria de α , a una velocidad constante, por ejemplo,

que β tenga rapidez unitaria; es lo que pediremos en lo que sigue, a menos que se pida lo contrario. Esto equivale a encontrar una función $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ con $h'(s) > 0$ y

$$1 = \|\beta'(h^{-1}(t))\| = \|\alpha'(t)\| h'(h^{-1}(t)) \quad \forall t \in (a, b).$$

Ahora, como

$$\frac{dh^{-1}}{ds}(t) = \frac{1}{\frac{dh}{ds}(h^{-1}(t))}$$

tenemos que

$$\frac{dh^{-1}}{ds}(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Al integrar se tiene que,

$$h^{-1}(t) = \mathbf{c} + \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \quad (2.8)$$

Tomando $\mathbf{c} = 0$, escribimos la función $s : (a, b) \rightarrow (0, d)$ con $d =$ longitud total de α como,

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \quad (2.9)$$

que llamaremos *función longitud de arco* de α . Entonces, se tiene que $h = s^{-1}$, y, la reparametrización

$$\beta = \alpha \circ s^{-1},$$

resulta ser de rapidez unitaria.

Ejemplo 2.1.16 Considere $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con velocidad α' dada por

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

En consecuencia,

$$\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

Por tanto, α tiene rapidez constante $\mathbf{c} = \|\alpha'\| = (a^2 + b^2)^{1/2}$. Si medimos la longitud de arco desde $t = 0$, tendremos, según 2.9 que,

$$s(t) = \int_0^t \mathbf{c} du = \mathbf{c} t.$$

Así que,

$$h(t) = s^{-1}(t) = \frac{s(t)}{\mathbf{c}},$$

y la reparametrización de rapidez unitaria es $\beta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, con

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(h(t)) = \alpha\left(\frac{s(t)}{\mathbf{c}}\right) \\ &= \left(a \cos\left(\frac{s(t)}{\mathbf{c}}\right), a \sin\left(\frac{s(t)}{\mathbf{c}}\right), b \frac{s(t)}{\mathbf{c}}\right). \end{aligned}$$

Con lo que

$$\|\beta'(t)\| = 1 \quad \text{para todo } t.$$

Nótese que t es una función de s y por tanto,

$$\beta(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right).$$

Definición 2.1.4 Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva parametrizada y, t_1, t_2 tales que $a < t_1 < t_2 < b$. La longitud $\ell(\alpha)_{t_1}^{t_2}$ del trozo de curva entre el punto $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$ viene dada por

$$\ell(\alpha)_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(u)\| du \quad (2.10)$$

En términos de la función longitud de arco

$$\ell(\alpha)_{t_1}^t = s(t) - s(t_1)$$

Es decir, la función longitud de arco para cada valor de t , representa la longitud de la curva entre los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(t_1)$.

De lo anterior tenemos que, hemos demostrado el:

Teorema 2.1.2 Si α es una curva regular en \mathbb{R}^3 , entonces existe una reparametrización β de α tal que β tiene rapidez unitaria.

Fijaremos nuestra atención a curvas parametrizadas por longitud de arco. Aunque, en general, no es necesario mencionar el origen de la longitud de arco s , ya que muchos conceptos se definirán solamente en términos de las derivadas de $\alpha(s)$.

Nótese que, si α es parametrizada por longitud de arco $s \in (a, b)$, podemos considerar β , definida como $\beta(-s) = \alpha(s)$ con $-s \in (-b, -a)$; la cual, tiene traza igual a la de α pero recorrida en dirección opuesta. se dice que α y β difieren por un *cambio de orientación*.

Vamos a cerrar esta parte, agregando elementos de algebra lineal, que utilizaremos más adelante y, propiedades del *producto interno* y del *producto vectorial* en curvas parametrizadas diferenciables.

Bien, dos bases $v = \{v_i\}$ y $u = \{u_i\}$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, de un espacio vectorial V , n -dimensional, tienen la misma orientación si la matriz de cambio de base (a_{ij}) tiene determinante positivo; es decir, $\det(a_{ij}) > 0$.

Esta relación determina en las bases una partición con sólo dos clase de equivalencia: las de *orientación positiva*, con $\det(a_{ij}) > 0$; y las de *orientación negativa u opuesta*, con $\det(a_{ij}) < 0$.

Por ejemplo, $V = \mathbb{R}^3$, tiene la base ordenada natural $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_i , $i = 1, 2, 3$ los vectores canónicos. El conjunto de todas las bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 , que con $\{e_1, e_2, e_3\}$ tengan $\det(a_{ij}) > 0$, conforman la orientación positiva de \mathbb{R}^3 ; al contrario, si $\det(a_{ij}) < 0$, tendríamos la orientación negativa.

Por otra parte, sean $u(t) = (u_1, u_2, u_3)$ y $v(t) = (v_1, v_2, v_3)$ dos curvas parametrizadas diferenciables definidas sobre el intervalo (a, b) en \mathbb{R}^3 , con $t \in$

(a, b) . Entonces, tanto $\langle u(t), v(t) \rangle$ como $u(t) \times v(t)$, son funciones diferenciables de \mathbb{R} en \mathbb{R} y de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 , respectivamente; así que

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$$

y

$$\frac{d}{dt} u(t) \times v(t) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$$

2.2. Teoría Local de Curvas Parametrizadas por Longitud de Arco.

La idea, en esta parte es, colocar a lo largo de la curva α , en cada uno de sus puntos $\alpha(s)$, un *sistema de referencia o de coordenadas*, que nos permita estudiar intrínsecamente, el comportamiento que la curva tiene por cada uno de ellos. Este sistema es denotado por $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ para todo $s \in \text{Dom}(\alpha)$, el cual denominaremos *Triedro de Frenet-Serret*, en donde \mathbf{t} , \mathbf{n} , y \mathbf{b} son funciones que van de $I = \text{Dom}(\alpha)$ en \mathbb{R}^3 , que serán campos de vectores a lo largo de α , con $\|\mathbf{t}(s)\| = \|\mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{b}(s)\| = 1$ y $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$ para todo $s \in I$. Es decir, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal orientada positivamente, por cada punto $\alpha(s)$ de α .

En detalle:

Definición 2.2.1 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Un **Campo Vectorial**, a lo largo de α , es una función Y que asigna a cada $t \in I$ un vector $Y(t) \in \mathbb{R}^3$, en el punto $\alpha(t)$.

En términos de espacios tangentes (A1), un campo vectorial sobre la curva α , es la parte vectorial de una curva en $\mathbb{T}\mathbb{R}^3$ de la forma

$$t \longrightarrow (\alpha(t), Y(t))$$

Esto es, un campo vectorial Y a lo largo de α define una curva en \mathbb{R}^3

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \quad t \in I$$

La derivada de un campo vectorial Y a lo largo de α , se define como el campo vectorial

$$\frac{d}{dt} Y(t) = Y'(t) = (y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t)).$$

Como ejemplos de tales campos, tenemos el campo vector velocidad $\alpha'(t)$ y aceleración $\alpha''(t)$ de una curva α .

Si consideramos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces $fY(t) = f(t)Y(t)$ es un campo vectorial; en general:

Lema 2.2.1 Sean Y , X dos campos a lo largo de la curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces,

$$i) \quad \frac{d}{dt} (fY) = \frac{df}{dt} Y + f \frac{dY}{dt}$$

$$ii) \quad \frac{d}{dt} (X + Y) = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}$$

$$iii) \quad \frac{d}{dt} (XY) = \frac{dX}{dt} Y + X \frac{dY}{dt}$$

Demostración: Se deja al lector.

2.2.1. Curvatura y Torsión de Curvas Parametrizadas por Longitud de Arco. Sistema de Referencia de Frenet

Se dice con frecuencia que la curvatura es el concepto central de la Geometría Diferencial; parece que un problema no fuera netamente geométrico hasta que no interviene la curvatura. También se reconoce que la curvatura juega un papel importante en la Física.

Podemos pensar de la curvatura de una curva, como la que mide la desviación que la curva hace con respecto a una dirección fija. Y veremos que la curvatura es cuantificador, por un punto de la curva, de la variación del *campo vector velocidad* con respecto a la variación de la longitud de la curva en ese punto.

Vamos a considerar $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular con $\alpha''(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Ya que t no es la longitud de arco y, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t , podemos definir el vector *Tangente unitario* $T(t)$ en el punto $\alpha(t)$, como

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (2.11)$$

T define a lo largo de α , el *Campo Vector Tangente Unitario*.

Ya que la función longitud de arco $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$ es diferenciable con $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, en (2.11) se tiene

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \Rightarrow \alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| T(t) = s'(t) T(t) \quad (2.12)$$

La Curvatura

Ahora, nuestro objetivo es definir una medida del pando de la curva α en un punto. Sea $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$ dos puntos sobre α como lo muestra la figura 2.17 abajo.

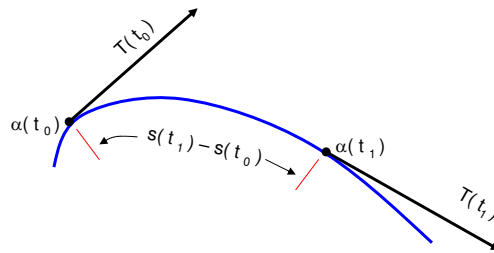
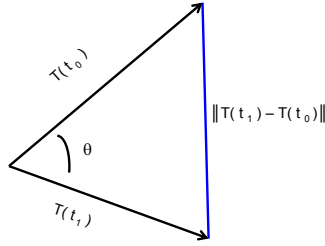


Figura 2.17: Variación de T de t_0 a t_1 .

Entonces $T(t_0)$ y $T(t_1)$ son los vectores unitarios, tangentes a α en $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, respectivamente. Obviamente, la variación del campo T en el intervalo $[t_0, t_1]$, puede ser obtenida por la medida del ángulo θ entre los vectores $T(t_0)$ y $T(t_1)$; el cual tiene a $\|T(t_1) - T(t_0)\|$ como una aproximación del mismo (ver figura 2.18). Esto es, la cantidad $\|T(t_1) - T(t_0)\|$, es una medida de cuánto ha cambiado la dirección de la curva entre $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$. En realidad

$$\begin{aligned} \|T(t_1) - T(t_0)\|^2 &= \|T(t_1)\|^2 - 2 T(t_0) \cdot T(t_1) + \|T(t_0)\|^2 \\ &= 2(1 - \cos \theta) = \left(2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Figura 2.18: $\|T(t_1) - T(t_0)\|$ aproxima a θ .

Nótese que, $(2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2})^2 \approx \theta^2$ para θ pequeño. Como la longitud de arco de α desde $\alpha(t_0)$ hasta $\alpha(t_1)$ es $|s(t_1) - s(t_0)|$, el cambio de dirección por unidad de distancia sobre este arco es

$$\frac{\|T(t_1) - T(t_0)\|}{|s(t_1) - s(t_0)|} \quad (2.13)$$

Para obtener la razón instantánea del cambio de dirección con respecto a la distancia a lo largo de la curva en el punto $\alpha(t_0)$, hacemos que t tienda a t_0 . Como

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\frac{\|T(t_1) - T(t_0)\|}{|t_1 - t_0|}}{\frac{\|s(t_1) - s(t_0)\|}{|t_1 - t_0|}} = \frac{\|T'(t_0)\|}{|s'(t_0)|}, \quad (2.14)$$

existe, y mide en realidad, cuanto se pandeo la curva por $\alpha(t_0)$, nosotros lo llamaremos *Curvatura* de α por $\alpha(t_0)$. Ya que $|s'(t_0)| = \|\alpha'(t_0)\|$, se tiene que

$$\mathbf{k}(t_0) = \frac{\|T'(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|} \quad (2.15)$$

Nótese que, si el parámetro t es la longitud de arco s , entonces

$$\|\alpha'(t)\| := \|\alpha'(s)\| = 1$$

y

$$T(t) = T(s) := \alpha'(s) = \mathbf{t}(s),$$

donde $\mathbf{t}(s)$ denotará el *vector tangente unitario* a la curva α en $\alpha(s)$. Así, cuando α es parametrizada por longitud de arco, es decir, de rapidez unitaria, podemos definir la *curvatura* de α , como la función $\mathbf{k}_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| \quad (2.16)$$

; lo que no contradice (2.15), ya que

$$T(s) := \mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

implica que,

$$T'(s) := \mathbf{t}'(s) = \alpha''(s).$$

Por tanto, la curvatura en cada punto $\alpha(s)$ de la curva, mide la *variación* del campo vector velocidad con respecto a la variación de la longitud de arco de la curvatura en ese punto. También, de (2.16) se desprende que $\mathbf{k}_\alpha(s) > 0$ si $\alpha''(s) \neq 0$ para todo s ; caso contrario, $\mathbf{k}_\alpha(s)$ será un número no negativo. Aquí, vamos a detenernos un poco, para estudiar la curvatura en el caso plano[Ver [10]]:

Considere $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco s ; así que, $\|\alpha'(s)\| = 1$ y

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \tag{2.17}$$

donde, $\theta(s)$, es el ángulo de inclinación que experimenta el vector velocidad $\alpha'(s)$, tomado en el sentido antihorario, dentro de la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y definiendo una función diferenciable de s , ver Figura 2.19.. Obviamente, que la variación de $\theta(s)$ dada por su derivada, $\theta'(s)$, en módulo, mide cuánto se aleja la curva α , de su recta tangente, por el punto $\alpha(s)$; es decir, da la razón de pandeo de la curva, que no es otra cosa que la *curvatura*.

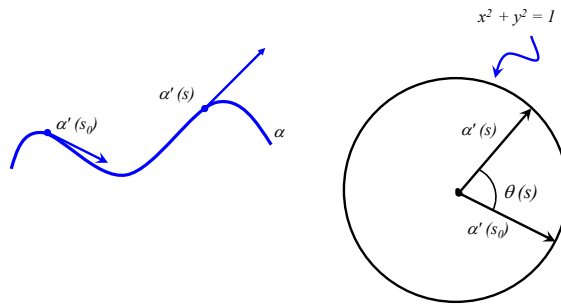


Figura 2.19: La curvatura plana como la variación de α' .

Definición 2.2.2 La curvatura de una curva plana $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, por el punto $\alpha(s_0)$, denotada por $\mathbf{k}_\alpha^2(s_0)$, se define como

$$\mathbf{k}_\alpha^2(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\theta(s) - \theta(s_0)}{s - s_0} = \theta'(s_0). \tag{2.18}$$

Pero \mathbf{k}_α^2 es signada, pues, si $\theta'(s) > 0$ (orientación positiva de α), $\mathbf{k}_\alpha^2(s) > 0$; si $\theta'(s) < 0$ (orientación negativa de α), $\mathbf{k}_\alpha^2(s) < 0$. Por otra parte, esto no contradice la definición dada en (2.16), pues, al derivar $\alpha'(s)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= (\sin \theta(s) \theta'(s), \cos \theta(s) \theta'(s)) \\ &= \theta'(s) (\sin \theta(s), \cos \theta(s)), \end{aligned}$$

lo que implica,

$$\|\alpha''(s)\| = |\theta'(s)|;$$

con lo que,

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = |\mathbf{k}_\alpha^2(s)|$$

El Sistema de Referencia de Frenet

Más adelante volveremos a tocar el caso plano. Nos interesa colocar en cada punto de la

curva, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, un sistema de referencia, que permita estudiar canónicamente el comportamiento la curva α , en cada uno de sus puntos. Para ello, teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{k}_\alpha(s)$, podemos definir los siguientes campos de vectores unitarios:

Definición 2.2.3 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada de rapidez unitaria. El campo vectorial

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{k}_\alpha(s)\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad (2.19)$$

se llama el *Campo Normal Unitario* y, el *campo vectorial*

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \quad (2.20)$$

se llama el *Campo Binormal Unitario*, a lo largo de la curva α (ver figura 2.20).

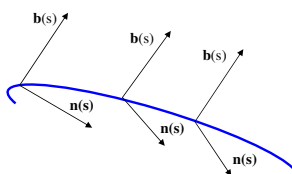


Figura 2.20: Los Campos unitarios $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$

Con esta última definición hemos llegado a nuestro cometido: A la tripleta de campos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ a lo largo de α se le llama *Marco de Campos de Frenet-Serret* o *Sistema de Referencia de Frenet-Serret*; puntualmente, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal orientada positivamente, según el sentido de la mano derecha, que llamaremos el *Aparato de Frenet* de α por $\alpha(s)$, como lo muestra la figura 2.21 abajo. Nótese que el Aparato de

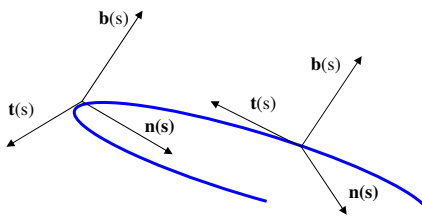


Figura 2.21: El Aparato de Frenet

Frenet, produce, por un punto $\alpha(s)$, tres planos y tres rectas: el plano $\mathbf{t}\mathbf{n}$ llamado *Plano Osculador* y, la recta que pasa por $\alpha(s)$ perpendicular a \mathbf{t} y contenida en este plano se denomina *recta normal principal*; el plano $\mathbf{t}\mathbf{b}$ llamado *Plano Rectificable* y, la recta perpendicular a la recta normal principal por $\alpha(s)$, se denomina *recta tangente*; el plano $\mathbf{n}\mathbf{b}$ llamado *Plano Normal* y, la recta perpendicular al plano osculador se denomina *recta binormal*.

De lo anterior, podemos decir que, dado un punto $\alpha(s)$ en una curva, el *plano osculador*¹ es el plano más próximo a la curva que pasa por ese punto:

$$\{\alpha(s) + r\mathbf{t}(s) + j\mathbf{n}(s) \mid r, j \in \mathbb{R}\}.$$

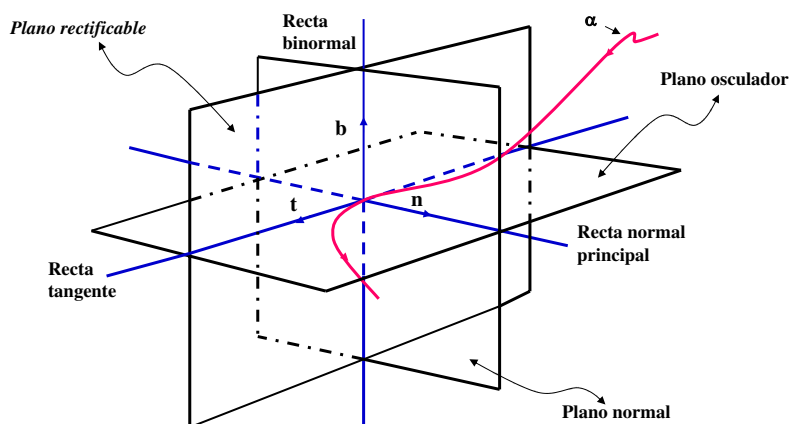


Figura 2.22: Planos del Aparato de Frenet

Por lo tanto, una curva tiene infinitos planos osculadores (uno en cada punto). Esto quiere decir, que si tomamos tres puntos distintos de la curva $\alpha(s_1)$, $\alpha(s_2)$ y $\alpha(s_3)$ que puedan determinar un plano y hacemos que esos tres puntos se aproximen a $\alpha(s)$, entonces esos planos se aproximan al plano osculador de este punto. Por otra parte, *el plano rectificable*, perpendicular al osculador, contiene la tangente a la curva α por $\alpha(s)$ que es la aproximación lineal a la misma. El *plano normal* contiene aquella porción de la curva que deja al plano osculador; lo que más adelante se explicará. También, siguiendo en la tónica de describir las características intrínsecas de la curva α en cada uno de sus puntos, sobre el plano osculador, correspondiente a un punto $\alpha(s)$ de la trayectoria, determinamos un punto C , de modo que la distancia $d(\alpha(s), C)$, a la trayectoria en la dirección y sentido del vector $\mathbf{n}(s)$, sea $\rho(s) = \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}$. Luego a la circunferencia de radio ρ y centro C se la denomina *circunferencia osculatriz* o *círculo osculador* de α en el punto $\alpha(s)$. El radio $\rho(s)$ se llama *radio de curvatura* y $C(s) = \alpha(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$ es el *centro de curvatura*.(ver figura 2.23)

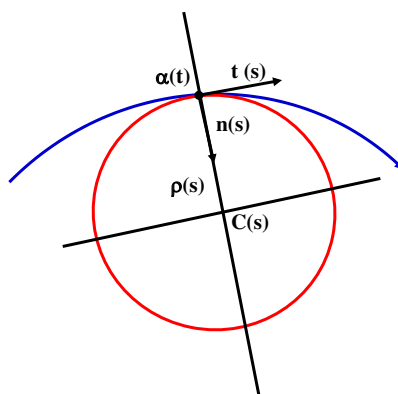


Figura 2.23: Círculo osculador.

Este círculo tiene un contacto de segundo orden² con la trayectoria de α , es decir, suponiendo que la función cuya gráfica o imagen es el círculo, es conocida, esta fun-

ción posee en $\alpha(s)$ el mismo valor $\alpha(s)$, y además los valores de la primera y segundas derivadas también son iguales; es la mejor aproximación a la curva en un entorno de $\alpha(s)$.

La Torsión.

Otro elemento importante que permite estudiar el comportamiento de una curva en el espacio tridimensional es, *la curvatura de torsión*. Por ejemplo, el recorrido sobre la trayectoria de una hélice, hace que el plano osculador cambie de orientación, es decir, su vector normal \mathbf{b} , gira; mide la variación de la dirección del plano osculador.

Por definición, llamaremos *curvatura de torsión* en un punto $\alpha(s)$ de una curva α , denotada por $\tau(s)$, a la velocidad de cambio de vector binormal $\mathbf{b}(s)$ en relación a la longitud de arco:

$$\tau(s) = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\| \quad (2.21)$$

Ahora, ¿en qué dirección se encuentra el vector $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$? Primero observemos que

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d}{ds} 1 \Rightarrow 2 \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{b} = 0$$

La última ecuación dice que $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ es siempre perpendicular a \mathbf{b} . Segundo, observemos que

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \Rightarrow \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = k \mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

que implica que $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ es también perpendicular con respecto a \mathbf{t} . Por tanto, $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ debe ser paralelo a \mathbf{n} . Esto permite definir la *curvatura torsión* como el escalar que cumple la siguiente relación:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}. \quad (2.22)$$

Algunos autores definen la torsión con el signo opuesto. Pero, algunos modelos de hélice convence que $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ está en sentido contrario a \mathbf{n} , por eso (2.22). El valor de τ mide físicamente, en definitiva, la cantidad que se *separa del plano osculador* la curva. Esto es, si en (2.22) se tiene que $\tau = 0$, entonces $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$ para todo s , lo que implicaría que $\mathbf{b} = C\mathbf{t}$ para todo s , con lo que la curva sería plana; estaría en su plano osculador. Esto lo vamos a comprobar mas adelante; mientras, pasemos a ver un ejemplo:

Ejemplo 2.2.1 Dada la curva regular $\alpha(s) = (\frac{1}{3}(2+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(2-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$, se pide:

- Hallar los vectores del triedro de Frenet en el punto $P = (\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2}, 0)$
- Halla las ecuaciones implícitas de la recta normal principal en el punto P .
- Hallar las ecuaciones paramétricas del plano rectificable en P .
- Hallar la curvatura y la torsión en P .
- ¿Es plana la curva? En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que la contiene.
- Hallar centro de curvatura y circunferencia osculatriz en el punto P .

Solución:

(a) En primer lugar, nótese que

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(2+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(2-s)^{\frac{3}{2}}, \sqrt{18}\right) \Rightarrow \alpha'(s) = \left(\frac{1}{2}(2+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(2-s)^{\frac{1}{2}}, 0\right).$$

Así que,

$$\|\alpha'(s)\| = \frac{1}{4}(2+s) + \frac{1}{4}(2-s) = 1.$$

Luego, s es la longitud de arco y $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$. Ahora, vea que $s=0$, implica que $\alpha(0) = P = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2}, 0\right)$, con lo que, $\mathbf{t}(0) = \alpha'(0) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$. Por otra parte,

$$\alpha''(s) = \left(\frac{1}{4}(2+s)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(2-s)^{-\frac{1}{2}}, 0\right) \Rightarrow \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4-s^2}}$$

y de (2.19),

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-s}, \frac{1}{2}\sqrt{2+s}, 0\right);$$

con lo que, en $s=0$, $\mathbf{n}(0) = \frac{\alpha''(0)}{\|\alpha''(0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

De aquí que el vector binormal, según (2.20) es,

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = (0, 0, 1);$$

en consecuencia,

$$\mathbf{b}(0) = (0, 0, 1).$$

(b) Recta normal en el punto P . Es la recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector normal principal:

$$\frac{x - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \wedge \quad z = 0$$

(c) Plano rectificable por el punto P . Es el plano que pasa por el punto P y tiene como vector perpendicular al vector normal principal. O dicho de otro modo, se trata del plano que pasa por P y está generado por las direcciones del vector tangente unitario y del vector binormal. Por tanto, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \beta \end{cases} \quad \gamma, \beta \in \mathbb{R}$$

(d) Curvatura y la torsión en P . La curvatura en P viene dada por

$$k_\alpha(0) = \|\alpha''(0)\| = \frac{1}{4}.$$

Su torsión, por (2.22) es

$$\tau(0) = 0;$$

pues, $\mathbf{b}(s) = (0, 0, 1)$ para todo s .

(e) ¿Es plana la curva? Para que la curva sea plana, la torsión debe ser nula en todos los puntos. Como $\mathbf{b}(s) = (0, 0, 1)$ para todo s , resulta que la curva es plana.

(e) Centro de curvatura y circunferencia oscultriz por el punto P . Bien, el radio de curvatura viene dado por $\rho(s) = \frac{1}{k_\alpha(s)}$. Para $s = 0$ se tiene,

$$\rho(0) = \frac{1}{k_\alpha(0)} = 4.$$

Ya que el centro de curvatura $\mathcal{C}(s)$, viene dado por,

$$\mathcal{C}(s) = P(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s),$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(0) &= P(0) + \rho(0)\mathbf{n}(0) \\ &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2}, 0\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

Luego la ecuación del círculo oscultriz es

$$\left(x - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 4^2.$$

2.2.2. Las fórmulas de Frenet.

Para un buen estudio de las características intrínsecas de una curva α , se necesita emplear su campo de referencia de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, siempre que sea posible, en lugar de un campo de sistema de referencia $\{E_1, E_2, E_3\}$. Esto se debe a que el campo de sistemas de referencia de Frenet está lleno de información acerca de α , mientras que el campo natural de sistemas de referencia no contiene nada de ella.

La aplicación primera y más importante de esta idea es la expresión de las *derivadas* \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' en términos de $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, está parametrizada por longitud de arco s , y sea $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ su triedro de Frenet. Como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ constituyen una base ortonormal, para cada función vectorial $Z = Z(s) \quad \forall s \in I$ se tiene la identidad:

$$Z = \langle Z, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle Z, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle Z, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b}.$$

En particular

$$\mathbf{t}' = \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} \quad (2.23)$$

Pero $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' = 2\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$ y como $\mathbf{t}' = \alpha''$ es proporcional a \mathbf{n} , resulta que $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = 0$. Finalmente $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = \langle \alpha'', \mathbf{n} \rangle = k_\alpha$, por lo que (2.23) queda como:

$$\mathbf{t}' = k_\alpha \mathbf{n} \quad (2.24)$$

De igual forma, tenemos que

$$\mathbf{n}' = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} \quad (2.25)$$

Como antes, $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$, y al ser $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$, se concluye $\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = -k_\alpha$, y ya que $\tau = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle$, (2.25) queda como:

$$\mathbf{n}' = -k_\alpha \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (2.26)$$

Finalmente

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = k_\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (-k_\alpha \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = -\tau \mathbf{n},$$

es decir

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \quad (2.27)$$

Las fórmulas (2.24), (2.26) y (2.27) constituyen las *fórmulas de Frenet* que pueden escribirse todas juntas como:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = & k_\alpha \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k_\alpha \mathbf{t} & + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = & -\tau \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.28)$$

O en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

En resumen, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 2.2.2 (las fórmulas de Frenet). Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva de rapidez unitaria en la que $k_\alpha > 0$ y la torsión es τ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= & k_\alpha \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k_\alpha \mathbf{t} & + \tau \mathbf{b} . \\ \mathbf{b}' &= & -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

Bien, nos valdremos de este resultado, para dar una idea del significado geométrico de la curvatura y la torsión de una curva, mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.2.3 Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria con curvatura k_α y torsión τ . Entonces

- i) $k_\alpha = 0$ si y sólo si la curva es una recta;
- ii) $\tau = 0$ si y sólo si la curva plana,
- iii) Si $k_\alpha = Cte.$ y $\tau = 0$ entonces la curva es una parte de una circunferencia de radio $\rho = \frac{1}{k_\alpha}$.

Demostración:

i) Si $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ y $k_\alpha = 0$, esto significa que $\|\alpha''(s)\| = 0$ y por lo tanto $\alpha'(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ es un vector constante. Integrando nuevamente tenemos que $\alpha(s) = s(c_1(s), c_2(s), c_3(s)) + (d_1(s), d_2(s), d_3(s))$ con lo que α es una recta. Ahora, recíprocamente, si α es una recta, se tiene que $\alpha'' = 0$ y $k_\alpha = 0$.

ii) Si $\tau = 0$, de la tercera ecuación del sistema de Frenet en el teorema (2.2.2), tenemos que el vector binormal es un vector constante $\mathbf{b} = B$. Consideremos ahora $s_0 \in (a, b)$ y la función $\sigma(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B$; derivando esta función tenemos

$$\sigma(s)' = \alpha'(s) \cdot B = \mathbf{t}(s) \cdot B = 0,$$

lo cual nos lleva a que $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B = 0$ y entonces la curva descansa en el plano que pasa por $\alpha(s_0)$ y tiene normal B .

Recíprocamente, siendo α plana, existe $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B = 0$ y derivando dos veces esta expresión, tenemos

$$\alpha'(s) \cdot B = \mathbf{t}(s) \cdot B = 0 \quad y \quad k_\alpha(s) \mathbf{n}(s) \cdot B = 0$$

; luego el vector B es siempre ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ para toda s . Esto último implica que $B = \mathbf{b}(s)$ y entonces $\mathbf{b}'(s) = 0$, lo que implica por la tercera ecuación de Frenet que $\tau(s) = 0$.

iii) Como $\tau(s) = 0$, la curva α es plana. Consideremos la curva

$$\eta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{n}(s)$$

, la cual es constante, pues, como consecuencia de las fórmulas de Frenet tenemos

$$\eta(s)' = \mathbf{t}(s) + \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{n}'(s) = 0.$$

Entonces $\eta(s) = \text{vector constante} = c$, y $\alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{n}(s) = c$. Al reescribir lo anterior, resulta $\|\alpha(s) - c\| = \frac{1}{k_\alpha}$, con lo cual se tiene que $\alpha(s)$ está en la circunferencia de centro c y radio $\frac{1}{k_\alpha}$.

Veamos ahora las ecuaciones de Frenet, para el caso plano:

Definición 2.2.4 Sea $\alpha(s)$ una curva plana de rapidez unitaria. El campo vectorial tangente, $\mathbf{t}(s)$, a $\alpha(s)$ es $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$. El campo vectorial normal, $\mathbf{n}(s)$, a $\alpha(s)$ es el único campo vectorial unitario a $\mathbf{n}(s)$ tal que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ forma una base ortonormal en la orientación positiva de \mathbb{R}^2 para cada s . La curvatura plana signada, $k_\alpha^2(s)$, de $\alpha(s)$ es dada por $k_\alpha^2(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

De esta definición tenemos el siguiente lema:

Lema 2.2.4 Si $\alpha(s)$ es una curva plana de rapidez unitaria, entonces

$$(a) \quad \mathbf{t}'(s) = k_\alpha^2(s) \mathbf{n}(s)$$

(b) Si $\alpha(s)$ es escrita de la forma

$$\alpha(s) = (x(s), y(s))$$

donde x y y son funciones reales de clase C^2 , entonces

$$\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)) \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Demostración:

(a) Procedemos de forma similar al teorema 2.2.2,

$$\mathbf{t}'(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) \quad (2.30)$$

en término de la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$; el primer sumando del lado izquierdo de (2.30) es nulo y el resultado se tiene de la definición 2.2.4.

(b) La fórmula para \mathbf{t} es obvia. Nótese que $\mathbf{w}(s) = (-y'(s), x'(s))$ es un vector ortogonal a \mathbf{t} . Así, se debe probar que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{w}(s)\}$ es una base de orientación positiva de \mathbb{R}^2 . Ahora bien, con $C = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, resulta que

$$\mathbf{t}(s) = x'(s) e_1 + y'(s) e_2.$$

$$\mathbf{w}(s) = -y'(s) e_1 + x'(s) e_2.$$

En consecuencia, la matriz de cambio de base, $A = (a_{ij})$ es

$$A = \begin{pmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{pmatrix},$$

la cual tiene $\det(A) > 0$; por tanto, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{w}(s)\}$ es una base de orientación positiva de \mathbb{R}^2 y para finalizar, basta tomar $\mathbf{w}(s) = \mathbf{n}(s)$. ■

Observación:

Una curva plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rapidez unitaria se puede considerar como una curva en el espacio \mathbb{R}^3 haciendo su última componente nula, esto es $z = 0$. Así que, las fórmulas de Frenet para el caso tridimensional se pueden utilizar y se tiene, para todo s que

$$k_\alpha(s) = |k_\alpha^2(s)| \quad (2.31)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k_\alpha^2(s) \mathbf{t}(s) \quad (2.32)$$

De estas últimas ecuaciones, podemos ver que, el signo de k_α^2 cambia cuando se revierte la orientación; es decir, el signo de k_α^2 indica si α se dobla en dirección de \mathbf{n} ($k_\alpha^2 > 0$) o si se aleja de \mathbf{n} ($k_\alpha^2 < 0$), como lo muestra la figura 2.24.

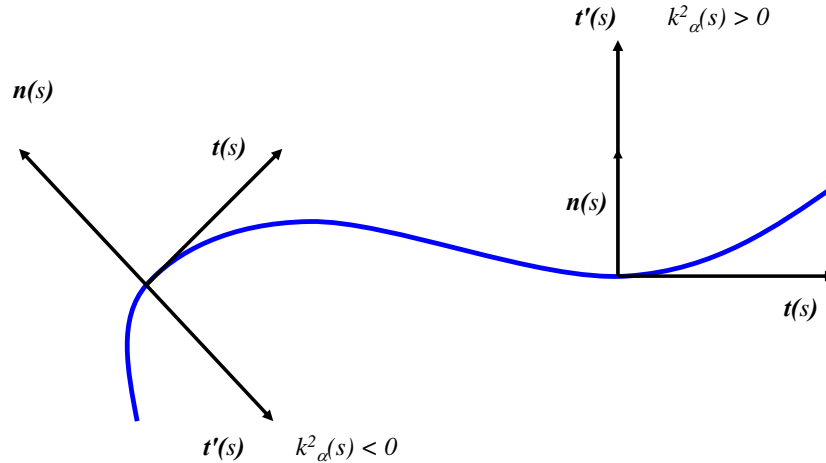


Figura 2.24: Signo de k_α^2 según la orientación de α .

2.2.3. La forma canónica local de una curva respecto al sistema de Frenet.

Aquí se pretende dar, el comportamiento aproximado de una curva, en las inmediaciones de un punto arbitrario de la misma. También cómo la curvatura y la torsión influyen en la forma de la curva. Para tal fin, utilizaremos la aproximación de Taylor de la curva por el punto dado.

Consideremos pues, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3 , tal que $s_0 = 0 \in I$ y $\alpha(s_0) = (\alpha_1(s_0), \alpha_2(s_0), \alpha_3(s_0))$ el punto sobre el cual escribiremos la ecuación de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, usando el sistema de Frenet $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$, en una vecindad de s_0 . Si el valor de s es pequeño, cada coordenada $\alpha_i(s)$ se puede aproximar (finita), por el término inicial de su serie de Taylor:

$$\alpha_i(s) \sim \alpha_i(0) + s \frac{d\alpha_i}{ds}(0) + \frac{d^2\alpha_i}{ds^2}(0) \frac{s^2}{2} + \frac{d^3\alpha_i}{ds^3}(0) \frac{s^3}{6} + R,$$

donde $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^3} = 0$.

Así,

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R,$$

Pero $\alpha'(0) = \mathbf{t}_0$ y $\alpha''(0) = k_{\alpha_0} \mathbf{n}_0$, donde el subíndice nos indica la evaluación en $s = 0$ y suponemos que $k_{\alpha_0} \neq 0$. Por otra parte,

$$\alpha''' = (k_\alpha \mathbf{n})' = \frac{dk_\alpha}{ds} \mathbf{n} + k_\alpha \mathbf{n}'.$$

De las fórmulas de Frenet para \mathbf{n}' , obtenemos,

$$\alpha'''(0) = -k_{\alpha_0}^2 \mathbf{t}_0 + \frac{dk_\alpha}{ds}(0) \mathbf{n}_0 + k_{\alpha_0} \tau_0 \mathbf{b}_0.$$

Al sustituir los valores de $\alpha'(0), \alpha''(0)$ y $\alpha'''(0)$ en la aproximación de $\alpha(s)$ que hemos dado arriba; conservando sólo el termino dominante de cada componente (el de la menor potencia de s), el resultado es,

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + s \mathbf{t}_0 + k_{\alpha_0} \frac{s^2}{2} \mathbf{n}_0 + k_{\alpha_0} \tau_0 \frac{s^3}{6} \mathbf{b}_0 + R, \tag{2.33}$$

Si denotamos el miembro derecho de (2.33) por $\hat{\alpha}(s)$, obtenemos la curva $\hat{\alpha}$ que se llamará *la aproximación de Frenet* de α por $s = 0$. Más, si consideramos el sistema de coordenadas $Oxyz$ de tal manera que el origen O coincida con $\alpha(0)$ y que $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ y con $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, resulta que,

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k_{\alpha_0}^2 s^3}{6} + R_x, \\ y(s) &= \frac{k_{\alpha_0}}{2} s^2 + \frac{k'_{\alpha_0} s^3}{6} + R_y, \\ z(s) &= -\frac{k_{\alpha_0} \tau_0}{6} s^3 + R_z, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $R = (R_x, R_y, R_z)$. Las ecuaciones dadas en (2.34) se le llama *la forma canónica local* de α , en una vecindad de $s = 0$. En las figuras 2.25. y 2.26. se dan las proyecciones de α para s pequeño ,según (2.34), sobre los planos \mathbf{tn} , \mathbf{tb} y \mathbf{nb} .

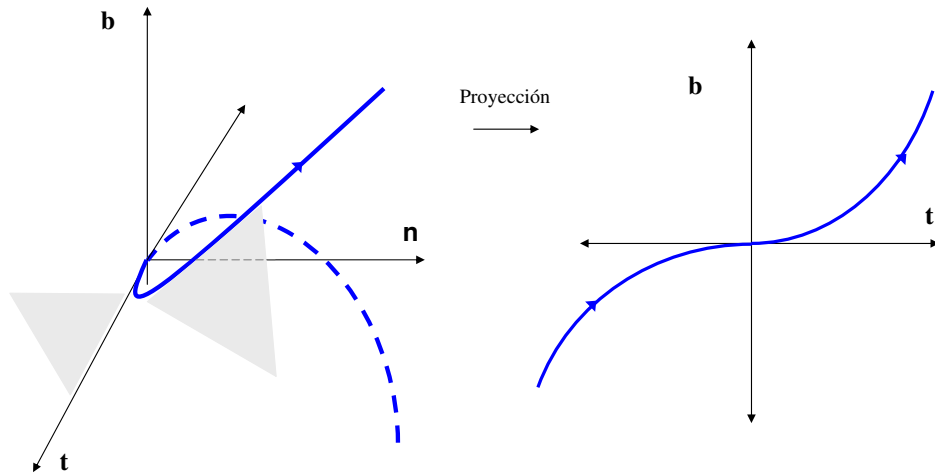


Figura 2.25: Proyección sobre el plano \mathbf{tb}

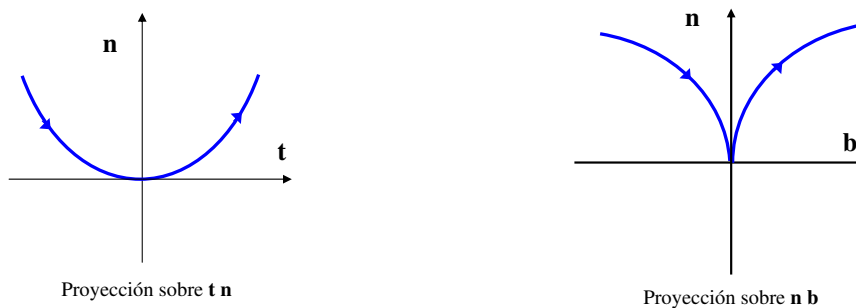


Figura 2.26: Proyección sobre los planos \mathbf{tn} y \mathbf{nb} .

De esto, podemos observar que la curva α pasa a través del plano osculador en la dirección del vector binormal \mathbf{b} , si τ es positiva. También, podemos decir, que la curva por $s = 0$ está contenida enteramente a un lado del plano rectificable, en la dirección en la que señala el vector normal \mathbf{n} ; en realidad porque se tiene que $k_{\alpha 0} > 0$. Por último, la forma canónica permite decir, que el *plano osculador*, es el único plano que contiene a la la tangente a la curva por $s = 0$. Esto es, el plano osculador, en general lo podemos ver como el plano que contiene a la recta tangente por $\alpha(s)$ y al punto $\alpha(s + h)$ cuando $h \rightarrow 0$. (Ver[3]).

2.2.4. Existencia y unicidad de una Curva en el Espacio para $k_\alpha(s)$ y $\tau(s)$ dados.

El siguiente teorema muestra, que dadas las funciones de curvatura y de torsión de una curva de rapidez unitaria, así como la disposición del sistema de referencia de Frenet en un punto de dicha curva, entonces la curva (salvo un movimiento rígido o euclídeo en \mathbb{R}^3 ; ver[Apéndice 1]), esta totalmente determinada. Esto, se debe a lo siguiente: El sistema de Frenet (2.28) es una sistema de nueve ecuaciones diferenciales en las funciones incognita $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Si las funciones de curvatura $k_\alpha(s)$ y de torsión $\tau(s)$ tienen derivadas continuas y especificamos valores iniciales $\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$, entonces por el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales con condición inicial, existe una única solución $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ para el sistema de Frenet en un intervalo, digamos J , alrededor del punto s_0 que satisface las condiciones iniciales impuestas. Si además $\|\mathbf{t}(s_0)\| = \|\mathbf{n}(s_0)\| = \|\mathbf{b}(s_0)\| = 1$, y $\mathbf{t}(s_0) \cdot \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \cdot \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{n}(s_0) \cdot \mathbf{b}(s_0) = 0$, entonces el mismo teorema de unicidad nos da que $\|\mathbf{t}(s)\| = \|\mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{b}(s)\| = 1$, y $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0$, para toda $s \in J$; mas aún, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) \quad \forall s \in J$. Así se puede obtener, $\alpha(s) = \vec{v}_0 + \int_0^s \mathbf{t}(u) du$ parametrizada por longitud de arco s con curvatura $k_\alpha(s)$ y torsión $\tau(s)$.

Teorema 2.2.5 (Teorema fundamental de la teoría local de curvas.) *Dadas las funciones $k_\alpha(s) > 0$, $\tau(s)$ con $s \in J$, existe una curva parametrizada regular $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es la longitud de arco, $k_\alpha(s)$ es la curvatura y $\tau(s)$ es la torsión de α . Mas aún, cualquier otra curva $\hat{\alpha}$ satisfaciendo las mismas condiciones, difiere de α por un movimiento rígido; es decir, existe una aplicación lineal ortogonal ρ de \mathbb{R}^3 , con determinante positivo, y un vector \vec{c} tal que $\hat{\alpha} = \rho \circ \alpha + \vec{c}$.*

Demostración:

(Ver [3]).

Precaución: La birregularidad es una hipótesis esencial. De otra manera, no solamente la torsión no existe, sino que logrando extenderla continuamente, la conclusión de unicidad fallaría. Considere las curvas dadas en la figura (2.19) con las misma $k_\alpha(s)$ y $\tau(s) = 0$. No existe un movimiento rígido que lleve una dentro de la otra (Pruébalo) a pesar de que tienen la misma curvatura como función de la longitud de arco.

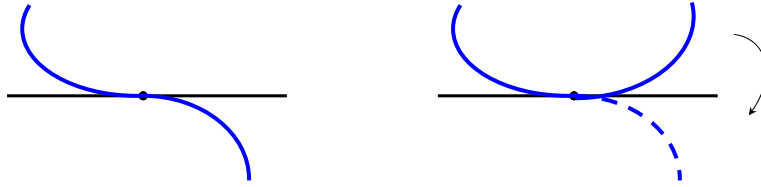


Figura 2.27: Curvas no congruentes por movimiento rígido.

La figura anterior nos da pie para presentar el caso para curvas planas en donde la curvatura es signada:

Teorema 2.2.6 Sea $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Entonces, una curva con velocidad unitaria $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ con curvatura k está dada por

$$\beta(s) = \left(\int \cos \theta(s) ds + \mathbf{c}_1, \int \sin \theta(s) ds + \mathbf{c}_1 \right), \quad (2.35)$$

con $\theta(s) = \int k(s) ds + \theta_0$.

Demostración:

Si se define β y θ como en (2.35), resulta que,

$$\begin{cases} \beta'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ \theta'(s) = k(s). \end{cases} \quad (2.36)$$

Así, β tiene velocidad unitaria y $k(s)$ es su curvatura. ■

En general, dadas k_α y τ es muy difícil resolver las ecuaciones de Frenet y encontrar la curva α correspondiente. Sin embargo, esto puede (casi) ser hecho en el caso de una Hélice.

Definición 2.2.5 En general, una Hélice es una curva regular α tal que para algún vector unitario fijo \mathbf{u} , $\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle$ es constante. A \mathbf{u} se la llama el eje de la Hélice. Intuitivamente, la Hélice crece linealmente en la dirección dada por el eje.

Ejemplo 2.2.2 Cualquier curva plana es una Hélice ya que \mathbf{b} es constante y puede tomarse como \mathbf{u} .

Corolario 2.2.7 (Lancret, 1802) Una curva de rapidez unitaria $\alpha(s)$ con $k_\alpha \neq 0$ es una Hélice si y sólo si existe una constante c tal que $\tau = c k_\alpha$.

Demostración: Suponga que α es una Hélice. Ya que, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle$ es constante, podemos escribir

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle = \cos(\theta),$$

donde θ es un ángulo fijo (llamado la *inclinación* de α). Ahora, si θ es un múltiplo entero de π , entonces $\mathbf{u} = \mathbf{t}$ o $\mathbf{u} = -\mathbf{t}$; lo que implica que $k_\alpha = 0$ (¿Por qué?), obteniendo

una contradicción. Bien, supongamos que θ no es un múltiplo entero de π . El siguiente cálculo muestra que \mathbf{n} es ortogonal a \mathbf{u} :

$$0 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle' = \langle \mathbf{t}', \mathbf{u} \rangle = k_\alpha \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle.$$

En virtud de esto y, ya que $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b}$, resulta que,

$$\mathbf{u} = \cos(\theta) \mathbf{t} + \sin(\theta) \mathbf{b},$$

donde $\sin(\theta) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b} \rangle$. Entonces,

$$0 = \mathbf{u}' = \cos(\theta) k_\alpha \mathbf{n} - \sin(\theta) \tau \mathbf{n}$$

y $k_\alpha \cos(\theta) = \tau \sin(\theta)$. Como θ no es múltiplo entero de π , se tiene que $\tau = c k_\alpha$, donde $c = \cot(\theta)$.

Supongamos ahora que $\tau = c k_\alpha$ y mostremos que α es una Hélice. En efecto, siguiendo el procedimiento de la primera parte, definimos θ por $c = \cot(\theta)$ con $0 < \theta < \pi$ y sea $\mathbf{u} = \cos(\theta) \mathbf{t} + \sin(\theta) \mathbf{b}$. Ahora se puede demostrar que $\mathbf{u}' = 0$, con lo que \mathbf{u} es constante. Note que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle = \cos(\theta)$, es constante, por lo que α es una Hélice. ■

Bien, ahora podemos dar el ejemplo para encontrar la curva α , correspondiente a una curvatura y torsión dadas:

Ejemplo 2.2.3 Sea $\alpha(s)$ una Hélice con $k_\alpha > 0$, $\tau = c k_\alpha$ para alguna constante c .

Será útil reparametrizar a α por un parámetro t dado por

$$t(s) = \int_0^s k_\alpha(\sigma) d\sigma.$$

Nótese que este cambio de coordenada es permisible, ya que $\mathbf{t}' = k_\alpha > 0$ implica que $\mathbf{t}(s)$ es 1-1 y además, $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{s}(t)$ son diferenciables. Ahora, como $\tau = c k_\alpha$, las ecuaciones de Frenet son

$$\mathbf{t}' = k_\alpha \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -k_\alpha \mathbf{t} + c k_\alpha \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -c k_\alpha \mathbf{n}.$$

En términos del parámetro t ellas son

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{t} + c\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = -c\mathbf{n}.$$

Así que, $\frac{d^2\mathbf{n}}{dt^2} = -\mathbf{n} - c^2\mathbf{n} = -w^2\mathbf{n}$, donde $w = \sqrt{1+c^2}$. Pero \mathbf{n} es solución de ésta ecuación diferencial, por lo que $\mathbf{n} = \cos(wt)\mathbf{u} + \sin(wt)\mathbf{v}$ para algunos vectores fijos \mathbf{u} y \mathbf{v} . Por otra parte, de $\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \mathbf{n}$ obtenemos que $\mathbf{t} = (\sin(wt)\mathbf{u} - \cos(wt)\mathbf{v})/w$. En consecuencias,

$$\alpha(s) = \frac{1}{w} \left(\int_0^s \sin[wt(\sigma)] d\sigma \mathbf{u} - \int_0^s \cos[wt(\sigma)] d\sigma \mathbf{v} + s\mathbf{c} + \mathbf{z} \right).$$

Sin embargo, las constantes de integración \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{c} y \mathbf{z} no son arbitrarias. Pues,

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -w \operatorname{sen}(wt) \mathbf{u} + w \operatorname{cos}(wt) \mathbf{v},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle \\ &= [-w |\mathbf{u}|^2 + w |\mathbf{v}|^2] \operatorname{sen}(wt) \operatorname{cos}(wt) + w \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle [\operatorname{cos}^2(wt) - \operatorname{sen}^2(wt)]. \end{aligned}$$

Si evaluamos la ecuación anterior por $t = 0$ se tiene que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Entonces,

$$\frac{1}{2} [-w |\mathbf{u}|^2 + w |\mathbf{v}|^2] \operatorname{sen} 2(wt) = 0$$

implica que $|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2$.

Siendo

$$1 = |\mathbf{n}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \operatorname{cos}^2(wt) + |\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2(wt),$$

resulta que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. Así que, \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortonormales.

Similarmente, de $0 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ se tiene que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = 0$ con lo que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = 0$. Y

$1 = |\mathbf{t}|^2$ da $|\mathbf{c}| = |c|$; así $\mathbf{c} = \pm c(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Por otra parte, $\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{t} + c\mathbf{b}$ implica que $c\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \mathbf{t}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{c}{w} (\operatorname{sen}(wt) \mathbf{u} - \operatorname{cos}(wt) \mathbf{v} + \mathbf{c}) &= c\mathbf{t} = \mathbf{n} \times c\mathbf{b} \\ &= [\operatorname{cos}(wt) \mathbf{u} + \operatorname{sen}(wt) \mathbf{v}] \times \left[\left(\frac{1}{w} - w \right) \operatorname{sen}(wt) \mathbf{u} - \operatorname{cos}(wt) \mathbf{v} + \frac{1}{w} \mathbf{c} \right] \\ &= \frac{1}{w} [\operatorname{cos}(wt) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \operatorname{sen}(wt) (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) + c^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v})]. \end{aligned}$$

Así que $\mathbf{c} = +c(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. En términos de la base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\}$ tendremos,

$$\alpha(s) = \frac{1}{w} \left(\int_0^s \operatorname{sen}[wt(\sigma)] d\sigma, - \int_0^s \operatorname{cos}[wt(\sigma)] d\sigma, cs \right) + \mathbf{z}_1,$$

donde $t(\sigma) = \int_0^s k_\alpha ds$ y $\mathbf{z}_1 = \alpha(0)$.

Nótese que en la solución dada arriba, se necesita del cálculo de algunas integrales no triviales; lo que dificulta encontrar la curva α .

2.3. El Sistema de Referencia de Frenet para curvas con velocidad arbitraria.

Aunque cada curva regular admite una reparametrización con velocidad unitaria, en la practica con frecuencia sucede que es muy difícil determinarlo. Por ejemplo, considere la curva $\beta(t) = (e^t t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ cuya longitud de arco es

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{e^{4t} (1+t)^2 + 2e^{2t} + 1} dt;$$

su inversa es difícil de determinar. Así que, debemos buscar, alternativas de técnicas de cálculos, que permitan conseguir el sistema de referencia de Frenet de una manera mas sencilla. Empezamos con la siguiente definición:

Definición 2.3.1 Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, y sea $\hat{\alpha} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización unitaria de α ; entonces, $\alpha(t) = \hat{\alpha}(s(t))$, siendo $s(t)$ la función longitud de arco. Representamos por $\widehat{k_{\hat{\alpha}}}$ y $\widehat{\tau}$ la curvatura y la torsión de $\hat{\alpha}$, respectivamente, y sea $\{\widehat{\mathbf{t}}, \widehat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{b}}\}$ el sistema de referencia de Frenet asociado a $\hat{\alpha}$. Entonces definimos

$$k_{\alpha}(t) = \widehat{k_{\hat{\alpha}}}(s(t)), \quad \tau_{\alpha}(t) = \widehat{\tau}(s(t)),$$

$$\mathbf{t}_{\alpha}(t) = \widehat{\mathbf{t}}(s(t)), \quad \mathbf{n}_{\alpha}(t) = \widehat{\mathbf{n}}(s(t)), \quad \mathbf{b}_{\alpha}(t) = \widehat{\mathbf{b}}(s(t))$$

En otras palabras, la curvatura, la torsión y el sistema de referencia de Frenet de una curva con velocidad arbitraria coinciden con las de su reparametrización con velocidad unitaria, salvo el cambio de parámetro dada por la función longitud de arco.

El siguiente teorema nos permitirá tener las fórmulas de Frenet para curvas de rapidez arbitraria:

Teorema 2.3.1 Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con velocidad

$$v = \|\alpha'(t)\| = s'(t).$$

Se verifican entonces las siguientes generalidades de las fórmulas de Frenet:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{\alpha}' = & v k_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha}, \\ \mathbf{n}_{\alpha}' = & -v k_{\alpha} \mathbf{t}_{\alpha} & + v \tau_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha} \\ \mathbf{b}_{\alpha}' = & -v \tau_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha}, \end{cases}$$

Demostración: Utilizando la regla de la cadena, se obtiene que:

$$\mathbf{t}_{\alpha}' = s'(t) \widehat{\mathbf{t}}'(s(t)) = v(t) \widehat{\mathbf{t}}'(s(t))$$

$$\mathbf{n}_{\alpha}' = s'(t) \widehat{\mathbf{n}}'(s(t)) = v(t) \widehat{\mathbf{n}}'(s(t))$$

$$\mathbf{b}_{\alpha}' = s'(t) \widehat{\mathbf{b}}'(s(t)) = v(t) \widehat{\mathbf{b}}'(s(t))$$

Ahora, utilizando las fórmulas de Frenet para $\hat{\alpha}$ se sigue que

$$\mathbf{t}_{\alpha}' = v(t) \widehat{k_{\hat{\alpha}}}(s(t)) \widehat{\mathbf{n}}'(s(t)) = v(t) k_{\alpha}(t) \widehat{\mathbf{t}}'(s(t))$$

Las otras fórmulas se demuestran de manera análoga. ■

Lema 2.3.2 *El campo vector velocidad α' (o el campo de vectores tangentes) y la aceleración α'' de una curva regular α están dados por*

$$\alpha' = v \mathbf{t}_\alpha \quad (2.37)$$

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha + v^2 k_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \quad (2.38)$$

donde v representa la velocidad de α .

Demostración: Consideremos $\alpha(t) = \hat{\alpha}(s(t))$, donde $\hat{\alpha}$ es una reparametrización con velocidad unitaria de α . Entonces, por la regla de la cadena, se verifica

$$\alpha'(t) = \hat{\alpha}'(s(t)) s'(t) = v(t) \hat{\mathbf{t}}(s(t)) = v(t) \mathbf{t}_\alpha(t)$$

lo que demuestra (2.37). Por otra parte, si derivamos (2.37), resulta que

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha + v \mathbf{t}'_\alpha = \frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha + v^2 k_\alpha \mathbf{n}_\alpha. \quad \cdot$$

El teorema que sigue permite el computo de la curvatura y la torsión de una curva de rapidez arbitraria.

Teorema 2.3.3 *Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con curvatura distinta de cero en cada punto. Entonces:*

$$\mathbf{t}_\alpha = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{b}_\alpha \times \mathbf{t}_\alpha \quad (2.40)$$

$$\mathbf{b}_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad (2.41)$$

$$k_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad (2.42)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (2.43)$$

Demostración: Es claro que (2.39) es equivalente a (2.37) del lema 2.3.2, y que (2.40) es consecuencia algebraica de la definición del producto vectorial. Además, de (2.37) y (2.38) del lema 2.3.2, se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= (v \mathbf{t}_\alpha) \times \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha + v^2 k_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) \\ &= v \frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{t}_\alpha + v^3 k_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ &= v^3 k_\alpha \mathbf{b}_\alpha \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tomando norma en (2.44), se obtiene

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = \|v^3 k_\alpha \mathbf{b}_\alpha\| = v^3 k_\alpha, \quad (2.45)$$

lo que implica (2.42). Además, de (2.44) y (2.45), se deduce que

$$\mathbf{b}_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{v^3 k_\alpha} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

lo que prueba (2.41). Para demostrar (2.43) se necesita una expresión de α''' análoga a (2.37) y (2.38) del lema 2.3.2. En realidad, tan sólo necesitamos conocer la componente de α''' en la dirección de \mathbf{b}_α , ya que haremos el producto de α''' por $\alpha' \times \alpha''$. Haciendo el cálculo directamente se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{t}_\alpha + v^2 k_\alpha \right)' \\ &= k_\alpha v^2 \mathbf{n}'_\alpha + \dots \\ &= k_\alpha \tau_\alpha v^3 \mathbf{b}_\alpha + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

Los tres puntos suspensivos (...), en (2.46), sustituyen los términos irrelevante. De (2.44) y (2.46) resulta que

$$\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha''' = k_\alpha^2 \tau_\alpha v^6 \quad (2.47)$$

Ahora (2.43) se sigue de (2.47) y (2.45). ■

Ejemplo 2.3.1 Sea $\eta(t) = (1+t^2, t, t^3)$. Entonces $\eta'(t) = (2t, 1, 3t^2)$, $\eta''(t) = (2, 0, 6t)$ y $\eta'''(t) = (0, 0, 6)$. En consecuencia $\eta'(t) \times \eta''(t) = (6t, -6t^2, -2)$ y $\eta'(t) \times \eta''(t) \cdot \eta'''(t) = -12$. Así que,

$$k_\alpha = \frac{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{1/2}}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{3/2}},$$

$$\tau_\alpha = \frac{-12}{36t^2 + 36t^4 + 4},$$

$$\mathbf{t}_\alpha = \frac{(2t, 1, 3t^2)}{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{1/2}},$$

$$\mathbf{b}_\alpha = \frac{(6t, -6t^2, -2)}{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{1/2}}$$

y

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{(-18t^2 + 2, -4t - 18t^3, 6t + 12t^3)}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{3/2} (36t^2 + 36t^4 + 4)^{1/2}}.$$

Ejemplo 2.3.2 La curva $\beta(t) = (t, 1+t^{-1}, t^{-1}-t)$ para $t > 0$ es plana. En efecto, $\beta'(t) = (1, -t^{-2}, -t^{-2}-1)$, $\beta''(t) = (0, 2t^{-3}, 2t^{-3})$, y $\beta'''(t) = (0, -6t^{-4}, -6t^{-4})$. Claramente, $\beta''(t) \times \beta'''(t) = 0$; así que, $\beta'(t) \times \beta''(t) \cdot \beta'''(t) = 0$. Por el teorema 2.3.3, $\tau_\alpha = 0$ y β sería plana si $k_\alpha \neq 0$; pero $\beta'(t) \times \beta''(t) = (2t^{-3}, -2t^{-3}, 2t^{-3}) \neq \vec{0}$. ■

Ejemplo 2.3.3 La curva $\alpha(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ tiene curvatura y torsión iguales en todos sus puntos.

Demostración: En efecto,

$$\alpha'(t) = (3-3t^2, 6t, 3+3t^2), \quad \alpha''(t) = (-6t, 6, 6t), \quad \alpha'''(t) = (-6, 0, 6).$$

De donde,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = 18(t^2-1, -2t, t^2+1) \Rightarrow \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 18\sqrt{2}(t^2+1)$$

Así que,

$$k_\alpha = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^{3/2}} = \frac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{27(2t^4+4t^2+2)^{3/2}} = \frac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{54(t^2+1)^3} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

y

$$\tau_\alpha = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{6(18)(2)}{(18)^2(2)(t^2+1)^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

Ejemplo 2.3.4 Determine unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente y del plano osculador a la curva C descrita por $\gamma(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 3t)$ en el punto $\gamma(0)$.

Solución: Los cálculos requeridos son:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(3t), \sin(3t), 3t); & \gamma(0) &= (1, 0, 0) \\ \gamma'(t) &= (-3\sin(3t), 3\cos(3t), 3); & \gamma'(0) &= (0, 3, 3) \\ \gamma''(t) &= (-9\cos(3t), -3\sin(3t), 0); & \gamma''(0) &= (-9, 0, 0) \\ \gamma'(t) \times \gamma''(t) &= (27\sin(3t), -27\cos(3t), 27); & \gamma'(0) \times \gamma''(0) &= (0, -27, -27) \end{aligned}$$

La ecuación vectorial de la recta tangente es: $\ell = (1, 0, 0) + s(0, 1, 1)$.

Sus ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= s \quad \text{con } s \in \mathbb{R} \\ z &= s \end{aligned}$$

La ecuación rectangular del plano osculador es:

$$\begin{aligned}(\ell - \gamma(0)) \cdot \mathbf{b}(0) &= 0 \\(x - 1, y, z) \cdot (0, -1, 1) &= 0 \\y - z &= 0\end{aligned}$$

Unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= u \\y &= v \quad \text{con } u, v \in \mathbb{R} \\z &= v\end{aligned}$$

2.4. Teoría Global de Curvas Planas.

En esta sección vamos a presentar ciertos resultados que son de la geometría diferencial global de curvas; aún cuando estemos estudiando el caso plano, ofrece ejemplos de teoremas no triviales y de cuestiones interesantes. Supondremos aquí, algunos hechos que ya se han tratados en otros cursos sin las pruebas correspondientes, y otros quizás, para ser investigado por el lector; recordando que esta guía, no quiere dejar de lado el espíritu investigativo, que debe tener el estudiante a estas altura de su carrera.

Bien, trataremos en esta sección tres aspectos: *La Desigualdad Isoperimétrica*, *El Índice de rotación de una curva* y *El Teorema de cuatro vértice*; aunque el mundo de las curvas es muy denso en ciertos aspectos, pero en los ejercicios, aparecerán otras propiedades que no abordamos aquí.

Definición 2.4.1 Una **curva plana cerrada** es una curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que α y todas sus derivadas coinciden por a y b ; es decir,

$$\alpha(a) = \alpha(b) \quad \alpha'(a) = \alpha'(b) \quad \alpha''(a) = \alpha''(b) \cdots \alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b) \cdots, \quad k \in \mathbb{N}.$$

También, se puede decir equivalentemente que: α es **cerrada** si α es **periódica**; es decir, existe una constante $\check{a} > 0$ con $\alpha(t) = \alpha(t + \check{a})$ para todo t . Aquí el **período** de α es el menor de esos números \check{a} . Nótese que $\alpha(0) = \alpha(\check{a})$.

Lema 2.4.1 Si $\alpha(t)$ es cerrada con período \check{a} y $\beta(s)$ es una reparametrización por longitud de arco de α , entonces β es cerrada con período $\int_0^{\check{a}} \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt$.

Demostración:

Queda de ejercicio.

Definición 2.4.2 Una curva regular $\alpha(t)$ es **simple** si α es 1-1 [no tiene autointersecciones; es decir, si $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2$, entonces $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$] o si α es cerrada con período \check{a} con $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ si y sólo si $t_1 - t_2 = n\check{a}$ para algún entero n . [ver figura 2.28]

Supondremos que una curva cerrada simple C en el plano, acota una región de éste plano que llamaremos el *interior* de C , ver figura 2.29. Esto forma parte del así llamado *Teorema de Jordan para curvas*:

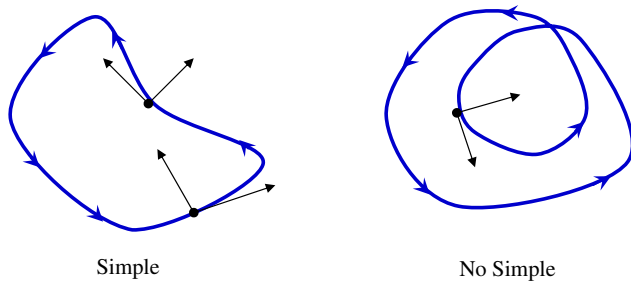


Figura 2.28: Curvas simple y no simple.

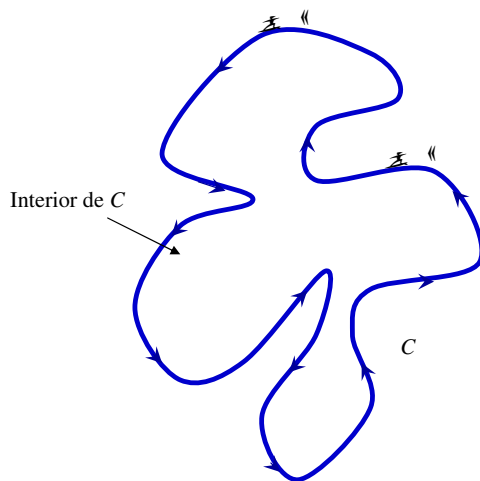
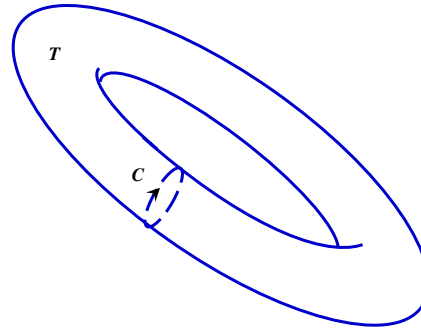


Figura 2.29: C está positivamente orientada.

”Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular cerrada simple. Entonces $\mathbb{R}^2 - \alpha([0, l])$ tiene exactamente dos componentes conexas, y $\alpha([0, l])$ es su frontera en común.” Un ejemplo en donde no se cumple este teorema, es tomar una curva simple en el Toro, como se muestra en la figura 2.30.

El área de una curva cerrada simple C , significará el área del interior de C . Supongamos que el parámetro puede ser escogido, de tal forma que, si uno se desplaza a lo largo de la curva en la dirección en la que el parámetro crece, entonces el interior de la curva permanece a la izquierda; es decir, la curva está orientada positivamente [véase de nuevo la figura 2.29].



Una curva cerrada simple C sobre el toro T

Figura 2.30: C no acota una región en T .

2.4.1. Desigualdad Isoperimétrica

”De todas las curvas cerradas simples en el plano con longitud l dada, ¿Con cual se acotaría el área mas grande? Respuesta: El círculo.”

La prueba requiere el siguiente resultado:

Lema 2.4.2 *Si α es una curva plana cerrada simple, cuya imagen limita o acota una región R y la cual es recorrida en sentido antihorario, entonces el área de R es A , donde:*

$$A = \int_{\alpha} x dy = - \int_{\alpha} y dx$$

donde x e y son las coordenadas del plano. Es decir: Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es simple, cerrada, orientada positivamente y acotando una region R de A , entonces el area de R es

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

Demostración:

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, consideremos la region R dada como en la figura 2.31:

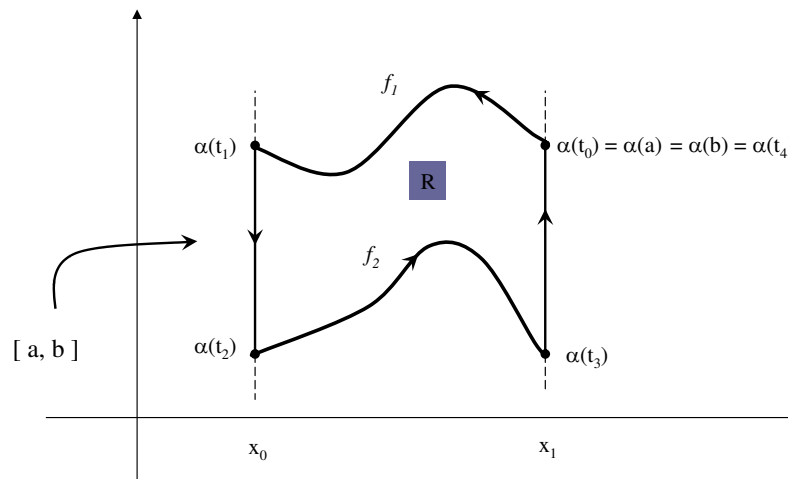


Figura 2.31: Región encerrada por una curva plana.

Consideremos $f_1, f_2 : [x_0, x_1]$, donde $f_1(x(t)) > f_2(x(t))$ y $f_i(x(t)) = y(t)$, $t \in [t_2, t_3]$ para $i = 1, 2$.

Luego:

$$A(R) = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x(t))dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x(t))dx$$

Como α esta orientada positivamente entonces

$$A(R) = - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt$$

pero $x'(t) = 0$ a lo largo del intervalo $[t_1, t_2]$ y $[t_3, t_4]$, así:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^{t_4} y(t)x'(t)dt \\
 &= - \left[\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt + \int_{t_3}^{t_4} y(t)x'(t)dt \right] \\
 &= - \int_{t_0}^{t_4} y(t)x'(t)dt \\
 &= - \int_a^b y(t)x'(t)dt
 \end{aligned}$$

Por otro lado :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_a^b (xy)'(t)dt \\
 &= \int_a^b (x(t)y'(t) + x'(t)y(t))dt \\
 &= \int_a^b (x(t)y'(t)dt + \int_a^b x'(t)y(t)dt
 \end{aligned}$$

pues : $\int_a^b (xy)'(t)dt = (xy)(t)|_a^b = x(b)y(b) - x(a)y(a) = 0$ ya que α es cerrada, es decir $\alpha(a) = \alpha(b)$ luego :

$$\int_a^b (x(t)y'(t)dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt$$

Teorema 2.4.3 (*Desigualdad Isoperimétrica*)

Sea α una curva plana cerrada simple de longitud (perímetro) l . Sea A el área de la región acotada por α . Entonces $l^2 \geq 4\pi A$ con igualdad si y solo si α es un círculo. Así, de todas las curvas de longitud fija l , el círculo acota el área mas grande.

Demostración:

Sean l_1, l_2 dos rectas paralelas tangentes a α acotada entre ellas. Sea β el círculo tangente a l_1 y l_2 el cual no intercepta a α y sea r su radio. Escojamos el sistema de coordenadas x e y para formar el plano con origen en el centro del círculo de tal forma que el eje y sea paralelo a la recta l_1 . Sea l_1 tangente a α por $A = \alpha(0)$ y l_2 por $c = \alpha(s_2)$ (ver figura 2.32).

La idea clave de la prueba es comparar el área de la region acotada por α con el area del círculo de radio r . Ya que la longitud y el area encerrada por α son independientes de la parametrización podemos suponer que α es de rapidez unitaria. Así que α puede ser escrita en las coordenadas (x, y) como $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, donde $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ (pues α es de rapidez unitaria). La curva β puede ser parametrizada por $\beta(s) = (z(s), w(s))$ donde

$$z(s) = x(s)$$

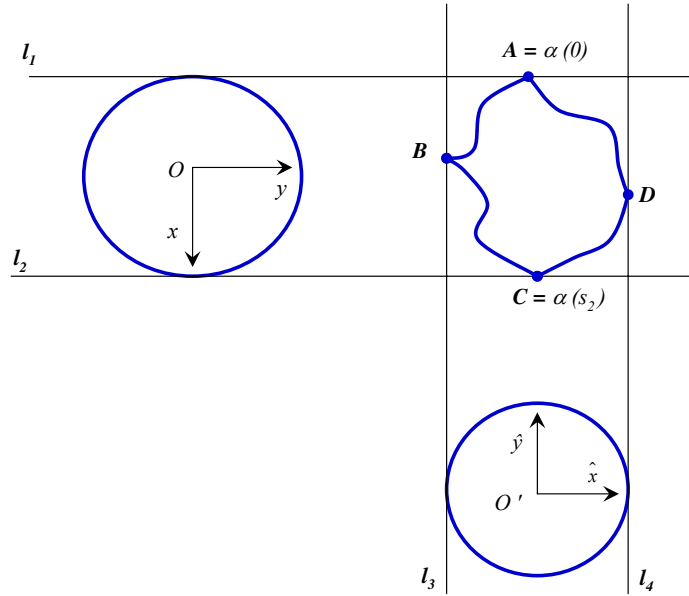


Figura 2.32: El área encerrada por α comparada con la de un círculo.

$$W(s) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x^2} & \text{si } 0 \leq s \leq s_2 \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{si } s_2 \leq s \leq l \end{cases}, \quad (2.48)$$

pues, la ecuación de la circunferencia β es $x^2 + w^2 = r^2$ con lo que $w = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Nótese que, s es la longitud de arco de α desde A hasta $\alpha(s)$ (pues α es de rapidez unitaria) pero no de β . En realidad con esta parametrización β puede que no sea regular pero por lo menos de clase C^1 .

Por el Lema 2.4.1 el área acotada por α es :

$$A = \int_{\alpha} xdy = \int_0^l xy' ds$$

Por otro lado, el área acotada por β es:

$$\pi r^2 = - \int_{\beta} ydx = - \int_0^l wz' ds = - \int_0^l wx' ds$$

Así,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l xy' ds - \int_0^l wx' ds \\ &= \int_0^l (xy' - wx') ds \\ &\leq \int_0^l \|xy' - wx'\| ds \\ &= \int_0^l \| \langle (x', y'), (-w, x) \rangle \| ds \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con el hecho de que α es de rapidez unitaria nos permite afirmar que:

$$\|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle\| \leq \|(x', y')\| \|(-w, x)\| = \|(-w, x)\| = \sqrt{w^2 + x^2} = r$$

(Ver ecuación 2.48) luego:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle\| ds \leq \int_0^l r ds = rl$$

Por lo que se tiene que

$$A + \pi r^2 \leq rl. \quad (2.49)$$

De las propiedades de \mathbb{R} tenemos que:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b), \quad (2.50)$$

con igualdad si $a=b$ y claramente $a, b \geq 0$. Luego tomando: $a = A$ y $b = \pi r^2$ obtenemos,

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}rl, \quad (2.51)$$

donde la segunda desigualdad viene de (2.50). Por tanto, $A\pi r^2 \leq r^2 l^4/4$ o

$$l^2 \geq 4\pi A,$$

que es la desigualdad isoperimétrica.

Ahora supongamos que $l^2 = 4\pi A$. Mostremos que α es un círculo. Primero mostremos que: $x = ry'$. Ya que $l^2 = 4\pi A$ la desigualdad (2.51) llega a ser una igualdad, en efecto :

$$\sqrt{A\pi r^2} = \frac{rl}{2} \Leftrightarrow A\pi r^2 = \frac{r^2 l^2}{4} \Leftrightarrow 4\pi A = l^2$$

Ahora, si aplicamos (2.50) resulta que $\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2)$ con igualdad si $a = b$, es decir si $A = \pi r^2$; de igual forma, la desigualdad (2.49) debe ser también una igualdad, es decir $A + \pi r^2 = rl$. Ahora considerando la obtención de (2.49) debemos tener igualdad donde la desigualdad de Cauchy-Schwarz se usó, esto es: existe un número real c tal que:

$$(-w, x) = c(x', y') \quad (\text{vectores } l.d) \quad (2.52)$$

Esto porque

$$\begin{aligned} \|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle\| &= \|(x', y')\| \|(-w, x)\| |\cos \theta| = \|(-w, x)\| \\ \Rightarrow \cos \theta &= 1 \Rightarrow (-w, x) = c(x', y') \quad (\|\alpha'(s)\| = 1 \forall s). \end{aligned}$$

Tomando norma en ambos lados de (2.52) se tiene que:

$$\|(-w, x)\| = \|c(x', y')\| \Leftrightarrow \sqrt{w^2 + x^2} = |c| \|(x', y')\| = |c|$$

y así (2.48) implica que $c = \pm r$. Por otro lado (2.52) dice que

$$c = \langle (x', y'), (-w, x) \rangle$$

en efecto:

$$\langle (x', y'), (-w, x) \rangle = \langle (x', y'), c(x', y') \rangle = c \langle (x', y'), (x', y') \rangle = c \|\alpha'\|^2 = c$$

Además $c \geq 0$ ya que la primera desigualdad de donde se obtuvo (2.49) también debe ser una igualdad,

$$\begin{aligned} 0 \leq A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - wx') ds = \int_0^l \|xy' - wx'\| ds = \int_0^l \|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle\| ds \\ &\Rightarrow \int_0^l (xy' - wx') ds = \int_0^l c ds = c.l \geq 0 \Rightarrow c \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto $r = c$ y (2.52) muestra que: $x = ry'$, en efecto:

$$(-w, x) = r(x', y') = (rx', ry') \Rightarrow x = ry'$$

Por otro lado: $A = \pi r^2$ implica que r depende de A y no de la elección de l_1 . Así, si l_3 y l_4 ortogonales a l_1 y l_2 son introducidas, un círculo de radio r es tangente a ellas. Si utilizamos, las coordenadas \hat{x} e \hat{y} con origen o' en el centro de este círculo, como lo muestra la figura 2.32 obtendríamos que $\hat{x} = r\hat{y}'$.

Ya que el eje y es paralelo al eje \hat{x} y en el mismo sentido, el eje x es paralelo al eje \hat{y} pero con sentidos opuestos, entonces existen componentes "d" y "e" tal que:

$$\hat{x} = y - d, \hat{y} = e - x$$

luego:

$$y - d = \hat{x} = r\hat{y}' = -r\hat{x}' \quad (\hat{y}' = (e - x)' = -\hat{x}')$$

y

$$x^2 + (y - d)^2 = (r\hat{y}')^2 + (-r\hat{x}')^2 = r^2((y')^2 + (x')^2) = r^2$$

Por tanto α es círculo de radio r con centro $(0, d)$ en sistema de coordenadas (x, y) .

2.4.2. Índice de rotación.

Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada plana dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ donde s es la longitud de arco; así que $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ tiene norma igual a 1. sabemos que el campo de vectores tangentes [que en este contexto será la *la función Indicatriz tangencial*] $\mathbf{t} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ es diferenciable, y su traza está contenida en un círculo unitario .

Como la curva es diferenciable, la *Indicatriz tangencial* cumple con

$$\mathbf{t}'(s) = (x''(s), y''(s)) = k_\alpha^2(s) \mathbf{n}(s),$$

donde $\mathbf{n}(s)$ es el vector normal, orientado según la base usual de \mathbb{R}^2 y el recorrido de α ; $k_\alpha^2(s)$ la curvatura signada de α .

Ahora bien, tiene sentido preguntarse, para una curva plana cerrada α ¿Cuánto gira el vector unitario \mathbf{t} , al momento en que α da una vuelta completa, en la dirección en la que el parámetro crece?. Bien, este giro o rotación, es descrito por un ángulo, el cual, a causa de que $\mathbf{t}(0) = \mathbf{t}(l)$, debe ser múltiplo entero de 2π . En el orden de conseguir éste ángulo, podemos definir, de manera local, a $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, como el ángulo que $\mathbf{t}(s)$ hace con el eje X ; es decir, $x'(s) = \cos \theta(s)$, $y'(s) = \sin \theta(s)$. Con esto se puede obtener que

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} \quad (2.53)$$

[recuérdese que la tangente de $\theta(s)$ existe para $0 < \theta(s) < 2\pi$ donde $\cos \theta(s)$ es no nulo]. Así que $\theta = \theta(s)$ es una función bien definida localmente; más aún,

$$\mathbf{t}'(s) = \theta'(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s) \mathbf{n}(s),$$

de donde se tiene $\theta'(s) = k_\alpha^2(s)$. En consecuencia, θ se puede expandir como una función diferenciable global $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) = \int_0^s k_\alpha^2(s) ds$$

De aquí, ya que

$$\theta'(s) = k_\alpha^2(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \left(\arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} \right)',$$

resulta que, esta función global coincide, salvo una constante, con la definida localmente en (2.53). Entonces, vemos que, $\theta(s)$ mide la rotación de $\mathbf{t}(s)$, cuando recorremos a la curva α desde 0 hasta l . Como se dijo antes, $\theta(s)$ es un múltiplo entero I de 2π ; es decir,

$$\int_0^l k_\alpha^2(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I \quad (2.54)$$

El entero I es llamado *Índice de rotación* de la curva α , y, podemos expresarlo según la ecuación (2.54) anterior como

$$I = \frac{\theta(l) - \theta(0)}{2\pi}.$$

Las gráficas siguientes, dadas en la figura (2.31) expresan como actúa I .

Observación: El índice de rotación cambia de signo cuando la curva cambia de orientación. Para curvas cerradas simples orientadas positivamente, éste se define positivo.

A continuación, enunciaremos el teorema de las *tangentes movibles*, sin demostración (puede encontrarse en [8]); su simplicidad puede no llevarnos a conclusiones a priori, pues, ponga el caso de una curva simple en forma de espiral de gran tamaño, y nuestra intuición de curvas en forma de óvalo, que podrían ser no simple, nos engañarían.

Teorema 2.4.4 *El Índice de rotación de una curva cerrada simple es ± 1 , donde el signo depende de la orientación de la curva.*

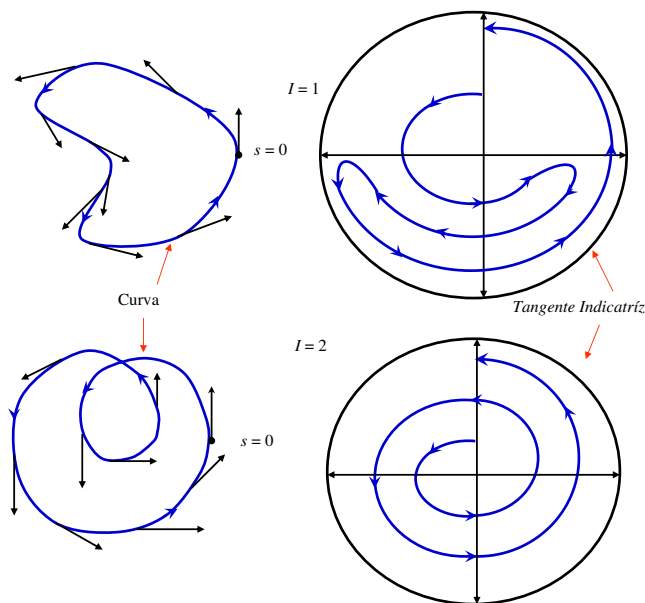


Figura 2.33: Acción de la *Tangente indicatriz* .

Una consecuencia que puede derivarse de este teorema es: Si $\alpha(s)$ es una curva plana regular cerrada simple, la imagen circular de $t: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es sobre . Pruébalo!

Ejemplo 2.4.1 Consider la curva cerrada simple dada en la figura ???. Las siguientes tablas dan los valores de θ por el nivel de los puntos; en consecuencia se tiene que $I = 1$ para esta curva cuando $\theta(V) = 2\pi$.

Puntos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	3π	$5\pi/2$	2π
Puntos	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
θ	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

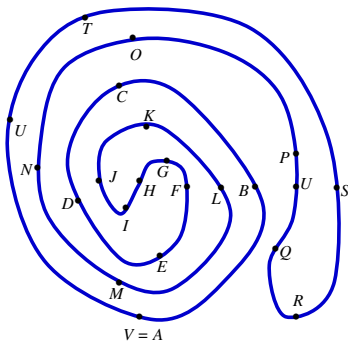


Figura 2.34: En esta curva $I = 1$ cuando $\theta(V) = 2\pi$

2.4.3. Teorema de los cuatro vértices

Antes de empezar con la demostración de este teorema, vamos a recordar que, k_α^2 es la notación para la curvatura de una curva plana con velocidad unitaria y, \widetilde{k}_α^2 será la notación para curva de rapidez arbitraria.

Definición 2.4.3 Una curva regular α (plana) es convexa si esta yace enteramente a un lado de cada recta tangente.

Las curvas de la figura 2.35, son convexas; no así las de la figura 2.36.

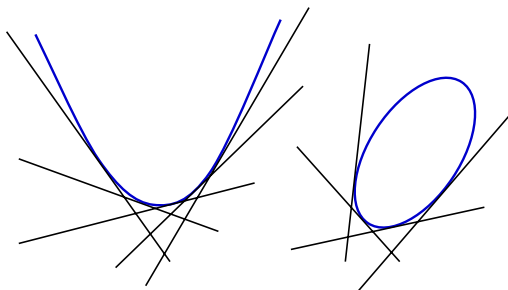


Figura 2.35: Curvas convexas.

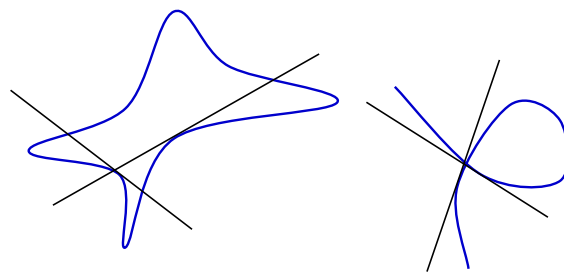


Figura 2.36: Curvas no convexas.

Teorema 2.4.5 Una curva plana regular cerrada simple α es convexa si y solo si \widetilde{k}_α^2 tiene signo constante.

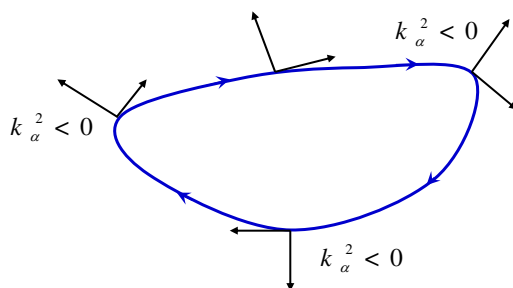


Figura 2.37: En curvas convexas k_α^2 no cambia de signo.

Definición 2.4.4 Un óvalo es una curva plana regular cerrada simple con \widetilde{k}_α^2 . Un óvalo es convexo ya que \widetilde{k}_α^2 no cambia de signo.

Definición 2.4.5 Un vértice de una curva plana regular es un punto donde \widetilde{k}_α^2 tiene un máximo o un mínimo relativo, es decir $\widetilde{k}_\alpha^{2'} = 0$.

Ejemplo 2.4.2 La elipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ tiene curvatura

$$\widetilde{k}_\alpha^2(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

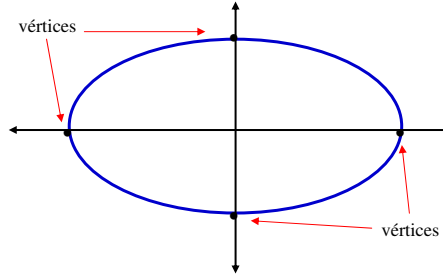


Figura 2.38: Vértices de la elipse para $\widetilde{k}_\alpha^2 = 0$.

Y $\widetilde{k}_\alpha^2 = 0$ sii $t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$; con lo que se tiene exactamente 4 vértices (en el sentido de curvatura), los cuales son los mismo vértices en el sentido cuadrático [ver figura 2.38].

Definición 2.4.6 Definamos $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicación lineal como

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1)$$

J es llamada la estructura compleja de \mathbb{R}^2 .

Geoméricamente, J es un giro de ángulo $\pi/2$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

Definición 2.4.7 Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, la curvatura \widetilde{k}_α^2 esta dada por

$$\widetilde{k}_\alpha^2 = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Probemos ahora que la definición de vértice no depende de la parametrización.

En efecto

Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizaciones de α , es decir $\beta = \alpha \circ h$ donde $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ diferenciable.

$\beta' = (\alpha' \circ h)h'$ y además $\beta'' = (\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h''$ así

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_\beta^2 &= \frac{\langle (\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h'', J(\alpha' \circ h)h' \rangle}{\|(\alpha' \circ h)h'\|^3} \\ &= \left(\frac{h'^3}{|h'|^3} \right) \frac{\langle (\alpha'' \circ h), J(\alpha' \circ h) \rangle}{\|(\alpha' \circ h)\|^3} \\ &= \text{Sig}(h') \widetilde{k}_\alpha^2(h(t)) \end{aligned}$$

por tanto $\widetilde{k}_\beta^2(t) = \text{Sig}(h') \widetilde{k}_\alpha^2(h(t))$, luego

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_\beta^2(t) = 0 &\iff \text{Sig}(h') \widetilde{k}_\alpha^2(h(t)) h'(t) = 0 \\ &\iff \widetilde{k}_\alpha^2(h(t)) = 0. \end{aligned}$$

Es obvio pensar que las definiciones hechas anteriormente son válidas para curvas de rapidez unitaria.

Lema 2.4.6 *Si l es una recta en \mathbb{R}^2 , entonces existen $a, c \in \mathbb{R}^2$, con $c \neq 0$ tal que $z \in l \Leftrightarrow \langle z - a, c \rangle = 0$*

Demostración: Sea l una línea recta, dada por $\alpha(t) = z_0 + tv$, con $v \in \mathbb{R}^2$.

Sea $z \in l$,

como $v \neq 0$, $v = (v_1, v_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle z - a, c \rangle &= \langle z_0 + tv - a, c \rangle \\ &= \langle z_0 + tv - z_0, c \rangle \\ &= \langle tv, c \rangle \\ &= t \langle (v_1, v_2), (-v_2, v_1) \rangle \\ &= t0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto se obtiene tomando como $a = z_0$ y $c = (-v_2, v_1) \neq 0$

Teorema 2.4.7 (de los cuatro vértices) *Un óvalo tiene por lo menos cuatro vértices.*

Demostración: Supongamos que α es de clase C^3 y parametrizada por longitud de arco s sabemos que $k_\alpha^2 = 0$ para cada vértice.

Si $\widetilde{k}_\alpha^2(t)$ es constante en cualquier segmento, entonces cada punto sobre ese segmento es un vértice y no habría nada que probar. Supongamos que α no tiene arcos circulares ni tampoco segmentos de recta, pues $\widetilde{k}_\alpha^2(t) > 0$.

Supongamos que existen por lo menos dos vértices digamos A y B en donde $\widetilde{k}_\alpha^2(t)$ alcanza máximo y mínimo absoluto.

Vamos a suponer que $A = \alpha(0)$ y demostraremos que la suposición de que existen únicamente estos dos vértices nos lleva a una contradicción, pues los vértices vienen en pares, con esto se demuestra el teorema.

Sea ℓ la línea recta que une A con B . Como hemos supuesto que existen exactamente dos vértices, entonces $k_\alpha^2 > 0$ en un segmento de α y $k_\alpha^2 < 0$ en el otro; como lo muestra la figura 2.39 abajo.

Por el lema anterior, existen constantes a y $c \neq 0$ tal que $z \in \ell \Leftrightarrow \langle z - a, c \rangle = 0$ como $\alpha(s)$ es un óvalo, entonces $k_\alpha^2 > 0$ y por tanto α es convexa y además ℓ interseca α por exactamente dos puntos (A y B). Por tanto $\langle \alpha(s) - a, c \rangle$ es positivo en un segmento de α y negativo en el otro. Un estudio por casos muestra que $k_\alpha^2(s) \langle \alpha(s) - a, c \rangle$ no cambia de signo en α (ver figura 2.39).

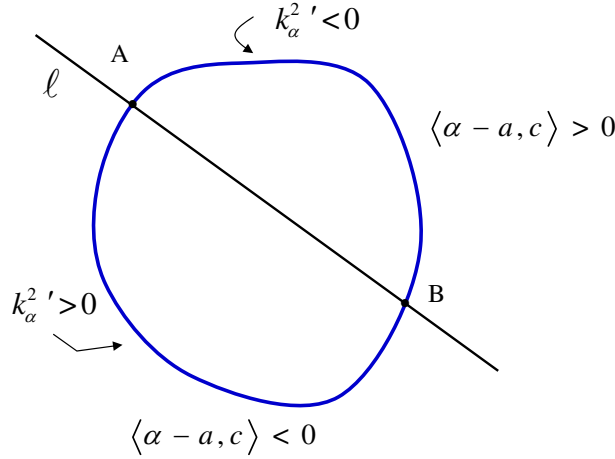


Figura 2.39: Los puntos A y B de intersección de α con la recta ℓ .

Por tanto $k_\alpha^2'(s)\langle \alpha(s) - a, c \rangle \neq 0$ para todos los valores de α diferentes de A y B , así

$$\begin{aligned}
 0 &\neq \int_0^l k_\alpha^2'(s)\langle \alpha(s) - a, c \rangle ds \\
 &= k_\alpha^2(s)\langle \alpha(s) - a, c \rangle \Big|_0^l - \int_0^l k_\alpha^2(s)\langle \alpha'(s), c \rangle ds \\
 &= - \int_0^l k_\alpha^2(s)\langle \alpha'(s), c \rangle ds \\
 &= \int_0^l \langle -k_\alpha^2(s)t(s), c \rangle ds \\
 &= \int_0^l \langle n'(s), c \rangle ds \\
 &= \langle n'(s), c \rangle \Big|_0^l \\
 &= 0 \quad (\rightarrow \leftarrow)
 \end{aligned}$$

esta contradicción implica que hay mas de dos vertices.

Pero como k_α^2' cambia de signo por cada vértice por donde pasa, así el numero de vertices debe ser par, por tanto existe por lo menos cuatro vertices.

Veamos ahora otra demostración de este mismo teorema en la cual se usa la técnica de reducción al absurdo.(Ver [1])

Teorema 2.4.8 [de los cuatro vertices] *Una curva cerrada, simple convexa en \mathbb{R}^2 tiene por lo menos 4-vertices.*

Demostración:

[La convexidad no es necesaria, sin embargo la prueba es más difícil en el caso general]

Sabemos que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene al menos 2 vértices y que $\widehat{k_\alpha^2} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Supongamos por reducción al absurdo que α tiene solamente 2 o 3 vertices digamos m_1, m_2 y m_3 . Ahora $\widehat{k_\alpha^2}'$, la derivada de la curvatura, solo puede cambiar de signo

por uno de los m_i ; así podemos suponer que esta es positiva desde m_1 a m_2 y negativa desde m_2 a m_3 y de m_3 a m_1 . Tomamos la recta $m_1 m_2$ como el eje x , y $\{e_1, e_2\}$ la base ortonormal asociada. [ver figura 2.40]

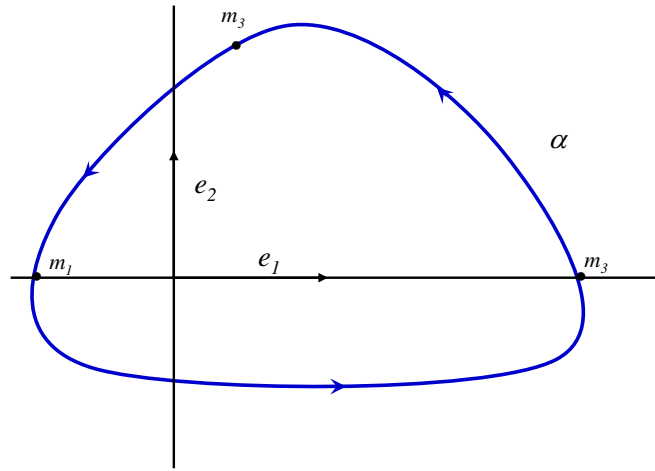


Figura 2.40:

Sea $\bar{\alpha}$ una parametrización de α por longitud de arco y periódica de periodo L , donde L es la longitud de α y sea k_α^2 la curvatura de $\bar{\alpha}$, sabemos que $k_\alpha^2 = \widetilde{k}_\alpha^2$. Introducimos, $t \rightarrow k_\alpha^2(t) \bar{\alpha}(t)$ la función a valores vectoriales y la integral vectorial

$$\int_0^L k_\alpha^2(t) \bar{\alpha}(t) dt$$

la cual puede ser integrada por partes como:

$$\begin{aligned} \int_0^L \widetilde{k}_\alpha^2(t) \bar{\alpha}(t) dt &= \left[\widetilde{k}_\alpha^2(t) \bar{\alpha}(t) \right]_0^L - \int_0^L \widetilde{k}_\alpha^2(t) \bar{\alpha}'(t) dt \\ &= - \int_0^L \widetilde{k}_\alpha^2(t) \bar{\alpha}'(t) dt \end{aligned}$$

ya que $\bar{\alpha}$ y k_α^2 son periódicas. Como $\|\bar{\alpha}\| = 1$ tenemos $\bar{\alpha}'(s) = t(s)$ y

$$\begin{aligned} (It)' &= It' \\ &= I\bar{\alpha}''(s) \\ &= Ik_\alpha^2(s)n(s) \\ &= k_\alpha^2(s)(-t(s)) \\ &= -k_\alpha^2(s)t(s) \end{aligned}$$

también sabemos que $n' = -k_\alpha^2(s)t(s)$ así $n' = (It)' = -k_\alpha^2(s)t(s)$ por lo tanto

$$- \int_0^L k_\alpha^2(t) \bar{\alpha}'(t) dt = \int_0^L It'(t) dt = I(t(L) - t(0)) = 0$$

en particular en la segunda componente $\int_0^L n_2'(t) dt = (n_2(L) - n_2(0)) = 0$

$$\left\langle \int_0^L k_\alpha^2(t) \bar{\alpha}(t) dt, e_2 \right\rangle = \int_0^L k_\alpha^2(t) \langle \bar{\alpha}(t), e_2 \rangle dt = \int_0^L n_2'(t) dt = 0$$

por la convexidad, parte de la curva entre m_1 y m_2 esta debajo del eje x y allí $k_\alpha^2 > 0$; así $\langle \bar{\alpha}, e_2 \rangle = \|\bar{\alpha}\| \cos \theta$ y como $\pi/2 < \theta < \pi$ entonces $\langle \bar{\alpha}, e_2 \rangle < 0$. Por tanto, $k_\alpha^2 \langle \bar{\alpha}, e_2 \rangle < 0$ desde m_1 a m_2 ; similarmente se prueba que $k_\alpha^2 \langle \bar{\alpha}, e_2 \rangle < 0$ desde m_2 a m_3 y desde m_3 a m_1 , con lo que se tiene

$$\int_0^L k_\alpha^2(t) \langle \bar{\alpha}(t), e_2 \rangle dt < 0 \quad (\rightarrow \leftarrow) \quad .$$

Corolario 2.4.9 *Sea \mathcal{C} una curva en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ imagen por un difeomorfismo de una curva cerrada simple D diferenciable. Entonces \mathcal{C} tiene cuatro puntos donde la torsión es cero.*

Demostración: La prueba se deja de ejercicio.

El teorema 2.4.8 es falso si omitimos la hipótesis de cerrado o de simple:

Ejemplo 2.4.3 *Considere la curva plana no simple en coordenadas polares, (r, ϕ) , dada por $r = 1 - 2 \text{sen} \phi$, cuyo gráfico se muestra abajo en la figura 2.41*

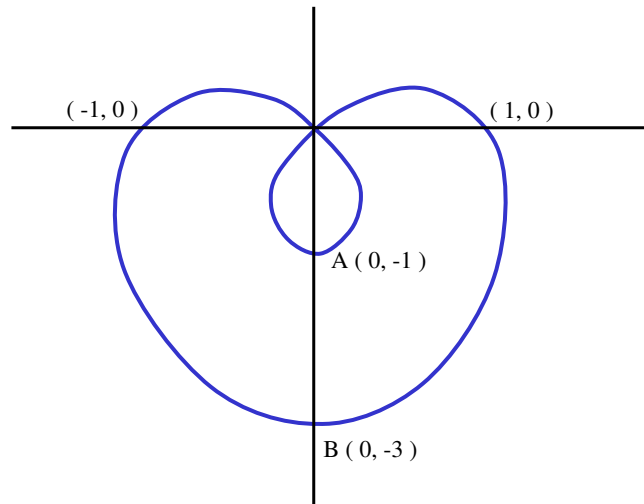


Figura 2.41: Curva no simple.

En coordenadas rectangulares esta curva es

$$\beta(\phi) = (\cos \phi - 2 \text{sen} \phi \cos \phi, \text{sen} \phi - 2 \text{sen}^2 \phi, 0).$$

Mostraremos que β tiene sólo dos vertices. Ya que el ángulo θ entre la horizontal y t crecen cuando ϕ crece, $\kappa > 0$ y por tanto $\kappa = k$. Al calcular κ se tiene que:

$$\kappa = (9 - 6 \text{sen} \phi)(5 - 4 \text{sen} \phi)^{-3/2} \Rightarrow \kappa' = \dot{\kappa} \frac{d\phi}{ds} = (24 \cos \phi - 12 \cos \phi \text{sen} \phi)(5 - 4 \text{sen} \phi)^{-5/2} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)$$

Luego $\kappa' = 0$ cuando $\phi = \pi/2$, $\phi = 3\pi/2$. así que β tiene solamente dos vertices, los cuales están marcados por A y B en la figura 2.41.

2.5. Ejercicios.

Ejercicio 2.1 Son dos ejercicios:

I. Calcule una curva parametrizada, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuya traza sea una circunferencia de radio uno y tal que $\alpha(t)$ recorra dicha circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj con $\alpha(0) = (0, 1)$.

II. La curva engendrada por un punto P de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por una recta fija se llama **cicloide**. Tomando dicha recta como el eje X , y como el parámetro t el ángulo central orientado \widehat{MCP} (C es el centro de la circunferencia, y M el punto de contacto con el eje), probar que la posición de P para cada t es

$$\alpha(t) = \begin{cases} \mathbf{x} = r t - r \operatorname{sen} t \\ \mathbf{y} = r t - r \operatorname{cos} t \end{cases} \quad (2.55)$$

Ejercicio 2.2 Sean $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas diferenciables, pruebe las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle &= \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} (\alpha(t) \wedge \beta(t)) &= \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \beta'(t) \end{aligned}$$

donde \wedge representa el producto vectorial en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 2.3 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más próximo al origen y $\alpha'(t_0)$, pruebe que $\alpha(t_0)$ y $\alpha'(t_0)$ son ortogonales. Demuéstrese que $|\alpha(t)|$ es constante si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo t .

Ejercicio 2.4 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva parametrizada tal que $\alpha''(t) = 0$, para todo $t \in I$. Pruebe que la traza de α está contenida en una recta.

Ejercicio 2.5 Pruebe que el segmento de recta que une dos puntos, distintos, de \mathbb{R}^3 es la curva más corta que conecta dichos puntos.

Ejercicio 2.6 Calcule una parametrización por el arco de una de una circunferencia de radio r

Ejercicio 2.7 Calcule una parametrización por el arco de una hélice circular.

Ejercicio 2.8 Dada la curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3),$$

pruebe que su recta tangente (en cualquiera de sus puntos) forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la recta de ecuaciones $y = 0, x = z$

Ejercicio 2.9 Se considera la curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), a e^{bt} \operatorname{sen}(t)), \quad a > 0, \quad b < 0$$

Pruebe que es una curva regular (espiral logarítmica) y calcule su función de longitud de arco desde $t = t_0$.

Ejercicio 2.10 (*Tractrix*) Se considera la curva la curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t) + \log(\tan(t/2))),$$

Estudie la regularidad de α . Pruebe también que el segmento de recta tangente entre el punto de tangencia y el punto de corte con el eje de las ordenadas es constante.

Ejercicio 2.11 (*Una extensión del ejercicio 3*) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva diferenciable. Supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que

$$|\alpha(t) - p| \geq |\alpha(t_0) - p|, \quad \forall t \in I,$$

donde p es un punto fijo de \mathbb{R}^3 . Pruebe que la recta tangente a α en t_0 y la recta que une a $\alpha(t_0)$ con p son ortogonales.

Nota: En este ejercicio el signo \geq se puede cambiar por el signo \leq .

Ejercicio 2.12 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva regular y L una recta del plano \mathbb{R}^2 . Supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que

$$\text{Distancia}(\alpha(t), L) \geq \text{Distancia}(\alpha(t_0), L), \quad \forall t \in I.$$

Pruebe que la recta tangente a α en $t = t_0$ es paralela a L .

Ejercicio 2.13 (*Una extensión del Teorema de Rolle*) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva regular y $[a, b] \subset I$ con $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Pruebe que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que la recta tangente a α en t_0 es paralela a la recta que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$.

Ejercicio 2.14 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva p.p.a. tal que todas sus rectas tangentes son concurrentes (pasan todas por un mismo punto fijo). Pruebe que α es un segmento de recta.

Nota: Es obvio que el recíproco es cierto.

Ejercicio 2.15 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva p.p.a. tal que todas sus rectas normales pasan por un punto fijo, p . Pruebe que $\alpha(I)$ es un arco de circunferencia con centro el punto p .

Nota: Es obvio que el recíproco es cierto.

Ejercicio 2.16 Pruebe que una curva, plana y p.p.a., es un segmento de recta o un arco de circunferencia, si y sólo si, todas sus rectas tangentes equidistan de un punto fijo.

Ejercicio 2.17 Calcule una parametrización de una circunferencia que tenga aceleración tangencial.

Ejercicio 2.18 Pruebe que la curva imagen, por un movimiento del espacio, de una que esté parametrizada por el arco, también está parametrizada por el arco.

Ejercicio 2.19 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por su arco en el plano de ecuación $z = 0$. Se considera la curva en \mathbb{R}^3 definida por

$$\beta(s) = \alpha(as) + (bs)e_3,$$

donde $e_3 = (0, 0, 1)$ y a, b constantes. Estudie la regularidad y la presunta parametrización por el arco de esta familia de curvas según los valores de los parámetros a y b .

Ejercicio 2.20 Pruebe que todas las curvas del ejercicio anterior forman un ángulo constante con el vector e_3 .

Nota: El ángulo anterior se refiere al que forma la recta tangente a la curva.

Ejercicio 2.21 Se considera la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (t^3, 0, 0),$$

Estudie su regularidad y su traza.

Ejercicio 2.22 Se considera la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (t^3 + t, 0, 0),$$

estudie su regularidad y su traza.

Ejercicio 2.23 Se considera la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (t^3, t^3, t^3),$$

estudie su regularidad y su traza

Ejercicio 2.24 Se considera la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (t^3 + t, t^3 + t, 0),$$

estudie su regularidad y su traza

Ejercicio 2.25 Se considera la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (\text{sen}(3t) \cos(t), \text{sen}(3t) \text{sen}(t), 0).$$

Pruebe que es regular y calcule sus rectas tangente y normal en $t = \frac{\pi}{3}$

Ejercicio 2.26 Estudie los dominios de regularidad de las siguientes curvas

1. $\alpha(t) = (\cos(t), 1 - \text{sen}(t) - \cos(t), -\text{sen}(t)),$
2. $\alpha(t) = (2 \text{sen}^2(t), 2 \text{sen}^2(t) \tan(t), 0),$

$$3. \alpha(t) = (\cos(t), \cos^2(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Ejercicio 2.27 Se define la aplicación $\phi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) = \tan\left(\frac{t\pi}{2}\right),$$

¿Es un difeomorfismo?

Ejercicio 2.28 Se define la aplicación $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ por

$$\phi(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1},$$

¿Es un difeomorfismo?

Ejercicio 2.29 Calcule la curvatura de una recta

Ejercicio 2.30 Calcule la curvatura de una circunferencia de radio r .

Ejercicio 2.31 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva plana, parametrizada por su arco (p.p.a) y tal que su curvatura es constante. Pruebe que su traza es un segmento de recta o un arco de circunferencia.

Ejercicio 2.32 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva parametrizada (no necesariamente por su arco). Pruebe que su función curvatura está dada por

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \det(\alpha'(t), \alpha''(t)).$$

Ejercicio 2.33 Sean $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos curvas planas p.p.a y tales que sus curvaturas verifican, $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\beta(s)$ para todo $s \in I$. Pruebe que existe un movimiento rígido inverso, M , tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Ejercicio 2.34 Sea $\alpha : (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. Se define otra por

$$\beta : (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(s) = \alpha(-s), \quad \forall s \in (-a, a).$$

Pruebe que β está p.p.a y que $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$, $\forall s \in (-a, a)$.

Ejercicio 2.35 Sea $\alpha : (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(-s)$, $\forall s \in (-a, a)$. Pruebe que la traza de α es simétrica respecto de la recta normal de α en $s = 0$

Ejercicio 2.36 Sea $\alpha : (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a con $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$, $\forall s \in (-a, a)$. Pruebe que la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

Ejercicio 2.37 Mostrar que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la curvatura en t de la curva plana $\pi \circ \alpha$, donde π es la proyección ortogonal de α sobre el plano osculador en t .

Ejercicio 2.38 Hallar la función $f(t)$ -más general posible- tal que la curva $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), f(t))$ sea plana.

Ejercicio 2.39 Calcule la función de curvatura de una elipse con semi-ejes distintos.

Ejercicio 2.40 Estudie la regularidad y calcule las funciones de curvatura de las siguientes curvas.

$$1. \alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(t) = a(\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t)).$$

$$2. \alpha_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(t) = (c \cosh\left(\frac{t}{c}\right), t).$$

$$3. \alpha_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_3(t) = a(\cos^3(t), \sin^3(t)).$$

$$4. \alpha_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_4(t) = (t, t^2).$$

Nota: a y c son números reales distintos de cero

Ejercicio 2.41 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, parametrizada por su arco (p.p.a.). Se define la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle,$$

que mide la distancia orientada del punto $\alpha(s)$ a la recta tangente de α en s_0 . Pruebe que

$$f(s_0) = 0, \quad f'(s_0) = 0, \quad f''(s_0) = \kappa(s_0).$$

Ejercicio 2.42 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva p.p.a. y $s_0 \in I$ con $\kappa(s_0) > 0$. Sea $a_r = \alpha(s_0) + rN(s_0)$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, un punto de la recta normal a α en s_0 . Definimos la función $f_r : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_r(s) = |\alpha(s) - a_r|^2,$$

la cual mide la distancia al cuadrado de los puntos de la curva al punto a_r . Pruebe que

$$f_r(s_0) = r^2, \quad f_r'(s_0) = 0, \quad f_r''(s_0) = 2(1 - r \kappa(s_0)).$$

Ejercicio 2.43 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva p.p.a. y $s_0 \in I$ tal que $\kappa(s_0) > 0$. Pruebe que existe un entorno $I_0 = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ de s_0 en I de manera que $\alpha(I_0)$ está contenido en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$. ¿Es cierto el recíproco?.

Ejercicio 2.44 Estudie el ejercicio anterior en el caso de que la curvatura en s_0 sea negativa.

Ejercicio 2.45 Calcule los elementos de Frenet, curvatura y torsión de una curva en \mathbb{R}^2 en una parametrización arbitraria, no necesariamente por el arco.

Ejercicio 2.46 Pruebe que una curva tiene curvatura y torsión constantes, si y sólo si, es una hélice circular, (incluidas las rectas y las circunferencias).

Ejercicio 2.47 Sean $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dos curvas, p.p.a., que tienen idéntica curvatura (positiva) y torsiones opuestas. Pruebe que existe un movimiento rígido inverso, $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $\beta = M \circ \alpha$

Ejercicio 2.48 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(\theta) = (-\cos(2\theta), 2\cos(\theta), \sin(2\theta))$. Pruebe que su traza está en una esfera de centro el punto $(-1, 0, 0)$

Ejercicio 2.49 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. y con curvatura positiva. Pruebe que su traza es un arco de circunferencia, si y sólo si, tiene curvatura constante y su traza está contenida en una esfera.

Ejercicio 2.50 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. cuya traza está contenida en una esfera. Supongamos que todas sus rectas binormales son tangentes a dicha esfera. Pruebe entonces que su traza es un arco de circunferencia máxima.

Ejercicio 2.51 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura positiva. Pruebe que todos sus planos osculadores son concurrentes si y sólo si la curva es plana.

Ejercicio 2.52 Si todas las normales de una curva pasan por un punto fijo, prueba que la traza de la misma es un arco de circunferencia.

Ejercicio 2.53 Se considera la curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (e^t, \cos(t), 3t^2).$$

Calcule su triedro de Frenet, su curvatura y su torsión.

Ejercicio 2.54 Mostrar que si $\tau(s) \neq 0$ para todo s , para cierta curva α , entonces $\mathbf{n}(s)$ determina la curvatura $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ de esa curva.

Ejercicio 2.55 Dada una curva plana en coordenadas polares mediante la ecuación

$$\rho = \rho(\theta) \quad , \quad a \leq \theta \leq b$$

a) Mostrar que la longitud de arco es $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$, donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$.

b) Mostrar que la curvatura es $\kappa(s) = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$

Probar que si para $\theta = \theta_0$ la función $\rho(\theta)$ tiene un máximo, entonces el valor absoluto de la curvatura en ese punto es mayor o igual que $1/\rho(\theta_0)$.

Ejercicio 2.56 Pruebe que una curva p.p.a. es una hélice si y sólo si la imagen de su indicatriz tangente es un arco de circunferencia en la esfera de radio uno.

Ejercicio 2.57 Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\beta(t) = (at, bt^2, t^3)$. Calcule los valores de a y b para los que la curva anterior es una hélice y calcule en su caso el eje de la misma.

Ejercicio 2.58 Pruebe que si la imagen de la indicatriz esférica de una curva está contenida en una circunferencia máxima, entonces la curva debe de ser plana

Ejercicio 2.59 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva p.p.a. con curvatura positiva. Supongamos que su traza está contenida en una esfera y que su torsión es constante, $\tau = a$. Pruebe que existen constantes b y c tales que

$$\kappa(s) = \frac{1}{b \cos(a^2s) + c \operatorname{sen}(a^2s)}$$

Ejercicio 2.60 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva p.p.a. con curvatura positiva y tal que $\kappa'(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Pruebe que su traza está contenida en una esfera de radio $r > 0$ si y sólo si se verifica

$$\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2} = r^2$$

Ejercicio 2.61 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva. Pruebe que existe una curva $\omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las ecuaciones de Frenet de α se pueden escribir de la siguiente forma

$$t's = \omega(s) \wedge t(s), \quad n'(s) = \omega(s) \wedge n(s), \quad b'(s) = \omega(s) \wedge b(s),$$

a $\omega(s)$ se le llama la velocidad angular de α en s . Pruebe además que la velocidad angular es constante si y sólo si la curva es una hélice circular.

Ejercicio 2.62 Calcule los elementos de Frenet de las siguientes curvas:

1. $\alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha_1(t) = (t, t^2, t^3)$. para $t > 0$
2. $\alpha_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha_2(t) = (\cosh(t), \operatorname{sen} h(t), t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. $\alpha_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha_3(t) = (t - \cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
4. $\alpha_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha_4(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t), e^t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.63 Calcule la relación existente entre la curvatura de una hélice (general) y la de la curva que se obtiene al proyectarla sobre un plano ortogonal a su eje

Ejercicio 2.64 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva p.p.a., con curvatura y torsión positivas. Se define la curva

$$\beta(s) = \int_{s_0}^s b(u) du.$$

Pruebe que β está p.p.a. y calcule sus curvaturas.

Ejercicio 2.65 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a., con curvatura positiva y contenida en una esfera de radio $r > 0$. Pruebe que $\kappa'(s_0) = 0$ si y sólo si $\kappa(s_0) = \frac{1}{r}$ o $\tau(s_0) = 0$.

Ejercicio 2.66 Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a., con curvatura $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Sea $n(s)$ el vector normal. La curva

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s), \quad s \in I$$

es la evoluta de α (lugar geométricos de los centros de curvatura)

- a) Demuestre que la recta tangente en s de la evoluta de α es recta normal a α en s .
- b) Demuéstrese que el punto de intersección de las rectas normales a α en $\alpha(s)$ y $\alpha(s + \Delta s)$ convergen a un punto de la evoluta de α cuando $\Delta s \rightarrow 0$.

Ejercicio 2.67 Determinar curvas p.p.a. definidas en $(-1, 1)$ que tengan respectivamente como curvaturas $\kappa(t) = k$ (constante) y $\kappa(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, consiguiendo además que pasen por el origen para $t = 0$ y tengan en ese punto, $y = 0$ por recta tangente.

Ejercicio 2.68 Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demostrar que la curvatura en un punto de la curva $C = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ viene dada por

$$-\frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{(\sqrt{F_x^2 + F_y^2})^3}$$

Determinar los puntos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ que tiene (en valor absoluto) mayor curvatura. ¿Cuánto vale esta curvatura?

Ejercicio 2.69 Sea α una curva p.p.a. birregular. A partir de ella se construye T , la curva con valores en la esfera de centro 0 y radio 1, dada por su tangente unitaria (nótese que la curva T ya no es necesariamente p.p.a.). Se pide probar que las fórmulas de κ_T y τ_T están dadas por

$$\kappa_T = \sqrt{1 + q^2} \quad , \quad \tau_T = \frac{q'}{\kappa(\sqrt{1 + q^2})}$$

siendo $q = \tau / \kappa$, el cociente de la curvatura y la torsión de α .

Ejercicio 2.70 Sea α una curva birregular cuya traza está sobre una esfera de radio r . Pruébese que su curvatura cumple con $\kappa \geq 1/r$.

Ejercicio 2.71 Demostrar que la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ es birregular, y determinar para $t = 1$ el triedro de Frenet y las ecuaciones de los planos (afines) osculador, normal y rectificante. Demostrar que este plano osculador es límite del plano que pasa por $\alpha(1-t)$, $\alpha(1)$, $\alpha(1+t)$ cuando $t \rightarrow 0$.

Ejercicio 2.72 Considérese la aplicación:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Probar que α es una curva regular diferenciable, ¿Es birregular?. Probar que su torsión es cero, pero sin embargo la curva no es plana.

Ejercicio 2.73 Cualquier curva cerrada plana α admite una parametrización por longitud de arco periódica.

Ejercicio 2.74 Sea α una curva plana cerrada simple con curvatura no nula. Suponga que α' es otra curva que satisface la misma propiedades de α , y suponga que, para cualquier par de puntos $m \in \alpha$, $m' \in \alpha'$, existe un movimiento rígido f tal que $f(m') = m$, $f(\mathbf{t}_{m'}) = \mathbf{t}_m$ y $f(m') \subset \bar{C}$. Pruebe que

$$\text{long}(\alpha) \text{long}(\alpha') \leq 2\pi (\text{area}(\text{int}(\alpha)) \text{area}(\text{int}(\alpha')))$$

Ejercicio 2.75 Si $\alpha(s)$ es un óvalo, pruebe que $\mathbf{t}''(s)$ es paralelo a \mathbf{t} en por lo menos cuatro puntos.

Ejercicio 2.76 Probar que el concepto de vértice no depende de la parametrización .

Ejercicio 2.77 El teorema de cuatro vértice es falso si la hipótesis de cerrado es omitida; utilice para ello la parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$.

“La Matemática, vista correctamente, posee no solamente verdad sino también extrema belleza, una belleza fría y austera como la de una escultura, sin apelar a ninguna parte de nuestra naturaleza más débil, sin los aspectos más hermosos de la pintura o la música, pero sin embargo, sublimemente pura y capaz de una perfección rígida como solo puede mostrar el arte más grande”.

Bertrand Russell

En este capítulo, iniciamos el estudio de Superficies que en un contexto más general, son variedades de dimensión 2; es decir, un subconjunto M de puntos de \mathbb{R}^3 , que tiene la propiedad de que cada $p \in M$, tiene un entorno difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Esto por supuesto, lleva implícito, la existencia en cada $p \in M$, de aplicaciones $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_\alpha \cap M \subset \mathbb{R}^3$, que serán homeomorfismos diferenciables de orden 2 llamados parametrizaciones o cartas. Con esto, lo que se quiere es tratar de dotar a M de una estructura diferenciable y considerarla, intrínsecamente, como un nuevo conjunto, en el cual, se pueda definir aplicaciones diferenciables, que permitan calcular sobre ella o dentro de ella, longitudes, áreas, ángulos entre vectores tangentes, etc., en fin, tener la geometría diferencial intrínseca sobre M , aislada del espacio \mathbb{R}^3 sobre la cual está inmersa.

3.1. Superficies Regulares.

Definición 3.1.1 $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie si:

(a) $M = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha$, donde V_α es abierto en \mathbb{R}^3

(b) Para cada α , existe $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^3$, con \mathcal{U}_α abierto en \mathbb{R}^2 y φ_α es un homeomorfismo diferenciable de orden 2.

En esta definición [Ver [5]], diferenciable de orden 2 significa que φ_α es de clase C^∞ y $d_{(x,y)}\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal de orden 2, para todo $(x, y) \in \mathcal{U}_\alpha$. Los φ_α son llamados parametrizaciones o cartas; los φ_α^{-1} sistemas de coordenadas y los V_α vecindades coordenadas.

Otra definición (la que vamos a utilizar) es la siguiente:

Definición 3.1.2 $M \subset \mathbb{R}^3$ es superficie regular, si para cada $p \in M$ existe una vecindad V_α de \mathbb{R}^3 y una aplicación $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_\alpha \cap M \subset \mathbb{R}^3$, tal que:

(i) φ_α es diferenciable para cada α ; es decir, si

$\varphi_\alpha(x, y) = (\varphi_{1\alpha}(x, y), \varphi_{2\alpha}(x, y), \varphi_{3\alpha}(x, y))$, entonces las funciones componentes

$\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha}, \varphi_{3\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas de todo orden en el abierto $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) φ_α homeomorfismo es equivalente a φ_α continua con inversa $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \cap M \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$ continua. En este caso φ_α^{-1} es la restricción de una función $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua sobre un abierto W de \mathbb{R}^3 tal que $W \supset V_\alpha \cap M$.

(iii) (**Condición de Regularidad**) Para cada $q \in \mathcal{U}_\alpha$, la diferencial $d_q \varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es 1-1: esto es, considerando las bases canónicas $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 y $\{f_1, f_2, f_3\}$ de \mathbb{R}^3 con coordenadas (u, v) y (x, y, z) , respectivamente; siendo $q_0 = (u_0, v_0)$, se tiene que e_1 es tangente a la curva $\beta : u \mapsto (u, v_0)$ [$\beta'(u) = e_1$], cuya imagen por φ_α es la curva $\varphi_\alpha \circ \beta : u \rightarrow (\varphi_{1\alpha}(u, v_0), \varphi_{2\alpha}(u, v_0), \varphi_{3\alpha}(u, v_0))$ como lo muestra la figura 3.1.

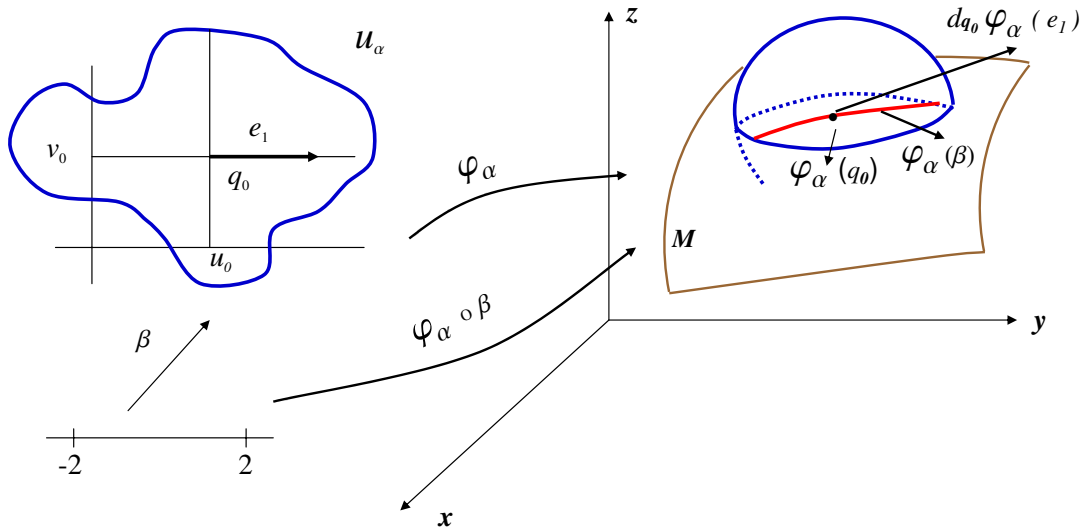


Figura 3.1: La diferencial de φ_α a lo largo de e_1 .

La curva imagen $\varphi_\alpha \circ \beta$ (llamada curva coordenada $v = v_0$) cae en M y tiene por $\varphi_\alpha(q_0)$ el vector tangente

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}(q_0) = \left(\frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial u}(q_0), \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial u}(q_0), \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial u}(q_0) \right); \text{ es decir,}$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}(q_0) = d_{q_0} \varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y es tal que

$$\begin{aligned} d_{q_0} \varphi_\alpha(e_1) &= \frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial u}(q_0) f_1 + \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial u}(q_0) f_2 + \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial u}(q_0) f_3 \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial u}(q_0), \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial u}(q_0), \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial u}(q_0) \right). \end{aligned}$$

Similarmente, usando la curva coordenada $u = u_0$, $\varphi_\alpha \circ \lambda$ (imagen por φ_α de la curva $\lambda : v \mapsto (u_0, v)$ con $(\lambda'(v) = e_2)$), obtenemos el vector,

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial v}(q_0) = d_{q_0} \varphi_\alpha(e_2) = \left(\frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial v}(q_0), \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial v}(q_0), \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial v}(q_0) \right);$$

el cual se muestra en la figura abajo.

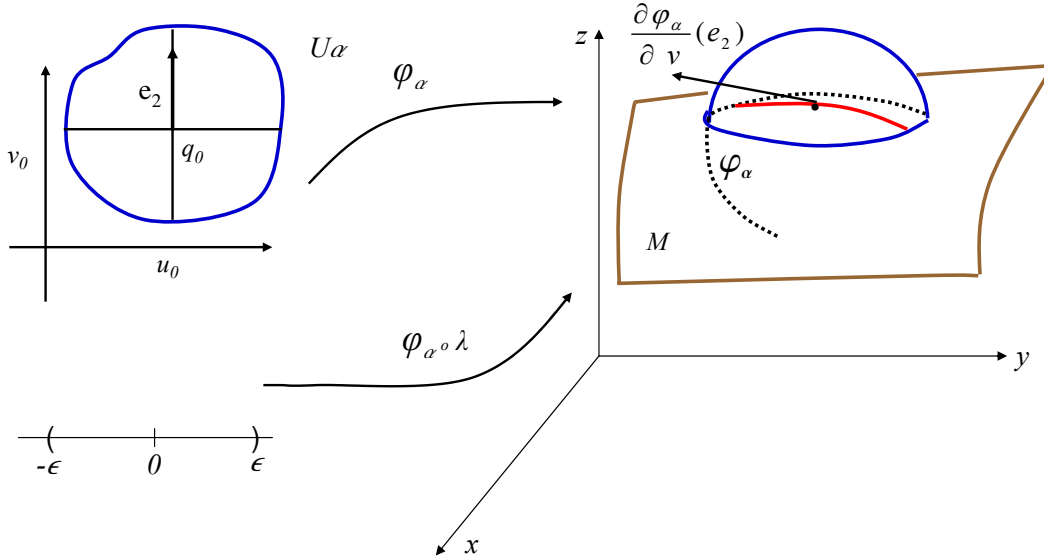


Figura 3.2: La diferencial de φ_α a lo largo de e_2 .

Luego, la matriz de la aplicación lineal [apéndice [A2]] $d_{q_0} \varphi_\alpha$ en las bases referidas es:

$$d_{q_0} \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial v}(q_0) \\ \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial v}(q_0) \\ \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial v}(q_0) \end{pmatrix}$$

Así que, $d_{q_0} \varphi_\alpha$ 1-1, significa que $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}(q_0) \times \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial v}(q_0) \neq \hat{0}$ o equivalentemente a que uno de los menores de orden 2 de la matriz $d_{q_0} \varphi_\alpha$, es no nulo; es decir, uno de los determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_{1\alpha}}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_{2\alpha}}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{3\alpha})}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varphi_{2\alpha}, \varphi_{3\alpha})}{\partial(u, v)},$$

sea no nulo por q_0 .

Nótese que esto último, nos permite definir el plano tangente en cada punto de la superficie M sin autointersecciones; así como hacer buenas definiciones en las que la independencia de las parametrizaciones es clave.

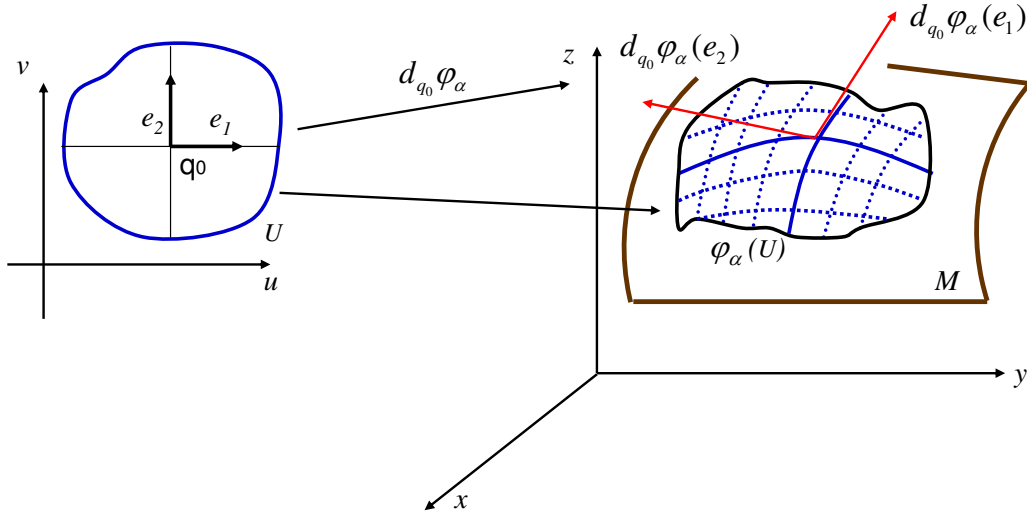


Figura 3.3: La diferencial $d_{q_0} \varphi_\alpha$ a lo largo de e_1 .

Tipos de superficies locales:

3.2. Gráficas.

Cada conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ y cada $f \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ da una superficie regular en \mathbb{R}^3 via su gráfica.

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Pues, basta definir $\varphi_\alpha(u, v) = (u, v, f(u, v))$, con $(u, v) \in \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}$, y ver que las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición (3.1.2) de superficie se cumplen. Podemos aquí demostrar que la esfera unitaria $S^{(2)}$ es superficie regular:

Nótese que el hemisferio norte $S_+^{(2)} = \{(x, y, z) \in S^{(2)} : z > 0\}$ se puede describir con la aplicación $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre el abierto $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. En este caso, la parametrización φ_α , viene dada por:

$\varphi_\alpha(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ con $(u, v) \in \mathcal{U}_\alpha = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$. Aquí, todas las componentes de φ_α son de clase C^∞ . Además, para $q \in \mathcal{U}_\alpha$, resulta que:

$$d_{q_0} \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix};$$

de lo cual el primer menor $\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})}{\partial(u, v)} \neq 0$. Por tanto, φ_α es regular. Por otra parte $\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$ está dada por:

$$\varphi_\alpha^{-1}(x, y, z) = \pi(x, y, z) = (x, y)$$

donde π es la proyección en las dos primeras componentes, claramente continua; esto hace a φ_α un homeomorfismo. Luego φ_α es una parametrización de $S^{(2)}$ que cubre a S_+^2 . Ahora, de manera similar, $\varphi_{\alpha_1} : \mathcal{U}_{\alpha_1} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi_{\alpha_1}(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ con $\mathcal{U}_{\alpha_1} = \mathcal{U}$, es una parametrización de $S^{(2)}$ que cubre el hemisferio sur

$$S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}.$$

Pero $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cup \varphi_{\alpha_1}(\mathcal{U}_{\alpha_1})$ cubren a $S^{(2)}$ excepto al ecuador $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Para terminar de cubrir a $S^{(2)}$, usamos los planos XZ y YZ , definimos las parametrizaciones.

$$\varphi_{\alpha_2}(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), (u, v) \in \mathcal{U}_{\alpha_2} = \mathcal{U}$$

$$\varphi_{\alpha_3}(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), (u, v) \in \mathcal{U}_{\alpha_3} = \mathcal{U}$$

$$\varphi_{\alpha_4}(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), (u, v) \in \mathcal{U}_{\alpha_4} = \mathcal{U}$$

$$\varphi_{\alpha_5}(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), (u, v) \in \mathcal{U}_{\alpha_5} = \mathcal{U}$$

Todo lo anterior muestra que $S^{(2)}$ es una superficie regular. Otra forma de ver que $S^{(2)}$ es superficie regular, es, utilizando coordenadas esféricas:

Sean $\mathcal{U}_\alpha = \{(\theta, \beta); 0 < \theta < \pi, 0 < \beta < 2\pi\}$ y $\varphi_\alpha(\theta, \beta) = (\sin \theta \cos \beta, \sin \theta \sin \beta, \cos \theta)$, lo cual se deduce de la gráfica 3.4. Claramente $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset S^{(2)}$. Se puede verificar que φ_α

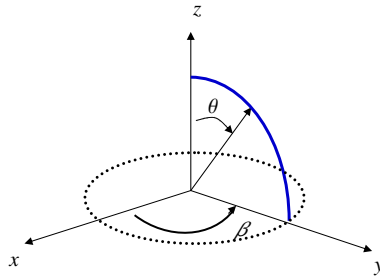


Figura 3.4: Coordenadas esféricas para parametrizar $S^{(2)}$.

es una parametrización de $S^{(2)}$. A θ se le llama colatitud (complemento de la latitud) y a β la longitud. Aquí $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ solamente omite un semicírculo de $S^{(2)}$ (incluyendo los dos polos) y que puede ser cubierta con las vecindades coordenadas de dos parametrizaciones de este tipo.

Otro ejemplo, viene en términos de las cuádricas, que pueden ser escritas, algunas de ellas, como gráficas de una función diferenciable de dos variables: el paraboloides elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el paraboloides hiperbólico $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; también podemos considerar las cuádricas impropias $z = ax^2$. En cada caso el $\mathcal{U}_\alpha = \mathbb{R}^2$.

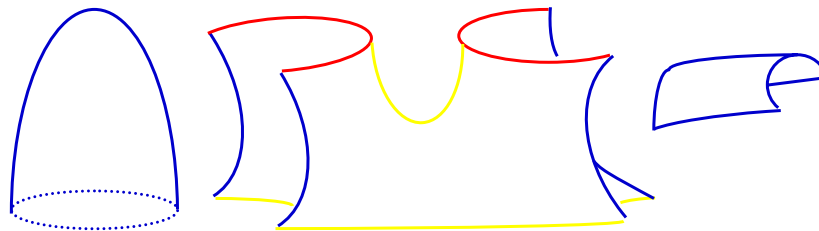


Figura 3.5: Superficies cúbicas.

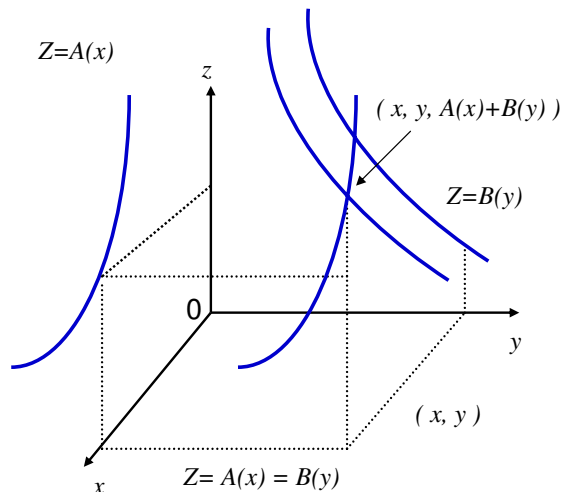


Figura 3.6: Superficie de traslación en dos formas.

3.3. Superficie de Traslación:

Considere el gráfico de $z = f(x, y) = A(x) + B(y)$ esta es una superficie de traslación en dos formas: con respecto a "x" y con respecto a "y" (ver figuras 3.6 y 3.7) Tal superficie puede ser escrita en la forma

$$z = \frac{A(x) + B(y)}{2};$$

es decir, el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos, cuyos puntos finales describen dos curvas fijas: Si A y B están definidas en todo \mathbb{R} la superficie está definida en todo \mathbb{R}^2 .

3.4. Superficies definidas implícitamente(de nivel).

Definición 3.4.1 Dada una aplicación diferenciable $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida sobre un conjunto abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , decimos que $p \in \mathcal{U}$ es un punto crítico de F , si la diferencial $d_p F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no es sobreyectiva(o sobre). La imagen $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico es llamado un valor crítico de F . Un punto de \mathbb{R}^m el cual no es un valor crítico es llamado un valor regular de F .

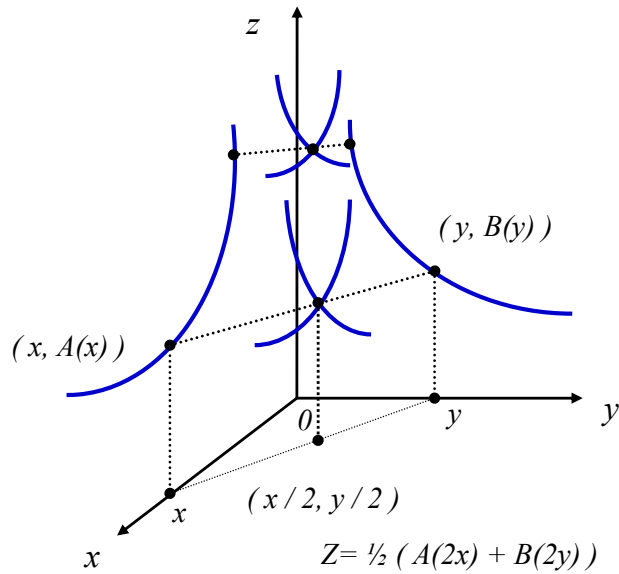


Figura 3.7: Superficie de traslación en dos formas.

La terminología utilizada en la definición, se motiva por el caso dado para, $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función real: un punto $x_0 \in \mathcal{U}$ es crítico si $f'(x_0) = 0$; esto es, si la diferencial $d_{x_0}f$ lleva todos los vectores de \mathbb{R} al cero (ver figura 3.8). Nótese que cualquier punto $a \ni f(\mathcal{U})$ es trivialmente un valor regular. Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces $d_p f$ aplicada

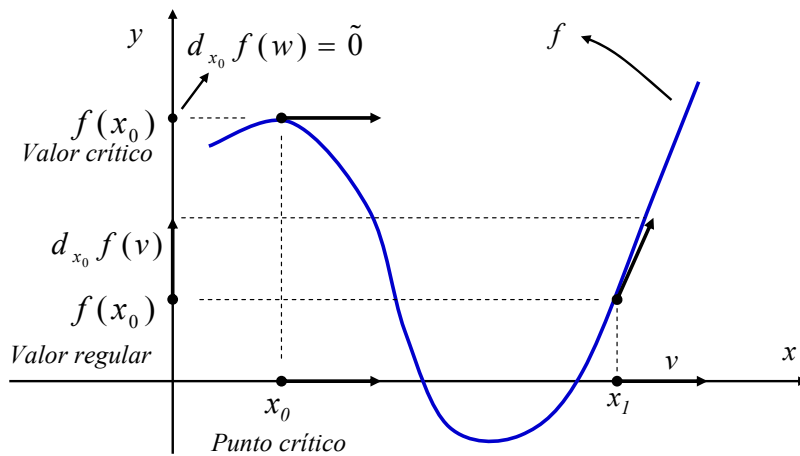


Figura 3.8: Punto crítico, valor crítico y valor regular de f .

al vector $(1, 0, 0)$, se obtiene por calcular el vector a $f(p)$ por la curva $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$. Se sigue que:

$$d_p f(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x.$$

Y análogamente se tiene que:

$$d_p f(0, 1, 0) = f_y, \quad d_p f(0, 0, 1) = f_z.$$

Así, la matriz de $d_p f$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 es dada por

$$d_p f = (f_x, f_y, f_z).$$

En este contexto, decir que $d_p f$ no es sobreyectiva, es equivalente a que $f_x = f_y = f_z = 0$ por p . Por tanto, $a \in f(\mathcal{U})$ es un valor regular de $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si f_x, f_y y f_z no son nulas, simultáneamente, por cualquier punto en la imagen inversa.

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = a\}$$

Proposición 3.4.1 Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in f(\mathcal{U})$ es un valor regular de f entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Demostración: Si p es un punto de $f^{-1}(a)$, hemos de encontrar una carta propia que cubra una vecindad de p en $f^{-1}(a)$.

Ahora bien,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Por tanto, la hipótesis referente a df , equivale a suponer que, por lo menos, una de estas derivadas parciales no vale cero en p , y podemos suponer que $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(p) \neq 0$, en este caso el teorema de la Función Implícita nos dice que, en las inmediaciones de p , la ecuación $f(x, y, z) = a$, se puede resolver para z . Con mas precisión: existe una función diferenciable de valores reales h , definida en una vecindad D de (p_1, p_2) tal que

1. Para cada punto $(u, v) \in D$, el punto $(u, v, h(u, v))$ está en $f^{-1}(a)$, es decir, que $f(u, v, h(u, v)) = a$.

2. Los puntos de la forma $(u, v, h(u, v))$ en los que (u, v) está en D , llenan una vecindad de p en M .

De esto se desprende inmediatamente que la carta $\varphi_\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi_\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

es una parametrización sobre p . Puesto que p es cualquier punto de $f^{-1}(a)$, concluimos que $f^{-1}(a)$ es superficie regular.

Observación: Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, es posible que se tenga:

- a) $f^{-1}(a)$ sea una superficie regular.
- b) Sin embargo a no es valor regular.

Para ilustrar lo anterior, considere la siguiente aplicación:

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z^3 - e^{\frac{-1}{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, z) \\ z^3 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, z) \end{cases} \quad (3.1)$$

Consideremos

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$$

Es decir,

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \\ z = e^{\frac{-1}{x^2 + y^2}} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ z = 0 \quad \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

O sea es el gráfico de la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) = z \end{aligned}$$

la cual es una función que admite derivadas parciales de todos ordenes, luego S es una superficie regular.

Pero en $(0, 0, 0)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0;$$

esto implica que $(0, 0, 0)$ no es una valor regular de f . Sin embargo $f^{-1}(0, 0, 0) = S$, es superficie regular.

Ejemplo 3.4.1 Las cuádricas impropias(cilindros hiperbólicos y elípticos) definidos por

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

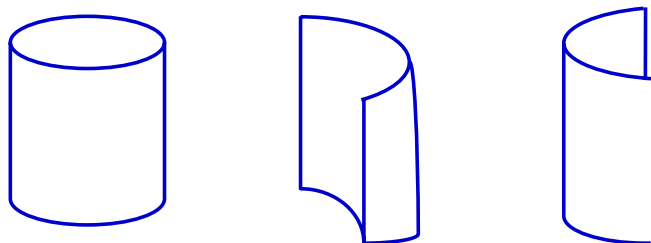


Figura 3.9: Cuádricas impropias como superficies implícitas .

Ejemplo 3.4.2 Los Planos. Su ecuación general es

$$ax + by + cz = d$$

Ejemplo 3.4.3 Las cuádricas propias. Aparte de los paraboloides, estas son las siguientes:

$$\text{tes: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ (Elipsoide)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ (Hiperboloide de 1 hoja)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ (Hiperboloide de 2 hojas)}$$

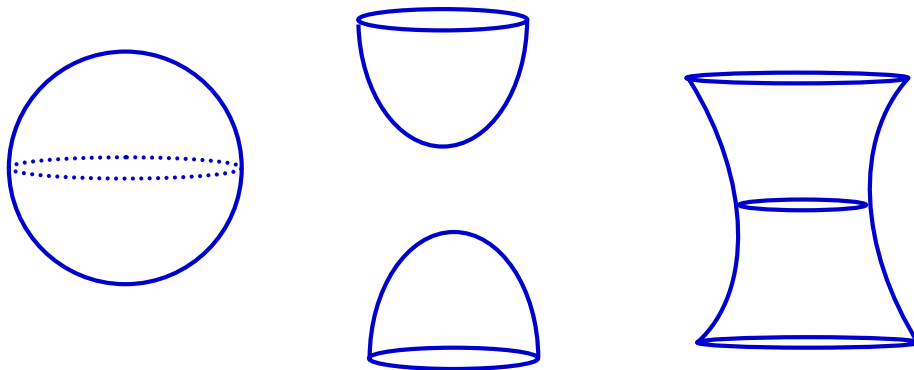


Figura 3.10: Cuádricas propias como superficies implícitas .

Nótese que, en el caso del hiperboloide de 2 hojas estamos hablando de una superficie regular disconexa. "Una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es conexa si cualquiera dos de sus puntos pueden ser unidos por una curva continua en M ".

Si $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$, entonces $M = f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de f . M no es conexa; es decir, dados dos puntos en hojas distintas ($z > 0$ y $z < 0$), no es posible unirlos por una curva continua $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ contenida en M ; de lo contrario, z cambia de signo, por algún t_0 , lo que implicaría $z(t_0) = 0$, así que α no pertenece a $M(\rightarrow\leftarrow)$.

De esto se desprende:

Proposición 3.4.2 Si $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua no nula definida sobre una superficie conexa M , entonces f no cambia de signo en M .

Demostración: Suponga, por el absurdo, que $f(p) > 0$ y $f(q) < 0$, para algunos puntos $p, q \in M$ es conexo, existe una curva continua $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ con $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$. Al aplicar el Teorema del Valor Intermedio a la función $f \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, encontramos que existe $c \in (a, b)$ tal que $(f \circ \alpha)(c) = 0$; es decir, f es nula por $\alpha(c)(\rightarrow\leftarrow)$.

Este argumento se utilizará en temas futuros.

3.5. Superficies de Revolución.

Definición 3.5.1 Considere la curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (llamada **generatriz**), contenida en un plano Π sin autointersecciones y L una recta (llamada **Eje de rotación**) en Π sin intersecciones con la traza de la curva α . A la superficie que se obtiene al rotar α alrededor de la recta L (de modo que el plano de la circunferencia descrito por cada punto de la curva sea perpendicular al eje), se le llama superficie de **revolución**.

Observación: Si el eje de rotación viene determinado por un punto a y un vector v para cada punto (x, y, z) de la superficie existe un punto $\alpha(u)$ de la generatriz tal que $\alpha(u)$ está situado en la circunferencia generada por $\alpha(u)$, por lo tanto se cumple

1. $\|\alpha(u) - a\| = \|\alpha(u) - a\|$
2. $((x, y, z) - \alpha(u)) \cdot v = 0$.

Así, eliminando el parámetro u entre las dos ecuaciones, se obtiene la ecuación de la superficie de revolución. Por supuesto, para que esta ecuación sea una parametrización $\varphi(u, v)$, en el sentido de la definición 3.6.1 (φ debe ser un homeomorfismo), debe ponerse una limitante a los parámetros u y v de tal forma que se preserve la inyectividad de la misma; argumento que lo afirmará la proposición 3.5.2 más adelante.

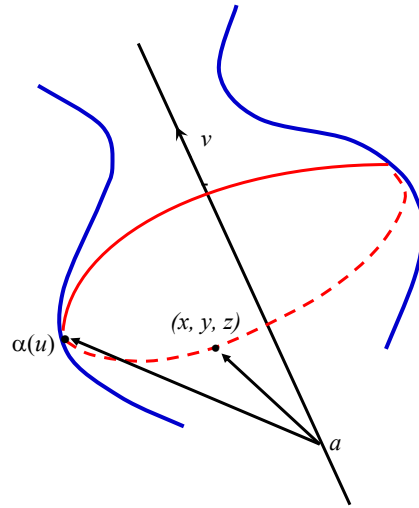


Figura 3.11: Superficie de Revolución .

Ejemplo 3.5.1 Si $\alpha(u) = (0, u, f(u))$ donde $f(u) > 0$, y girando alrededor de la recta generada por el vector $e_2 = (0, 1, 0)$, obtenemos la parametrización,

$$\psi : (a, b) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(u, v) = (f(u) \cos(v), u, f(u) \sin(v)).$$

Ejemplo 3.5.2 Si $f(u) = m(u - a)$ la superficie de revolución que se obtiene es un cono recto con vértice en $(0, a, 0)$ de altura $b - a$ y radio $m(b - a)$.

Ejemplo 3.5.3 La esfera de radio r , aunque ya demostrada superficie regular, sin los dos polos es una superficie de revolución, que se puede obtener al rotar la curva $\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(\theta) = (0, r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ alrededor de la recta generada por el vector $(0, 1, 0)$. La parametrización resultante es

$$\psi : (\theta, \vartheta) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(\theta, \vartheta) = (r \cos(\theta) \cos(\vartheta), r \cos(\theta) \sin(\vartheta), r \sin(\theta)).$$

Ejemplo 3.5.4 El Toro T , es una “superficie”, generada por rotar el círculo $S^{(1)}$ de radio r , alrededor de una recta perteneciente al plano del círculo y a una distancia $a > r$ siempre del centro del círculo (ver figura 3.12).

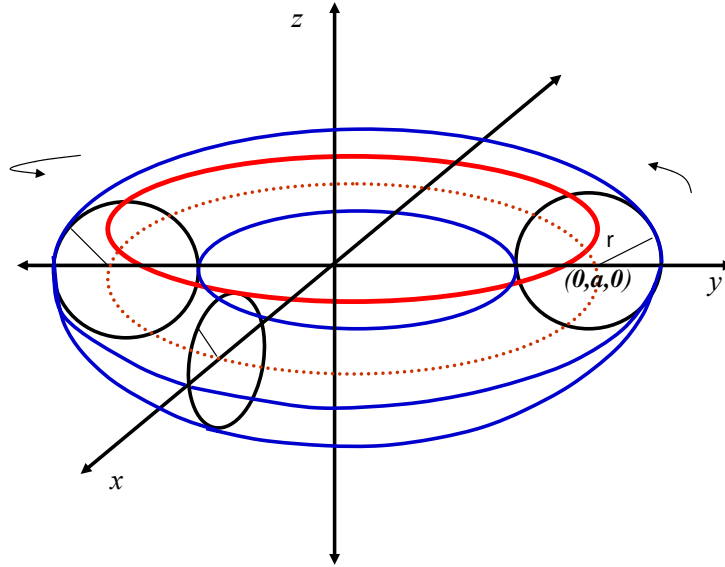


Figura 3.12: El Toro de revolución .

Sea S^1 el círculo en el plano YZ con centro el punto $(0, a, 0)$. Entonces $S^{(1)}$ es dado por $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, y los puntos de T , que se generan al rotar este círculo alrededor del eje z , satisfacen la ecuación:

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

Así, T es la función inversa de r^2 por la función $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$.

Aquí

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Proposición 3.5.1 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in M$. Entonces, existe una vecindad V de p en M tal que V es el gráfico de una función diferenciable, la cual tiene una de las siguientes formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Demostración: Sea $\varphi_\alpha : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización de M por p y $\varphi_\alpha(u, v) = (\varphi_{1\alpha}(u, v), \varphi_{2\alpha}(u, v), \varphi_{3\alpha}(u, v))$, con $(u, v) \in \mathcal{U}$. Por la condición de regularidad, uno de los determinantes Jacobianos $\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{3\alpha})}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(\varphi_{2\alpha}, \varphi_{3\alpha})}{\partial(u, v)}$ es no nulo por $\varphi_\alpha^{-1}(p) = q$. Suponga que $\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, y considere la aplicación $\pi \circ \varphi_\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde π es la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces, $\pi(\varphi_\alpha(u, v)) = (\varphi_{1\alpha}(u, v), \varphi_{2\alpha}(u, v))$, y ya que $\frac{\partial(\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha})}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función inversa, para

garantizar la existencia de vecindades V_1 de q, V_2 de $(\pi \circ \varphi_\alpha)(q)$ tal que $\pi \circ \varphi_\alpha$ aplica V_1 difeomorficamente sobre V_2 . Se sigue que $\pi / V = \varphi_\alpha(V_1)$ es 1-1 y existe una función inversa diferenciable $(\pi \circ \varphi_\alpha)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Ya que φ_α es un homeomorfismo, resulta que V es una vecindad de p en M . Ahora, si hacemos la composición de $(\pi \circ \varphi_\alpha)^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ con $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, se tiene que V es gráfico de la función diferenciable $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, lo que demuestra el primer caso(ver figura 3.13). Los demás casos, se tratan de forma similar.

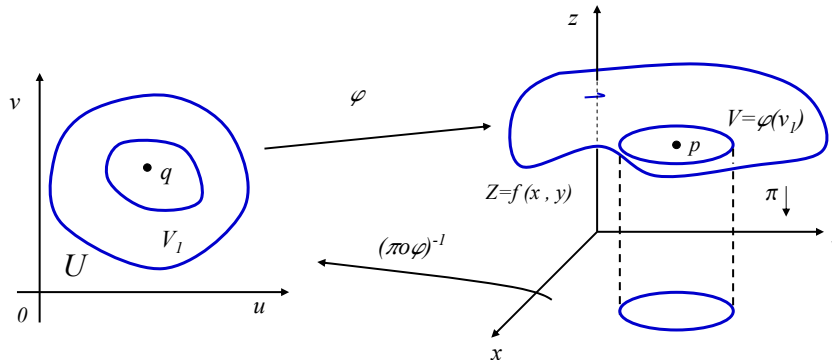


Figura 3.13: Cada vecindad V en M es el gráfico de una función diferenciable.

La siguiente proposición permite decir cuando una aplicación $\varphi_\alpha : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es una parametrización de M , y además asegurar la existencia de φ_α^{-1} sin necesidad de una fórmula que la represente explícitamente.

Proposición 3.5.2 Sea $p \in M$ un punto de una superficie regular M y sea $\varphi_\alpha : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación con $p \in \varphi_\alpha(\mathcal{U}) \subset M$ tal que la condición 1 y 3 de la definición de Superficie Regular se cumplen. Suponga que φ_α es 1-1, entonces φ_α^{-1} es continua.

Demostración: Sea $q \in \varphi_\alpha(\mathcal{U})$. Ya que M es superficie regular, existe una vecindad $W \subset M$ de q tal que W es la gráfica de una función diferenciable sobre, digamos, un abierto V del plano XY . Sean $N = \varphi_\alpha^{-1}(W) \subset \mathcal{U}$ y $h = \pi \circ \varphi_\alpha : N \rightarrow V$, donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $dh = \pi \circ d\varphi$ es no singular por $\varphi_\alpha^{-1}(q) = r$. Por el Teorema de la Función Inversa, existen las vecindades $\Omega \subset N$ y $h(\Omega) \subset V$ tal que $h : \Omega \rightarrow h(\Omega)$ es un difeomorfismo. Nótese que $\varphi_\alpha(\Omega)$ es un abierto de M y que, $\varphi_\alpha^{-1} = h^{-1} \circ \pi / \varphi_\alpha(\Omega)$ es una composición de funciones continuas. Así que φ_α^{-1} es continua en q . Ya que q es arbitrario, φ_α^{-1} es continua en $\varphi_\alpha(\Omega)$.

Ejemplo 3.5.5 Sea $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$ un plano. Considere $\varphi_\alpha : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $\varphi_\alpha(u, v) = (u + v, u + v, uv)$, donde $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$. Claramente $\varphi_\alpha(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}$. ¿es φ_α una parametrización de \mathcal{P} ? La respuesta es afirmativa, basta probar que φ_α es 1-1 y aplicar la proposición (3.5.2).

Ejemplo 3.5.6 Si F es un polinomio, la superficie definida por $F(x, y, z) = 0$ se dice que es Algebraica. Si F es homogénea, la superficie es un cono con vértice en el origen. Tome, por ejemplo, el cono de una hoja dado por:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esta superficie no es regular. Pues si consideramos $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$, vemos que $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$ y $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$ se anulan por $(0, 0, 0)$, por lo que hace que éste sea un punto crítico de F . Por tanto $F^{-1}(0)$ no es superficie regular. Ahora bien, observe que no podemos concluir esto, por el solo hecho natural, de construir la parametrización $\varphi_\alpha(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, la cual no es diferenciable por $(0, 0)$; se podría escoger otra parametrización que satisfaga la condición 1 de la definición de Superficie Regular.

Para mostrar que este no es el caso, vamos a utilizar la proposición (3.4.2). Si el Cono fuera una superficie regular, tendríamos una vecindad del $(0, 0, 0)$, la cual sería el gráfico de una función diferenciable, que tendría una de las formas:

$y = h(x, z)$, $x = g(y, z)$ o $Z = f(x, y)$. Ya que, las proyecciones del cono sobre los planos XZ y YZ no son 1-1, las dos primeras formas se descartan automáticamente. La última forma, tendría que coincidir en una vecindad del $(0, 0, 0)$, con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pero $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable por $(0, 0)$, así que esto sería imposible.

Ejemplo 3.5.7 De nuevo el Toro; esta vez, tomemos en el ejemplo (3.5.4), $r = 1$ y $a = 3$, así que $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2 + y^2 + z^2 - 10)^2 + 36z^2 = 36\}$ y $\varphi_1(0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ viene dada por $\varphi_1(\phi, \theta) = ((3 + \cos\theta)\cos\phi, (3 + \cos\theta)\sin\phi, \sin\theta)$.

Esta parametrización de T , lo cubre casi en su totalidad excepto un meridiano y el ecuador; se necesitarían dos parametrizaciones mas, similares a φ_1 , para terminar de cubrir T , lo cual probaría que es una superficie regular. Ahora, φ_1 cumple con las condiciones (i) y (iii) de la definición (3.1.2) de Superficie Regular; en vista de que sabemos que T es superficie regular, la condición (ii) de la definición (3.1.2) de superficie regular, puede ser reemplazada por chequear que φ_1 es 1-1 según la proposición (3.5.2). En efecto, primero, $\sin\theta = z$ y,

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \Rightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Luego, dado (x, y, z) , θ está determinado únicamente para $0 < \theta < 2\pi$. Y si se conoce θ, x, y y podemos conocer $\cos\phi$ y $\sin\phi$. Esto, por supuesto determina a ϕ , únicamente, para $0 < \phi < 2\pi$. Por tanto, φ_1 es 1-1.

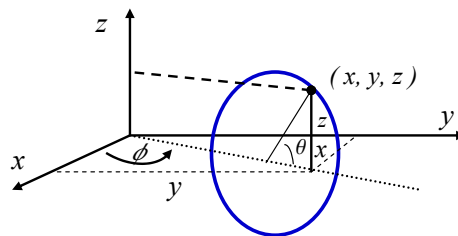


Figura 3.14: El Toro generado en coordenadas polares .

Vamos a finalizar esta parte con unos de los ejemplos clásicos en Geometría, como lo es la Cinta o Banda de Moebius. Utilizaremos para ello algo de Topología Algebraica.

Ejemplo 3.5.8 La Cinta de Moebius: En $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ defina la relación de equivalencia:

- (a) Si $x \neq 0$ y $x' = 1$ entonces $(x, y) \sim (x', y')$ sí y sólo si $x = x'$ y $y = y'$;
- (b) $(0, y) \sim (1, y')$ sí y sólo si $y + y' = 1$.

O sea, la clase de equivalencia de los puntos interiores a θ son las que contienen el propio punto y los puntos de la forma $(0, y)$ que son identificados con $(1, 1 - y)$. Así que, el conjunto cociente de las clases de equivalencias Q / \sim en \mathbb{R}^3 es la Cinta de Moebius (ver figura 3.15).

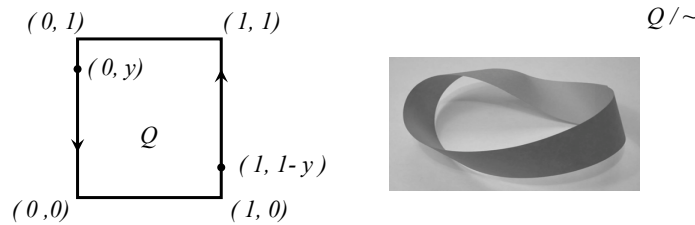


Figura 3.15: Cinta de Moebius .

Sea $f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación dada por $f(s, t) = \gamma(t) + s \delta(t)$, donde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ y $\delta(t) = \cos(\frac{t}{2}) \gamma(t) + \sin(\frac{t}{2}) (0, 0, 1)$, $M = f(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ es una superficie. En efecto, si $\varphi_0 : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\varphi_1 : (\epsilon, 2\pi + \epsilon) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, para $\epsilon > 0$ pequeño, tienen las mismas coordenadas que f , podemos ver que ellas son homeomorfismos de orden 2 sobre $V_0 = \varphi_0((0, 2\pi) \times (-1, 1))$ y $V_1 = \varphi_1((\epsilon, 2\pi + \epsilon) \times (-1, 1))$, respectivamente; además $M = V_0 \cup V_1$.

Vamos a demostrar que M es la Cinta de Moebius. Como f es periódica de período 2π en la variable t , tenemos que $M = f([0, 2\pi] \times (-1, 1))$. Como $f / ([0, 2\pi] \times (-1, 1)) = \varphi_0$ (que es un homeomorfismo sobre su imagen), basta examinar el comportamiento de $f / \{0\} \times (-1, 1)$ y $f / \{2\pi\} \times (-1, 1)$. Es fácil chequear que $f(0, s) = f(2\pi, -s)$, de donde concluimos que M es la Cinta de Moebius.

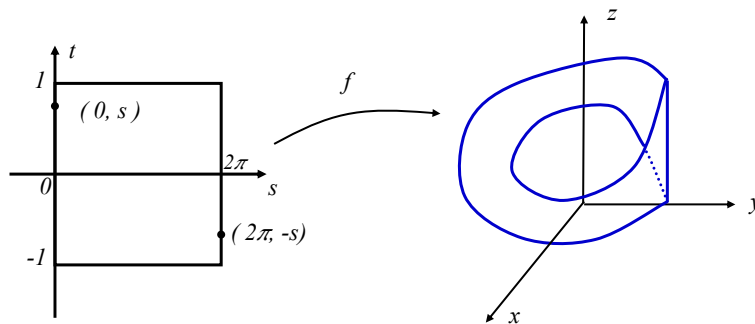


Figura 3.16: La Cinta de Moebius es una superficie regular.

3.6. Cambio de Parámetro. Funciones Diferenciables sobre superficies.

Es de interés reconocer las propiedades sobre superficies, que dependen sobre la vecindad coordinada de un punto de la misma; por ejemplo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ será diferenciable en p , si su expresión en las cartas coordinadas lo es. Esto no dependerá, por supuesto, de la vecindad coordinada que se escoja sobre p , es decir, sobre la parametrización que se escoja de p ; esto último, es garantizado por el Cambio de Parámetro, del cual se desprenderán, otras propiedades de diferenciability sobre superficies.

Proposición 3.6.1 Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ con $\varphi(0) = p$, una parametrización alrededor de p . Existen abiertos $Z, W \subset \mathbb{R}^2$ de 0 y p respectivamente, tales que $Z \cap \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{U}$, $W \cap M \subset V$ y un difeomorfismo $\psi : Z \rightarrow W$ que es una extensión de φ ; es decir,

$$\psi/Z \cap \mathbb{R}^2 = \varphi/Z \cap \mathbb{R}^2$$

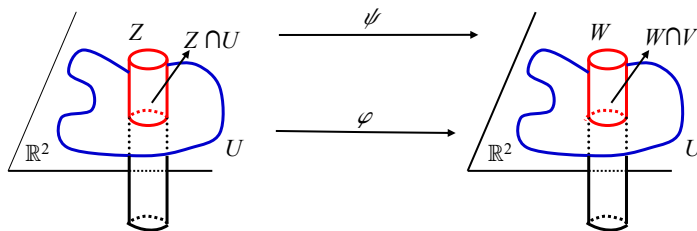


Figura 3.17: El difeomorfismo ψ es una extensión de φ .

Demostración: Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$, $(u, v) \in \mathcal{U}$. Así que,

$$\varphi(0) = p \text{ } ^{(1)} \text{ y } d_0\varphi(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

es de orden 2, con lo que, podemos suponer (modificando el orden de las coordenadas si es necesario) que $\det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) (0) \neq 0$.

¹La escogencia de $\varphi(0) = p$ en la proposición, no implica restricción alguna, porque siempre podemos componer φ con una traslación que lleve $\varphi^{-1}(p)$ al cero.

Definamos $\psi(u, v, t) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), t + \varphi_3(u, v))$. Luego,

$$\begin{aligned} \det(d_0\psi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}\right)(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la Función Inversa, encontramos abiertos $Z, W \subset \mathbb{R}^3$, de 0 y $\varphi(0)$; tales que $\psi: Z \rightarrow W$ es un difeomorfismo. Como $\psi(u, v, 0) = \varphi(u, v)$ tenemos que $\varphi/Z \cap \mathbb{R}^2 = \varphi/Z \cap \mathbb{R}^2$.

Corolario 3.6.1 Si $\varphi: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$, y $\varphi_1: \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset M$, con $V \cap V_1 \neq \emptyset$, son parametrizaciones de M en p , entonces $\varphi_1^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(V \cap V_1) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V \cap V_1)$ es un difeomorfismo.

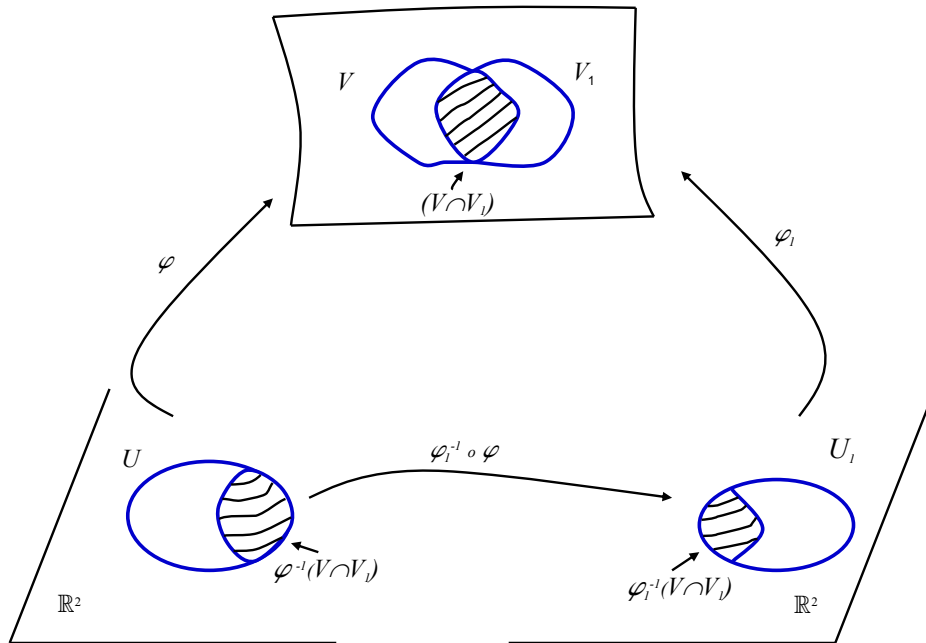


Figura 3.18: El Cambio de Parámetro $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$ es un difeomorfismo.

Demostración: Sean $q \in \varphi^{-1}(V \cap V_1)$ y $\varphi(q) = p \in V \cap V_1$. Por la proposición anterior existen abiertos Z_1 y W_1 de $y = \varphi^{-1}(p)$ y p_1 respectivamente, un difeomorfismo $\psi_1: Z_1 \rightarrow W_1$ tal que $\psi_1/Z_1 \cap \mathbb{R}^2 = \varphi_1/Z_1 \cap \mathbb{R}^2$. Tomando $\mathcal{U}_1 = \varphi^{-1}(W_1 \cap V \cap V_1)$ tenemos

que $\varphi_1^{-1} \circ (\varphi/\mathcal{U}_1) = \psi_1^{-1} \circ (\varphi/\mathcal{U}_1)$ pues φ_1^{-1} y ψ_1^{-1} coinciden en la superficie. Como ψ_1^{-1} y φ son diferenciables, se sigue que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi/\mathcal{U}_1$ es diferenciable. Análogamente, se puede demostrar que $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ (la inversa de $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$) es diferenciable en un entorno de q . En consecuencia $\varphi_1^{-1} \circ \varphi/\mathcal{U}_1$ es un difeomorfismo. Como $q \in \varphi^{-1}(V \cap V_1)$, es arbitrario, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$ es un difeomorfismo en $\varphi^{-1}(V \cap V_1)$, lo que concluye la demostración. A $h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi$ se le llama cambio de coordenadas.

Definición 3.6.1 Sea $f : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular M . Entonces, se dice que es diferenciable por $p \in V$ si para alguna parametrización $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ con $p \in \varphi(\mathcal{U}) \subset V$, la composición $f \circ \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido euclidiano, que es habitual, por $\varphi^{-1}(p)$. f es diferenciable en V si ésta es diferenciable en todos los puntos de V .

Esta definición es independiente de la parametrización φ por p . Si $\psi : \mathcal{U}' \rightarrow V'$, $p \in V'$, es otra parametrización, podemos escribir

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi);$$

aquí, $\varphi^{-1} \circ \psi$ es el cambio de coordenadas que es diferenciable, siendo $f \circ \varphi$ diferenciable también, tenemos que $f \circ \psi$ también lo es.

Ahora, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en todo $p \in M$, diremos que f es diferenciable en M .

Ejemplo 3.6.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $V \subset \mathbb{R}^3$ un abierto de \mathbb{R}^3 y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la restricción $f/M : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

En efecto, para cualquier punto $p \in M$ y cualquier parametrización $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow W$, con $p \in W$, la compuesta $f/M \circ \varphi = f \circ \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Considere, por ejemplo, $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por $f(x, y, z) = z$, sobre la esfera unitaria, con las parametrizaciones ya encontradas φ_i , $i = 1, \dots, 6$, se obtiene que $f \circ \varphi_1(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, $f \circ \varphi_2(u, v) = -\sqrt{1 - u^2 - v^2}$ y $f \circ \varphi_i(u, v) = v$, ($i = 3, 4, 5, 6$), son diferenciables; así que, f es diferenciable en S^2 .

Ejemplo 3.6.2 La Función Altura, relativa a un vector unitario $v \in \mathbb{R}^3$, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(p) = \langle p, v \rangle$, $p \in M$. Aquí $h(p)$ es la altura de $p \in M$ relativa al plano normal a v que pasa por el origen de \mathbb{R}^3 .

Se deja al lector probar que $(h \circ \varphi)$ es diferenciable para φ carta de M .

Ejemplo 3.6.3 Si $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $f(p) = \|p - p_0\|^2$, con p_0 no perteneciente a V , resulta que, $M \subset V$ superficie regular, hace que f/M sea diferenciable.

La definición de diferenciability, se puede extender a las aplicaciones entre superficies. Esto es, una aplicación continua $\psi : V_1 \subset M_1 \rightarrow M_2$ de un abierto V_1 de una superficie regular M_1 a una superficie regular M_2 , se dice que sea

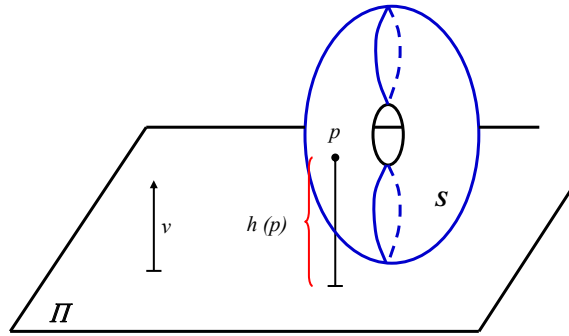


Figura 3.19: La función altura h es diferenciable .

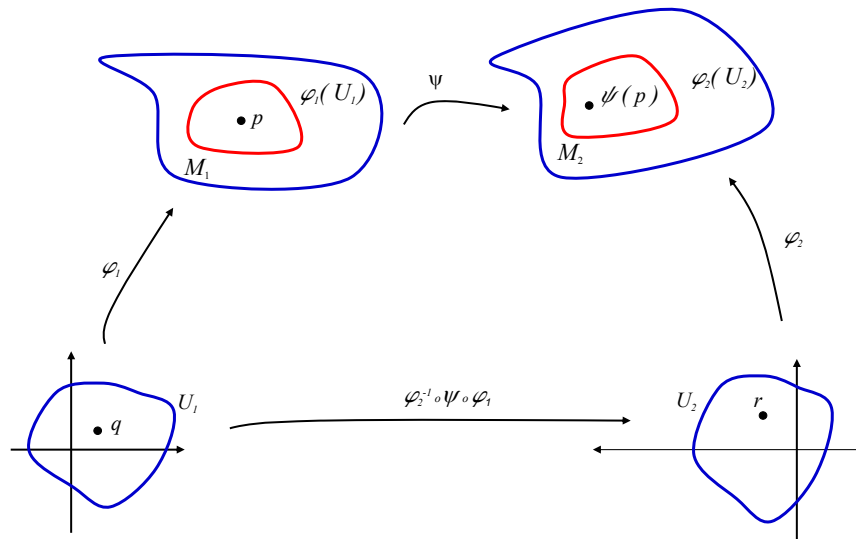


Figura 3.20: La diferenciabilidad entre superficies .

diferenciable por $p \in V_1$ si, dadas dos parametrizaciones $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1$, $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2$ con $p \in \varphi_1(\mathcal{U}_1)$ y $\psi(\varphi_1(\mathcal{U}_1)) \subset \varphi_2(\mathcal{U}_2)$, la aplicación $\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ es diferenciable por $q = \varphi_1^{-1}(p)$ (ver gráfica 3.20).

En otras palabras, ψ es diferenciable si cuando expresada en coordenadas locales, sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todo orden. Algo que se deja al lector, es verificar, que esta definición no depende de las parametrizaciones φ_1 y φ_2 escogidas.

Por otra parte, diremos que dos superficies M_1 y M_2 son difeomórficas, si existe una aplicación diferenciable $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ con inversa diferenciable $\varphi^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$; tal φ se llama un difeomorfismo de M_1 en M_2 .

Ejemplo 3.6.4 Si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es una parametrización $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable. Así que, \mathcal{U} y $\varphi(\mathcal{U})$ son difeomórficos. Para ver que φ^{-1} es diferenciable, tome otra parametrización ψ y vea que $\varphi^{-1} \circ \psi$ es el cambio de coordenada.

Ejemplo 3.6.5 1. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano. En efecto, al considerar la parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vemos que φ es un difeomorfismo local, por lo que se demostró en el ejemplo anterior. Siendo M el paraboloide, resulta que

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, u^2 + v^2) &\rightarrow (u, v) \end{aligned}$$

es una aplicación que tiene rango 2, pues la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango dos, ϕ es la proyección la cual es diferenciable, se sigue entonces que M y \mathbb{R}^2 son difeomorfos.

Ejemplo 3.6.6 Sean M_1 y M_2 superficies regulares. Supongamos que $M_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$ donde V es un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 , y que $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable tal que $\varphi(M_1) \subset M_2$. Entonces la restricción $\varphi/M_1 : M_1 \rightarrow M_2$ es diferenciable. En realidad, dado $p \in M_1$ y parametrizaciones $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow M_1$ y $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow M_2$ con $p \in \varphi_1(\mathcal{U}_1)$ y $\varphi(\varphi_1(\mathcal{U}_1)) \subset \varphi_2(\mathcal{U}_2)$, tendremos que la aplicación $\varphi_2^{-1} \circ \varphi/M_1 \circ \varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ es diferenciable.

Ejemplo 3.6.7 Sea M superficie regular, relativamente simétrica al plano XY ; esto es, si $(x, y, z) \in M$, entonces $(x, y, -z) \in M$. Así la aplicación $\sigma : M \rightarrow M$ la cual lleva a $p \in M$ a su simétrico, es diferenciable; pues, es la restricción sobre M de $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$, la cual es diferenciable. Esto, por supuesto, generaliza a superficies simétricas relativa a cualquier plano de \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, se puede probar que $f : S^2 \rightarrow S^2$, donde S^2 es la esfera unitaria con $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ (función antipodal) es un difeomorfismo.

Ejemplo 3.6.8 Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y, z) = (ax, by, cz)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ no nulos. φ es diferenciable y φ/S^2 es una aplicación diferenciable de la esfera unitaria S^2 al elipsoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow M$ es una parametrización de M , entonces se dice que la función compuesta $f \circ \varphi$ es una expresión en coordenadas locales de f ; así que f será diferenciable siempre que su expresión en coordenadas locales lo sea. Con esto podemos ahora hacer un abuso de notación e indicar f y $(f \circ \varphi)$ por el mismo símbolo $f(u, v)$; es decir, $f(u, v)$ es la expresión de f en el sistema de coordenadas φ . Equivalente a identificar $\varphi(\mathcal{U})$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ y pensar $(u, v) \in \mathcal{U}$ como un punto de $\varphi(\mathcal{U})$. De igual forma, si $\psi : M_1 \rightarrow M_2$, entonces su expresión en cartas locales será para $(u, v) \in \mathcal{U}_1$, $\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$, lo que dice que, ψ es diferenciable si y solo si ψ_1 y ψ_2 tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

El siguiente lema nos será de utilidad mas adelante, pues caracteriza a las curvas regulares sobre superficies regulares en términos de cartas locales.

Lema 3.6.2 *Si α es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ cuya trayectoria descansa en la imagen $\varphi(\mathcal{U})$ de una sola parametrización φ , entonces existen en I funciones diferenciables únicas $u(t)$ y $v(t)$ tales que $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ para todo t .*

Demostración: Por definición, la expresión en coordenadas $\varphi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$ es diferenciable: es simplemente una curva en \mathbb{R}^2 cuya trayectoria está en el dominio \mathcal{U} de φ . Además, es la composición de funciones diferenciables:

Como $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ y si $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es otra parametrización en p , tendremos que $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$, donde $W = \varphi(\mathcal{U}) \cap \psi(V)$, es diferenciable. En consecuencia $\varphi^{-1} \circ \alpha$ es diferenciable. Bien, así existen las funciones componentes $u(t)$ y $v(t)$ de $\varphi^{-1} \circ \alpha$, con lo cual se tiene que $\alpha = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha = \varphi(u(t), v(t))$. No pueden existir otras funciones, pues si se tiene que $\alpha = \varphi(b_1(t), b_2(t))$, entonces

$$(u(t), v(t)) = \varphi^{-1} \circ \alpha = \varphi^{-1} \circ \varphi(b_1(t), b_2(t)) = (b_1(t), b_2(t)) \quad \diamond$$

Las funciones $u(t)$ y $v(t)$ de la proposición anterior, se llaman funciones coordenadas de la curva α con respecto a la curva φ .

Bien, de lo anterior, podemos concluir que las cartas locales sobre superficies, que eran *homeomorfismos diferenciables de orden 2* se convierten ahora en *difeomorfismos locales*, y en el caso de curvas regulares, vistas en los primeros capítulos, podríamos entenderlas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 en el que podría establecerse un *difeomorfismo diferenciable* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \cap \alpha(I)$, donde V es una vecindad de un punto $p \in \alpha(I)$ tal que la *diferencial* $d_t \alpha$ es 1-1 para cada $t \in \mathbb{R}$ (ver figura 3.21).

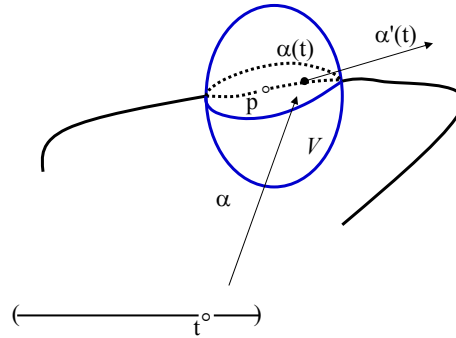


Figura 3.21: Curva regular como un subconjunto uni-dimensional de \mathbb{R}^3 .

Quizás se podría preguntar, por qué no se empezó con una definición de superficie, similar al de curva diferenciable; esto es, mediante una aplicación diferenciable, en este caso $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Bien, la respuesta la da la siguiente definición:

Definición 3.6.1 Una Superficie parametrizada $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable φ de un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 . El conjunto $\varphi(\mathcal{U})$ se llama traza de φ . Diremos que φ es regular si la diferencial $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es 1-1 $\forall q \in \mathcal{U}$ (es decir los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ son l.i para todo $q \in \mathcal{U}$). Un punto $p \in \mathcal{U}$ donde $d_q\varphi$ no es 1-1 es llamado punto singular de φ .

Obsérvese que una superficie parametrizada, aun siendo regular, puede tener autointersecciones en su traza.

Ejemplo 3.6.1 sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Defina

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t) \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

φ es una superficie parametrizada regular llamada superficie tangente de α (veremos que esta, es un caso particular de una superficie reglada: en cada uno de sus puntos pasa una recta o **regla** totalmente contenida en ella misma).

Supongamos ahora, que la curvatura $k_\alpha(t)$ $t \in I$, de α , no es nula $\forall t \in I$ y, restringimos el dominio de φ a $\mathcal{U} = \{(t, v) \in I \times \mathbb{R}, v \neq 0\}$. Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha(t) + v\alpha''(t),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \alpha'(t)$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = v\alpha''(t) \times \alpha'(t) \neq 0 \quad \in (t, v) \in \mathcal{U};$$

pues,

$$k_\alpha(t) = \frac{|\alpha''(t) \times \alpha'(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \neq 0.$$

Se sigue que, la restricción $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una *superficie parametrizada regular*; la traza consiste de dos pedazos conexos, con $\alpha(I)$ como frontera común.

La siguiente proposición determina cuando una superficie parametrizada es regular.

Proposición 3.6.3 *Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular y sea $q \in \mathcal{U}$. Entonces, existe una vecindad V de q en \mathbb{R}^2 tal que $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.*

Demostración: Esto es consecuencia del *teorema de la función inversa*. Escribiendo

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)).$$

Por regularidad, podemos suponer que $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$. Definamos la aplicación $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(u, v, t) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v) + t) \quad (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\det(d_q F) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Por el *teorema de la función inversa*, existen vecindades W_1 de q y W_2 de $F(q)$ tales que $F : W_1 \rightarrow W_2$ es un difeomorfismo local. Colocando $V = W_1 \cap \mathcal{U}$ y observando que la restricción $F|_V = \varphi|_V$. Así que, $\varphi(V)$ es difeomorfo a V , y en consecuencia una superficie regular.

Ejemplo 3.6.2 *Las siguientes aplicaciones son superficies parametrizadas:*

1. *El Paragua de Whitney*

$$\varphi(u, v) = (uv, u, v^2).$$

2. *La Superficie del ocho*

$$\psi(u, v) = (\cos u \cos v \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} v).$$

3. *La Silla del mono*

$$\phi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2).$$

4. *El Cono deforme*

$$\phi(u, v) = (\operatorname{sech}(v)\cos(u), \operatorname{sech}(v)\operatorname{sen}(u), \cos(v)\operatorname{sen}(u)).$$

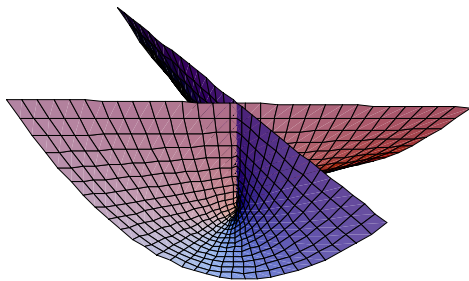


Figura 3.22: Paragua de Whitney .

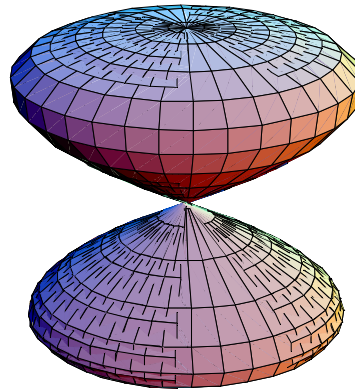


Figura 3.23: La Superficie del Ocho .

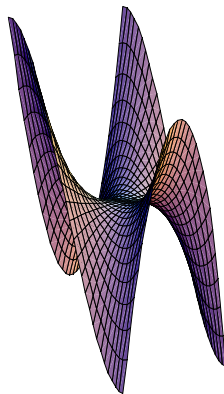


Figura 3.24: La Silla del mono .

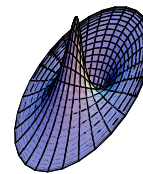


Figura 3.25: El Cono deforme .

Figura 3.26: Diversas Superficies Parametrizadas.

3.7. El Plano Tangente; la diferencial de una aplicación.

Antes de entrar en materia con el plano tangente sobre superficies, repasemos algunos hechos en los espacios euclidianos:

Definición 3.7.1 Sea $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. A cada $p \in \mathcal{U}$, asociamos una aplicación lineal $d_p F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la cual es llamada la diferencial de F por p y es definida como sigue: Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Por la regla de la cadena, la curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ también es diferenciable. Entonces

$$d_p F(w) = \beta'(0)$$

Definición 3.7.2 Sea p un punto de \mathbb{R}^n . Un vector tangente a \mathbb{R}^n en el punto p es un par $v_p = (p, v)$, donde $v \in \mathbb{R}^n$.

Geoméricamente, a $v_p = (p, v)$ lo podemos representar mediante una flecha que une el punto p con el punto $p + v$. Ver gráfica; caso $n = 3$

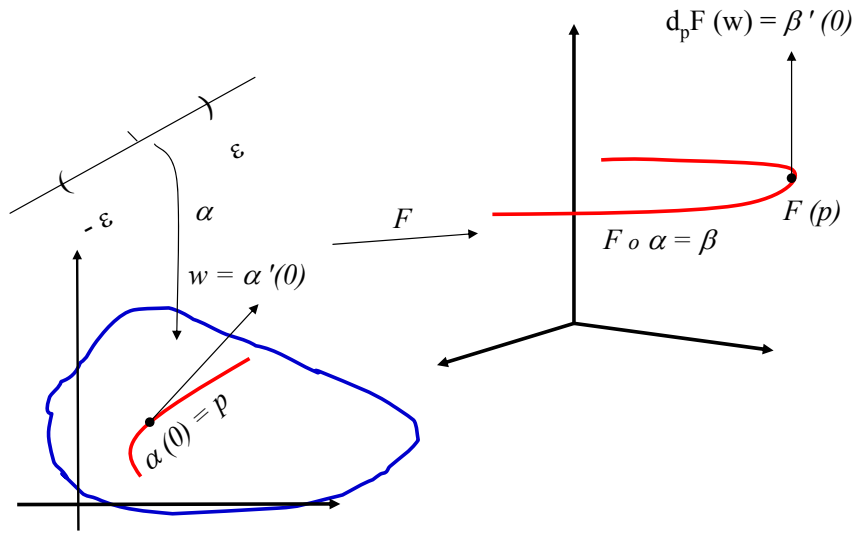


Figura 3.27: Acción de la Diferencial $d_p F$.

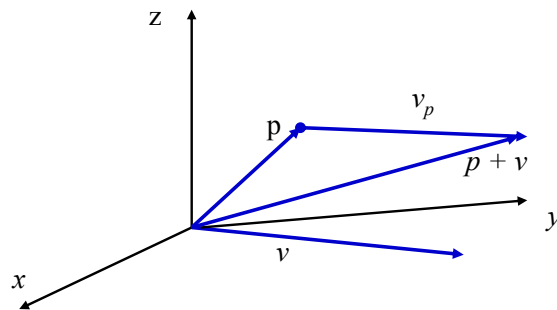


Figura 3.28: El vector tangente v_p .

Definición 3.7.3 Sea p un punto de \mathbb{R}^n . El espacio tangente de \mathbb{R}^n en el punto p es el conjunto $T_p\mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores tangentes a \mathbb{R}^n en el punto p .

Geoméricamente, a $T_p\mathbb{R}^n$, lo podemos representar por el conjunto de todas las flechas que salen de p . Ver gráfica 3.29; caso $n = 3$

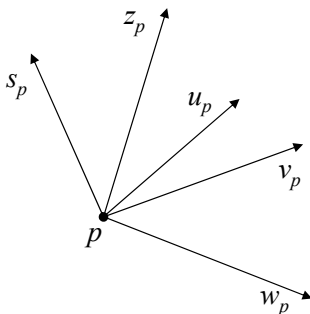


Figura 3.29: El Espacio tangente a \mathbb{R}^3 por p .

A $T_p\mathbb{R}^n$ lo dotaremos en forma natural, de una estructura de espacio vectorial con un producto interno del modo siguiente: Si $v_p = (p, v)$ y $w_p = (p, w)$ son dos elementos de $T_p\mathbb{R}^n$ definimos

- $v_p + w_p = (p, v + w)$
- $r v_p = (p, r v)$, $r \in \mathbb{R}$
- $\langle v_p, w_p \rangle$

Es evidente que $T_p\mathbb{R}^n$, con esta estructura es isomorfo a \mathbb{R}^n ; el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v_p &\longmapsto v \end{aligned}$$

Definición 3.7.4 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable. Para cada $t \in I$, el vector velocidad de α en t es el siguiente vector tangente a \mathbb{R}^n en $\alpha(t)$:

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))_{\alpha(t)} = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_{\alpha(t)}$$

De lo anterior tenemos: (sobre superficies regulares) Un vector tangente a M , por un punto $p \in M$, significará el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$.

Proposición 3.7.1 Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie regular M y sea $q \in \mathcal{U}$. El subespacio vectorial (puesto que $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es 1-1) de dimensión 2, $d_q\varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide con el conjunto de vectores tangentes a M por $\varphi(q)$.

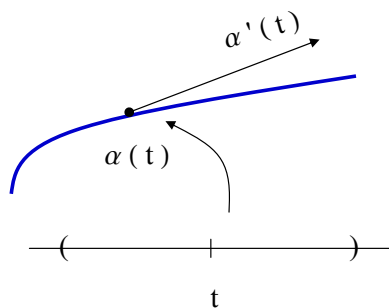


Figura 3.30: El vector velocidad $\alpha'(t)$ por $\alpha(t)$.

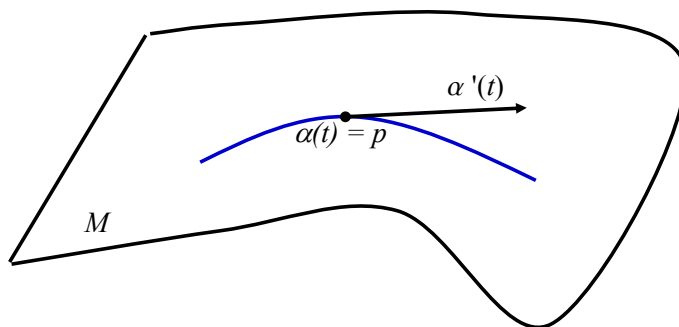


Figura 3.31: El vector tangente $\alpha'(t)$ a M por $\alpha(t)$.

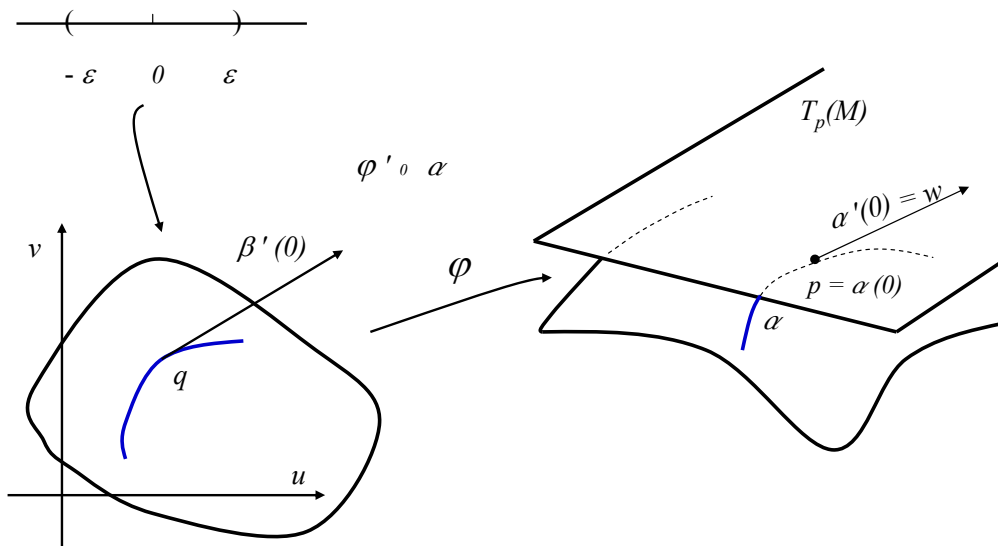


Figura 3.32: $d_q \varphi(\mathbb{R}^2) = T_p M$.

Demostración: Sea w un vector tangente a M por $\varphi(q)$; es decir, $w = \alpha'(0)$, en donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \varphi(U) \subset M$ es diferenciable y $\alpha(0) = \varphi(q)$. $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ es diferenciable (φ^{-1} lo es). Por definición de diferencial, tenemos que

$$d_q\varphi(\beta'(0)) = w = \alpha'(0);$$

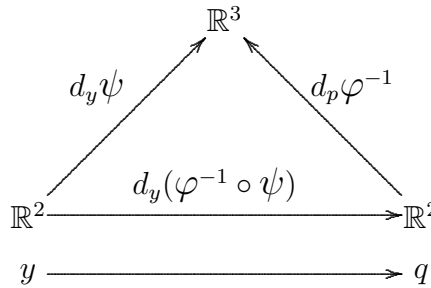
por tanto, $w \in d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$

Ahora, sea $w = d_q\varphi(v)$, donde $v \in \mathbb{R}^2$. Es claro que v es la velocidad de la curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $\gamma(t) = tv + q$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$; aquí, $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = q$ y por definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha = \varphi \circ \gamma$. Esto demuestra que w es un vector tangente a M por $\alpha(0) = p = \varphi(q)$. \diamond

De esta proposición, se tiene que, el plano $d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$, el cual pasa por $p = \varphi(q)$, no depende de la parametrización que se escoja : Si $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es otra parametrización con $\psi(y) = p \in \psi(V) \cap \varphi(U)$, tenemos que

$$d_y\psi(\mathbb{R}^2) = d_q\varphi(d_y(\varphi^{-1} \circ \psi)(\mathbb{R}^2)) = d_q\varphi(\mathbb{R}^2),$$

donde $d_y(\varphi^{-1} \circ \psi)$ es el isomorfismo dado por el cambio de base ($\varphi^{-1} \circ \psi$) (ver figura abajo); esto prueba nuestra afirmación.



Definición 3.7.5 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización alrededor del punto $p = \varphi(q) \in \varphi(\mathcal{U}) \subset M$. Llamaremos Espacio Tangente o Plano Tangente a la superficie M en el punto p , al siguiente subespacio de $T_p\mathbb{R}^3$

$$T_pM = \{v_p \in T_p\mathbb{R}^3 / v \in d_q\varphi(\mathbb{R}^2)\}$$

Aunque a T_pM lo hemos definido en términos de la parametrización φ , ya vimos que este es independiente de la parametrización. La escogencia de la parametrización φ determina una base para T_pM ; es decir, sabemos que los vectores

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(q) = d_q\varphi(e_1)$$

y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(q) = d_q\varphi(e_2),$$

constituyen una base para $d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$. Luego, $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\}$ es la base de T_pM asociada a φ .

En lo que sigue, convenientemente escribiremos $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi_u$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_v$. Las coordenadas

de un vector $w \in T_p M$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ se determinan como sigue: w es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva $\alpha = \varphi \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ es dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$ con $\beta(0) = q = \varphi^{-1}(p)$. Así

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t))(0) \\ &= \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0) = w\end{aligned}$$

Por tanto, $w = (u'(0), v'(0))$ en la base dada, donde $(u(t), v(t))$ es la expresión en la parametrización φ , de una curva cuya velocidad por $t = 0$ es w .

Ejemplo 3.7.1 Siendo $S^{(n)}$ la esfera unitaria n -dimensional resulta que

$$T_p S^{(n)} = (p)_p^\perp = \{v_p \in T_p \mathbb{R}^{n+1} / \langle v, p \rangle = 0\} \quad \diamond$$

Podemos ahora hablar de la diferencial de una aplicación diferenciable entre superficies: Sean M_1 y M_2 dos superficies y sea $\varphi : V \subset M_1 \rightarrow M_2$ diferenciable de un abierto V de M_1 en M_2 . Si $p \in V$, sabemos que cada vector $w \in T_p(M_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ con $\alpha(0) = p$. La curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, y por tanto $\beta'(0)$ es un vector tangente de $T_{\varphi(p)}M_2$.

Proposición 3.7.2 Referido a lo anterior, dado w , el vector $\beta'(0)$ no depende de la escogencia de α . La aplicación $d_p \varphi : T_p(M_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(M_2)$ definida por $d_p \varphi(w) = \beta'(0)$ es lineal.

Demostración: Sean $\chi(u, v)$, $\tilde{\chi}(u, v)$ parametrizaciones en vecindades de p y $\varphi(p)$ respectivamente. Supongamos que $\varphi(u, v)$ es expresado en esas coordenadas como

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)),$$

y que α es expresada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces

$$\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$$

y la expresión de $\beta'(0)$ en la base $\{\tilde{\chi}_u, \tilde{\chi}_v\}$ es

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(t), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(t) \right)$$

. La relación dada arriba muestra que $\beta'(0)$ depende solamente de la aplicación φ y de las coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de w en la base $\{\chi_u, \chi_v\}$. Así que, $\beta'(0)$ es independiente de α . Más, la misma relación muestra que

$$\beta'(0) = d_p \varphi(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{(**)} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix};$$

es decir, $d_p \varphi$ es una aplicación lineal de $T_p(M_1)$ en $T_{\varphi(p)}(M_2)$ cuya matriz en la base $\{\chi_u, \chi_v\}$ de $T_p(M_1)$ y $\{\tilde{\chi}_u, \tilde{\chi}_v\}$ de $T_{\varphi(p)}(M_2)$ es (**). La aplicación $d_p \varphi$ definida en la

proposición 3.7.2 es llamada *La Diferencial de φ por $p \in M_1$* . Con esto, podemos de manera análoga, definir la diferencial de una aplicación lineal $d_p f : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d_p f(v) = v_p[f] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i$$

Ejemplo 3.7.2 Sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario y sea $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(p) = v \cdot p$, $p \in M$ la función altura. Aquí,

$$d_p h(w) = \left. \frac{d}{dt} (h(\alpha(t))) \right|_{t=0} = \alpha'(0) \cdot v = w \cdot v,$$

donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$, con $h(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot v$.

Ejemplo 3.7.3 El plano tangente al gráfico de una función diferenciable $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es dado por

$$z = h(u_0, v_0) + h_u(u_0, v_0)(u - u_0) + h_v(u_0, v_0)(v - v_0);$$

este es el gráfico M de la diferencial $d_p h$

En efecto, sea $\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$ la parametrización de gráfico de h . Sea $T_p M = d_{p_0} \varphi(\mathbb{R}^2)$ donde $\varphi(p_0) = p \in M$ y

$$d_{p_0} \varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_u & h_v \end{bmatrix};$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_p M &= \{d_{p_0} \varphi \cdot (u, v); (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(u, v, h_u u + h_v v); (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; z = h_u u + h_v v\}; \end{aligned}$$

con lo que, el plano que pasa por p es dado por

$$p + T_p M = z - z_0 = h_u(u_0, v_0)(u - u_0) + h_v(u_0, v_0)(v - v_0);$$

esto es,

$$z = h(p_0) + d_{p_0} h \cdot (u - u_0, v - v_0).$$

Bueno para animar al lector, lo invito hacer la segunda parte. ■

Para concluir por los momentos el tema de diferenciability sobre superficies, presentamos aquí la extensión del Teorema de la Función Inversa sobre las mismas: Diremos que una aplicación $\varphi : U \subset M_1 \rightarrow M_2$ es un *difeomorfismo local* por $p \in U$ si existe una vecindad $V \subset U$ de p tal que φ restringida a V es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto $\varphi(V) \subset M_2$. En este sentido, la versión del Teorema de la Función Inversa para superficie se expresa como sigue.

Proposición 3.7.3 Si M_1 y M_2 son superficies regulares y $\varphi : U \subset M_1 \rightarrow M_2$ es una aplicación diferenciable de un conjunto abierto $U \subset M_1$ tal que la diferencial $d_p \varphi$ de φ por p es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo local por p .

Demostración:

Sug: Tome el par de cartas φ_1 y φ_2 de M_1 y M_2 , respectivamente. Considere la aplicación $\varphi_2^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1$ de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y aplique el teorema de la función inversa en este caso; suba después con las cartas a la superficies.

Proyección Estereográfica

Sean $p \in S^2(1)$ un punto cualquiera distinto del polo norte $\mathcal{N}_p = (0, 0, 1)$. La recta \mathbf{L} que pasa por p y \mathcal{N}_p interseca al plano \mathbb{C} en un punto q . Escribamos $p = (p_1, p_2, p_3)$ y $q = (q_1, q_2)$. Podemos parametrizar \mathbf{L} por

$$t \longmapsto \text{tal que } t(1-t)\mathcal{N}_p = (tq_1, tq_2, 1-t)$$

Existe, por tanto, t_0 tal que

$$(p_1, p_2, p_3) = p = t_0 q_1 (1-t_0)\mathcal{N}_p = (t_0 q_1, t_0 q_2, 1-t_0) \quad (3.3)$$

De (1) se sigue que $t_0 = 1 - p_3$, y por tanto

$$q_1 = \frac{p_1}{t_0} = \frac{p_1}{1-p_3} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{p_2}{t_0} = \frac{p_2}{1-p_3}$$

\therefore por tanto $\mathbf{P}(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_1}{1-p_3}, \frac{p_2}{1-p_3} \right)$ (ver figura 3.33).

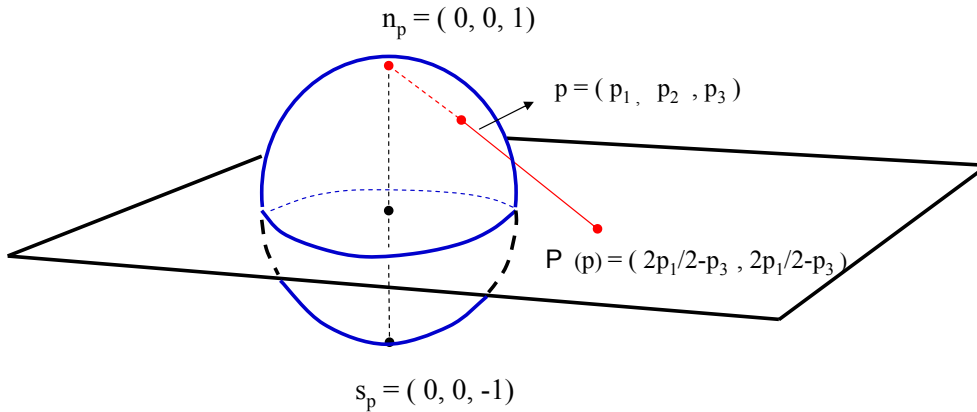


Figura 3.33: Proyección Estereográfica con origen en $(0, 0, 0)$.

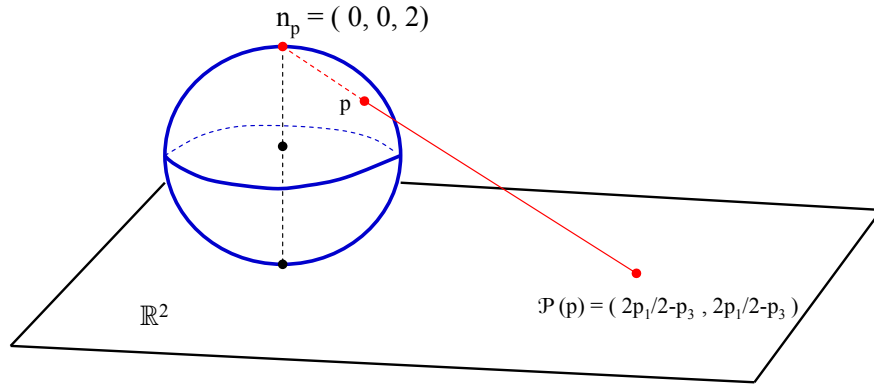
En el caso que $\mathcal{N}_p(0, 0, 2)$ y $\mathcal{S}_p = (0, 0, 0)$ tenemos a $S^2(1)$ sobre el plano \mathbb{R}^2 , como se muestra en la figura 3.34.

Podemos parametrizar \mathbf{L} por:

$$\begin{aligned} \text{con } q = (q_1, q_2, 0) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_p = (0, 0, 2) \quad \text{resulta que} \\ t \longmapsto tq + t(1-t)\mathcal{N}_p = t(q_1, q_2, 0) + (1-t)(0, 0, 2) \\ = (tq_1, tq_2, 2(1-t)) \end{aligned}$$

Existe, por lo tanto, t_0 tal que

$$\begin{aligned} p = (p_1, p_2, p_3) = t_0 q + (1-t_0)\mathcal{N}_p = (t_0 q_1, t_0 q_2, 2-2t_0) \\ \Rightarrow p_3 = 2-2t_0 \quad \Rightarrow 2t_0 = 2-p_3 \quad \Rightarrow t_0 = \frac{2-p_3}{2-p_3} \end{aligned}$$

Figura 3.34: Proyección Estereográfica con $\mathcal{S}_p = (0, 0, 0)$.

con lo que

$$\mathcal{P}(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{2p_1}{2-p_3}, \frac{2p_2}{2-p_3} \right)$$

Ahora bien, si φ es cualquier carta de $S^2(1)$, la función compuesta $\mathcal{P} \circ \varphi$ es diferenciable; de manera que $\mathcal{P} : S^2(1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable.

Veamos ahora que $d\mathcal{P}$ es 1-1 en cada punto.

En efecto,

$$\varphi(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sen u, 1 + \sen v)$$

es la parametrización de la totalidad de $S^{(2)}(1)$ con la excepción del polo sur, que está en el origen.

Ahora bien, la definición geométrica nos dice que \mathcal{P} transforma las curvas u -paramétricas de φ (las circunferencias de latitud) en circunferencias del plano con centro en el origen, y que \mathcal{P} transforma las curvas v -paramétricas (los meridianos de longitud) en rectas que parten del origen como se ve en la figura 3.35.

En efecto, ambas familias de curvas imagen son simplemente las curvas paramétricas de $\psi = \mathcal{P}(\varphi)$, y, al tomar en cuenta la fórmula de \mathcal{P} , vemos que

$$\psi(u, v) = \mathcal{P}(\varphi(u, v)) = \left(\frac{2 \cos v \cos u}{1 - \sen v}, \frac{2 \cos v \sen u}{1 - \sen v} \right)$$

puesto que $d\mathcal{P}(\varphi_u) = \psi_u$, $d\mathcal{P}(\varphi_v) = \psi_v$, se demuestra la regularidad de $d\mathcal{P}$ al calcular ψ_u, ψ_v ; que resultan ser ortogonales y diferentes de cero, y en consecuencia *l.i.* (En el polo sur, se necesita una demostración diferente, puesto que φ no es parametrización allí. (Ejercicio). En conclusión, tenemos que \mathcal{P} es un difeomorfismo (T.F.I).

El plano tangente también nos permite hablar del ángulo entre dos superficies interceptadas por un punto en común: se consideran los vectores normales y el coseno del ángulo que ellos forman; es decir:

Definición 3.7.6 Sea M una superficie regular en \mathbb{R}^3 y sea $Z_p \in \mathbb{R}^3$ con $p \in M$. Se dice que Z_p es normal o perpendicular a M en p , si $Z_p \cdot v_p = 0$ para todos los vectores

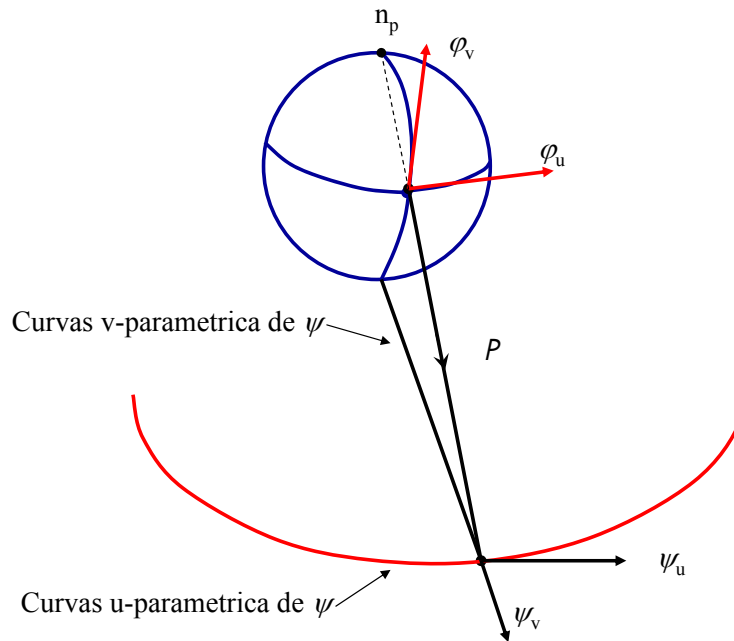


Figura 3.35: Proyección de las curvas u y v paramétricas.

tangentes $v_p \in T_p M$. Representaremos por M_p^\perp el conjunto de todos los vectores normales a M en p . Entonces $\mathbb{R}_p^3 = T_p M \oplus M_p^\perp$.

Necesitamos considerar también campos de vectores sobre superficies regulares.

Definición 3.7.7 Un campo de vectores V sobre una superficie regular M es una aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $V_{(p)} \in \mathbb{R}_p^u$. Se dice que el campo de vectores V es tangente a M si $V_{(p)} \in T_p M$ para todo $p \in M$, y se dice que V es normal o perpendicular a M si $V_{(p)} \in M_p^\perp$ para todo $p \in M$.

Por $p \in M$, existen dos vectores unitarios de \mathbb{R}^3 $N(p)$ y $-N(p)$; llamados *vectores normales unitarios* por p . La línea recta que pasa a través de p y contiene un vector normal unitario por p es llamada *Recta Normal* por p . El ángulo entre dos superficies interceptadas por el punto p es el ángulo entre sus planos tangentes (o sus líneas normales por p). (Ver figura 3.36).

Bien, por fijar una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ por el punto $p \in M$, podemos definir un vector normal unitario por cada punto $q \in \varphi(U)$ por la regla

$$N(q) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(q)$$

Así que obtenemos una aplicación diferenciable $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$, pues φ_u y φ_v lo son; a veces no es posible extender esta aplicación de manera diferenciable a toda la superficie M .

Observación: La definición dada por una superficie regular requiere que la carta (φ, U) sea de clase C^∞ , aunque basta a veces que sea de C^4 .

Por ejemplo, la existencia y continuidad del plano tangente depende solamente de la existencia y continuidad de la primera derivada parcial. Podría, por tanto suceder, que

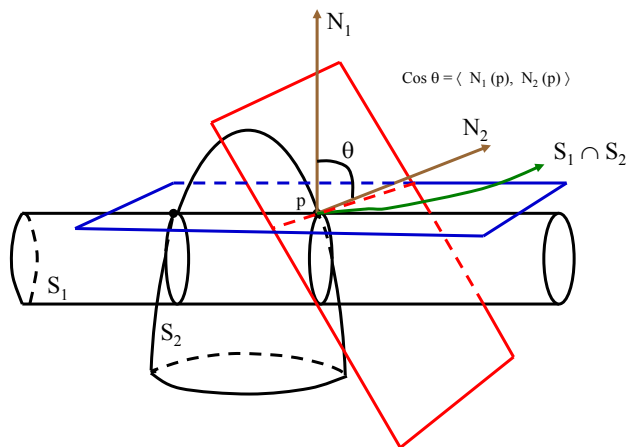


Figura 3.36: Ángulos entre superficies.

el gráfico de una función $z = f(x, y)$ admita un plano por cada punto, y no tenerse la suficiente diferenciabilidad para satisfacer la definición de superficie regular. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7.1 Considere el gráfico de la función $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ generada por rotar la curva $z = x^{4/3}$ alrededor del eje z , ya que la curva es simétrica respecto al eje z , y tiene derivada continua, la cual se anula por el origen; es claro que el gráfico de $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ admite al plano XY como el plano tangente por el origen.

Sin embargo, la derivada parcial z_{xx} no existe por el origen, y el gráfico considerado no es una superficie regular.

No intentaremos envolvernos en este tipo de situación, por eso se pide C^∞ , para evitar el estudio de la mínima condición de diferenciabilidad que se requiere en cada caso.

3.7.1. La Primera Fórmula Fundamental. Área

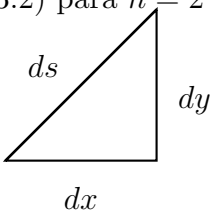
Comenzaremos el estudio de las estructuras geométricas de la superficie. Una de ellas es quizás la primera forma fundamental, la que nos permite hablar de distancia sobre una superficie.

Uno de los hechos fundamentales sobre la noción de distancia es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es que en el se verifica el Teorema de pitágoras. Esto significa que si $p = (p_1, \dots, p_n)$ y $q = (q_1, \dots, q_n)$ son puntos en \mathbb{R}^n , entonces la distancia s entre p y q está dada por

$$s^2 = (p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2 \quad (3.4)$$

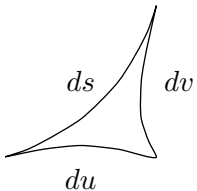
¿En qué medida es esta noción diferente para una superficie? Puesto que en general una superficie está curvada, la distancia sobre ella no es la misma que la distancia en el

espacio euclídeo; en particular (3.2) es falsa en general sobre superficies arbitrarias. Para hacer el cálculo tenemos una versión infinitesimal de (3.2) para $n = 2$ que es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$


$$(3.5)$$

donde dx y dy son cantidades pequeñas en la dirección de x y y , respectivamente. La fórmula (3.3) es válida para \mathbb{R}^2 . La ecuación correspondiente para una superficie es:



$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$(3.6)$$

Esta es la noción clásica (siglo XIX) para representar la métrica de una superficie. Así, (3.4) es una versión infinitesimal “deformada” del Teorema de Pitágoras.

¿Como definir una métrica (medida) sobre superficie?. Sea M una superficie regular en \mathbb{R}^3 . El producto escalar de \mathbb{R}^3 induce un producto escalar sobre M por restricción. Si v_p y $w_p \in T_p(M) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$, donde \langle, \rangle es el producto escalar de \mathbb{R}^3 y $\langle, \rangle_p : T_p M \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$; con esto, \langle, \rangle_p es una forma bilineal simétrica; *i.e.*, $\langle w_p, v_p \rangle_p = \langle v_p, w_p \rangle_p$ y $\langle w_p, v_p \rangle$ es lineal en ambas, en w_p y en v_p . Así, a esta forma bilineal \langle, \rangle_p le corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0$$

$$(3.7)$$

Definición 3.7.8 La forma cuadrática I_p sobre $T_p(M)$, definida por la ecuación (3.5) es llamada la Primera Forma Fundamental de la superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$ por p .

Es meramente la expresión de como la superficie M adquiere el producto interior de \mathbb{R}^3 . Además I_p nos permitirá hacer mediciones sobre M (longitud de curvas, ángulos entre vectores tangentes, área de regiones), sin referirnos el ámbito \mathbb{R}^3 en donde M yace.

Expresamos la *Primera Forma Fundamental* I_p , en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ asociada a la parametrización $\varphi(u, v)$ por p . Ya que $w \in T$ es el vector tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, con $p = \alpha(0) = \varphi(u_o, v_o)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

donde los valores están calculados para $t = 0$; $E(u_o, v_o) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p$, $G(u_o, v_o) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p$ y $F(u_o, v_o) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p$ son los coeficientes de la Primera Forma Fundamental

I_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p(M)$. Si hacemos recorrer p en una vecindad coordenada de $\varphi(u, v)$, obtenemos las funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ las cuales son diferenciables en esta vecindad.

Ejemplo 3.7.2 *Un sistema de coordenadas de un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa a través de $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y contiene los vectores ortonormales $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ es dado como sigue:*

$$\varphi(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2 \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Para computar la Primera Forma Fundamental (P.F.F.) para un punto arbitrario de P , observemos que $\varphi_u = w_1$, $\varphi_v = w_2$; ya que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, las funciones E, F, G son constantes dadas por $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Así que la P.F.F. es el Teorema de Pitágoras en P ; esto es,

$$w^2 = a^2 + b^2 \text{ en la base } \{\varphi_u, \varphi_v\}.$$

Ejemplo 3.7.3 *El cilindro recto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite la parametrización $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ con*

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$$

Al calcular la P.F.F., nótese que

$$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1)$$

y por tanto

$$E = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

y

$$F = 0 \quad , \quad G = 1.$$

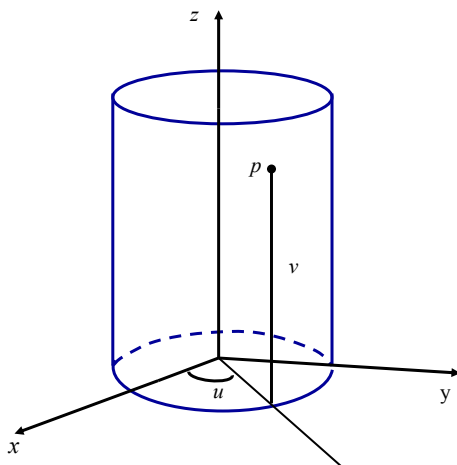


Figura 3.37: La Primera Forma Fundamental sobre el Cilindro.

Aunque el cilindro y el plano son distintas superficies obtenemos el mismo resultado.

Ejemplo 3.7.4 Al considerar la hélice $(\cos u, \sin u, au)$ y la línea a través de cada punto de ésta paralela al plano xy e interceptando al eje z , se obtiene la superficie generada por estas líneas llamada el Helicoide; el cual admite la parametrización siguiente:

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}.$$

φ lleva una cinta abierta con anchura 2π del plano uv sobre aquella parte del Helicoide que corresponde a una rotación de 2π a lo largo de la Hélice. (ver figura 3.38) Se verifica

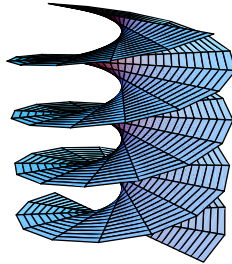


Figura 3.38: La Primera Forma Fundamental sobre el Helicoide.

fácilmente que el Helicoide es una superficie regular (ejercicio). El cálculo de E , F y G en φ son

$$E(u, v) = v^2 + a^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1.$$

Longitud de arco a través de I_p .

Si la longitud de arco s de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ es dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\sigma))} d\sigma \quad (3.8)$$

En particular, si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ está contenida en una vecindad coordenada correspondiente a la parametrización $\varphi(u, v)$, podemos calcular la longitud de arco de α , entre, se dice, 0 y t por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} d\sigma \quad (3.9)$$

De (3.6) se sigue que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}$$

Esto implica que

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F dudv + G(dv)^2$$

lo cual es (3.4). Obsérvese que el parámetro t no se encuentra involucrado en el lado derecho de (3.4), excepto en la medida en la que u y v dependen de t . Podemos considerar ds como la *longitud infinitesimal de arco*, puesto que nos proporciona la función longitud de arco. Cuando integramos sobre una curva arbitraria. Geométricamente, ds se puede interpretar como la *distancia infinitesimal* desde el punto $\varphi(u, v)$ al punto $\varphi(u+du, v+dv)$ medida sobre la superficie.

Observemos también que

$$\begin{aligned}\alpha(t+dt) &= \alpha(t) + \alpha'(t)dt \\ &= \alpha(t) + \varphi_u u'(t)dt + \varphi_v v'(t)dt\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\|\alpha(t+dt) - \alpha(t)\| &= \|\varphi_u u'(t)dt + \varphi_v v'(t)dt\| \\ &= \sqrt{Eu'^2 + 2F'u'v' + G(v')^2} = ds\end{aligned}$$

Un concepto de estándar en el cálculo de varias variables es el diferencial de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; la diferencial df de f está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

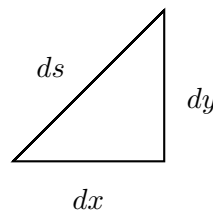
En general, si $\varphi: U \rightarrow M$ es un carta local de una superficie M y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, ponemos

$$df = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u} du + \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v} dv$$

Denominamos a df la diferencial de la función f las diferenciales de las funciones $\varphi((u, v) \rightarrow u$ y $\varphi(u, v) \rightarrow v$ serán representados por du y dv , respectivamente. A pesar de su apariencia, ds será de hecho, la diferencial de una función sobre una superficie tan sólo en muy raras ocasiones.

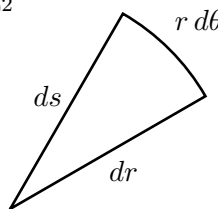
Para el caso $n = 2$, la métrica $(ds)^2$ sobre \mathbb{R}^2 , dada en coordenadas cartesianas por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.10)$$



se expresa en coordenadas polares por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.11)$$



Demostración:

De $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ se tiene que

$$dx = -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr$$

$$dy = r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr$$

Luego,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (-r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr)^2 + (r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, también una superficie parametrizada $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se considera a $ds^2_\varphi = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ como la *métrica riemanniana* o *Primera Forma Fundamental* de la superficie parametrizada φ inducida a partir de \mathbb{R}^3 . Esta métrica determina una función que mide distancia sobre una superficie regular.

Definición 3.7.9 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y sean $p, q \in M$. Entonces la distancia intrínseca $\rho(p, q)$, es la mayor cota inferior de las longitudes de todas las curvas α totalmente contenidas en M y que conectan p y q .

En general, la distancia intrínseca $\rho(p, q)$ será mayor que la distancia euclídea dada por $\|p - q\|$.

También, el ángulo θ bajo el cual dos curvas regulares parametrizadas $\alpha : I \rightarrow M$ y $\beta : I \rightarrow M$ que se interceptan por $t = t_0$ es dada por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}$$

En particular, el ángulo φ de las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u, v)$ es

$$\cos \varphi = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Se sigue de esto que las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) . A tal parametrización se le llama parametrización ortogonal.

Ejemplo 3.7.5 Calculemos la primera forma fundamental de una esfera por un punto de sistema de coordenadas dado por la parametrización

$$\varphi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

Primero,

$$\varphi_\theta(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

y

$$\varphi_\phi(\theta, \phi) = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = 1 \\ F(\theta, \phi) &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = 0 \\ G(\theta, \phi) &= \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = \text{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

Así, si w es un vector tangente a la esfera por el punto $\varphi(\theta, \phi)$, dado en la base asociada a $\varphi(\theta, \phi)$ por $w = a\varphi_\theta + b\varphi_\phi$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 \\ &= a^2 + b^2 \text{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

Como aplicación, determinemos la curva en este sistema de coordenada en la esfera, la cual hace un ángulo constante β con los meridianos $\phi = \text{constante}$. Estas curvas son llamadas “loxodromas” (o curvas de rumbo) de la esfera.

Bien, supongamos que la curva requerida $\alpha(t)$, es la imagen por φ , de una curva $(\theta(t), \phi(t))$ del plano $\theta\phi$ por el punto $\varphi(\theta, \phi)$, donde la curva encuentra el meridiano $\phi = \text{cte.}$; tendremos entonces,

$$\cos \beta = \frac{\langle \varphi_\theta, \alpha'(t) \rangle}{\|\varphi_\theta\| \cdot \|\alpha'(t)\|} = \frac{\theta'}{1 \cdot \sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2 \text{sen}^2 \theta}};$$

ya que en la base $\{\varphi_\theta, \varphi_\phi\}$ el vector $\alpha'(t)$ tiene coordenadas (θ', ϕ') y

$$\langle \varphi_\theta, \theta' \varphi_\theta + \phi' \varphi_\phi \rangle = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle \theta' + \phi' \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = \theta'$$

Luego,

$$\cos \beta = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2 \text{sen}^2 \theta}}$$

lo implica que,

$$(\theta')^2 \tan^2 \beta = (\phi')^2 \text{sen}^2 \theta \quad \Rightarrow \quad (\theta')^2 \tan^2 \beta = (\phi')^2 \text{sen}^2 \theta = 0;$$

así,

$$\frac{\theta'}{\text{sen} \theta} = \pm \frac{\phi'}{\tan \beta},$$

al integrar obtenemos, la ecuación de las loxodromas

$$\log \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm (\phi + C) \cot \beta,$$

donde la constante de integración “C” es determinada por dar un punto $\varphi(\theta_0, \phi_0)$, a través del cual, esta curva pasa.

Cálculo de Áreas:

Definición 3.7.10 Un Dominio de una superficie M es un subconjunto conexo y abierto de M , tal que su frontera es la imagen de un círculo por un homeomorfismo diferenciable, el cual es regular (i.e, su diferencial es no nulo) excepto por un número finito de puntos. Una **región** de M es la unión de un dominio con su frontera. Una región de $M \subset \mathbb{R}^3$ es acotada si está contenida en alguna bola de \mathbb{R}^3 .

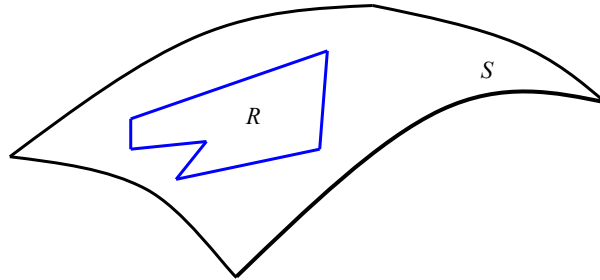


Figura 3.39: La Región R de M .

Consideremos una región acotada R la cual está contenida en una vecindad coordenada $\varphi(U)$ de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. En otras palabras, R es la imagen por φ de una región acotada $Q \subset U$.

La función $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$, definida en U , mide el área del paralelogramo generado por los vectores φ_u y φ_v , es decir

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \triangleleft (\varphi_u, \varphi_v)$$

como se puede ver en la figura 3.40.

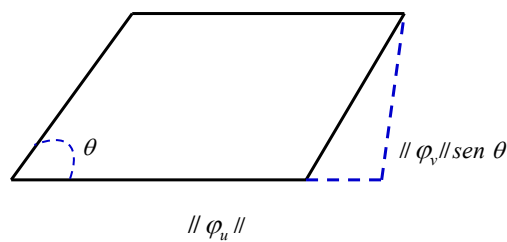


Figura 3.40: Área del paralelogramo generado por los vectores φ_u y φ_v .

En primer lugar, la doble integral

$$\int \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv$$

no depende de la parametrización φ . En realidad, si $\overline{\varphi} : \overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es otra parametrización con $R \subset \overline{\varphi}(\overline{U})$ y $\overline{Q} = \overline{\varphi}(R)$ y el jacobiano del cambio de parámetro $h = \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}$

es $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$, entonces,

$$\begin{aligned} \int \int_{\bar{Q}} \|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\| d\bar{u}d\bar{v} &= \int \int_{\bar{Q}} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| d\bar{u}d\bar{v} \\ &= \int \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene del teorema de cambio de variables para integrales múltiples. Así que:

Definición 3.7.11 Sea $R \subset M$ una región acotada de una superficie regular M contenida en la vecindad coordenada de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$. El número positivo

$$A(R) = \int \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv \quad , \quad Q = \varphi^{-1}(R)$$

es llamada el área de R .

Es conveniente observar que $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2$. Ahora, ya que

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \sin^2 \theta$$

y

$$\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \cos^2 \theta,$$

resulta que

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Ejemplo 3.7.6 Calculemos el área del toro.

Para eso, consideremos la vecindad coordenada correspondiente a la parametrización

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

$0 < u < 2\pi$; $0 < v < 2\pi$; la cual cubre al toro, excepto un meridiano y un paralelo. Los coeficientes de la P.F.F. (I_p), son

$$E = r^2, \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = (r \cos u + a)$$

Ahora consideremos la región R_ε obtenida como la imagen por φ de la región Q_ε dada por

$$Q_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 + \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, \quad 0 + \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\},$$

como lo muestra la figura 3.41 abajo.

Usando la definición de área obtenemos que

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \int \int_{Q_\varepsilon} r(r \cos u + a) dudv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (r^2 \cos u + ra) du \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \end{aligned}$$

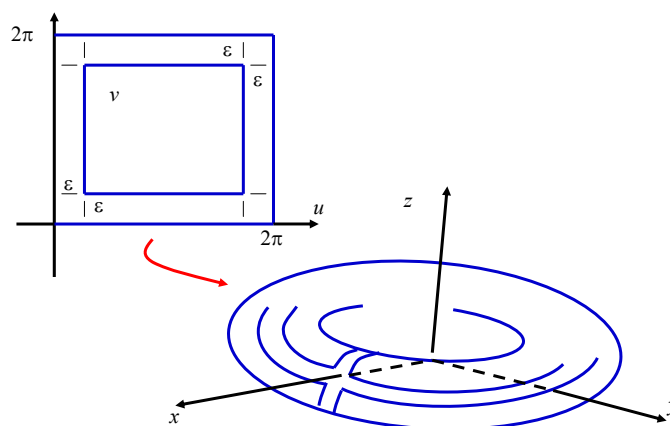


Figura 3.41: Área del Toro.

$$= r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\sin(2\pi - \varepsilon)) - \sin \varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2$$

Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene que

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra$$

Esta coincide con el área calculada por el teorema de Pappus para superficies de Revolución.

3.8. Ejercicios.

Ejercicio 3.1 Probar que los subconjuntos de \mathbb{R}^3 dados respectivamente por las ecuaciones $(x^2 + y^2)^n + cz^2 = 1$ y $x + y + z + xyz = k$ son superficies, siendo n un entero positivo y $c, k \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$. Estudiar que aspecto tienen estas superficies.

Ejercicio 3.2 Sea $\theta(u)$ una función diferenciable. Probar que

$$\varphi(u, v) = (v \cos(\theta(u)), v \sin(\theta(u)), u)$$

es una Superficie regular.

Ejercicio 3.3 Para cada una de las aplicaciones $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se dan a continuación, probar que $im\varphi$ es una superficie y φ convenientemente restringida, es una parametrización.

- $\varphi(u, v) = (\cos u \sen v, \cos u \sen v, \sen u)$
- $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sen v, u)$
- $\varphi(u, v) = (u^2, u^3, v)$
- $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, uv)$
- $\varphi(u, v) = (u^2, uv, v^2)$

Ejercicio 3.4 Sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular y simple en el plano de ecuación $z = 0$. Probar que

$$\mathbb{C}_\lambda = \{\lambda(t) + ve_3 : (t, v) \in \mathbb{R}^2\},$$

donde $e_3 = (0, 0, 1)$, es una Superficie regular.

Ejercicio 3.5 Se considera $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 - 4x^4 - y^2 = 0\}$, y sea $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por las ecuaciones: $x = \text{sen } u$, $y = \text{sen } 2u$, $z = v$.

a) Demostrar que $\text{im}\varphi = M$, $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es biyección, y $\text{rang}(d\varphi) = 2$ en todo punto.

b) Estudiar si M es superficie de \mathbb{R}^3 . ¿Es φ una parametrización de M ?

Ejercicio 3.6 Considere la superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ con las siguientes parametrizaciones:

$\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\varphi(\theta, t) = (\cos \theta, \text{sen } \theta, t)$ y $\mathbb{U} = (-3\pi/4, 3\pi/4) \times (0, 1)$;

$\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\phi(\vartheta, t) = (\cos \vartheta, \text{sen } \vartheta, t)$ y $\mathbb{V} = (\pi/4, 7\pi/4) \times (0, 1)$;

¿Quién es $\varphi \circ \phi^{-1}$? Haga un bosquejo gráfico de la acción de φ y ϕ sobre $S^1 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.7 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre una superficie, M , conexa y tal que $d_p f = 0$, $\forall p \in M$. prueba que f es una función constante.

Ejercicio 3.8 Demostrar que si M , es una superficie contenida en un abierto W , de \mathbb{R}^3 y $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable con matriz jacobiana dF no singular en cada punto, entonces $F(M)$ es una superficie.

Ejercicio 3.9 Sea U abierto de \mathbb{R}^2 M superficie, y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M \subset \mathbb{R}^3$, una aplicación diferenciable con $\text{rango}(d\varphi(0, 0)) = 2$. Probar que φ define (por restricción) sobre cierto entorno abierto de $(0, 0)$ una parametrización local de M .

Ejercicio 3.10 Calcula la diferencial de una parametrización vista como una aplicación entre superficies.

Ejercicio 3.11 En el plano de \mathbb{R}^3 , cuya ecuación es $y = 0$, se considera la curva de ecuación $z^2 = x^2 - 4$. Se gira dicha curva alrededor del eje z , calcula parametrizaciones de la superficie de revolución obtenida. Prueba que dicha superficie es difeomorfa a un cilindro circular recto de radio uno.

Ejercicio 3.12 Sea S^2 la esfera de radio uno y centrada en el origen de \mathbb{R}^3 . Se considera la aplicación antipodal, $A : S^2 \rightarrow S^2$, definida por, $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Prueba que es un difeomorfismo de S^2 .

Ejercicio 3.13 Prueba que los siguientes pares de superficies son difeomorfas

1) Un plano y un paraboloides elíptico

2) Un hiperboloides de revolución de una hoja y un cilindro construido sobre una elipse.

3) Un disco abierto de radio dos en el plano y $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2; x > 0\}$.

Ejercicio 3.14 Sea M una superficie regular y $p_0 \in \mathbb{R}^3 - M$. Prueba que la función $f_{p_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f_{p_0}(p) = \|p - p_0\|^2, \quad \forall p \in M$$

es diferenciable y calcula su diferencial.

Ejercicio 3.15 Sea M una superficie regular y v un vector unitario en \mathbb{R} . Prueba que la función $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(p) = \langle p, v \rangle, \quad \forall p \in M$$

es diferenciable y calcula su diferencial.

Ejercicio 3.16 Calcula la diferencial de la aplicación antipodal en la esfera.

Ejercicio 3.17 Sea M_α una superficie de revolución obtenida al girar una curva, α en el plano xy alrededor del eje z . Sea $R_\theta : M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z . Calcula su diferencial.

Ejercicio 3.18 Calcula el plano tangente, en un punto arbitrario de la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d; \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 3.19 Calcula el plano tangente, en un punto arbitrario de las siguientes superficies:

- 1) Del cilindro $x^2 + y^2 = 16$.
- 2) De una esfera centrada en el punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y radio r .
- 3) Definida por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- 4) Definida por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z > 0$.
- 5) De un elipsoide con semiejes a, b y c .
- 6) De $M = f^{-1}(a)$ en \mathbb{R}^3 preimagen de un valor regular.
- 7) De una superficie de revolución.

Ejercicio 3.20 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre una superficie conexa y tal que su diferencial es idénticamente nula (cero en cada punto). Prueba que dicha función es constante.

Ejercicio 3.21 Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ una parametrización de una superficies regular, M . Se considera la aplicación entre superficies regulares $\phi = \psi^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$. Prueba que es una aplicación diferenciable y calcula su diferencial en un punto genérico, $p \in M$.

Ejercicio 3.22 Se considera la curva (Catenaria) $\eta(u) = (\cosh u, 0, u)$, para $u \in \mathbb{R}$, en el plano de ecuación $y = 0$. Se gira alrededor del eje z para obtener una superficie de revolución, M_η , (Catenoide)

1. Calcula un recubrimiento de parametrizaciones para el catenoide de manera que las curvas coordenadas sean meridianos y paralelos, respectivamente.
2. En una de las parametrizaciones anteriores, sea esta $\psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_\eta$ se considera la curva $\lambda(t) = \psi(4t, e^t)$, calcula las coordenadas de $\lambda'(t)$ respecto de la base asociada con la parametrización anterior.
3. Prueba que este catenoide es difeomorfo a un cilindro circular recto de radio uno.
Sugr: Considere $\chi(x, y, z) = (x \cosh z, y \cosh z, z)$

Ejercicio 3.23 Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy - z = 0\}$. Prueba que es una superficie regular difeomorfa al plano. Calcula su Primera Forma Fundamental.

Ejercicio 3.24 Calcula la Primera Forma Fundamental de una superficie regular definida como el grafo de una función diferenciable, $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.25 Calcula el área de una esfera de radio r , $S^2(r)$.

Ejercicio 3.26 Calcula una fórmula para expresar el área de un trozo de tubo, de radio r , sobre una curva regular, $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Aplica la formula obtenida para el área del tubo de radio r sobre el siguiente trozo de hélice

$$\beta(s) = (a \cos s, a \sin s, bs), \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Ejercicio 3.27 Calcula el área del trozo de superficie de revolución obtenido al girar, alrededor del eje z el siguiente segmento de curva

$$\lambda(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} (s, 0, s), \quad 1 \leq s \leq 4.$$

Ejercicio 3.28 Pruebe que, si las curvas coordenadas forman una red de Chebyshev, es posible reparametrizar la vecindad coordenada de tal modo que la Primera Forma Fundamental tenga por coeficientes:

$$E = 1, \quad F = \cos w, \quad G = 1$$

donde w es el ángulo entre las curvas coordenadas.

Ejercicio 3.29 Calcula los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de S^2 , con respecto a la Proyección Estereográfica \mathcal{P} y utilízalos para calcular la longitud de las curvas $\mathcal{C}_R : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$, definidas por $\mathcal{C}_R(t) = \mathcal{P}(R \cos t, R \sin t)$. Estas curvas son las imágenes por \mathcal{P} de circunferencias. ¿De qué curvas se trata? Dibuja la curva con $R = 1/2$.

Ejercicio 3.30 Siendo \mathcal{P} la Proyección Estereográfica de S^2 , demuestra que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, la aplicación $d_p \mathcal{P}$ conserva ángulos.

Ejercicio 3.31 Muestre que

$$\varphi(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$$

$$0 < u < \infty, \quad 0 < v < 2\pi, \quad \alpha = \text{cte.}$$

es una parametrización del cono con 2α como el ángulo del vértice. En la correspondiente vecindad coordenada, pruebe que la curva

$$\varphi(c e^{(v \sin \alpha \cot \beta)}, v), \quad c = \text{cte.}, \beta = \text{cte.},$$

intersecan los generadores del cono ($v = \text{cte.}$) bajo el ángulo constante β .

SUPERFICIES ORIENTABLES.

“La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica”.
Poincare

Hablando geoméricamente, diríamos que: *Una superficie es orientable cuando queda perfectamente definido un volumen que encierra dicha superficie, que llamaremos interior.* Usualmente, se utilizan dos conceptos de orientabilidad en el plano \mathbb{R}^2 : uno, intrínseco, esto es, que no hace uso del hecho de que \mathbb{R}^2 está contenido en \mathbb{R}^3 y el otro que si lo hace. El primero consiste en orientar el círculo unitario (donde se conviene que la orientación positiva es antihoraria), en cuanto que el segundo, tomamos el plano como $z = 0$ y, decimos que una orientación positiva del plano, es dada por la escogencia del vector $(0, 0, 1)$ perpendicular al plano. Una relación entre los dos conceptos es dada por “la regla de la mano derecha”.

Más precisamente, sea $SL(2, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices 2×2 ortogonales de determinante 1; es decir, si $A \in SL(2, \mathbb{R})$ entonces $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$.

Denotemos por \mathbf{B} el conjunto de todas las bases ortonormales del plano. Dos de tales bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{f_1, f_2\}$ son equivalentes si existe $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $Ae_1 = f_1, Ae_2 = f_2$, esto es, si es posible hacerlas coincidir por una rotación. Esta relación de equivalencia divide a \mathbf{B} en dos clases de equivalencia. Es usual llamar la positiva aquella que contiene la base canónica (o sea, escogemos como positiva el sentido anti-horario). Siendo el origen de \mathbb{R}^2 completamente arbitrario, podemos definir una orientación en cada punto del plano. Tomando todas las bases positivas, decimos que el plano está orientado positivamente.

De manera general, estas rotaciones en \mathbb{R}^2 corresponden a la *estructura compleja* $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $j(p_1, p_2) = (-p_2, p_1)$ la cual es una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido antihorario, además $j^2 = -I, (j_p) \cdot (j_q) = p \cdot q$ y $(j_p) \cdot p = 0, p, q \in \mathbb{R}^2$. También hemos observado, que cada espacio tangente de \mathbb{R}^2 posee una estructura compleja: es decir, para $v_p \in \mathbb{R}_p^2$ se tiene que $j_{v_p} = (j_v)_p \in \mathbb{R}_p^2$ y $j_{v_p} \cdot j_{w_p} = v_p \cdot w_p$. Ahora, puesto que todos los espacios vectoriales de dimensión 2 son isomorfos, cada espacio tangente $T_p M$ de una superficie regular M posee una estructura compleja $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$. Sin embargo, puede suceder que la correspondencia $p \rightarrow J_p$ sea una aplicación continua como función de p o que no lo sea. La continuidad de $p \rightarrow J_p$ significa que la aplicación $p \rightarrow J_p X$ es continua para cada campo de vectores tangente (continuos) X a M por p . De todo esto:

Definición 4.0.1 Una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$ se dice orientable si cada espacio tangente a $T_p M$ posee una estructura compleja J_p tal que la correspondencia $p \rightarrow J_p$ es una aplicación continua.

Bien, pero si consideramos el plano como subespacio de \mathbb{R}^3 , dar una orientación positiva al plano es dar una función

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow \eta(x, y) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Una relación entre el concepto intrínseco y esto último es dada por el producto vectorial de \mathbb{R}^3 . Con la definición 4.0.1 podemos tener el siguiente:

Teorema 4.0.1 Una superficie regular es orientable si y sólo si existe una aplicación continua $p \rightarrow \mathcal{N}(p)$ que asigna a cada $p \in M$ un vector normal y unitario $\mathcal{N}(p) \in (T_p M)^\perp$.

Demostración: Supongamos dada $p \rightarrow \mathcal{N}(p)$. Entonces, para cada $p \in M$ definimos $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ por $J_p v_p = \mathcal{N}(p) \times v_p$. Es fácil probar que J_p aplica $T_p M$ en $T_p M$ y no simplemente en \mathbb{R}^3 , y que la correspondencia $p \rightarrow J_p$ es continua. Además, se sigue que

$$\begin{aligned} J_p^2 v_p &= \mathcal{N}(p) \times (\mathcal{N}(p) \times v_p) \\ &= (\mathcal{N}(p) \cdot v_p) \mathcal{N}(p) - (\mathcal{N}(p) \cdot \mathcal{N}(p)) v_p \\ &= -v_p \end{aligned}$$

Recíprocamente, dada una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$ dotada de una estructura compleja continua $p \rightarrow J_p$ definida globalmente, definimos $\mathcal{N}(p) \in \mathbb{R}^3$ por:

$$\mathcal{N}(p) = \frac{v_p \times J_p v_p}{\|v_p \times J_p v_p\|}, \quad (4.1)$$

para $v_p \in T_p M$ no nulo arbitrario. Entonces $\mathcal{N}(p)$ es perpendicular a ambos vectores v_p y $J_p v_p$. Puesto que v_p y $J_p v_p$ forman una base de $T_p M$, se sigue que $\mathcal{N}(p)$ es perpendicular a $T_p M$. Para comprobar que $\mathcal{N}(p)$ en 4.1 es independiente de la elección de v_p , consideremos w_p otro vector tangente en $T_p M$ no nulo. Entonces w_p es una combinación lineal de v_p y $J_p v_p$:

$$w_p = a v_p + b J_p v_p$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } w_p \times J_p w_p &= (a v_p + b J_p v_p) \times (-b v_p + a J_p v_p) \\ &= (a^2 + b^2)(v_p \times J_p v_p) \end{aligned}$$

y

$$\frac{w_p \times J_p w_p}{\|w_p \times J_p w_p\|} = \frac{a^2 + b^2 (v_p \times J_p v_p)}{\|a^2 + b^2 (v_p \times J_p v_p)\|} = \frac{v_p \times J_p v_p}{\|v_p \times J_p v_p\|}$$

Con lo que $\mathcal{N}(p)$ en 4.1 es bien definido. Puesto que $p \rightarrow J_p$ es continua, también lo es $p \rightarrow \mathcal{N}(p)$. Por tanto $p \rightarrow \mathcal{N}(p)$ es una normal unitaria de la superficie M , definida globalmente continua.

Bien, este teorema establece una descripción mas intuitiva del significado de orientabilidad sobre superficies en \mathbb{R}^3 . Así que, podríamos decir, que orientabilidad de $M \subset \mathbb{R}^3$, permite escoger una orientación de M como una elección de un campo de vectores normal y unitario

definido globalmente sobre M . Ahora, con la idea de establecer esto último referente a las características intrínsecas de M , hacemos las siguientes definiciones, que en el fondo son equivalentes:

Definición 4.0.2 Una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si es posible cubrir M con vecindades coordinadas $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que el conjunto de las parametrizaciones $\mathcal{P} = \{\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow V_i, i = 1, \dots, +\infty\}$ satisfacen las siguientes condiciones: Si $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow V_i$, y $\varphi_j : \mathcal{U}_j \rightarrow V_j$, pertenecen a \mathcal{P} con $\mathcal{U}_j \cap V_j \neq \emptyset$ entonces $\det [d_{(\bar{u}, \bar{v})}(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)] > 0$ para todo $(u, v) \in \varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_j \cap V_j)$. [Las cartas se dicen que están orientadas coherentemente]

Fijado \mathcal{P} en esta definición decimos que M es orientable y que \mathcal{P} es una orientación de M . Sean $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow V_i$ y $\varphi_j : \mathcal{U}_j \rightarrow V_j$ tales que $\varphi_i(x, y) = \varphi_j(\bar{x}, \bar{y}) = p$. Entonces $\{\varphi_{i(u)}, \varphi_{i(v)}\}$ y $\{\varphi_{j(u)}, \varphi_{j(v)}\}$ son bases de $T_p M$ y por tanto,

$$\varphi_{j(u)} = a_{11}\varphi_{i(u)} + a_{12}\varphi_{i(v)}$$

$$\varphi_{j(v)} = a_{21}\varphi_{i(u)} + a_{22}\varphi_{i(v)}.$$

Usando la regla de la cadena tenemos que:

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)_{(u)}$$

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)_{(u)} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)_{(v)} = a_{21}e_1 + a_{22}e_2,$$

y entonces

$$\det [d_{(\bar{u}, \bar{v})}(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)] = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia el concepto de orientación arriba definido es una generalización de la hecha en el plano, ya que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz de cambio de base.

Ejemplo 4.0.1 La esfera $S^2(1)$ es una superficie orientable.

Consideremos la Proyección Estereográfica desde dos ángulos:

$$\Pi_1 : S^2(1) - PN \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$\Pi_1(p) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

y,

$$\Pi_2 : S^2(1) - PS \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$\Pi_2(p) = \left(\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z-1} \right).$$

De esta forma la esfera puede ser cubierta por dos vecindades coordenadas de parámetros (u, v) y (\bar{u}, \bar{v}) de modo que la intersección W de esas vecindades (esfera menos dos puntos) es un subconjunto conexo. Fijamos un punto $p \in W$. Ahora consideremos la inversa de Π_1 que llamaremos $\psi = \Pi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(1) - PN$ la cual en (u, v) es

$$\psi(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

; así que en p , $\psi^{-1}(p) = (u, v)$ y,

$$\begin{aligned} (\Pi_2 \circ \psi)(u, v) &= \Pi_2(\psi(u, v)) = \\ &= \Pi_2\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right) = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} & \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} & \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{array} \right]^{-1} = (-u, -v). \end{aligned}$$

Luego, el determinante jacobiano de cambio de coordenadas

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Como el jacobiano es diferente de cero en W y positivo en $p \in W$, se sigue por la conexidad de W que el jacobiano es positivo en todos los puntos W . Así $S^2 = \Pi_1^{-1}(\mathbb{R}^2) \cup \Pi_2^{-1}(\mathbb{R}^2)$ y $\{(\Pi_1^{-1}(\mathbb{R}^2), \Pi_1), (\Pi_2^{-1}(\mathbb{R}^2), \Pi_2^{-1})\}$ es un atlas compatible para S^2 por lo que S^2 es orientable. \diamond

Ahora, haciendo uso del espacio exterior \mathbb{R}^3 : por un campo de vectores unitarios sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset M$, significará una aplicación diferenciable $\mathcal{N} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ el cual asocia a cada $q \in \mathcal{U}$ un vector normal unitario $\mathcal{N}(q) \in \mathbb{R}^3$ a M por q ; en otras palabras, tal que $\langle \mathcal{N}(q), v_q \rangle = 0$, $\forall v_q \in T_p M$ y todo $q \in M$.

Proposición 1 Una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo sí, existe un campo de vectores normales unitarios a M y no nulos.

Demostración: Sea M orientable. Consideremos \mathcal{P} una orientación de M . Si $p \in M$ y $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow V_i$, con $\varphi_i(u, v) = p$, es una parametrización de p , definimos

$$\mathcal{N}(p) = \frac{\varphi_{i(u)} \wedge \varphi_{i(v)}}{\|\varphi_{i(u)} \wedge \varphi_{i(v)}\|},$$

donde \wedge es el producto vectorial de \mathbb{R}^3 . Veamos que $\mathcal{N}(p)$ es independiente de φ_i en p . Sea $\varphi_j : \mathcal{U}_j \rightarrow V_j$ otra parametrización de \mathcal{P} en $\varphi_j(\bar{u}, \bar{v}) = p$. Tenemos que $\varphi_{j(u)} \wedge \varphi_{j(v)} = \lambda(\varphi_{i(u)} \wedge \varphi_{i(v)})$ donde $\lambda = \det[d_{(\bar{u}, \bar{v})}(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)]$. Como $\lambda > 0$ se sigue que $\mathcal{N}(p)$ es bien definido.

Supongamos ahora que $\mathcal{N}(p)$ es un campo de vectores normales unitarios a M y no nulos. Construimos \mathcal{P} como el conjunto de las parametrizaciones $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow V$ cuya unión

de los contradominios cubre a M , \mathcal{U} es conexo y $\det[\varphi_u, \varphi_v, \mathcal{N}(p)] > 0$, $\varphi(u, v) = p$, para todo $(u, v) \in \mathcal{U}$. Tal \mathcal{P} se puede siempre construir; pues, si $\xi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ no está en \mathcal{P} , definimos $\Psi(u, v) = \xi(-u, v)$ que si está en \mathcal{P} . Veamos ahora que en realidad \mathcal{P} define una orientación en M . Si $\varphi : \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$ y $\Psi : \mathcal{U}_2 \rightarrow V_2$ están en \mathcal{P} con $\varphi(u, v) = \Psi(\bar{u}, \bar{v}) = p$, resulta que, si

$$\begin{aligned}\varphi_u &= a_{11}\Psi_{\bar{u}} + a_{12}\Psi_{\bar{v}} \\ \varphi_v &= a_{21}\Psi_{\bar{u}} + a_{22}\Psi_{\bar{v}},\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\det[\varphi_u, \varphi_v, \mathcal{N}(p)] &= \det[\Psi_{\bar{u}}, \Psi_{\bar{v}}, \mathcal{N}(p)] \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det[\Psi_{\bar{u}}, \Psi_{\bar{v}}, \mathcal{N}(p)] \cdot \det [d_{(\bar{u}, \bar{v})}(\varphi^{-1} \circ \Psi)]\end{aligned}$$

; y por tanto $\det [d_{(\bar{u}, \bar{v})}(\varphi^{-1} \circ \Psi)] > 0$, lo que termina la demostración. \diamond

Corolario 4.0.1 *Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = a\}$, donde $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y a es un valor regular de f , entonces M es orientable.*

Demostración: Dado un punto $(x_0, y_0, z_0) = p \in M$, consideremos la curva parametrizada $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ sobre M que pasa a través de p para $t = t_0$. Ya que la curva está sobre M , tendremos $f(x(t), y(t), z(t)) = a$, $\forall t \in I$.

Al derivar esto último con respecto a t , tendremos por $t = t_0$,

$$f_x(p)x'(t_0) + f_y(p)y'(t_0) + f_z(p)z'(t_0) = 0.$$

Lo que muestra que el vector tangente a la curva por $t = t_0$ es perpendicular a (f_x, f_y, f_z) por p . Ya que la curva y el punto son arbitrarios, tendremos que:

$$N(x, y, z) = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right)$$

es un campo de vectores normales unitarios sobre M . Así que M es orientable. (Prop. 2)

Ejemplo 4.0.2 *Vimos que la esfera $S^2(1)$ es orientable a través de un atlas de cartas, pero basta definir: $N(x, y, z) = (x, y, z)$ o $N(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, un campo de vectores normales a S^2 no nulos, para demostrarlo de nuevo.*

4.1. Superficies no orientables descritas por identificaciones Topológicas.

Ejemplo 4.1.1 *Sea $I = [0, 1]$ y defina la relación de equivalencia:*

- (a) si $x, x' \neq 0, 1$, $x \sim x'$ si y sólo si $x = x'$;
- (b) $1 \sim 0$.

Un modelo de I / \sim en \mathbb{R}^2 es dado por el círculo de la figura 4.1 abajo.



Figura 4.1: Identificación topológica de $I=[0,1]$ con el círculo unitario.

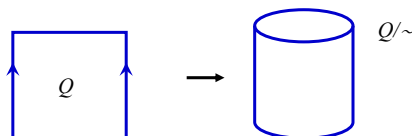


Figura 4.2: Identificación topológica del cilindro.

Ejemplo 4.1.2 En $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ defina la siguiente relación de equivalencia:

- (a) Si $x \neq 0$ y $x' \neq 1$ defina $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $x = x'$ y $y = y'$.
- (b) $(0, y) \sim (1, y')$ si y sólo si $y = y'$. Ver la figura 4.2 abajo.

Ejemplo 4.1.3 En $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ defina otra relación de equivalencia:

- (a) Si $x \neq 0$ y $x' \neq 1$ entonces $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $x = x'$ y $y = y'$.
- (b) $(0, y) \sim (1, y')$ si y sólo si $y + y' = 1$. O sea la clase de equivalencia de los puntos interiores de Q , que contiene el propio punto y los puntos de la forma $(0, y)$ que son identificados con $(1, 1 - y)$. El modelo de Q / \sim en \mathbb{R}^3 es la Cinta de Moebius. Ver figura 4.3.

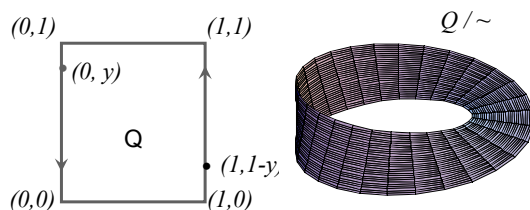


Figura 4.3: Identificación topológica de la Cinta de Moebius.

Ejemplo 4.1.4 En $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ defina la siguiente relación de equivalencia:

- (a) Si $x, x' \neq 0, 1$ y $y, y' \neq 0, 1$ definimos $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $x = x'$ y $y = y'$;
- (b) $(x, 0) \sim (x, 1)$;
- (c) $(0, y) \sim (1, y)$. El modelo de Q / \sim en \mathbb{R}^3 es el toro T_1 . Ver figura 4.4.

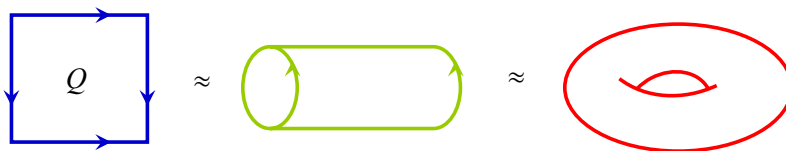


Figura 4.4: Identificación topológica del Toro.

Ejemplo 4.1.5 Nuevamente en $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia es definida por: (a) Si $x, x' \neq 0, 1$ y $y, y' \neq 0, 1$ entonces $(x, y) \sim (x', y')$ si $x = x'$ y $y = y'$; (b) $(x, 0) \sim (x', 1)$ si $x = x'$; (c) $(0, y) \sim (1, y')$ si $y + y' = 1$. Un modelo de Q/\sim es dada abajo en la figura 4.5. A Q/\sim lo llamamos la botella de Klein.

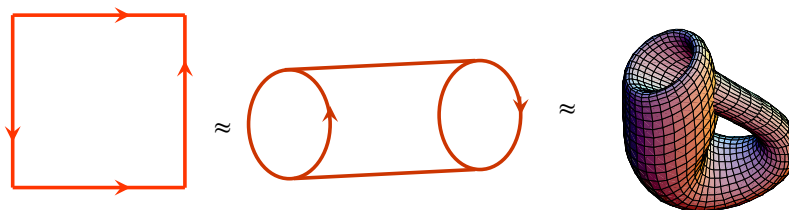


Figura 4.5: Identificación topológica de la botella de Klein.

Ejemplo 4.1.6 En $S^2(1)$ defina $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ si y sólo si $x = x', y = y', z = z'$ o $x = -x', y = -y', z = -z'$ o sea, la relación de equivalencia consiste en identificar puntos antípodos de $S^2(1)$. Geométricamente, en la figura abajo (a), (b), (c) y (d) dan las sucesivas transformaciones de $S^2(1)$ para un modelo de S^2/\sim es llamado el plano proyectivo.

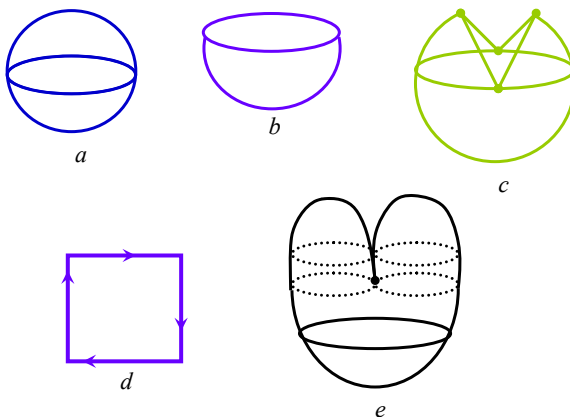


Figura 4.6: Identificación topológica del Plano Proyectivo.

Hemos descrito así topológicamente la banda de Möbius, la botella de Klein y el plano proyectivo real [Ver [5]]. Todas estas superficies (la de Klein no es superficie regular; sin embargo es parametrizada) resultan ser no orientables. Encontrar parametrizaciones locales a estas superficies en \mathbb{R}^3 es, sin embargo, un problema que se puede resolver:

4.1.1. La banda de Möbius.

Como un ejemplo de una superficie no orientable tenemos a la famosa banda de Möbius. Topológicamente, la banda de Möbius se obtiene a partir del rectángulo $[0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ identificando los puntos $(0, t)$ y $(2\pi, -t)$, donde $0 < t < 1$. En términos geométricos, la banda de Möbius es la superficie reglada:

$$\varphi : \mathbb{R} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\theta, t) = \rho(\theta) + t\beta(\theta)$$

donde, $\rho(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ y $\beta(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} \rho(\theta) + \sin\frac{\theta}{2} e_3$, no es difícil ver que, para cada intervalo abierto I de longitud menor que 2π , la restricción de φ a $I \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es una parametrización.

La banda es generada por la rotación de un segmento abierto de longitud ℓ , cuyo centro se desliza sobre la circunferencia ρ , de radio 1 y centro en el origen. El campo $V : \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, 0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\theta, 0) \\ &= (-\cos\theta \sin\frac{\theta}{2}, -\sin\theta \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

es continuo, normal a la banda y $\|V(\theta)\| = 1, \forall\theta$. Es fácil verificar que: $\rho(0) = \rho(2\pi)$ y $V(0) = -V(2\pi)$.

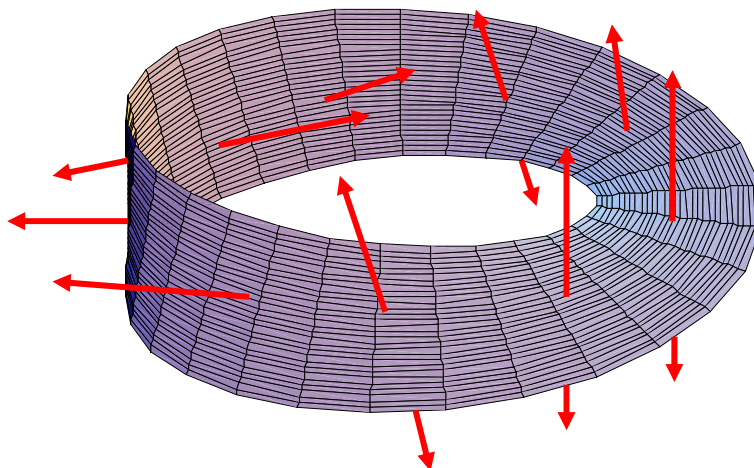


Figura 4.7: Cambio de orientación de un campo unitario en la Cinta de Moebius.

Lema 4.1.1 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie que tiene un campo $N : M \rightarrow T\mathbb{R}^3$ continuo, unitario y normal a M . Sea $\rho : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua tal que $\rho(a) = \rho(b)$. Si $V : [a, b] \rightarrow T\mathbb{R}^3$ es un campo continuo, normal a M y unitario, entonces $V(a) = V(b)$. [Ver[4]]*

Demostración: Si $\bar{N}(t) = N(\rho(t))$ entonces $\bar{N}(t)$ es continuo y $\langle V(t), \bar{N}(t) \rangle = \pm 1$, $\forall t \in [a, b]$; por tanto ,

$$\langle V(a), \bar{N}(a) \rangle = \langle V(t), \bar{N}(t) \rangle = \langle V(b), \bar{N}(b) \rangle, \forall t.$$

Como, $\bar{N}(a) = N(\rho(a)) = N(\rho(b)) = \bar{N}(b)$, concluimos que $V(a) = V(b)$. \diamond

Observación: La orientación no es una propiedad local de una superficie regular. Localmente, cada superficie es difeomórfica en un conjunto abierto del plano y por tanto orientable. La orientación es una propiedad global, en el sentido de que ésta envuelve a toda la superficie.

4.2. Una caracterización de Superficies Orientables Compactas.

El contrario del Corolario 4.0.1 dice lo siguiente: " Una superficie orientable en \mathbb{R}^3 es la imagen inversa de un valor regular de alguna función diferenciable", esto es verdad y no es trivial probarlo. Aunque en el caso particular de superficies compactas (definida en esta parte), la prueba es instructiva y ofrece un ejemplo interesante de un teorema global en geometría diferencial. Consideremos $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable. El punto crucial de la prueba consiste en mostrar que uno puede escoger, sobre una línea o recta normal a través de $p \in M$ un intervalo abierto I_p alrededor de p de longitud, digamos, $2\epsilon_p$ (ϵ_p varía con p) de tal forma que si $p \neq q \in M$, entonces $I_p \cap I_q = \emptyset$. Así que, la unión $\bigcup I_p, p \in M$, constituyen un conjunto abierto V de \mathbb{R}^3 , el cual contiene a M y tiene la propiedad que a través de cada punto de V pasa una única recta normal a M ; entonces V es lo que llamaremos una vecindad tubular de M (ver figura 4.8).

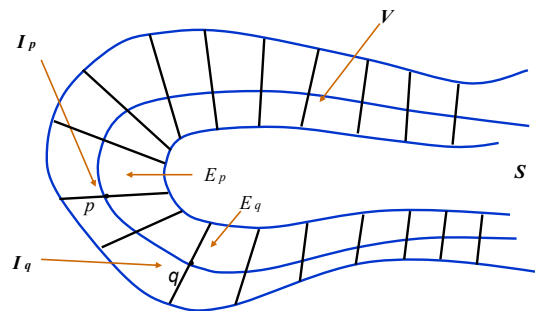


Figura 4.8: Vecindad Tubular.

Supongamos, por un momento, la existencia de una vecindad tubular V de una superficie orientable M . Así, definimos una función $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue: Fijamos una orientación sobre M . Observamos que dos segmentos I_p y I_q , $p \neq q$, de la vecindad tubular no se intersecan. Luego, a través de cada $\hat{p} \in V$ pasa una única recta normal a M que corta a M por un punto p ; por definición $g(\hat{p})$ será la distancia desde p a \hat{p} , con un signo dado por la dirección de vector normal unitario por p . Si probamos que g es diferenciable y que 0 es un valor regular de g , entonces tendremos que $M = g^{-1}(0)$, lo que daría por terminada la prueba.

Bien esto da pie a la demostración local, que a continuación se hará; la prueba global requiere de algunos argumentos topológicos que referiremos a que sea revisada en el Do Carmo Páginas (112-114).

Proposición 2 *Sea M una superficie regular y $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow M$ una parametrización de una vecindad de un punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in M$. Entonces existe una vecindad $W \subset \varphi(\mathcal{U})$ de p en M y un número $\epsilon > 0$ tal que los segmentos de rectas normales que pasan a través de los $q \in W$, con centro en q y longitud 2ϵ , son disjuntos (es decir, W tiene una vecindad tubular).*

Demostración: Considere la aplicación $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v, t) = \varphi(u, v) + tN(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{U}, t \in \mathbb{R},$$

donde $N(u, v) = (N_{\varphi_1}, N_{\varphi_2}, N_{\varphi_3})$ es el vector normal unitario calculado por el punto $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$. De lo cual, F aplica, geoméricamente, el punto (u, v, t) del cilindro $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$ en el punto de la recta normal a M a una distancia t del punto $\varphi(u, v)$. F claramente es diferenciable y su Jacobiano por $t = 0$ es dado por

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \\ N_{\varphi_1} & N_{\varphi_2} & N_{\varphi_3} \end{vmatrix}$$

Por el Teorema de la Función Inversa, existe un paralelepípedo en $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$ decimos $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$, $v_0 - \delta < v < v_0 + \delta$, $-\epsilon < t < \epsilon$, sobre el cual F es 1-1. Pero esto significa que en la imagen W por F del rectángulo, $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$, $v_0 - \delta < v < v_0 + \delta$ los segmentos de rectas normales centrados por $q \in W$ y de longitud $< 2\epsilon$ no se intersecan.

Proposición 3 *Supongamos la existencia de una vecindad tubular $V \subset \mathbb{R}^3$ de una superficie orientable $M \subset \mathbb{R}^3$, y escojamos una orientación para M . Entonces la función $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida como la distancia orientada desde un punto de V al pie de la única recta normal que pasa a través de este punto, es diferenciable y tiene a cero como un valor regular.*

Demostración: Miramos otra vez la aplicación $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida en la proposición 2, donde suponemos que $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es compatible con la orientación dada.

Denotando por x, y y z las coordenadas de $F(u, v, t) = (u, v) + tN(u, v)$ podemos escribir:

$$F(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))$$

ya que el jacobiano $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}$ es distinto de cero por $t = 0$, podemos invertir F en algún paralelepípedo $Q : u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \quad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta, \quad -\epsilon < t < \epsilon$, para obtener una aplicación diferenciable $F^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z))$ donde $(x, y, z) \in F(Q) = V$. Pero la función $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ en la declaración de la proposición 2 es precisamente $t = t(x, y, z)$. Así que, g es diferenciable. Además, 0 es un valor regular de g ; porque si no $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$ para algún punto donde $t = 0$; así que, la diferencial dF^{-1} no sería singular para $t = 0$, lo cual sería una contradicción.

4.3. Ejercicios.

Ejercicio 4.1 Encuentre una orientación del Toro

Ejercicio 4.2 Prueba que todo grafo es una superficie orientable y calcula un campo global y unitario al mismo tiempo..

Ejercicio 4.3 Prueba que una esfera y un elipsoide son superficies orientables.

Ejercicio 4.4 Demuestra que toda superficie revolución es orientable, probando que admite un campo de vectores global, normal y unitario .

Ejercicio 4.5 Prueba que todo tubo es una superficie orientable, definiendo un campo de vectores global, normal y unitario.

Ejercicio 4.6 Prueba que el Helicoide es una superficie orientable.

Ejercicio 4.7 Prueba que la orientabilidad es una propiedad invariante por difeomorfismos.

Ejercicio 4.8 Probar que si una superficie M posee un subconjunto A que es difeomorfo a la Cinta de Möbius, entonces M no es orientable.

Ejercicio 4.9 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. cuya curvatura $\kappa_\alpha(s)$, nunca es nula para cualquier $s \in I$, y sea

$$\psi(s, v) = \alpha(s) + r(n(s)\cos(v) + b(s)\sen(v)), \quad r > 0, s \in I, v \in (0, 2\pi)$$

una superficie parametrizada (el tubo de radio r alrededor α ,) donde $n(s)$ y $b(s)$ son los vectores normal y binormal de α en s , respectivamente. Demostrar que cuando ψ es regular, su vector normal es

$$N(s, v) = n(s)\cos(v) + b(s)\sen(v)$$

Ejercicio 4.10 La Botella de Klein (un encaje en \mathbb{R}^4). Sean $a, r > 0$ y $B_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $B_k(u, v) = ((a+r \cos v)\cos u, (a+r \cos v)\sin r \sin v \cos u/2, \sin v \sin u/2)$. Entonces la Botella de Klein es la imagen de B_k . Probar que:

1. $B_k(u, v) = B_k(u + 4m\pi, v + 2n\pi)$ y $B_k(u, v) = B_k(u + 2m\pi, 2nm\pi - v)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. B_k no es orientable. Sug: Considere un camino cerrado sobre B_k y muestre que un campo de vectores normales unitarios no puede ser una función continua a lo largo de este.

Ejercicio 4.11 El Plano Proyectivo (un encaje en \mathbb{R}^4). Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Definamos $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = f(S^2)$. Verificar que:

1. $\forall p \in S^2, f(p) = f(-p)$;
2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es una superficie no orientable.

“Las leyes de la matemática no son meramente invenciones o creaciones humanas. Simplemente ”son”: existen independientemente del intelecto humano. Lo más que puede hacer un hombre de inteligencia aguda es descubrir que esas leyes están allí y llegar a conocerlas.”.
Mauritis Cornelis Escher

Definición 5.0.1 : Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con orientación N . La aplicación $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma sus valores en la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N : M \rightarrow S^2$, así definida, es llamada la **aplicación de Gauss** en M . (Ver figura)

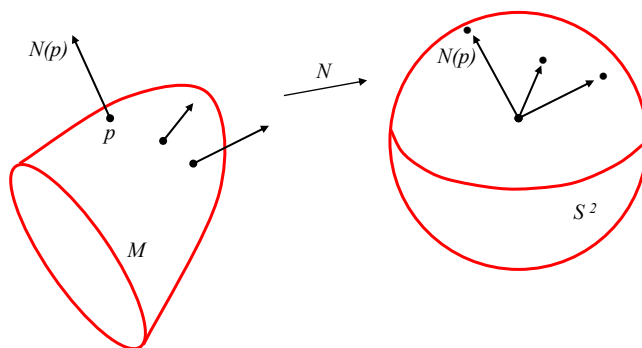


Figura 5.1: La aplicación de Gauss.

Se puede verificar directamente, que la aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial $d_p N$ por $p \in M$ es una aplicación lineal de $T_p(M)$ a $T_{N(p)}(S^2)$. Ya que $T_p(M)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son planos paralelos, $d_p N$ se puede mirar como una aplicación lineal sobre $T_p(M)$.

La aplicación lineal $d_p N : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ opera como sigue. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en M con $\alpha(0) = p$, consideramos la curva parametrizada $(N \circ \alpha)(t) = N(t)$ en la esfera S^2 ; esta no es más que la restricción del campo vector normal N a la curva α . El

vector tangente $N'(0) = d_p N(\alpha'(0))$ es un vector en $T_p M$. (En realidad en $T_{N(p)}(S^2)$ (ver figura 1). Este mide la razón de cambio del vector normal N , restringido a la curva α por $t = 0$. Así, $d_p N$ mide cuanto N se aleja de $N(p)$ en una vecindad de p . En el caso de curvas, ésta medida es dada por el número de curvatura. En el caso de superficie, esta medida es caracterizada por una aplicación lineal.(Ver figura 5.2)

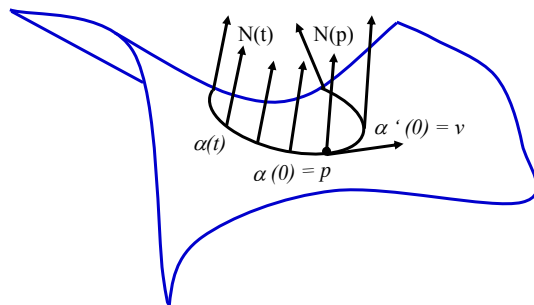


Figura 5.2: Variación de la diferencial de la aplicación de Gauss .

Ejemplo 5.0.1 : Para un plano P dado por $ax + by + cz + d = 0$ el vector normal $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ es constante y por tanto $dN \equiv 0$ (Ver figura 5.3)

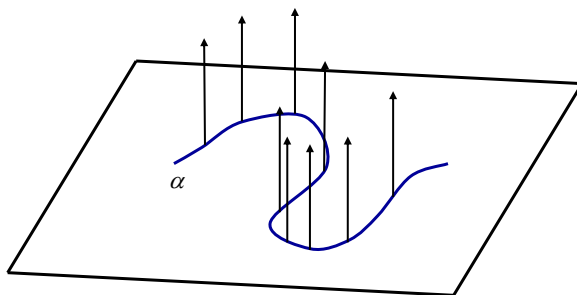


Figura 5.3: La Diferencial de la aplicación de Gauss en el plano .

Ejemplo 5.0.2 Considere la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada en S^2 , entonces

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$$

lo cual muestra que el vector (x, y, z) es normal a la esfera por el punto (x, y, z) . Así, $\overline{N} = (x, y, z)$ y $N = (-x, -y, -z)$ son campos de vectores normales unitarios en S^2 . Fijemos una orientación en S^2 por escoger $N = (-x, -y, -z)$ como campo de vectores normales. Nótese que N señala hacia el centro de la esfera[ver figura 3]. Restringido a la

curva $\alpha(t)$, el campo de vectores $N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$ es una función vectorial de t , y en consecuencia,

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$$

$$N'(t) = d_{\alpha(t)}N(\alpha(t))$$

así que, $d_p N(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S^2)$. Nótese que con la selección de \bar{N} como campo normal (es decir, con la orientación opuesta), obtendremos

$$d_p \bar{N}(v) = v$$

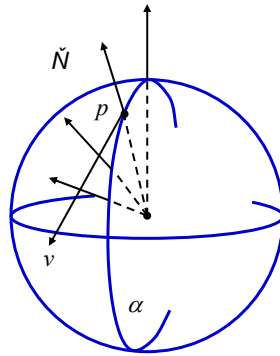


Figura 5.4: La Diferencial de la aplicación de Gauss sobre la esfera .

Ejemplo 5.0.3 : Considere el cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

Por un argumento similar al ejemplo 5.0.2, vemos que $\bar{N} = (x, y, 0)$ y $N = (-x, -y, 0)$ son campos vectores normales unitarios. Fijamos una orientación por escoger $N = (-x, -y, 0)$ como campo de vector unitario.

Por considerar, una curva $(x(t), y(t), z(t))$ contenida en el cilindro, es decir, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, seremos capaces de ver que a lo largo de esta curva

$$N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$$

y por tanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0)$$

Concluimos lo siguiente: si v es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z , entonces

$$dN(v) = \bar{0} = 0v;$$

si w es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy , entonces $dN(w) = -w$. En consecuencia, los vectores v y w son autovectores de dN con autovalores 0 y -1 , respectivamente.

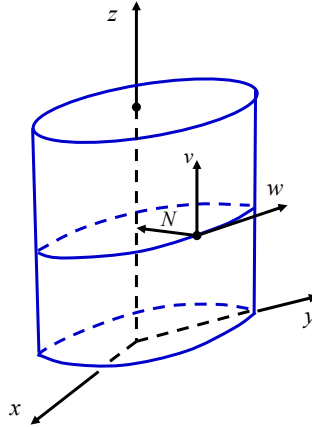


Figura 5.5: La Diferencial de la aplicación de Gauss sobre el cilindro .

Ejemplo 5.0.4 : Analicemos el punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$. Para esto consideremos una parametrización dada por

$$\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$$

y calculemos el campo de vector normal $N(u, v)$. Obtenemos sucesivamente

$$\varphi_u = (1, 0, -2u), \varphi_v = (0, 1, 2v),$$

$$N = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \right)$$

Nótese que $\varphi_u(p) = (1, 0, 0)$ y $\varphi_v(p) = (0, 1, 0)$ los canónicos a lo largo de los ejes x y y , respectivamente. Por tanto, el vector tangente para p a la curva $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$, tiene, en \mathbb{R}^3 , coordenadas $(u, (0), v'(0), 0)$ (Fig. 5) . Restringido a esta curva y computando $N'(0)$, obtenemos

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

y en consecuencia, por p ,

$$d_p N(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2v'(0), 0)$$

De esto, el vector $(1, 0, 0)$ y el vector $(0, 1, 0)$ son autovectores de $d_p N$ con autovalores 2 y -1, respectivamente

Ejemplo 5.0.5 : El método de los ejemplos previos, aplicado al punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloides $z = x^2 + ky^2, k > 0$ muestra que los vectores unitarios a lo largo del eje x y el eje y son auto vectores de $d_p N$ con autovalores 2 y $2k$, respectivamente (suponiendo que N está señalando hacia la región acotada por el paraboloides). (Ver figura (5.7)).

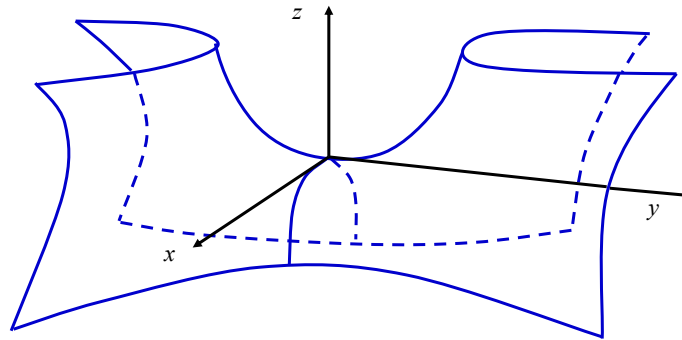


Figura 5.6: La aplicación de Gauss sobre la silla del mono.

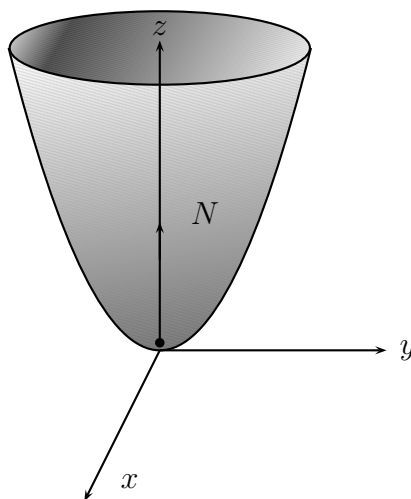


Figura 5.7: La aplicación de Gauss sobre el paraboloides parabólico.

5.1. La Segunda Forma Fundamental

Proposición 5.1.1 : *La diferencial $d_p N : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta.*

Demostración:

Ya que $d_p N$ es lineal, es suficiente verificar que $\langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p N(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(M)$. Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización de M por p y $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ la base asociada a $T_p(M)$. Si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en M con $\alpha(0) = p$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_p N(\alpha'(0)) &= d_p N(\varphi_u u'(0) + \varphi_v v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

en particular, $d_p N(\varphi_u) = N_u$ y $d_p N(\varphi_v) = N_v$.

En consecuencia, para probar que $d_p N$ es auto adjunta, es suficiente mostrar que

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_v, N_v \rangle$$

Para ver esto, tómesese derivada de $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ y $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$, relativa a v y u respectivamente para obtener

$$\langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$$

Así que,

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle.$$

El hecho de que $d_p N : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ sea lineal auto-adjunta nos permite asociar a $d_p N$ una forma cuadrática Q en $T_p(M)$ dado por $Q(v) = \langle d_p N(v), v \rangle$, $v \in T_p(M)$.

Definición 5.1.1 La forma cuadrática Π_p , definida en $T_p(M)$ por $\Pi_p(v) = -\langle d_p N(v), v \rangle$ es llamada la **Segunda Forma Fundamental** de M por p .

Proposición 5.1.2 Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva en M , entonces

$$\alpha'' \cdot N = -d_p N(\alpha') \cdot \alpha' = \Pi_p(\alpha')$$

Demostración:

$$\alpha' \cdot N = 0 \Rightarrow \alpha'' \cdot N + \alpha' \cdot N' = 0 \Rightarrow \alpha'' \cdot N = -\alpha' \cdot N' = -d_p N(\alpha') \cdot \alpha' = \Pi_p(\alpha').$$

Obsérvese que $\alpha'' \cdot N$ se puede interpretar geoméricamente como la componente de la aceleración de α en la dirección perpendicular a M . Es decir, todas las curvas en M con vector tangente en el punto p , tiene la misma componente normal de α'' en p a saber $-d_p N(\alpha') \cdot \alpha'$. Es la componente de α'' que se ven obligadas a tener dichas curvas debido a la forma de la superficie $M \in \mathbb{R}^3$.

Definición 5.1.2 : Sea C una curva regular en M que pasa a través de $p \in M$, κ la curvatura de C por p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C , y N es el vector normal a M por p . El número $k_n = \kappa \cos \theta$ es llamado la **curvatura normal** de $C \subset M$ por p . En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector curvatura $\alpha'' = \kappa n$ sobre la dirección del normal a la superficie por p , con signo dado por la orientación N de M por p ; es decir,

$$k_n = \langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Observación: La curvatura normal de C no depende de la orientación de C , sino que cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

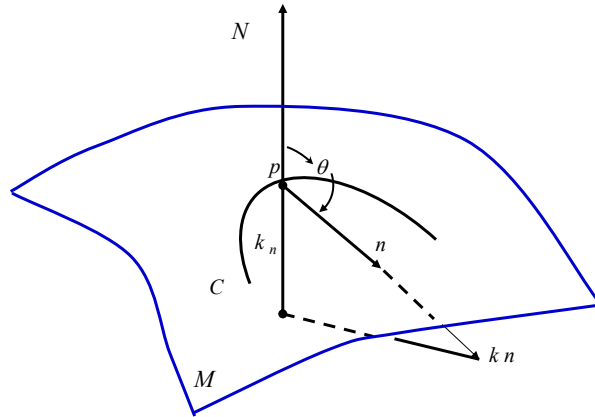


Figura 5.8: La curvatura normal.

Para dar una interpretación de la *segunda forma fundamental* Π_p , considere la curva regular $C \subset M$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C y con $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal a la curva $\alpha(s)$, tendremos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Por tanto,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha'(0)) &= - \langle d_p N(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, k_n \rangle(p) = k_n(p) \end{aligned}$$

En otras palabras, la *segunda forma fundamental* Π_p , para un vector unitario $v \in T_p(M)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa a través de p y tangente a v . En particular,

Proposición 5.1.3 : (*Meusnier*). *Todas las curvas que yacen sobre una superficie M y que tienen por un punto dado $p \in M$ la misma recta tangente por este punto tienen la misma curvatura normal.*

La proposición (5.1.3) nos permite hablar de la *curvatura normal* a lo largo de una dirección por p .

Es conveniente usar la siguiente terminología.

Dado un vector unitario $v \in T_p(M)$, la intersección de M con el plano que contiene a v y $N(p)$ es llamada la **sección normal** de M por p a lo largo de v . (Figura 5.9). En una vecindad de p , una sección normal de M por p es una curva plana regular sobre M , cuyo vector normal n por p es $\pm N(p)$ o cero; su curvatura en consecuencia es igual al valor absoluto de la curvatura normal a lo largo de v por p . Con esta terminología, la proposición 2 dice que el valor absoluto de la curvatura normal por p de una curva $\alpha(s)$ es igual a la curvatura de la sección normal de M por p a lo largo de $\alpha'(0) = v$.

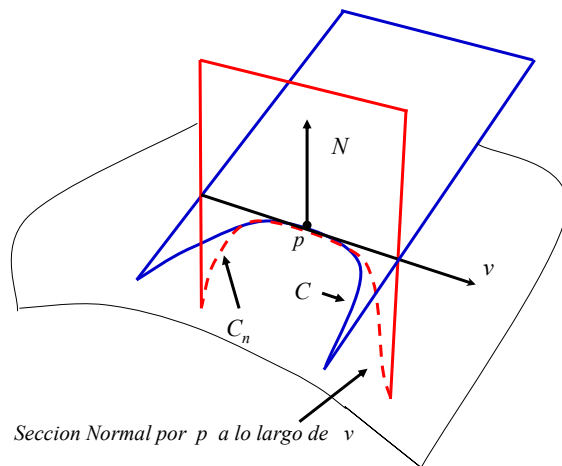
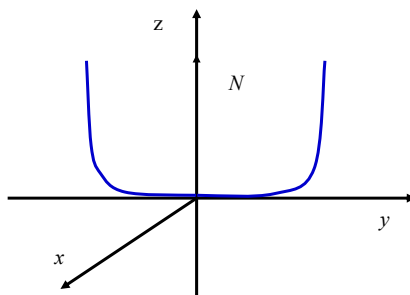


Figura 5.9: Sección normal.

Ejemplo 5.1.1 : Considere la superficie de revolución obtenida por rotar la curva $z = y^4$ alrededor del eje z (Figura 5.10). Observamos que la curvatura de la curva $z = y^4$ por $p = (0, 0, 0)$ es igual a cero. Más aún, ya que el plano xy es un plano tangente a la superficie por p , el vector normal $N(p)$ es paralelo al eje z . En consecuencia, cualquier sección normal por p se obtiene de la curva $z = y^4$ por rotación; se sigue que ésta tiene curvatura cero. Así que toda **curvatura normal** será cero por p , con lo que $d_p N = \bar{0}$.

Figura 5.10: Curvatura normal nula por $p = (0, 0, 0)$.

De los ejemplos anteriores tenemos que:

En el plano del ejemplo (5.0.1), todas las secciones normales son rectas, en consecuencia, sus curvaturas normales son cero. Así $\Pi_p \equiv \bar{0}$ por todo punto. Esto coincide con el hecho de que $dN \equiv \bar{0}$.

En la esfera S^2 del ejemplo (5.0.2), con \bar{N} como orientación, las secciones normales a través de un punto $p \in S^2$ son círculos con radio 1. Así, toda curvatura normal es igual a 1, y $\Pi_p(v) = 1$ para todo $p \in M$ y todo $v \in T_p(M)$ con $\|v\| = 1$.

En el cilindro del ejemplo (5.0.3), las secciones normales por un punto p varían desde un círculo perpendicular al eje del cilindro a una línea recta paralela al eje del cilindro, pasando a través de una familia de elipses. Así, las curvaturas normales varían de 1 a 0.

No es difícil ver, que geoméricamente 1 es la máxima y 0 es la mínima curvatura normal, respectivamente por p . Sin embargo, una aplicación del teorema sobre formas cuadráticas da una simple prueba de esto. En realidad, vimos en el ejemplo (5.0.3) que los vectores w y v (correspondientes a las direcciones de las curvaturas normales 1 y 0, resp.) son auto-vectores de $d_p N$ con autovalores -1 y 0, respectivamente. Así que Π_p toma sus valores extremos en estos vectores, como afirmamos. Nótese que tal procedimiento nos permite chequear que tales valores extremos son 1 y 0.

Ejercicio: Analizar las secciones normales por el punto $p = (0, 0, 0)$ del paraboloides hiperbólico.

5.1.1. Curvaturas Principales. Líneas de Curvatura. Curvatura de Gauss y Curvatura Media gaussiana.

Consideremos ahora la aplicación lineal autoadjunta $d_p N$. Para cada punto $p \in M$ existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(M)$ tal que $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$ y $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. Más, k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$) son el máximo y el mínimo de Π_p restringido al círculo unitario de $T_p(M)$, i.e son los valores extremos de la curvatura normal por p .

Definición 5.1.3 : *La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 son llamadas curvaturas principales por p ; las direcciones correspondientes, i.e, las direcciones dadas por los autovectores e_1, e_2 son llamadas **direcciones principales** por p .*

Por ejemplo, en el plano todas las direcciones por todos los puntos son direcciones principales.

Lo mismo sucede con la esfera. En ambos casos, la Π_p por cada punto es constante por el vector unitario; así que, toda dirección es un extremo para la curvatura normal. En el ejemplo (5.0.3), los vectores v y w dan las direcciones principales por p , correspondientes a las curvaturas principales 0 y 1, respectivamente. En el paraboloides del ejemplo (5.0.4), los ejes x y y están a lo largo de las direcciones principales con curvaturas principales -2 y 2, respectivamente.

Definición 5.1.4 : *Si una curva convexa regular C sobre M , es tal, que para todo $p \in C$ la recta tangente de C es una dirección principal por p , entonces C se dice que sea una línea de curvatura.*

Proposición 5.1.4 : *(Olinde Rodríguez)*

Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular C sobre M sea una línea de curvatura de M es que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de C , donde $N(t) = (N \circ \alpha)(t)$ y $\lambda(t)$ es un función diferenciable de t . En este caso, $-\lambda(t)$ es la (principal) curvatura a lo largo de $\alpha'(t)$.

Demostración: Es suficiente observar que si $\alpha(t)$ está contenida en una dirección principal, entonces $\alpha'(t)$ es un autovector de dN y

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

el contrario es inmediato.

El conocimiento de las curvaturas principales por p nos permite calcular fácilmente la curvatura normal a lo largo de una dirección dada de $T_p(M)$. En realidad, sea $v \in T_p(M)$ con $\|v\| = 1$. Ya que e_1 y e_2 forman una base ortonormal de $T_p(M)$, tendremos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre e_1 y v en la orientación de $T_p(M)$. La curvatura normal k_n a lo largo de v es dado por

$$\begin{aligned} k_n &= \Pi_p(v) = -\langle d_p N(v), v \rangle \\ &= -\langle d_p N(e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \operatorname{sen} \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (\text{Fórmula de Euler}) \end{aligned}$$

(expresión de Π_p en la base $\{e_1, e_2\}$)

Dada una aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ donde $\dim V = 2$ y la base $\{v_1, v_2\}$ de V , recordemos que

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \operatorname{traza}(A) = a_{11} + a_{22}$$

donde (a_{ij}) es la matriz de A en la base $\{v_1, v_2\}$. Sabemos que esos números no dependen de la base $\{v_1, v_2\}$ que se escoja y son, por tanto, adheridos a la aplicación lineal A .

En nuestro caso, el $\det(dN) = (-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$ (producto de curvaturas principales), y la traza de dN es la suma negativa $-(k_1 + k_2)$ de curvaturas principales.

Si cambiamos la orientación de la superficie, el determinante no cambia. (en realidad la dimensión es siempre esencial aquí); la traza, sin embargo cambia de signo.

Definición 5.1.5 : Sea $p \in M$ y sea $d_p N : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de $d_p N$ es la Curvatura Gaussiana \mathbb{K} de M por p . La mitad de la traza negativa de $d_p N$ es llamada la Curvatura Media Gaussiana, \mathbb{H} de M por p .

En términos de curvaturas principales podemos escribir

$$\mathbb{K} = k_1 k_2 \qquad \mathbb{H} = (k_1 + k_2)/2$$

Definición 5.1.6 : Un punto de una superficie M es llamado

- 1.- **Elíptico** si $\det(d_p N) > 0$
- 2.- **Hiperbólico** si $\det(d_p N) < 0$
- 3.- **Parabólico** si $\det(d_p N) = 0$, con $d_p N \neq 0$
- 4.- **Planar** si $d_p N = 0$

Es claro que esta definición no depende de la orientación de la superficie que se escoja. Por un punto *elíptico* \mathbb{K} es positiva. Ambas curvaturas principales tienen el mismo signo, y por lo tanto todas las curvas que pasan a través de este punto tienen su vector normal señalando hacia el mismo lado del plano tangente por este punto. Los puntos de la esfera son *elípticos*. El punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$ (Ejemplo 5.7), es un punto *elíptico*. Por un punto *hiperbólico*, \mathbb{K} es negativa. Las curvaturas principales tienen signos opuestos, y por lo tanto existen curvas por p cuyo vector normal $N(p)$, señala hacia cualquier lado del plano tangente por p . El punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$, es un punto *hiperbólico*. Por un punto *parabólico*, \mathbb{K} es nula; pero una de las curvaturas principales no es nula. Los puntos del cilindro (Ejemplo 5.7) son puntos parabólicos. Finalmente, por un punto planar, todas las curvaturas principales son nulas. Los puntos del plano satisfacen trivialmente esta condición. Un ejemplo no trivial de un punto *planar* es dado en el ejemplo 5.10.

5.1.2. Puntos Umbilicales. Líneas Asintóticas. Indicatriz de Dupin. Líneas Conjugadas.

Definición 5.1.7 : Si por $p \in M$, $k_1 = k_2$, entonces p es llamado punto umbilical de M ; en particular, los puntos planares ($k_1 = k_2 = 0$) son puntos umbilicales.

Todos los puntos de la esfera y de un plano, son puntos *umbilicales*. Usando el método del ejemplo 5.10, podemos verificar que el punto $(0, 0, 0)$ del paraboloides $z = y^2 + x^2$ es un (no planar) punto *umbilical*.

Proposición 5.1.5 : Si todos los puntos de una superficie conexa M son umbilicales, entonces M está contenida en un plano o en una esfera.

Demostración: Primero nótese que M tiene curvatura de Gauss constante $\mathbb{K} \geq 0$. En efecto, sea $\mathbf{k} : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que en cada $q \in M$, $\mathbf{k}(q)$ es el valor común de las curvaturas principales en dicho punto. Sea $p \in M$, y $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow M$ una parametrización de M por $p \in V = \varphi(\mathcal{U})$. Podemos suponer que V es conexo. Entonces se tiene que,

$$N_u = dN(\varphi_u) = -\mathbf{k} \varphi_u \quad (5.1)$$

$$N_v = dN(\varphi_v) = -\mathbf{k} \varphi_v \quad (5.2)$$

Al derivar (5.1) con respecto a v y (5.2) con respecto a u , y restando los resultados, obtenemos que:

$$\mathbf{k}_v \varphi_u - \mathbf{k}_u \varphi_v = 0 \quad (5.3)$$

Siendo φ_u y φ_v linealmente independientes, resulta que $\mathbf{k}_u = \mathbf{k}_v = 0$, lo que implica que \mathbf{k} es constante en V como también lo es la curvatura de Gauss $\mathbb{K} = \mathbf{k}^2 \geq 0$. Ahora, sea \mathcal{W} el conjunto de puntos $q \in M$ para los cuales $\mathbb{K}(q) = \mathbb{K}(p)$. Pero esto hace que \mathcal{W} sea cerrado, y por lo anterior también es abierto. Pero M es conexa, $\mathcal{W} = M$. Lo que prueba que \mathbb{K} es constante no negativa sobre M . Consideremos el caso en que $\mathbb{K} = 0$. Entonces, \mathbf{k}

y dN son aplicaciones nulas; N es constante y por tanto M está contenida en un plano. Si $\mathbb{K} > 0$, elegimos $p \in M$, el normal por este punto $N(p)$, y veamos que el punto $\rho = p + \frac{1}{\mathbf{k}(p)} N(p)$ equidista de todos los puntos de M . Para esto, elija $q \in M$ arbitrario, y sea $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ una curva con $a < 0 < 1 < b$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Vamos a definir ahora una nueva función $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\mathbf{k}(\alpha(t))} N(\alpha(t))$$

Pero $t \rightarrow \mathbf{k}(\alpha(t))$ es constante, con lo que

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{\mathbf{k}(\alpha(t))} (N \circ \alpha)'(t) \quad (5.4)$$

Ya que

$$(N \circ \alpha)'(t) = dN(\alpha'(t)) = -\mathbf{k}(\alpha(t)) \alpha'(t),$$

resulta en (5.4) que

$$\beta'(t) = 0$$

Entonces, $\beta = cte.$; más, $\beta = \rho$ (se reduce a un punto). Por tanto,

$$\rho = \beta(0) = \beta(1) = q + \frac{1}{\mathbf{k}(q)} N(q) \quad (5.5)$$

De (5.5) se tiene que

$$\|\rho - q\| = \frac{1}{\mathbf{k}(q)}$$

Luego, M está contenida en una esfera de radio $\frac{1}{\mathbf{k}(q)}$ y centro ρ . \diamond

Definición 5.1.8 : *Sea p un punto en M . Una dirección asintótica de M por p es una dirección de $T_p M$ para la cual la curvatura normal es cero. Una curva asintótica de M es una curva conexa regular $C \subset M$ tal que para cada $p \in C$ la tangente de C por p es una dirección asintótica.*

Un vector v será asintótico cuando $k_n(v) = \langle dN_p(v), v \rangle = 0$, lo que nos dice, que en una dirección asintótica, M no se aleja de su plano tangente.

Lema 5.1.6 : *Sea p un punto $M \subset \mathbb{R}^3$*

- (1) *Si $\mathbb{K}(p) > 0$ no hay direcciones asintóticas en p .*
- (2) *Si $\mathbb{K}(p) < 0$, hay entonces exactamente dos direcciones asintóticas en p , que quedan bisecada por las direcciones principales a un ángulo θ tal que $\tan^2 \theta = \frac{-k_1(p)}{k_2(p)}$.*
- (3) *Si $\mathbb{K}(p) = 0$, entonces toda dirección es asintótica si p es punto de planicie; de lo contrario, hay exactamente una dirección asintótica, que es también principal.*

Demostración: Todos estos casos se deducen de la Fórmula de Euler

$$k_n(v) = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta$$

- (1) Puesto que $k_1(p)$ y $k_2(p)$ tienen el mismo signo, $k_n(v)$ nunca es nula.
- (2) Aquí $k_1(p)$ y $k_2(p)$ tienen signos opuestos. Y para obtener las dos direcciones asintóticas, vamos a resolver la ecuación

$$0 = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta.$$

Bien, para resolver y llegar a tal ecuación vamos a definir para $p \in M$, la Indicatriz de Dupin: el conjunto de vectores w de $T_p(M)$ tal que $\Pi_p(w) = \pm 1$.

Para escribir la ecuación de la Indicatriz de Dupin en una forma más conveniente, sea (x, y) las coordenadas cartesianas de $T_p(M)$ en la base ortogonal $\{e_1, e_2\}$, donde e_1 y e_2 son autovectores de $d_p N$. Dado $w \in T_p(M)$, sean ρ y θ las coordenadas polares definidas por $w = \rho v$, con $\|v\| = 1$ y $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, si $\rho \neq 0$. Por la fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \Pi_p(w) = \rho^2 \Pi_p(v) \\ &= k_1(p) \rho^2 \cos^2 \theta + k_2(p) \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= k_1(p) x^2 + k_2(p) y^2 \end{aligned}$$

donde $w = x e_1 + y e_2$. Así, las coordenadas (x, y) de un punto de la Indicatriz de Dupin satisface la ecuación

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1.$$

Por tanto, la Indicatriz de Dupin es unión de cónicas en $T_p(M)$. Además, la curvatura normal a lo largo de la dirección determinada por w es

$$k_n(v) = \Pi_p(v) = \pm \left(1/\rho^2 \right)$$

Para un punto elíptico, la Indicatriz de Dupin es una elipse (k_1 y k_2 tienen el mismo signo); esto corrobora a (1); más, ésta elipse degenera en un círculo si el punto es umbilical no planar ($k_1 = k_2 = 0$). Para un punto hiperbólico, k_1 y k_2 tienen signo opuesto. La Indicatriz de Dupin está compuesta de dos hipérbolas con un par de asíntotas en común. A lo largo de estas asíntotas k_n es cero; por tanto, son direcciones asintóticas. Esto justifica la terminología y muestra que un punto hiperbólico tiene exactamente dos direcciones asintóticas.

- (3) Si p es un punto llano, entonces $k_1(p) = k_2(p) = 0$, en consecuencia, $k_n(v)$ es nula. Si solamente $k_2(p) = 0$, entonces $k_n(v) = k_1(p) \cos^2 \theta$ será cero solamente cuando $\cos \theta = 0$, es decir, en la dirección principal $v = e_1$. Aquí la Indicatriz de Dupin se transforma en dos líneas. [Ver figura 5.11]

Con esto podemos reforzar el hecho de que la segunda forma fundamental da la forma de la superficie M en \mathbb{R}^3 . Otra manera de obtener la Indicatriz de Dupin geoméricamente es, cortando M con planos paralelos a $T_p(M)$, redimensionando la escala de las curvas de intersección, y tomamos el limite cuando los planos se aproximan a $T_p(M)$ [Ver figura(5.12)abajo]. Si Π_p tiene rango dos, obtenemos una curva limite, en este caso las cónicas dadas por $\pm 1 = \Pi_p(w) = k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2$

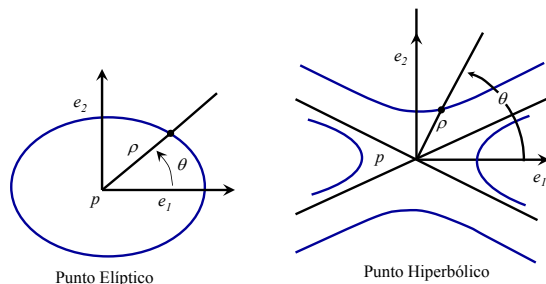


Figura 5.11: Indicatriz de Dupin.

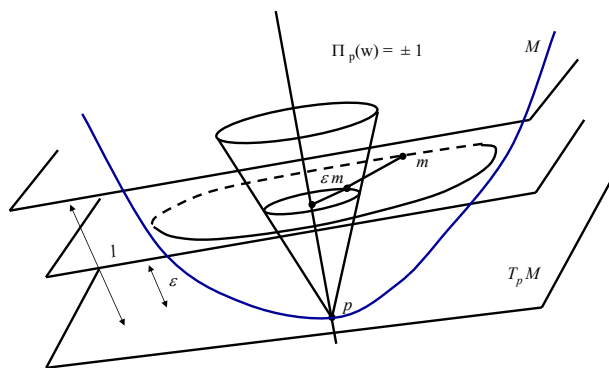


Figura 5.12: Indicatriz de Dupin a través de la cónica $\Pi_p(w) = \pm 1$.

Definición 5.1.9 : Una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ es llana cuando su curvatura gaussiana es cero, y es mínima cuando su curvatura gaussiana media es cero.

Ejemplo 5.1.2 Los planos y los cilindros.

Las superficies mínimas tienen curvatura gaussiana $\mathbb{K} \leq 0$, puesto que $\mathbb{H} = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$, entonces $k_1 = -k_2$ y, en consecuencia, $\mathbb{K} = k_1 k_2 \leq 0$. También, una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ es mínima si y sólo si existen dos direcciones asintóticas en cada uno de sus puntos (parte (2) del lema anterior, $\mathbb{K} < 0$ con $\theta = \pm\pi/4$; las dos direcciones son ortogonales).

Definición 5.1.10 : Sea p un punto sobre una superficie M . Dos vectores no nulos $w_1, w_2 \in T_p(M)$ son conjugados si $\langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p N(w_2) \rangle = 0$. Dos direcciones γ_1, γ_2 por p son conjugadas si un par de vectores no nulos w_1, w_2 paralelos a γ_1 y γ_2 , respectivamente, son conjugados.

Esta definición no depende de w_1 y w_2 , ni de γ_1 y γ_2 (verificarlo!). Se sigue que las direcciones principales son conjugadas y que una dirección asintótica es conjugada a ella misma. Además, por un punto umbilical no planar, cada par de direcciones ortogonales es un par conjugado de direcciones, y por un punto umbilical planar cada dirección es conjugada a cualquier otra dirección.

Supongamos que $p \in M$ no es umbilical, y sea $\{e_1, e_2\}$ base ortogonal de $T_p(M)$ determinada por $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$ y $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. Sean θ y φ los ángulos que un par de direcciones γ_1 y γ_2 hacen con e_1 . Así que, γ_1 y γ_2 son conjugadas sii

$$k_1 \cos \theta \cos \varphi = -k_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi. \quad (5.6)$$

En realidad, γ_1 y γ_2 son conjugadas sii los vectores $w_1 = e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta$ y $w_2 = e_1 \cos \phi + e_2 \operatorname{sen} \phi$ son conjugados. Así,

$$0 = \langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = -k_1 \cos \theta \cos \varphi - k_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

; de aquí que (5.6) se sigue.

Cuando ambas k_1 y k_2 son no nulas (p es elíptico o hiperbólico), la condición (5.6) permite construir geoméricamente las direcciones conjugadas en términos de la Indicatriz de Dupin por p . Por un punto elíptico; sea γ la recta a través del origen de $T_p(M)$ y considere los puntos q_1, q_2 de γ con la Indicatriz de Dupin (Fig. 1). Las rectas de la Indicatriz de Dupin por q_1 y q_2 son paralelas, y su dirección común γ' es conjugada a γ [ver ejercicio 12, pág. Do Carmo].

5.2. Técnica de cálculo utilizando parametrizaciones.

Las definiciones dadas hasta hora han evitado el uso de las cartas, pues se ha querido resaltar la geometría intrínseca de los objetos introducidos; por su puesto, esto no es fácil cuando la superficie sea complicada, por eso veamos la ayuda que se nos presta al trabajar con vecindades coordenadas.

Si $\varphi : U \rightarrow M$ es una carta dentro de $M \subset \mathbb{R}^3$, ya hemos empleado las tres funciones de valores reales

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

definidas en U . Aquí $E > 0$, $G > 0$ son los cuadrados de las rapidezces de las curvas u y v , parámetros de φ , y F mide el ángulo de coordenada que forman φ_u y φ_v , puesto que $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \cos \theta = \sqrt{EG} \cos \theta$, como lo muestra la figura 5.13 abajo.

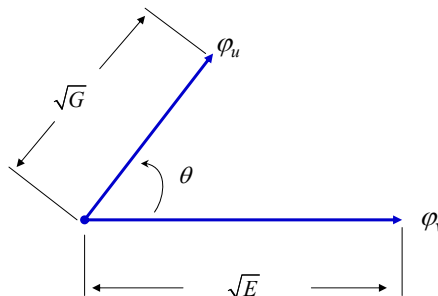


Figura 5.13: θ ángulo entre φ_u y φ_v .

E, F y G son la “funciones de distorsión” de la carta φ : miden la manera en que φ distorsiona la región plana U en \mathbb{R}^3 para poder aplicarla a la región curva $\varphi(U)$ en M .

Estas funciones determinan completamente el producto vectorial de los vectores tangentes en puntos de $\varphi(U)$, si se tiene que

$$v = v_1\varphi_u + v_2\varphi_v \quad \text{y} \quad w = w_1\varphi_u + w_2\varphi_v,$$

entonces

$$\langle v, w \rangle = Ev_1w_1 + F(v_1w_2 + v_2w_1) + Gv_2w_2$$

donde se evalúan las funciones en (u, v) , y $\varphi(u, v)$ es el punto de aplicación de v y w .

Ya que $\varphi_u \times \varphi_v$ es ortogonal a φ_u y a φ_v , resulta que $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = EG - F^2$ y $N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$, es normal a M por $\varphi(u, v)$. Ahora, siendo $\varphi(u, v)$ una parametrización sobre M , con $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ curva parametrizada sobre M , con $\alpha(0) = p$, resulta que $\alpha'(0) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$ y que $dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$, pues N_u y N_v pertenecen a $T_p(M)$; así,

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \end{aligned} \quad (1)$$

y por tanto, $dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\varphi_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\varphi_v$, en consecuencia

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Así, se demuestra que dN en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es dada por la matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$. Esta matriz no es necesariamente simétrica, al menos que $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ sea base ortonormal.

Por otra parte, en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ resulta que

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + f v' u' + g(v')^2, \end{aligned}$$

donde, ya que $\langle N, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N, \varphi_{uu} \rangle = \langle N_u, \varphi_u \rangle \\ f &= -\langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \langle N, \varphi_{vu} \rangle = -\langle N_u, \varphi_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Aquí e, f y g son los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental.

Ahora obtendremos los valores de a_{ij} en términos de los coeficientes e, f y g . De la ec. (1) tendremos

$$-f = \langle N_u, \varphi_v \rangle = 9_{11}F + a_{21}G, \quad -f = \langle N_v, \varphi_u \rangle = a_{12}E + a_{12}F,$$

$$-e = \langle N_u, \varphi_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F, \quad -g = \langle N_v, \varphi_v \rangle = a_{12}F + a_{22}e_2,$$

donde E, F y G son los coeficientes de la Primera Forma Fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. La relación previa tiene su expresión matricial de la forma

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

en consecuencia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

donde $()^{-1}$ significa la matriz inversa de $()$. Es fácil chequear que $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$, y que los coeficientes de (a_{ij}) de dN en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (5.8)$$

Mencionamos que las relaciones en (1), con los valores de arriba, son conocidas como las Ecuaciones de Weingarten.

De (5.7) inmediatamente obtenemos que $\mathbb{K} = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$.

Para computar la curvatura media, recordemos que $-k_1, -k_2$ son los autovalores de dN . En consecuencia, k_1 y k_2 satisfacen la ecuación $dN(v) = -kv = -kIv$ para algún $v \in T_p(S), v \neq 0$, donde I es la identidad. Se sigue que la aplicación lineal $dN + kI$ no es invertible; en consecuencia, tiene determinante nulo. Así,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

ó

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0. \quad (5.9)$$

Ya que k_1 y k_2 son las raíces de la ecuación cuadrática (5.9), concluimos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fE + gE}{EG - F^2}; \quad (5.10)$$

por tanto, $k^2 - 2\mathbb{H}k + \mathbb{K} = 0$, con lo que

$$k = \mathbb{H} \pm \sqrt{\mathbb{H}^2 - \mathbb{K}} \quad (5.11)$$

De (5.11), si escogemos $k_1(q) \geq k_2(q), q \in M$, entonces las funciones k_1 y k_2 son continuas en M . Más, k_1 y k_2 son diferenciables en M , excepto, quizás, en los puntos umbilicales ($\mathbb{H}^2 = \mathbb{K}$) de M .

Recordemos que la curvatura normal viene dada por $k_n(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ para v vector tangente unitario por p , pero en general para cualquier vector no nulo w_p , esta se puede definir como $k_n(w_p) = \frac{\langle dN_p(w_p), w_p \rangle}{\|w_p\|^2}$. De esta forma, para $w_p \in T_pM$ se tiene que $w_p = \varphi_u a + \varphi_v b$ donde $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización en p de M y

$$k_n(w_p) = \frac{\langle dN_p(w_p), w_p \rangle}{\|w_p\|^2} = \frac{e(a)^2 + fba + g(b)^2}{E(a)^2 + Fba + G(b)^2} = \frac{II_p(w_p)}{I_p(w_p)}.$$

Ejemplos:

1. **Helicoide:** Esta superficie H , que se ve en la figura queda cubierta por una sola carta $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$, $b \neq 0$, para lo cual $\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$, $E = 1$, $F = 0$ y $G = b^2 + u^2$. En consecuencia, resulta que

$$\varphi_u \times \varphi_v = (b \sin v, b \cos v, u).$$

Para encontrar solamente \mathbb{K} , no hace falta calcular E, F y G , pero, de cualquier forma es prudente hacerlo, puesto que la identidad $\|\varphi_u \vee \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ nos comprueba, entonces, la longitud de $\varphi_u \times \varphi_v$. Si denotamos $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ por w , entonces tendremos que, en el helicoide, $w = \sqrt{b^2 + u^2}$, de manera que

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{W} = \frac{(b \sin v, -b \cos v, u)}{\sqrt{b^2 + u^2}}.$$

A continuación, encontramos:

$$\varphi_{uu} = 0, \quad \varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \quad \text{y} \quad \varphi_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

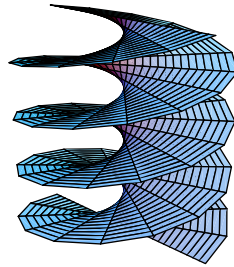


Figura 5.14: El Helicoide.

Es obvio que $\varphi_{uu} = 0$, puesto que las curvas u -paramétricas son rectas. Las curvas v -paramétricas son hélices, y ya habíamos encontrado ésta fórmula. Ahora bien

$$e = \langle N(p), \varphi_{uu} \rangle = 0; \quad f = \langle N(p), \varphi_{uv} \rangle = -\frac{b}{W}; \quad g = \langle N(p), \varphi_{vv} \rangle = 0;$$

por tanto,

$$\mathbb{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-(b/w)^2}{w^2} = \frac{-b^2}{w^4} = \frac{-b^2}{(b^2 + u^2)^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{H} = \frac{Ge + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)} = 0$$

Así, el helicoide es una superficie mínima con curvatura gaussiana $-1 \leq \mathbb{K} < 0$. El valor mínimo $\mathbb{K} = -1$ ocurre en el eje central ($u = 0$) del helicoide, y $\mathbb{K} \rightarrow 0$ a medida que la distancia $|u|$ al eje se incrementa a infinito.

2. **La silla de montar:** $M : z = xy$. Emplearemos la carta $\varphi(u, v) = (u, v, uv)$ y, dentro del mismo formato de antes calculamos $\varphi_u = (1, 0, v)$; $\varphi_v = (0, 1, u)$; $E = 1 + v^2$; $F = uv$ y $G = 1 + u^2$. Aquí, entonces se sigue que:
 $N = (-v, -u, 1)/w$, $w = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$; $\varphi_{uu} = \hat{0}$; $\varphi_{uv} = (0, 0, 1)$
 $\varphi_{vv} = \hat{0}$; $e = 0$, $f = 1/w$ y $g = 0$.
 En consecuencia

$$\mathbb{K} = \frac{-1}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \mathbb{H} = \frac{-uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}$$

En sentido estricto, estas funciones son $\mathbb{K}(\varphi)$ y $\mathbb{H}(\varphi)$ definidas en el dominio \mathbb{R}^2 de φ . Pero resulta fácil expresar directamente \mathbb{K} y \mathbb{H} como funciones en M por medio de las funciones coordenadas cilíndricas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y z . Obsérvese en la figura 5.15 abajo, que $r(\varphi(u, v)) = \sqrt{u^2 + v^2}$ y que $z(\varphi(u, v)) = uv$, en consecuencia, en M

$$\mathbb{K} = \frac{-1}{(1 + r^2)^2}, \quad \mathbb{H} = \frac{-z}{(1 + r^2)^{3/2}}$$

Por consiguiente, la curvatura gaussiana de M depende solamente de la distancia al eje z , pues se empieza a elevar desde $\mathbb{K} = -1$ (en el origen) y asciende a cero a medida que $r \rightarrow +\infty$, mientras que los cambios de \mathbb{H} son más radicales. Puesto que el helicoides es mínimo

$$k_1, k_2 = \frac{\pm b}{(b^2 + u^2)}.$$

En la silla de montar

$$k_1, k_2 = -\frac{-z \pm \sqrt{1 + r^2 + z^2}}{(1 + r^2)^{3/2}}.$$

El cálculo de los auto-vectores queda de ejercicio.

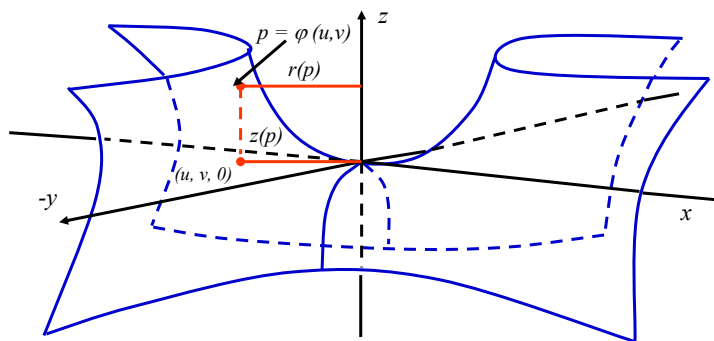


Figura 5.15: La Silla.

3. Considere la superficie $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, donde a es una constante. Se pide:
- Hallar sus curvaturas principales en un punto genérico.
 - Hallar sus curvaturas media y de Gauss.

c) Hallar su curvatura normal.

Demostración: Los coeficientes de la Primera y Segunda Forma Fundamental son:

Ya que

$$\Phi_u = (\cos v, \sin v, 0); \quad \Phi_v = (-u \sin v, u \cos v, a)$$

$$\Phi_{uu} = (0, 0, 0); \quad \Phi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0); \quad \Phi_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0);$$

resulta que,

$$E = \Phi_u \cdot \Phi_u = 1; \quad F = \Phi_u \cdot \Phi_v = 0; \quad G = \Phi_v \cdot \Phi_v = u^2 + a^2.$$

De aquí se tiene que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}; \quad e = 0; \quad f = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}; \quad g = 0$$

Así las Formas Fundamentales son:

$$I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2 \quad y \quad II = \frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du dv$$

a) *Curvaturas Principales.*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (u^2 + a^2) dv^2 = du^2 \Leftrightarrow dv = \pm \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$$

• Si $dv = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$ entonces

$$\kappa_n^1 = \frac{II}{I} = \frac{\frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}}{du^2 \left(1 + (u^2 + a^2) \frac{1}{u^2 + a^2} \right)} = \frac{-a}{u^2 + a^2}$$

• Si $dv = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$ entonces

$$\kappa_n^2 = \frac{II}{I} = \frac{\frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \frac{-1}{\sqrt{u^2 + a^2}}}{du^2 \left(1 + (u^2 + a^2) \frac{1}{u^2 + a^2} \right)} = \frac{a}{u^2 + a^2}$$

b) *Curvaturas media y de Gauss.*

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2}(\kappa_n^1 + \kappa_n^2) = 0$$

$$\mathbb{K} = \kappa_n^1 \kappa_n^2 = -\frac{a}{u^2 + a^2}$$

c) *Curvatura Normal.*

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{\frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du dv}{du^2 + (u^2 + a^2) dv^2}$$

4. Dada la superficie $\psi(u, v) = (\ln u, u + v, v^2 - u)$, con $u > 0$ y $v \in \mathbb{R}$. Se pide:
- Hallar las trayectorias ortogonales a las curvas $\{v = C\}$.
 - Clasificar los puntos de la superficie.
 - Hallar sus líneas asintóticas, teniendo en cuenta todos los casos posibles.

Demostración: Procediendo de manera similar a el ejemplo anterior tenemos:

$$\psi_u = \left(\frac{1}{u}, 1, -1\right); \quad \psi_v = (0, u, 2v)$$

$$\psi_{uu} = \left(-\frac{1}{u^2}, 0, 0\right); \quad \psi_{uv} = (0, 0, 0); \quad \psi_{vv} = (0, -u, 2);$$

Y

$$E = \psi_u \cdot \psi_u = \frac{1}{u^2} + 2; \quad F = \psi_u \cdot \psi_v = 1 - 2v; \quad G = \psi_v \cdot \psi_v = 1 + 4v^2.$$

Con lo que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\xi} = \sqrt{\left(\frac{1}{u^2} + 2\right)(1 + 4v^2) - (1 - 2v)^2}.$$

Así,

$$e = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) (1 + 2v); \quad f = 0; \quad g = \frac{2}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{u}$$

a) *Trayectorias ortogonales a las curvas $\{v = C\}$.* Diferenciando, se tiene que $v = C \Rightarrow dv = 0$, por lo que el vector tangente a las curvas $v = C$ tienen dirección $(du, dv) = (du, 0) \approx (1, 0)$. Luego, si denotamos por (du, dv) a la dirección del vector tangente a las trayectorias buscadas, se ha de verificar la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} + 2 & 1 - 2v \\ 1 - 2v & 1 + 4v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Así, de lo anterior se tiene que,

$$\left(\frac{1}{u^2} + 2\right) du + (1 - 2v) dv = 0$$

Al integrar se obtiene la familia de curvas

$$-\frac{1}{u} + 2u + v - v^2 = C.$$

b) *Clasificación de los puntos de la superficie.* Partimos de

$$\text{sig}(eg - f^2) = \text{sig}\left(\frac{1}{\xi} \frac{1}{u^3} (-(1 + 2v))\right) = \text{sig}(-(1 + 2v))$$

ya que ξ y u son positivos. Por tanto

• $-(1 + 2v) > 0 \Leftrightarrow v < -\frac{1}{2}$. Luego, si $v < -\frac{1}{2}$ y $u > 0$ los puntos son elípticos, con lo cual, no hay líneas asintóticas.

- $-(1+2v) < 0 \Leftrightarrow v > -\frac{1}{2}$. Luego, si $v > -\frac{1}{2}$ y $u > 0$ los puntos son Hiperbólicos, con lo cual, hay dos líneas asintóticas.
 - $-(1+2v) = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{1}{2}$. Luego, si $v = -\frac{1}{2}$ y $u > 0$ los puntos son parabólicos, con lo cual, hay una sola líneas asintóticas.
- c) *Líneas Asintóticas*. Las líneas asintóticas se calculan resolviendo la ecuación

$$II = 0 \Leftrightarrow -\frac{1+2v}{u^2} du^2 + \frac{2}{u} dv^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{du^2}{u} = \frac{2dv^2}{1+2v}$$

- Para los puntos hiperbólicos, sabemos que $v > -\frac{1}{2}$ y $u > 0$. Luego,

$$\frac{du^2}{u} = \frac{2dv^2}{1+2v} \Leftrightarrow \pm \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2v}} dv$$

con lo que nos queda

$$\pm 2\sqrt{u} = \sqrt{2}\sqrt{1+2v} + C \Leftrightarrow \pm\sqrt{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2v} + C.$$

- Para los puntos parabólicos, sabemos que $v = -\frac{1}{2}$ y $u > 0$. Luego,

$$\frac{du^2}{u} = \frac{2dv^2}{1+2v} \Leftrightarrow \pm \frac{du^2}{u} = 0$$

con lo que nos queda

$$du = 0 \Leftrightarrow u = C.$$

5. De ejercicio: Clasifique los puntos de la superficie dada en la portada de este trabajo geoméricamente. Hallar las líneas asintóticas.

◇

Proposición 5.2.1 : Sea $p \in M$ un punto elíptico de una superficie M . Entonces existe una vecindad V de p en M tal que todo punto de V pertenece al mismo lado del plano tangente. Sea $p \in M$ un punto hiperbólico. Entonces para cada vecindad de p existen puntos de M en ambos lados de $T_p(M)$.

Demostración: Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización en p , con $\varphi(0, 0) = p$. La distancia d desde un punto $q = \varphi(u, v)$ al plano tangente $T_p(M)$ es dada por (ver figura) $d = \langle \varphi(u, v) - \varphi(0, 0), N(p) \rangle$, ya que $\varphi(u, v)$ es diferenciable por la Fórmula de Taylor

$$\varphi(u, v) = \varphi(0, 0) + \varphi_u u + \varphi_v v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu} u^2 + 2\varphi_{uv} uv + \varphi_{vv} v^2) + \vec{R};$$

donde las derivadas se calculan por $(0, 0)$ y el resto \vec{R} satisface la condición

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\vec{R}}{u^2 + v^2} = 0.$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
 d &= \langle \varphi(u, v) - \varphi(0, 0), N_{(p)} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle \varphi_{uu}, N_{(p)} \rangle u^2 + 2 \langle \varphi_{uv}, N_{(p)} \rangle uv + \langle \varphi_{vv}, N_{(p)} \rangle v^2 \} + R \\
 &= \frac{1}{2} (eu^2 + 2fuv + gv^2) + R \\
 &= \frac{1}{2} \pi_p(w) + R, \quad \text{donde } w = \varphi_u u + \varphi_v v, \\
 R &= \langle \vec{R}, N_{(p)} \rangle, \quad \text{y } \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{R}{\|w\|} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Para un punto elíptico p , $\Pi_p(w)$ tiene un signo fijo. Por tanto, para todo (u, v) suficientemente cerca de p , d tiene el mismo signo de $\Pi_p(w)$; *i.e.*, todos estos puntos (u, v) pertenecen al mismo lado de $T_p(M)$.

Para un punto hiperbólico p , en cada vecindad de p existen puntos (u, v) y (\bar{u}, \bar{v}) tales que $\Pi_p\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$ y $\Pi_p\left(\frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|}\right)$ tiene signos opuestos (aquí $\bar{w} = \varphi_u \bar{u} + \varphi_v \bar{v}$); tales puntos pertenecen por tanto a distintos lados de $T_p(S)$.

Debemos incluir aquí las definiciones de *Curvas Asintóticas* y *Líneas de Curvaturas*:

1. Una curva regular conexa \mathcal{C} , en una vecindad coordenada de φ es una *curva asintótica* si y sólo si para cualquier parametrización $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, de \mathcal{C} se tiene que $II_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$, $\forall t \in I$; es decir, si y sólo si

$$e(\alpha(t)) u'(t)^2 + 2f(\alpha(t)) u'(t) v'(t) + g(\alpha(t)) v'(t)^2 = 0$$

De esta última ecuación se puede despejar $\frac{v'(t)}{u'(t)} = \varrho(t)$ y por tanto,

$$\varrho(t) = -f \pm \sqrt{f^2 - eg};$$

con lo que al tomar $u(t) = t$ se tiene para $v(t)$, la ecuación diferencial,

$$v'(t) = -f(t, v(t)) \pm \sqrt{f^2(t, v(t)) - e(t, v(t)) g(t, v(t))}.$$

2. Una curva regular conexa \mathcal{C} , en una vecindad coordenada de φ es una *línea de curvatura* si y sólo si para cualquier parametrización $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, de \mathcal{C} se tiene que

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

Eliminando el parámetro $\lambda(t)$ se obtiene la *ecuación diferencial de las líneas de curvaturas*:

$$(fE - eF) u'(t)^2 + (gE - eG) u'(t) v'(t) + (gF - fG) v'(t)^2 = 0$$

5.2.1. Interpretación geométrica de la curvatura gaussiana.

Para concluir esta parte diremos una interpretación geométrica de la curvatura gaussiana en términos de la aplicación de Gauss $N : M \rightarrow S^2$. En realidad, ésta fue la manera en que Gauss mismo introdujo esta curvatura. Para hacer esto, primero necesitamos una definición: Sea M y \overline{M} dos superficies regulares orientadas. Sea $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ una aplicación diferenciable y suponga que para algún $p \in M$, $d_p\psi$ es no singular. Decimos que ψ preserva orientación por p , si dada una base positiva $\{w_1, w_2\}$ en $T_p(S)$, entonces $\{d_p\psi(w_1), d_p\psi(w_2)\}$ es una base positiva en $T_p(M)$, entonces $\{d_p\psi(w_1), d_p\psi(w_2)\}$ es una base positiva en $T_{\psi(p)}(\overline{M})$. Si $\{d_p\psi(w_1), d_p\psi(w_2)\}$ no es positiva, decimos que ψ invierte orientación por p .

Ahora observe que tanto M y S^2 (esfera unitaria) están inmersas en \mathbb{R}^3 . Así, una orientación N sobre S induce una orientación N en S^2 . Sea $p \in M$ tal que d_pN es no singular, ya que para una base $\{w_1, w_2\}$ en $T_p(M)$ se tiene que

$$d_pN(w_1) \times d_pN(w_2) = \det(d_pN) (w_1 \times w_2) = \mathbb{K} w_1 \times w_2,$$

resulta que, la aplicación de Gauss preservaba orientación por $p \in M$ si $\mathbb{K}(p) > 0$ y invierte orientación por $p \in S$ si $\mathbb{K}(p) < 0$. Intuitivamente, esto significa la siguiente (ver figura 5.16): una orientación de $T_p(M)$ induce una orientación a pequeñas curvas cerradas en M alrededor de p ; la imagen por N de estas curvas tendrán la misma orientación o la orientación opuesta a la inicial dependiendo de si p es un punto elíptico o hiperbólico, respectivamente.

Al tomar este hecho en cuenta haremos la convención de que el área de una región contenida en una vecindad conexa V , donde $\mathbb{K} \neq 0$, y el área de su imagen por N tendrán el mismo signo si $\mathbb{K} > 0$ en V , y signos opuestos si $\mathbb{K} < 0$ en V (ya que V es conexo, \mathbb{K} no cambia de signo en V).

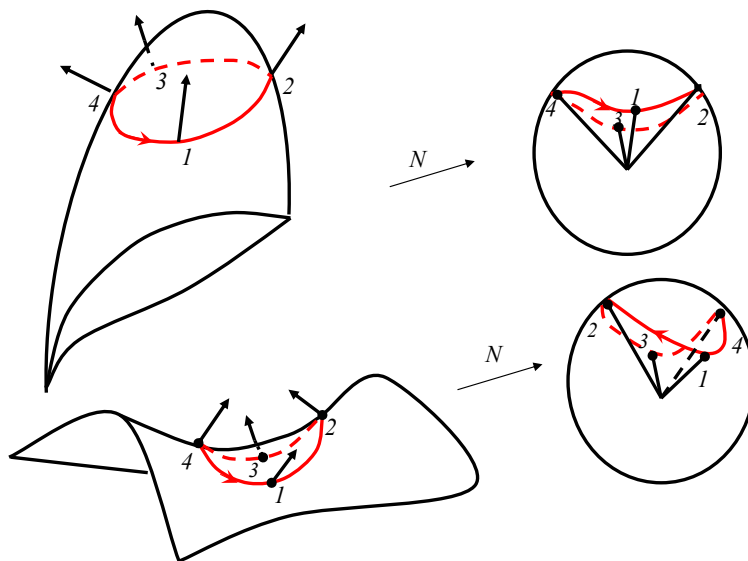


Figura 5.16: N invierte o preserva orientación.

Proposición 5.2.2 : *Sea p un punto de una superficie M tal que la curvatura Gaussiana $\mathbb{K}(p) \neq 0$, y sea V una vecindad conexa de p donde \mathbb{K} no cambia de signo. Entonces*

$$\mathbb{K}(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

donde A es el área de la región $B \subset V$ que contiene a p , A' es el área de la imagen de B por la aplicación de Gauss $N : M \rightarrow S^2$, y el límite es tomado a través de una sucesión de regiones B_n que convergen a p , en el sentido que cualquier esfera alrededor a p , contiene a todos los B_n para n suficientemente grande.

Demostración: El área A de B es dado por $A = \int \int_R \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$, donde $\varphi(u, v)$ es una parametrización en p , cuya vecindad coordenada contiene a V (V se puede suponer suficientemente pequeña) y R es la región del plano uv , correspondiente a B . El área de A' de $N(B)$ es $A' = \int \int_R \|N_u \times N_v\| dudv$.

Ahora, como $N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ y $N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$, con la definición de \mathbb{K} y lo convenido arriba, podemos escribir

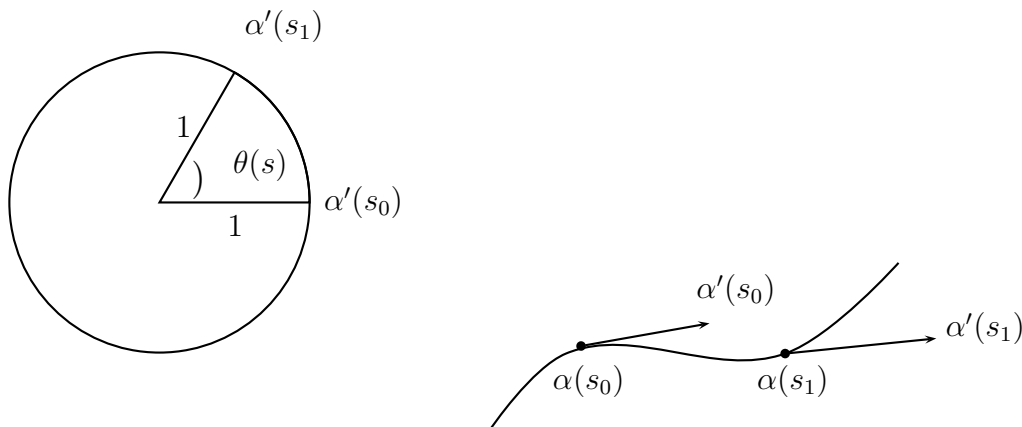
$$A' = \int \int_R \mathbb{K} \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

Pasando al límite y denotando también por R el área de la región R , tendremos:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{A'/R}{A/R} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} (1/R) \int \int_R \mathbb{K} \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} (1/R) \int \int_R \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv} = \frac{\mathbb{K} \|\varphi_u \times \varphi_v\|}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \mathbb{K}$$

(Nótese que hemos utilizado el T.V.M. para integrales dobles).

Comparando la proposición con la expresión de la curvatura $\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s}$ de una curva C por p (aquí s es la longitud de arco de un pequeño segmento de C que contiene a p , y σ es la longitud de arco de su imagen en la tangente indicatriz); vemos que la curvatura Gaussiana \mathbb{K} es análoga (para superficie), a la curvatura κ de curvas planas.



$$\left| \theta(s_1) \right| = \left| \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\theta(s) - \theta(s_1)}{s - s_1} \right| = \kappa$$

Veamos con un experimento sencillo una interpretación de lo que Gauss afirmó arriba. Imaginemos una rosquilla o dona y cortemos un trozo pequeño de su porción exterior convexa. Si la aplastamos sobre una mesa, el trozo se agrieta y abre conforme se le va aplastado, de modo muy parecido a como lo hace la corteza de una naranja, como lo muestra la figura (5.17) abajo.

Este hecho nos permite confirmar experimentalmente que dicha región de la dona encierra

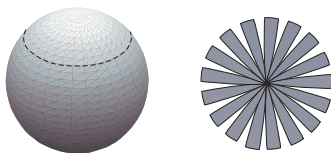


Figura 5.17: La curvatura indica cuanto se aleja M de ser plana .

un área menor que la correspondiente región del plano.

Del proceso inverso saben mucho los sastres, que recurren a él cuando han de formar una parte de una prenda que haya de adaptarse a una forma convexa, como el busto de un vestido. Se corta del tejido un trozo puntiagudo, llamado sisa, y se cosen los dos lados de la abertura que queda.

La situación opuesta se produce cuando se corta un trozo pequeño de la superficie de una dona próximo al agujero. Al aplastarlo sobre una mesa, se arruga y se solapa consigo mismo, mostrando que el área de dicha región es mayor que el de la región correspondiente en el plano.

De nuevo esta situación es familiar a los sastres: un sastre puede invertir el proceso haciendo un corte en el tejido y cosiendo en el mismo un parche o remiendo puntiagudo (se utiliza este recurso para hacer una falda que sea ajustada por debajo de las rodillas y con vuelo en la parte inferior).

Bien, hasta aquí hemos visto dos tipos importantes de curvaturas: la extrínseca de una curva en \mathbb{R}^3 dando origen a las fórmulas de Frenet, que describen completamente la curva; y la intrínseca (se probará más adelante) dada por la curvatura de Gauss. A partir de Riemann, con el desarrollo de la geometría de variedades, esta curvatura fue generalizada a otras muchas, dando lugar a la curvatura seccional, curvatura escalar, el tensor de Riemann, la curvatura de Ricci, etc. En general, las curvaturas no se reflejarán ya como números, sino que tomarán formas más complejas como grupos, aplicaciones, campos de tensores, etc. Pero, esto ya es tema de cursos superiores y, dejamos la motivación al estudiante para que amplíe su conocimiento al respecto; aunque al final del capítulo 7 hablaremos un poco más del tema.

5.3. Ejercicios.

Ejercicio 5.1 Sea M una superficie regular la cual es tangente a un plano Π a lo largo de una curva regular C . Pruebe que los puntos de C o son parabólicos o planos.

Ejercicio 5.2 Sea p un punto no plano de una superficie regular M en el que se anula la curvatura media. Pruebe que en dicho punto existen dos direcciones asintóticas ortogonales.

Ejercicio 5.3 Sea p un punto de una superficie regular M : Pruebe que la suma de dos curvaturas normales en dos direcciones ortogonales en p es constante.

Ejercicio 5.4 Calcula la aplicación de Gauss del catenoide y prueba que es una superficie minimal. Demuestra que la aplicación de Gauss de un catenoide es una aplicación conforme (conserva el ángulo que forman las curvas que se cortan).

Ejercicio 5.5 Calcula la aplicación de Gauss de un cilindro sobre una curva plana. Calcula también su imagen esférica y la naturaleza de los puntos así como la distribución de los mismos.

Ejercicio 5.6 Sea C una curva regular de una superficie M la cual nunca es tangente a una dirección asintótica. Se supone que

1. La curva C es una línea de curvatura M .
2. El plano osculador de C forma un ángulo consante con el plano tangente a M a lo largo de C .

Ejercicio 5.7 Calcula la aplicación de Gauss de una superficie de revolución. Calcula también las direcciones principales en cada punto y las líneas de curvatura. Finalmente las curvaturas de Gauss y media.

Ejercicio 5.8 Pruebe que toda superficie regular compacta tiene al menos un punto elíptico. En particular, demuestre que no existen superficies minimales compactas.

Ejercicio 5.9 Calcula la aplicación de Gauss y su imagen esférica de la superficie definida por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 2y^2\}$.

Ejercicio 5.10 Calcula la aplicación de Gauss y su imagen esférica de la superficie definida por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \cosh z = x^2 + y^2\}$.

Ejercicio 5.11 Calcula la aplicación de Gauss y su imagen esférica de la superficie definida por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$.

Ejercicio 5.12 Una superficie regular se dice llana si su curvatura de Gauss se anula idénticamente. Calcula todas las superficies de revolución llanas.

Ejercicio 5.13 Calcula un ejemplo de una superficie regular que tenga un punto parabólico aislado, esto es que tenga un entorno sin otros puntos parabólicos.

Ejercicio 5.14 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función distancia al cuadrado, a un punto fijo $p \in \mathbb{R}^3$, sobre una superficie regular M . Caracteriza los puntos críticos de f y calcula el Hessiano en dichos puntos críticos.

Ejercicio 5.15 Calcula las curvaturas de Gauss y media de la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = axy\}$, donde a es constante, en el punto $p = (0, 0, 0)$.

Ejercicio 5.16 Calcula las curvaturas de Gauss y media de superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$. Prueba que la curvatura de Gauss de esta superficie en un punto p , sólo depende de la distancia de p al eje z .

Ejercicio 5.17 Se considera la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3 - 3xy^2\}$. Calcula su curvatura de Gauss. ¿Es minimal?.

Ejercicio 5.18 Sea \mathbf{C} la curva en la que se cortan dos superficies M_1 y M_2 . Si las dos superficies son tangentes a lo largo de dicha curva, prueba que \mathbf{C} es una línea de curvatura en M_1 si y solo si lo es en M_2 .

Ejercicio 5.19 Se considera la superficie definida paramétricamente por (Superficie de Enneper):

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2; v - \frac{v^3}{3} + u^2v; u^2 - v^2 \right),$$

calcula la primera y la segunda forma fundamental. Calcula también las curvaturas de Gauss y media, las líneas de curvatura y las curvas asintóticas.

Ejercicio 5.20 Calcula las curvas asintóticas de un paraboloides y de un catenoide.

Ejercicio 5.21 Calcula las curvas asintóticas de la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$.

Ejercicio 5.22 Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida $F(p) = cp$, donde c es una constante positiva. Si M es una superficie regular, prueba que $F(M)$ es otra superficie regular. Encuentra fórmulas que relacionen las curvaturas de Gauss y media de estas dos superficies.

Ejercicio 5.23 Sea p un punto hiperbólico de una superficie regular, M . Prueba que en cualquier entorno de p en M existen puntos de M a ambos lados de T_pM .

Ejercicio 5.24 Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y M una superficie regular. Se considera la superficie $\phi(M)$. Relaciona las aplicaciones de Gauss y Weingarten a ambas superficies. Relaciona también las curvaturas de Gauss y Weingarten de ambas superficies.

Ejercicio 5.25 Sea $\varphi(u, v) = (R+r \cos u) \cos v; (R+r \cos u) \sin v; r \sin v$, parametrización usual de un toro de revolución, \mathbf{T} .

1. Calcula la aplicación de Weingarten y las curvaturas de Gauss y media en cada punto de dicha parametrización.

2. *Calcula las direcciones principales y asintóticas así como las líneas de curvatura y las curvas asintóticas.*
3. *Se considera la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}$, definida por $\alpha(t) = \varphi(t, t)$, calcula su curvatura normal en cada punto.*

Ejercicio 5.26 Si una superficie regular contiene a una recta, prueba que no puede tener puntos elípticos sobre dicha recta.

Ejercicio 5.27 Sea p un punto de una superficie regular, M y sea $T_p^\perp M$ la recta normal de M en p . Para cada $q \in T_p^\perp M$ se considera $d_q : M \rightarrow \mathbb{R}$, la función distancia al cuadrado al punto q .

1. *Prueba que p es un punto crítico para cada función d_q .*
2. *Prueba que existe una infinidad de elecciones de q para los que p es un mínimo local de d_q .*

Ejercicio 5.28 Sea $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización de una superficie regular, M . Prueba que para cada punto $p \in \varphi(V)$, se tiene la siguiente expresión,

$$dN_p(\varphi_u(p)) \wedge dN_p(\varphi_v(p)) = K(p) \varphi_u(p) \wedge \varphi_v(p).$$

Ejercicio 5.29 Prueba que la aplicación de Gauss de una superficie compacta y orientable es un difeomorfismo local si y solo si la superficie tiene todos sus puntos elípticos.

Ejercicio 5.30 Calcula expresiones para las curvaturas de Gauss y media de una superficie en función de las dos formas cuadráticas fundamentales.

Ejercicio 5.31 *Calcula las curvaturas de Gauss y media de la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z = x^2 + y^2\}$.*

Ejercicio 5.32 Prueba que la catenoide es una superficie minimal. Demuestre que es la única superficie minimal de revolución (obviamente sin contar al plano).

Ejercicio 5.33 Estudia la distribución de los puntos, según la curvatura de Gauss, en la superficie definida como el grafo de la siguiente función diferenciable $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(u, v) = u^3 + v^3$.

Ejercicio 5.34 Se considera la superficie M , globalmente parametrizada por $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Calcula la curvatura normal en $t = 1$ de la curva en M definida por $\alpha(t) = \varphi(t^2, t)$.

Ejercicio 5.35 Calcula la imagen esférica, por la aplicación de Gauss, de la superficie regular, M , definida como el grafo de la siguiente función diferenciable, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(u, v) = uv$.

Ejercicio 5.36 Para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, se considera la curva $\alpha_n(t) = (\cos, \sin t, t^n)$. Calcula su curvatura normal en $t = 0$ cuando se considera como una familia de curvas sobre el cilindro $M = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2$.

Ejercicio 5.37 Calcula la curvatura de Gauss y media de las superficies de las normales de una curva regular.

Ejercicio 5.38 *Calcula las curvaturas de Gauss y media de la superficie de las binormales de una curva regular.*

Ejercicio 5.39 Calcula una ecuación diferencial en función de las dos formas cuadráticas de una superficie cuyas soluciones sean las líneas de curvatura de dicha superficie.

Ejercicio 5.40 Calcula la aplicación de Gauss y la imagen esférica de la superficie dada por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2\}$. Calcula su curvatura de Gauss y curvatura media.

Ejercicio 5.41 Calcula la aplicación de Gauss y la imagen esférica de la superficie dada por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = yz\}$. Calcula su curvatura de Gauss y curvatura media. Prueba que la curvatura de Gauss de esta superficie en un punto p sólo depende de la distancia de p al eje x .

Ejercicio 5.42 Calcula la aplicación de Gauss y la imagen esférica del helicoido globalmente parametrizado por $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, $a \neq 0$. Calcula su curvatura de Gauss y media.

Ejercicio 5.43 Sea C una curva plana regular en \mathbb{R}^3 y M el cilindro construido a partir de C . Calcula la aplicación de Gauss de M y su imagen esférica. Clasifica, en términos de la curvatura de C , los puntos planos y parabólicos de M .

Ejercicio 5.44 Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y M una superficie regular. Se considera la superficie $M' = F(M)$. Relaciona las aplicaciones de Gauss de ambas superficies. Relaciona también las curvaturas de Gauss y media de M y M' .

Ejercicio 5.45 Sea p un punto no plano de una superficie regular M en el que se anula la curvatura media. Prueba que en dicho punto existen dos direcciones asintóticas ortogonales.

Ejercicio 5.46 Calcula la aplicación de Gauss del catenoide y prueba que es una superficie minimal.

Ejercicio 5.47 Sea M una superficie con aplicación de Gauss $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $p \in M$. Si llamamos $K(p)$ y $H(p)$ a la curvatura y media de M en p y $H(p)$ a la curvatura de Gauss y media de M en p , respectivamente, demuéstrase que

$$\langle dN_p(\vec{v}), dN_p(\vec{w}) \rangle = -K(p)\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + 2H(p)\langle -dN_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_pM$$

(**Observación:** Demuéstrase primero para una base ortogonal que diagonalice al endomorfismo de Weingarten y dedúzcase posteriormente para todo vector por linealidad.) Deduce que la aplicación de Gauss de una superficie minimal sin puntos planos es una aplicación conforme (conserva el ángulo que forman las curvas que se cortan).

Ejercicio 5.48 *Sea M una superficie compacta y orientable con aplicación de Gauss $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Demuestre que son equivalentes:*

(a) N es un difeomorfismo local.

(b) Todos los puntos de M son elípticos.

Demuestra que si se da (a) o (b) entonces la imagen esférica de M de toda \mathbb{S}^2 .

Ejercicio 5.49 Calcula la curvatura de Gauss de la superficie no orientable (Cinta de Möbius) parametrizada como

$$\varphi(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

Ejercicio 5.50 Demuéstrese que toda superficie regular con curvatura de Gauss positiva en todo punto es orientable.

Ejercicio 5.51 En una parametrización sobre una superficie regular, interpreta geométricamente el hecho de que $F = f = 0$.

Ejercicio 5.52 Demuestra que el plano y la catenoide son las únicas superficies minimales de revolución.

“ La geometría es una ciencia del conocimiento del ser, pero no de lo que está sujeto a la generación y a la muerte. La geometría es una ciencia de lo que siempre es.”.
Platón

Aquí usaremos los teoremas fundamentales de las ecuaciones ordinarias (existencia, unicidad y dependencia sobre condiciones iniciales) para probar la existencia de ciertos sistemas de coordenadas sobre superficies.

6.1. Presentación Geométrica. Curva integral de un Campo de Vectores. Flujo de un Campo de Vectores.

Un campo de vectores sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación que asigna a cada $q \in U$ un vector $W(q) \in \mathbb{R}^2$. El campo de vectores W se dice que sea diferenciable si escribiendo $q = (x, y)$ y $W(q) = (a(x, y), b(x, y))$, se tiene que las funciones a y b son diferenciables sobre U .

Geoméricamente, la definición corresponde asignar a cada $(x, y) \in U$ un vector con coordenadas $a(x, y), b(x, y)$, las cuales varían diferenciablemente con (x, y) . (Fig. 6.1).

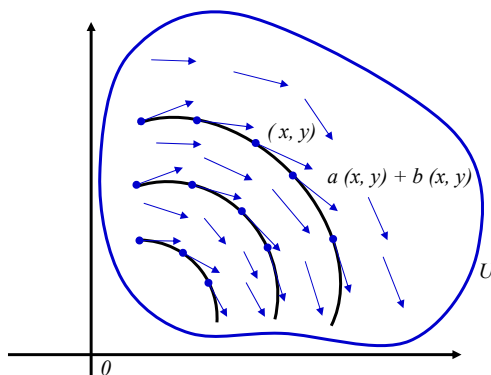


Figura 6.1: El campo de vector $W(q) = (a(x, y), b(x, y))$.

En lo que sigue consideraremos campos de vectores diferenciables. Dada un campo de vectores W , es natural preguntar si existe un *trayectoria* de este campo, *i.e.*, si existe una

curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$, tal que $\alpha'(t) = W(\alpha(t))$. Por ejemplo, la trayectoria que pasa por el punto (x_0, y_0) , del campo vector $W(x, y) = (x, y)$ es la línea recta $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t), t \in \mathbb{R}$, y una trayectoria de $W(x, y) = (-y, x)$, que pasa por (x_0, y_0) es el círculo

$$\beta(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{Fig. 6.2})$$

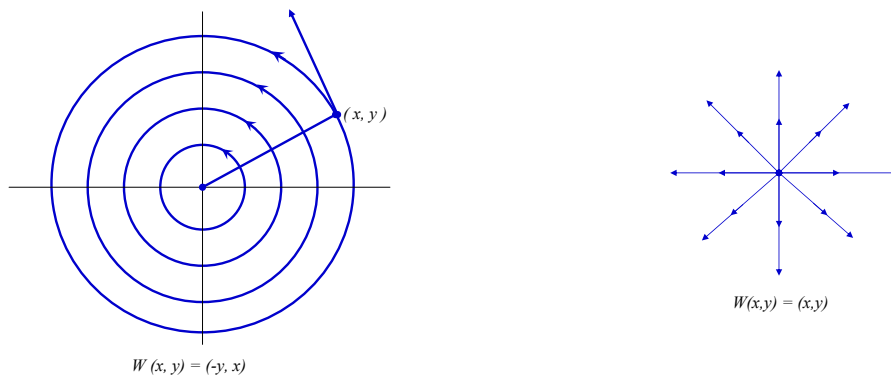


Figura 6.2: Los campos vectores $W(x, y) = (-y, x)$ y $W(x, y) = (x, y)$.

En el lenguaje de las ecuaciones diferenciables ordinarias uno dice que el campo de vectores W determina un sistema de *ecuaciones diferenciales*:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y), \\ x_0 &= x(0), \quad y_0 = y(0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde (x_0, y_0) es el origen de la trayectoria de W que es una solución de (6.1).

El teorema fundamental de la existencia y unicidad (local) de solución de (6.1) es equivalente a:

Teorema 6.1.1 : *(Existencia y unicidad de curvas integrales)*

Sea W un campo vector sobre $U \subset \mathbb{R}^2$ (abierto). Dado $p \in U$, existe una trayectoria $\alpha : I(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ de W (i.e $\alpha'(t) = W(\alpha(t)), t \in I$) con $\alpha(0) = p$. Esta trayectoria es única en el siguiente sentido: cualquier otra trayectoria $\beta : J(-\delta, \delta) \rightarrow U$ con $\beta(0) = p$ coincide con α en $I \cap J$.

Importante complemento del Teorema 6.1.1, es el hecho de que la trayectoria que pasa a través de p “varía diferencialmente con p ”. Esto es,

Teorema 6.1.2 : *Sea W el campo vector sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ para cada $p \in U$ existe una única vecindad $V \subset U$ de p , un intervalo $I = [a, b]$, y una aplicación $\alpha : V \times I \rightarrow U$ tal que*

1. Para un $q \in V$ (fijo), la curva $\alpha(q, t), t \in I = [a, b]$ es la trayectoria de W que pasa por q esto es,

$$\alpha(q, 0) = q \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = W(\alpha(q, t))$$

2. α es diferenciable

Geoméricamente el Teorema (6.1.2) dice que todas las trayectorias, las cuales pasan para $t = 0$, en una cierta vecindad V de p pueden ser “agrupadas” o “recogidas” en una única aplicación diferenciable. Es en este sentido que decimos que las trayectorias dependen de p diferenciablemente . (Fig. 6.3)

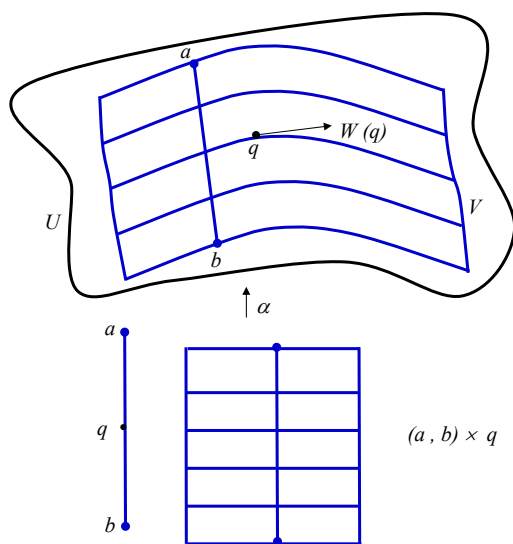


Figura 6.3: Flujo local de W por p .

La aplicación α es llamada el flujo (local) de W por p .

[Los Teoremas (6.1.1) y (6.1.2) se supondrán; la demostración se encuentran en libros de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias].

Consecuencia de los teoremas anteriores es el,

Lema 6.1.3 : *Sea W un campo de vector sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y sea $p \in U$ tal que $W(p) \neq 0$. Entonces existe una vecindad $\hat{U} \in U$ de p y una función diferenciable $f : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es constante a lo largo de cada trayectoria de W y $d_p f \neq 0$ para todo $q \in \hat{U}$.*

Demostración: Ver [3]

La función f del lema (6.1.3) es llamada *la primera integral* (local de W en una vecindad de p). Por ejemplo, si $W(x, y) = (y, -x)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La primera integral $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ es $f(x, y) = x^2 + y^2$: pues $\frac{dx}{dt} = y$ y $\frac{dy}{dt} = -x$, que implican

$$x dx + y dy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + c = 0.$$

6.1.1. Campo de Direcciones.

Asociado al concepto de campo vectorial está el concepto de *campo de direcciones*.

Un campo de direcciones r en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una correspondencia la cual asigna a cada $p \in U$ una recta $r(p)$ en \mathbb{R}^2 que pasa a través de p . El campo r se dice que sea *diferenciable por $p \in U$* si existe un campo de vectores diferenciable W , definido en una vecindad $V \subset U$ de p , tal que para cada $q \in V$, $W(q) \neq 0$ es una base de $r(q)$; Y el campo r es *diferenciable en U* , si éste es diferenciable en cada $q \in U$. Para cada campo vector diferenciable no nulo W en $U \subset \mathbb{R}^2$, le corresponde un campo de direcciones diferenciable dado por $r(p) =$ recta generada por $W(p)$, $p \in U$.

Otra forma de definir el campo de direcciones es a través del *Plano Proyectivo* de dimensión uno, \mathcal{P}^1 (Conjunto de todas las rectas de \mathbb{R}^2 que pasan por el origen en donde se han identificado los puntos simétricos o antipodales):

Un campo de direcciones es una correspondencia $r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}^1$ que a cada $p \in U$ asocia $r(p)$ la recta de \mathbb{R}^2 que une a p con el origen.

Por su misma definición, cada campo de dirección diferenciable, da el surgimiento local de un campo de vectores diferenciable no nulo. Esto, sin embargo, no es verdad globalmente, como es mostrado por el campo de direcciones en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dado por las rectas tangentes a las curvas de la figura 6.4; cualquier intento de orientar estas curvas con el fin de obtener un campo de vectores no nulo lleva a una contradicción.

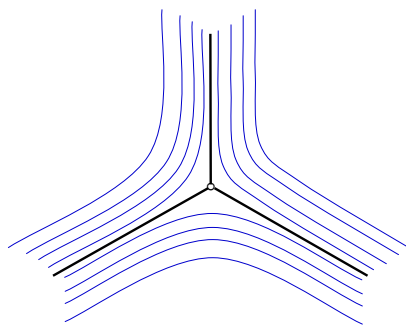


Figura 6.4: Campo no orientable de direcciones.

Definición 6.1.1 Una curva conexa regular $C \subset U$ es una curva integral de un campo de direcciones r definido en $U \subset \mathbb{R}^2$ si $r(q)$ es la recta tangente a C por q para todo $q \in C$.

Por lo visto previamente, es claro que, dado un campo de direcciones diferenciable r en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, por cada $q \in U$ pasa una curva integral C de r ; C coincide localmente con la traza de trayectoria a través de q del campo vector determinado en U por r . En lo que sigue, consideraremos solamente campos de direcciones diferenciables y omitiremos, en general, la palabra diferenciable.

Una manera de describir un campo de direcciones es como sigue: Decimos que dos vectores no nulos W_1 y W_2 por $q \in \mathbb{R}^2$ son equivalentes si $W_1 = \lambda W_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dos de tales vectores representan la misma recta tangente a través de q , recíprocamente, si dos vectores no nulos pertenecen a la misma recta tangente a través de q , ellos son equivalentes. Así, un campo de direcciones r sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 puede ser dado por asignar cada $q \in U$ un par de número reales (r_1, r_2) (Las coordenadas de un vector no nulo perteneciente a r), donde consideramos el par (r_1, r_2) y $(\lambda r_1, \lambda r_2), \lambda \neq 0$, como equivalentes.

El lenguaje de las ecuaciones diferenciales, un campo de direcciones r se suele dar por

$$a(x, y) \frac{dx}{dt} + b(x, y) \frac{dy}{dt} = 0 \tag{6.2}$$

lo que significa simplemente que, por un punto $q = (x, y)$ asociamos la recta que pasa a través de q que contiene al vector $(b, -a)$ o cualquiera de sus múltiplos no nulos. (Fig.6.5) La traza de trayectoria del campo vector $(b, -a)$ es una curva integral de r . A causa de que

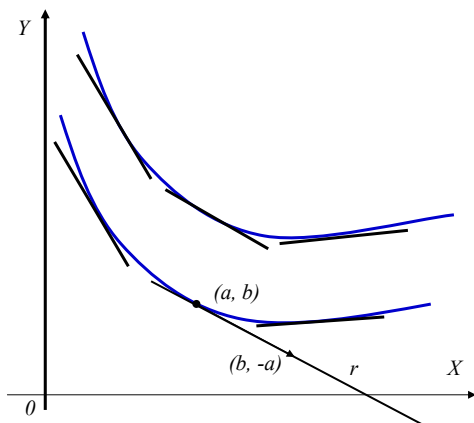


Figura 6.5: Campos de direcciones dado por $a dx + b dy = 0$.

la parametrización (de la curva) no juega ningún papel en la consideración dada arriba, frecuentemente se usa, en vez de la ecuación (6.2), la expresión

$$a dx + b dy = 0$$

con el mismo significado que antes.

6.2. Campos de vectores sobre superficies regulares.

Las ideas introducidas arriba pertenecen al dominio local de \mathbb{R}^2 , que depende solamente de la “Estructura diferenciable” de \mathbb{R}^2 . Ellas pueden, en consecuencia, ser trasladadas a una superficie regular, sin ninguna dificultad como sigue:

Definición 6.2.1 : *Un campo vectorial W en un conjunto abierto $U \subset M$ de una superficie regular M es una correspondencia que asigna a cada $p \in U$ un vector $W(p) \in T_p(M)$. El campo vectorial W es diferenciable por $p \in U$ si, para alguna parametrización $\varphi(u, v)$ por p , las funciones $a(u, v)$ y $b(u, v)$ dadas por $W(p) = a(u, v)\varphi_u + b(u, v)\varphi_v$ son diferenciables por p ; es claro que esta definición no depende de la escogencia de φ .*

Podemos definir, similarmente, trayectorias, campos de direcciones y curvas integrales. Los teoremas (6.1.1) y (6.1.2) y el lema (6.1.3) dados anteriormente, se pueden extender fácilmente a la presente situación; basta cambiar \mathbb{R}^2 por M , exactamente con las mismas declaraciones .

Ejemplo 6.2.1 : *En el toro usual, un campo de vectores W se obtiene por parametrizar los meridianos de T por longitud de arco y definir $W(p)$ con el vector velocidad de los meridianos a través de p . Nótese que $\|W(p)\| = 1$ para todo $p \in T$. Se deja de ejercicio verificar que W es diferenciable. (Fig. 6.6)*

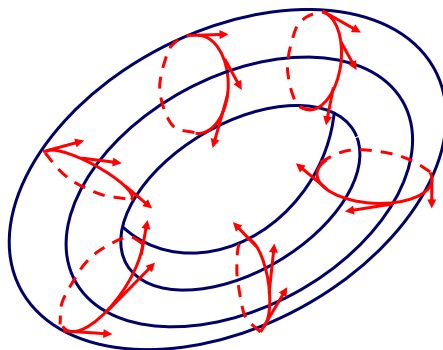


Figura 6.6: El Campo vector velocidad sobre el Toro .

Ejemplo 6.2.2 : *Un procedimiento similar se hace sobre S^2 usando los semi meridianos, admitiendo un campo vectorial W definido en $S^2 - \{P_n, P_s\}$. Para obtener un campo de vectores definido sobre toda la esfera, reparametrice todos los semi-meridianos por el mismo parámetro t , $-1 < t < 1$, y defina $v(p) = (1 - t^2)W(p)$ para $p \in S^2 - \{P_n, P_s\}$ y $v(P_n) = v(P_s) = 0$ (Figura 6.7)*

Ejemplo 6.2.3 : *Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ el paraboloides hiperbólico. La intersección con M del plano $z = cte. \neq 0$ determina una familia de curvas $\{C_\alpha\}$ tales que*

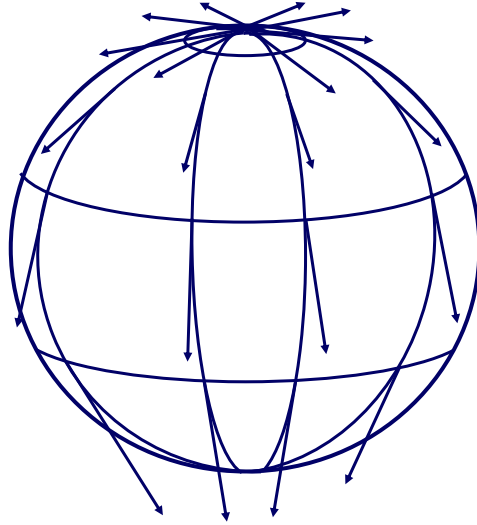


Figura 6.7: El Campo vector velocidad sobre la esfera unitaria .

a través de cada punto de $M - \{(0, 0, 0)\}$ por allí pasa una curva C_α . Las rectas tangentes sobre tales curvas da un campo de direcciones r sobre $M - \{(0, 0, 0)\}$. Queremos encontrar un campo de direcciones r' sobre $M - \{(0, 0, 0)\}$ que sea ortogonal a r por cada punto y determinar las curvas integrales de r' . El campo r' es llamado el campo ortogonal a r y sus curvas integrales son llamadas la familia ortogonal de r .

Comenzamos por parametrizar M por

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u = x, \quad v = y.$$

La familia $\{C_\alpha\}$ es dada por $u^2 - v^2 = cte. \neq 0$ (o más aún la imagen bajo φ de este conjunto). Si $\varphi_u u' + \varphi_v v'$ es un vector tangente de una parametrización regular de alguna curva C_α , obtenemos, por derivar $u^2 - v^2 = cte.$, que

$$2uu' - 2vv' = 0$$

Así, $(u', v') = (-v, -u)$. Se sigue que r es dado en la parametrización φ , por el par (v, u) o por algunos de sus múltiplos no nulo.

Ahora, sea $(a(u, v), b(u, v))$ una expresión para el campo ortogonal r' , en la parametrización φ , ya que

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = -4uv, \quad G = 1 + 4v^2, \quad \text{y } r'$$

es ortogonal a r por cada punto, tendremos

$$Eav + F(bv + au) + Gbu = 0$$

o

$$(1 + 4u^2)av - 4uv(bu + au) + (1 + 4v^2)bu = 0$$

$$va + ub = 0 \quad (6.3)$$

Esto determina el par (a, b) por cada punto, hasta un múltiplo no negativo, y en consecuencia al campo r' .

Para encontrar las curvas integrales de r' , sea $\varphi_u u' + \varphi_v v'$ un vector tangente de alguna parametrización regular de una curva integral de r' . Entonces (u', v') satisface la ecuación (3.3); i.e

$$v u' + u v' = 0 \quad \text{ó} \quad u v = cHe.$$

Se sigue entonces que la familia ortogonal de $\{C_\alpha\}$ es dado por las intersecciones con M del cilindro hiperbólico $xy = ctte. \neq 0$.

El principal resultado de esta parte es el siguiente teorema:

Teorema 6.2.1 : Sean W_1 y W_2 dos campos vectoriales un abierto $U \subset M$, los cuales son l.i. por algún punto $p \in U$. Entonces es posible parametrizar una vecindad $V \subset U$ de p tal forma que para $q \in V$ las líneas coordenadas de esta parametrización que pasan a través de q son tangentes a las rectas determinadas por $W_1(q)$ y $W_2(q)$.

Demostración: Ver [3]

Se debería observar que el teorema no implica que las curvas coordenadas pueden ser parametrizadas de tal forma que su velocidad sean $W_1(q)$ y $W_2(q)$. Las declaraciones del teorema se aplican a curvas coordenadas como curvas regulares (conjunto de puntos); es decir,

Corolario 6.2.2 : Dados dos campos de direcciones r y r' en el conjunto abierto $U \subset M$ tal que $p \in U, r(p) \neq r'(p)$, existe una parametrización φ en una vecindad de p tal que las curvas coordenadas de φ son las curvas integrales de r y r' .

Una primera aplicación del teorema arriba es la prueba de la existencia de una parametrización ortogonal.

Corolario 6.2.3 : Para todo $p \in M$ existe una parametrización $\varphi(u, v)$ en una vecindad V de p tal que las curvas coordenadas $u = ctte.$ se intersecan ortogonalmente por cada $q \in V$ (así que φ es llamada parametrización ortogonal).

Una segunda aplicación del teorema(en realidad del corolario 6.2.2) es la existencia de coordenadas dadas por las direcciones principales y asintóticas. Hemos visto que las curvas asintóticas son soluciones de

$$e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 = 0 \quad (6.4)$$

en una vecindad de un punto hiperbólico p , para lo cual se tiene que $eg - f^2 < 0$. Rotando el plano uv de tal forma que $e(p) > 0$, el lado izquierdo de (1,4) se puede descomponer en dos factores lineales distintos, admitiendo

$$(au' + Bv')(Au' + Dv') = 0 \quad (6.5)$$

donde los coeficientes son determinados por

$$A^2 = e \quad , \quad A((B + D) = 2f \quad , \quad BD = g$$

El sistema arriba de ecuaciones tiene solución real, ya que $eg - f^2 < 0$. Aquí que la ecuación (1.5) da como resultado dos ecuaciones:

$$Au' + Bv' = 0 \quad y \quad Au' + Dv' = 0 \quad (6.6)$$

Cada una de esas ecuaciones determinan un campo de direcciones diferenciales (Por ej., la primera determina la dirección de r que contiene el vector no nulo $(B, -A)$), y por cada punto de la vecindad en cuestión. Las direcciones dadas por estas ecuaciones son distintas. Aplicando el Corolario 6.2.2, vemos que es posible parametrizar una vecindad de p de tal manera que las curvas coordenadas son las curvas integrales de las ecuaciones dadas en (1.6). En otras palabras:

Corolario 6.2.4 : *Sea $p \in M$ un punto hiperbólico de M . Entonces es posible parametrizar una vecindad de p de tal forma que las curvas coordenadas de esta parametrización son curvas asintóticas de M .*

Ejemplo 6.2.4 : *Un ejemplo casi trivial, pero que ilustra el mecanismo de arriba, se da con el paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$. Como es usual, una parametrización de la superficie entera es*

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$e = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}} \quad , \quad f = 0 \quad , \quad g = \frac{-2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}$$

Así, las ecuaciones de las curvas asintóticas pueden ser escritas como

$$\frac{-2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}((u')^2 - (v')^2) = 0,$$

las cuales pueden ser factorizadas en dos ecuaciones lineales que producen dos campos de direcciones:

$$r_1 : u' + v' = 0 \quad y \quad r_2 : u' - v' = 0$$

Las curvas integrales de estos campos de direcciones son dadas por las dos familias de curvas:

$$r_1 : u + v = ctte. \quad y \quad r_2 : u - v = ctte.$$

Ahora, las funciones $f_1(u, v) = u + v$, $f_2(u, v) = u - v$ son claramente las primeras integrales de los campos vectoriales asociados a r_1 y r_2 , respectivamente. Así, por colocar

$$\bar{u} = uv \quad , \quad \bar{v} = u - v,$$

Obtenemos una nueva parametrización de la superficie entera $z = x^2 - y^2$ en la cual las curvas coordenadas son curvas asintóticas de la superficie.

En este caso particular, el cambio de parámetro se mantiene para toda la superficie. En

general, esto puede fallar a ser 1-1 de forma global, aún si la superficie toda consiste solamente de puntos hiperbólicos.

Similarmente, en una vecindad de un punto no umbilical de M , es posible descomponer la ecuación diferencial de las líneas de curvaturas en distintos factores lineales. Por un argumento análogo obtenemos:

Corolario 6.2.5 : *Sea $p \in M$ un punto no umbilical de M . Entonces es posible parametrizar una vecindad de P de tal forma que las curvas de coordenadas de esta parametrización son líneas de curvaturas de M .*

6.3. Superficies Minimales.

La definición que se tiene al respecto es la siguiente:

Una superficie parametrizada regular es llamada minimal si su curvatura media es nula. Una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$ es minimal si cada una de sus parametrizaciones es minimal.

El estudio de superficies minimal en \mathbb{R}^3 tiene su fundamento en los orígenes del Cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial Clásica, en los tiempo de Euler y de Lagrange, cuando las superficies minimal se veían como los puntos críticos del funcional del área. La primera superficie minimal que encontró Euler (1740),salvo el plano, fue *la catenoide*, la cual es una superficie de revolución que se obtiene de la catenaria. Fue Lagrange ,quien formuló la ecuación diferencial que debe satisfacer una función $u = u(x, y)$, para que su grafo sea minimal, basado en sus estudios del Cálculo Variacional:

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0 \quad (6.7)$$

La ecuación 6.7 se llama *ecuación de los grafos minimales*. Así que, una superficie es minimal si se puede expresar como grafo de una solución de 6.7 alrededor de cualquiera de sus puntos.

Fue Meusnier(1770), que caracterizó geoméricamente las superficies minimales como aquellas cuya curvatura media se anula constantemente; lo que justifica la definición de entrada con la que comenzamos este tema.

Variación normal

Intuitivamente, una superficie minimal es la menor área entre todas aquellas superficies que poseen la misma frontera. Para ver esto definiremos la variación normal de una superficie M en \mathbb{R}^3 como una familia de superficie $t \rightarrow M(t)$ que muestra cómo cambia M cuando se deforma en una dirección normal. Sea $A(t)$ el área de $M(t)$; veremos que la curvatura media de M se anula si y sólo si la primera derivada de la función $t \rightarrow A(t)$ se anula sobre M .

Recordemos:

- Un dominio en M es un subconjunto abierto y conexo U de M tal que la frontera de U es la imagen de una circunferencia mediante un homeomorfismo diferenciable

h cuya diferencial dh es no nula, excepto en un número finito de puntos. Una región en M es la unión de un dominio con su frontera.

- Una región $R \subset S$ se dice acotada si existe un número real μ tal que $\|p\| \leq \mu$ para todo $p \in R$.
- Sea R una región acotada en M contenida en la traza de una carta local $\varphi : U \rightarrow M$. El área de R es

$$Area(R) = \int \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int \int_{\varphi^{-1}(R)} \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

Definición 6.3.1 : Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y elijamos una región acotada $Q \subset U$. Supongamos que $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\varepsilon > 0$. Denotemos por N el campo de vectores unitarios tal que $N(u, v)$ es perpendicular a φ para todo $(u, v) \in U$. Entonces, la variación normal de φ y Q determinada por h es la aplicación $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Psi(u, v, t) = \varphi(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in Q \quad , \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Para cada t fijo, la aplicación $\varphi^t : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada como

$$\varphi^t(u, v) = \Psi(u, v, t)$$

es una superficie parametrizada, en donde ε es suficientemente pequeño.[ver [6]]

Además

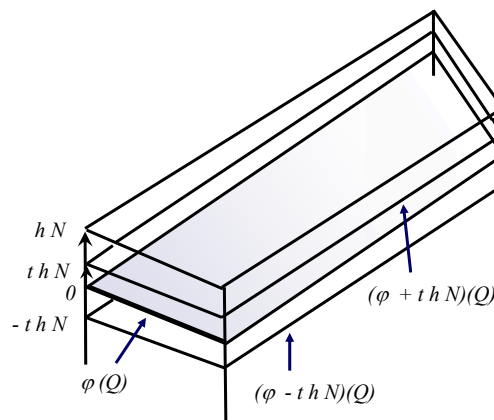


Figura 6.8: Una variación normal de $\varphi(Q)$.

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial u} = \varphi_u + thN_u + th_u N,$$

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial v} = \varphi_v + thN_v + th_v N.$$

Así, si denotamos por $E(t), G(t)$ los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de φ^t , tenemos que

$$\begin{aligned} E(t) &= E + th(\langle \varphi_u, N_u \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u, \\ F(t) &= F + th(\langle \varphi_u, N_v \rangle + \langle \varphi_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v, \\ G(t) &= G + th(\langle \varphi_v, N_v \rangle + \langle \varphi_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v, \end{aligned}$$

Usando el hecho de que

$$\langle \varphi_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle \varphi_u, N_v \rangle + \langle \varphi_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle \varphi_v, N_v \rangle = -g$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} E(t)G(t) - (F(t))^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4th\mathbb{H}) + R, \end{aligned}$$

donde \mathbb{H} es la curvatura media y $\lim_{t \rightarrow 0} (R/t) = 0$.

Se sigue que si ε es suficientemente pequeño, φ^t es una superficie parametrizada regular. Además, el área $A(t)$ de $\varphi^t(Q)$ es

$$A(t) = \int_Q \sqrt{E(t)G(t) - (F(t))^2} dudv = \int_Q \sqrt{1 - 4th\mathbb{H} + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

donde $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$. De esto se sigue que si ε es pequeño, A es diferenciable y su derivada por $t = 0$ es

$$A'(0) = - \int_Q 2h\mathbb{H} \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (*)$$

Proposición 6.3.1 : *Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y elijamos una región acotada $Q \subset U$. Entonces, φ es minimal sobre Q si y sólo si $A'(0) = 0$ para una variación normal de φ y Q con respecto a cualquier $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración: Si \mathbb{H} es idénticamente nula para φ entonces $(*)$ implica que $A'(0) = 0$ para cualquier h . Recíprocamente, supongamos que $A'(0) = 0$ para cualquier h , pero que existe $q \in Q$ tal que $\mathbb{H}(q) \neq 0$. Elegimos entonces $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = \mathbb{H}(q)$, y siendo h idénticamente cero en el exterior de un entorno que q suficientemente pequeño. Pero entonces $(*)$ implica que $A'(0) < 0$. Así que $\mathbb{H}(q) = 0$. Puesto que q es arbitrario, φ es minimal.

Obsérvese que no hemos dicho nada sobre la segunda derivada de A en 0, por lo que una superficie minimal, si bien es un punto crítico de A , podría no ser de hecho un mínimo.

Las superficies minimales se asocian usualmente con películas de jabón que se obtienen por sumergir una estructura de alambre en una solución jabonosa y retirándola cuidadosamente. Si el experimento se realiza perfectamente, se obtendrá que la estructura de

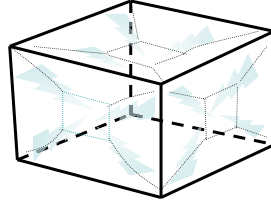


Figura 6.9: Superficie minimal en películas de jabón .

alambre será la frontera misma de esta película; aquí la película misma tomará una posición en donde en sus puntos regulares la curvatura media es nula. (ver figura 6.8).

Para una superficie parametrizada regular arbitraria, definimos el vector curvatura medio H , como $H = \mathbb{H}N$. El significado geométrico de la dirección de H puede obtenerse de (*). Es decir, si escogemos $h = \mathbb{H}$, tendremos, para esta variación en particular,

$$A'(0) = -2 \int_Q \langle H, H \rangle \sqrt{EG - F^2} \, dudv < 0$$

Esto significa que si deformamos $\varphi(Q)$ en la dirección del vector H , el área inicialmente es decreciente.

Una superficie parametrizada regular $\varphi = \varphi(u, v)$ se dice que es isoterma[ver [9]] si $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ y $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$; esto es, $E = G$ y $F = 0$.

Proposición 6.3.2 : : Sea $\varphi = \varphi(u, v)$ una superficie parametrizada regular y suponga que φ es isoterma. Entonces

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 2\lambda^2 H,$$

donde

$$\lambda^2 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.$$

Demostración: : Ya que φ es isoterma, $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ y $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$, al derivar tenemos

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{vu}, \varphi_v \rangle = -\langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle$$

Así

$$\langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = 0.$$

Similarmente,

$$\langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = 0.$$

Se sigue que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ es paralelo a N , ya que φ es isoterma

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}$$

con esto

$$2\lambda^2 \mathbb{H} = g + e = \langle N, \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \rangle$$

por tanto,

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 2\lambda^2 H.$$

6.3.1. Superficies minimales caracterizada por parametrizaciones armónicas.

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . El Laplaciano Δf de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, $(u, v) \in U$. Decimos que f es armónica en U si $\Delta f = 0$.

Definición 6.3.2 : Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , y sean φ, ψ de U en \mathbb{R}^3 parametrizaciones locales.

i) Se dice que φ es una parametrización local armónica si cada una de sus funciones coordenadas es armónica. Equivalentemente,

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$$

ii) Se dice que φ y ψ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, si

$$\varphi_u = \psi_v \quad y \quad \varphi_v = -\psi_u$$

Lema 6.3.3 : Si $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-riemann, entonces son armónicas. En este caso diremos que φ y ψ son armónicas conjugadas.

Demostración: (Ejercicio).

Ahora con la proposición 7.5 y esto último tenemos el siguiente:

Corolario 6.3.4 : Una parametrización local isoterma y regular $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal si y sólo si es armónica.

Teorema 6.3.5 Si una parametrización local de Monge $\varphi : U \rightarrow M$ con $h(u, v) = f(u) + g(v)$ es una superficie minimal, entonces o bien M es parte de un plano, o bien existe una constante a no nula tal que

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log \cos a u, \quad yg(v) = -\frac{1}{a} \log \cos a v, \quad (6.8)$$

o, equivalente,

$$h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos a v}{\cos a u} \right)$$

Demostración: Cuando $h(u, v) = f(u) + g(v)$, se verifica

$$h_{uu} = f''(u), \quad h_{vv} = 0, \quad h_{vv} = g''(v).$$

Por tanto, la ecuación 6.7 se reduce a

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = \frac{-g''(u)}{1 + g'(u)^2} \quad (6.9)$$

Como u y v son variables independientes, cada lado de 6.9 debe ser constante, que denominaremos a . Si $a = 0$, entonces ambas funciones f y g son lineales, por tanto M es parte de un plano. En caso contrario, las dos ecuaciones

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = a = \frac{-g''(u)}{1 + g'(u)^2} \quad (6.10)$$

pueden resolverse fácilmente; dando como resultado 6.8.

6.3.2. Ejemplos de superficies minimales.

Ejemplo 6.3.1 (*Superficie minimal de Enneper*). La superficie de Enneper es la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + uv^2, u^2 - v^2\right), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

la cual se puede chequear fácilmente que es minimal (ver figura): Nótese que por cambiar (u, v) por $(-v, u)$, cambiamos, en la superficie, (x, y, z) en $(-y, x, -z)$. Así, si hacemos una rotación positiva de $\pi/2$ alrededor del eje z y seguida por una simetría en el plano xy , la superficie permanece invariante.

Una de la característica importante de la superficie de Enneper es que ésta tiene auto intersecciones.

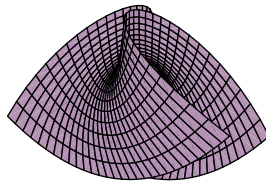


Figura 6.10: La superficie de Enneper.

Ejemplo 6.3.2 *El cantenoide dado por*

$$\varphi(u, v) = (a \cos hv \cos u, a \cos hv \sin u, av), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

es una superficie minimal. Esta es generada por rotar la catenaria $y = a \cos h(z/a)$ alrededor del eje z . Se puede verificar que $E = G = a^2 \cos^2 hv$, $F = 0$ que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$. Esta puede ser caracterizada como la única superficie de revolución que es minimal.

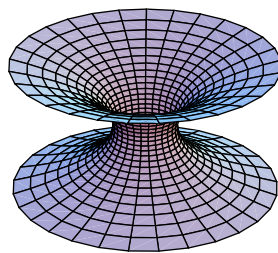


Figura 6.11: La superficie del Catenoide.

6.4. Superficies Regladas, Alabeadas y Doblemente Regladas.

Bien, aquí vamos a presentar las superficies regladas mostradas como ejemplo en el capítulo de superficies: Geométricamente, es una superficie generadas por una recta que se mueve a lo largo de una curva sobre la que se apoya.

Definición 6.4.1 Una superficie reglada en M en \mathbb{R}^3 es una superficie regular que admite una parametrización $\varphi : U \rightarrow M$ de la forma

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

siendo α y γ curvas en \mathbb{R}^3 , con α' siempre distinto de cero. Diremos que φ es una parametrización local reglada. La curva α se denomina curva directriz o curva base de la superficie reglada, y γ se denomina curva generatriz. Las rectas generatrices de la superficie reglada son las rectas $v \rightarrow \alpha(u) + v\gamma(u)$.

Definición 6.4.2 En ocasiones una superficie reglada φ admite dos parametrizaciones locales regladas distintas. En este caso diremos que φ es doblemente reglada.

Ejemplos de superficies regladas, ya hemos visto, el plano, las superficies tangentes, cónicas y cilíndricas; el helicoides; el conoide; el paraboloides hiperbólico y el hiperboloides de una hoja (realmente estas dos cuádricas de ecuaciones

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

respectivamente poseen dos familias distintas de generadores rectilíneos).

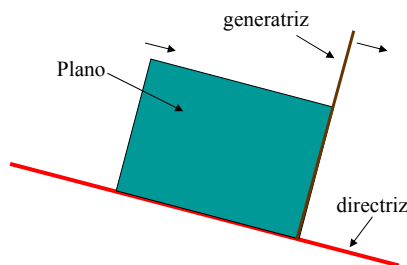


Figura 6.12: El Plano reglado.

Las superficies de las figuras 6.14 y 6.13 son llamadas también *superficies desarrollables*, es decir, aquellas que tienen un plano tangente único a lo largo de cada generatriz y por tanto admiten un "desarrollo plano o una extensión plana", pudiéndose montar a partir de porciones planas. Las no desarrollables o *alabeadas*, son aquellas en las cuales dos porciones sucesivas de la generatriz no son coplanares. Entre este tipo de superficies están:

Cilindroide: la generatriz se desplaza manteniéndose paralela a un plano director (π) y apoyada sobre dos directrices (d_1 y d_2) curvas,

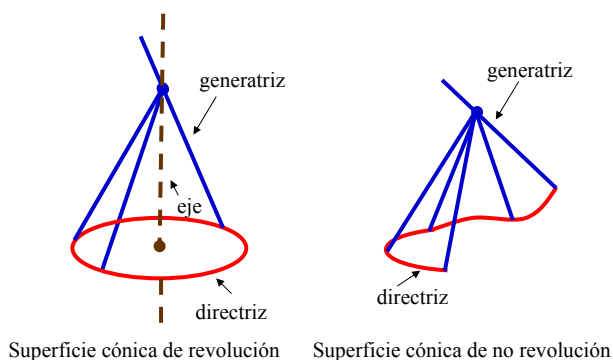


Figura 6.13: Conos reglados de revolución y de no revolución.

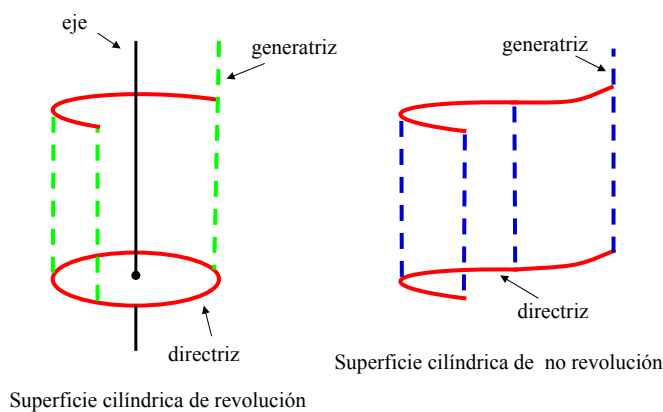


Figura 6.14: Cilindros reglados de revolución y de no revolución.

Conoide: la generatriz se desplaza manteniéndose paralela a un plano director (π) y apoyada sobre dos directrices, siendo una de ellas recta (d_1) y la otra curva (d_2).

Hiperboloide hiperbólico: la generatriz se desplaza manteniéndose paralela a un plano director (π) y apoyada sobre dos directrices rectas (d_1 y d_2) que se cruzan,

Hiperboloide de revolución: la generatriz se apoyada sobre dos directrices rectas (d_1 y d_2) circulares, paralelas, y se mueven manteniéndose constante el ángulo que forman ellas.

Proposición 6.4.1 *Una superficie reglada regular*

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

es desarrollable si y solo si $[\alpha', \gamma', \gamma] = 0$.

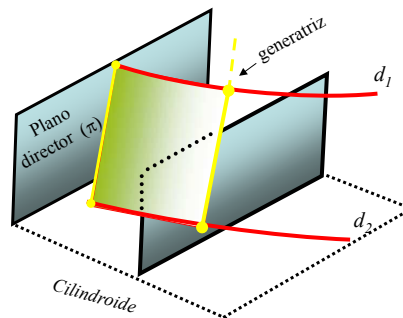


Figura 6.15: Superficie Alabeada:Cilindroide.

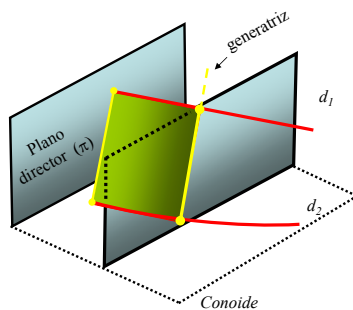


Figura 6.16: Superficie Alabeada:Conoide .

Demostración: De la ecuación de la superficie se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \alpha'(u) + v\gamma'(u), & \varphi_v &= \gamma(u) \\ \varphi_u \times \varphi_v &= \alpha'(u) \times \gamma(u) + v\gamma'(u) \times \gamma(u).\end{aligned}$$

La superficie será desarrollable si y sólo si la dirección del vector normal $\varphi_u \times \varphi_v$ no depende de v ; esto naturalmente ocurre si y sólo si $\alpha'(u) \times \gamma(u)$ y $\gamma'(u) \times \gamma(u)$ son linealmente dependientes para todo u , o sea

$$\left(\alpha'(u) \times \gamma(u)\right) + \left(\gamma'(u) \times \gamma(u)\right) = \hat{0}.$$

Pero efectuando el producto resulta:

$$[\alpha'(u) \gamma'(u) \gamma(u)] \gamma(u) - [\gamma'(u) \gamma(u) \gamma(u)] \alpha'(u) = \hat{0}.$$

de donde

$$[\alpha'(u) \gamma'(u) \gamma(u)] \gamma(u) = \hat{0}.$$

◇

En general cuando la superficie no es desarrollable, los vectores $\alpha'(u) \times \gamma(u)$ y $\gamma'(u) \times \gamma(u)$ son linealmente independientes y el vector normal $\varphi_u \times \varphi_v$ cambia su dirección a lo largo de la generatriz cuando v varía. Toda la generatriz rectilínea queda en el plano

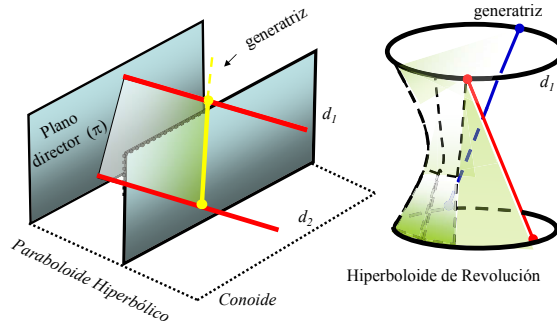


Figura 6.17: Superficie Alabeada doblemente regladas .

tangente en todo punto de la generatriz pero los planos tangentes varían de un punto a otro. En otras palabras, el plano tangente gira alrededor de la generatriz rectilínea cuando el punto de contacto se mueve a lo largo de ella. El plano tangente en p_0 interseca a la superficie a lo largo de la generatriz rectilínea que pasa por p_0 .

Otro elemento que merece ser estudiado aquí, es el comportamiento del vector normal a la superficie cuando $v \rightarrow \infty$. Bien utilicemos el vector normal

$$N^* = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|v|} = \frac{\alpha'(u) \times \gamma(u)}{|v|} + \text{sgn}(v) \gamma'(u) \times \gamma(u),$$

el cual está definido para $v \neq 0$ y tiene la misma dirección que $\varphi_u \times \varphi_v$. El correspondiente vector unitario N tendrá la misma dirección, estará definido para todo v y, con tal que $\alpha'(u) \times \gamma(u)$ y $\gamma'(u) \times \gamma(u)$ sean linealmente independientes, dependerá continuamente de v , puesto que en este caso $\varphi_u \times \varphi_v$ es distinto de cero para todo v . Cuando

$$\begin{aligned} v \rightarrow -\infty & \quad N^* \rightarrow \gamma'(u) \times \gamma(u) \\ v \rightarrow \infty & \quad N^* \rightarrow \gamma'(u) \times \gamma(u) \end{aligned}$$

Esto significa que como el punto de contacto se mueve a lo largo de toda la recta generatriz el plano tangente gira un ángulo de π alrededor de la generatriz, siendo la posición límite del plano tangente perpendicular a $\gamma'(u) \times \gamma(u)$. Este plano se llama *plano asintótico*; contiene el punto de la directriz por donde pasa la generatriz y tiene ecuación:

$$[z - \alpha(u) \gamma(u) \gamma'(u)] = 0.$$

De esto se tiene que, *el plano central* correspondiente a una generatriz, es el plano tangente en un punto de la misma y que es perpendicular al plano asintótico. Por supuesto, este es perpendicular al vector $\gamma \times (\gamma' \times \gamma)$, luego su ecuación es

$$[z - \alpha(u) \gamma(u) \times \gamma'(u)] = 0.$$

Definición 6.4.3 Se llama punto central o punto de estricción al punto de una generatriz de una superficie reglada en el que el plano tangente es el plano central.

Definición 6.4.4 Se llama línea de estricción de una superficie reglada a la curva lugar geométrico de los puntos centrales.

La ecuación de la línea de estricción $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por un punto central (u, v) de la generatriz u es

$$\chi(u) = \alpha(u) - \frac{\alpha'(u) \cdot \gamma'(u)}{(\gamma'(u))^2} \gamma(u)$$

Esta ecuación representa en una superficie desarrollable *la arista de retroceso*.

Por último, un elemento que resalta en superficies regladas es el *parámetro de distribución*, representado por la función

$$\rho(u) = [\alpha'(u) \gamma(u) \gamma'(u)].$$

Este permite la continuidad de la curvatura de Gauss sobre la generatriz y además, es el cociente entre la distancia, d , de un punto cualquiera \hat{C} de la generatriz v al punto central C y la tangente del ángulo que forma el plano tangente en dicho punto \hat{C} con el plano central.

6.5. Ejercicios.

Ejercicio 6.1 Sea \mathbb{W} un campo de vectores sobre una superficie M , con $\mathbb{W}(p) \neq 0$ en un cierto punto $p \in M$. Pruebe que existe una parametrización $\varphi : V_0 \rightarrow V$ de una vecindad de p , tal que $\varphi_u = \mathbb{W}$ en V .

Ejercicio 6.2 En las hipótesis del problema anterior, sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ un camino tal que $\gamma(0) = p$ o $\gamma'(0)$ no es un múltiplo de $\mathbb{W}(p)$. Muestre que una parametrización φ puede ser elegida de modo que, además de $\varphi_u = \mathbb{W}$, se tenga aún que $\varphi(0, v) = \gamma(v)$ para todo v próximo a 0.

Ejercicio 6.3 Pruebe que el hecho de que un campo de vectores sea diferenciable en un punto $p \in M$, no depende del sistema de coordenadas elegido en p .

Ejercicio 6.4 Se define la derivada $\mathbb{W}(\theta)$ de una función diferenciable

$$\theta : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$$

según un campo \mathbb{W} , definido en un abierto $U \subset M$, por

$$\mathbb{W}(\theta)(q) = \frac{d}{dt}(\theta \circ \mu)|_t = 0, \quad q \in U$$

donde $\mu : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva tal $\mu(0) = q$, $n\mu'(0) = \mathbb{W}(q)$. Probar que:

a) \mathbb{W} es diferenciable en U si y sólo si $\mathbb{W}(\theta)$ es diferenciable para todo θ diferenciable en U .

b) Si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función diferenciable en U y δ, κ números reales, se tiene que

$$\mathbb{W}(\delta\theta + \kappa\phi) = \delta\theta + \kappa\phi$$

$$\mathbb{W}(\theta\phi) = \mathbb{W}(\theta)\phi + \theta\mathbb{W}(\phi)$$

Ejercicio 6.5 Pruebe que si \mathbb{W} es un campo diferenciable de vectores en una superficie M y $\mathbb{W}(p) \neq 0$ $p \in M$, entonces es posible parametrizar una vecindad de p con $\psi(u, v)$ de tal modo que $\psi_u = \mathbb{W}$.

Ejercicio 6.6 Admita que no existe campo de vectores tangentes no nulos y diferenciable en la esfera S^2 y muestre que lo mismo sucede para la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicio 6.7 Sea Υ un campo de vectores diferenciable definido en un abierto Θ de \mathbb{R}^3 . Verifique que:

- i) Si f es una primera integral de Υ , entonces $\frac{\partial f}{\partial \Upsilon} \equiv 0$ en Θ . También, si $\frac{\partial f}{\partial \Upsilon} \equiv 0$ y $d_p f \neq 0$ para todo $p \in \Theta$, entonces f es una integral primera de Υ .
- ii) Si $p \in \Theta$ no es punto singular de Υ , entonces existe una vecindad V de p tal que Υ/V tiene dos integrales primeras f_1, f_2 funcionalmente independientes.

Ejercicio 6.8 Demuestre que M es minimal si y sólo si sus líneas asintóticas se cortan siempre en ángulo recto.

Ejercicio 6.9 Demuestre que el Helicoide y catenoide son minimal utilizando el argumento del problema anterior.

Ejercicio 6.10 Determinar la expresión más general de una superficie minimal de revolución.

Ejercicio 6.11 Una condición necesaria y suficiente para que una superficie sea minimal es que se cumpla en todo punto

$$Eg - 2Ff + Ge = 0$$

Ejercicio 6.12 Si existe una superficie de área mínima que pase por una curva alabeada cerrada, es una superficie minimal.

Ejercicio 6.13 Determinase la curvatura de Gauss de las superficies desarrollables (conos, cilindros y superficies tangenciales).

Ejercicio 6.14 Sea α una curva regular en una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$, y sea N la normal unitaria a M a lo largo de α . Demostrar que α es línea de curvatura en M si y sólo si la superficie reglada $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vN(u)$ es llana.

Ejercicio 6.15 Hallar las superficies desarrollables generadas por las rectas que se apoyan en la parábola $y^2 = 4x$, $z = 0$ y forman con el eje OZ un ángulo de $\pi/4$.

Ejercicio 6.16 Hallar la ecuación de conoide, cuyo eje coincide con el eje OZ y la directriz es la recta $x = at + 1$, $y = bt$, $z = ct$. Determinar la línea de estricción de la superficie y probar que está contenida en un plano.

Ejercicio 6.17 Hallar las generatrices rectilíneas de las superficies:

a) $x = uv + \cos v$, $y = u \cos v + \sin v$, $z = u \cos v + v$.

b) $x^2 + 5Y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 4y - 1 = 0$.

Ejercicio 6.18 Determinar la superficie reglada cuyas generatrices rectilíneas vienen dadas por las ecuaciones $y = tx + 2t + 1$, $z = (t - 1)x - 3t$, y calcular el plano tangente a la superficie en un punto P_0 de la generatriz t_0 .

Ejercicio 6.19 Determinar la función f para que la superficie reglada de ecuaciones

$$x = tz + f(t), \quad y = f(t)z + t^3/3$$

sea desarrollable. Calcular la arista de retroceso.

Ejercicio 6.20 Compruebe que la superficie reglada engendrada por las rectas

$$x = t^2 z + t^3, \quad y = 2tz + 3/2t^2$$

es desarrollable y hallar la arista de retroceso.

Ejercicio 6.21 Dada la superficie reglada $x = tu + t^2$, $y = t^2 u + t$, $z = u$. Determinar: plano tangente, plano asintótico, plano central, punto central, línea de estricción y parámetro de distribución.

LA GEOMETRÍA INTRÍNSICA DE SUPERFICIE

“ Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo ”.
Galileo Galilei

7.1. Métricas sobre Superficies

Un problema central de la teoría de superficies es el determinar invariantes geométricos *computables* que sean conservados por isometrías. La *Geometría Intrínseca* de la superficie estudia los invariantes isométricos; más adelante daremos los detalles correspondientes al respecto.

La idea intuitiva de distancia sobre una superficie.

Recordemos aquí, lo dicho en el capítulo 3, sobre métrica en superficies:

En \mathbb{R}^n se verifica el teorema de Pitágoras. Si $p, q \in \mathbb{R}^n$, entonces la distancia s entre p y q

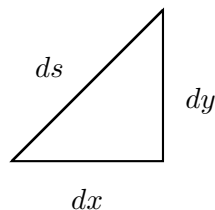
$$s^2 = (p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2 \quad (7.1)$$

¿En qué medida es esta noción diferente para un superficie?

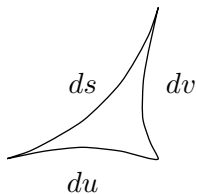
Ya que una superficie está curvada, la distancia sobre ella no es la misma que en \mathbb{R}^3 ; así que (7.1) es falsa en general. Sobre una superficie arbitraria.

La versión infinitesimal de (7.1) para $n = 2$ es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (7.2)$$



La fórmula (7.2) es válida en \mathbb{R}^2 .



La correspondiente para superficie (parametrizada) es

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \quad (7.3)$$

Podemos considerar (7.3) como una versión infinitesimal “deformada” del Teorema de Pitágoras.

Definición 7.1.1 : Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una superficie parametrizada. Definimos $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

Entonces $ds_y^2 = Ed_u^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ es la métrica riemanniana o primera forma fundamental de la superficie parametrizada φ inducida a partir de \mathbb{R}^n .

Si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ para $a < t < b$, entonces la función longitud de arco $s(t)$ es dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_c^t \|\alpha'(u)\| du = \int_c^t \sqrt{\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle} du = \\ &= \int_c^t \sqrt{\langle u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t)), u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t)) \rangle} dt \\ &= \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \implies ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

Definición 7.1.2 : Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie regular, y sean $p, q \in M$. Entonces la distancia intrínseca $\rho(p, q)$ es la mayor cota inferior de las longitudes de todas las curvas α totalmente contenidas en M y que conectan p y q . Así que $\rho(p, q) \geq \|p - q\|$. Ver [6]

Isometrías entre superficies

Ejemplo 7.1.1 *Antes de ver isometrías entre superficies, veamos algunos ejemplos de isometrías en \mathbb{R}^3 :*

1. Las Traslaciones $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $A \in \mathbb{R}^3$ definidas como

$$T_A(v) = v + A$$

2. Las Rotaciones $R_{E,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $E \in \mathbb{R}^3$ con $\|E\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ dada por

$$R_{E,\theta}(v) = (E \cdot v)(1 - \cos\theta)E + \cos\theta v + \text{sen}\theta (E \times v)$$

Al vector E se le llama eje de rotación y a θ se le llama ángulo de rotación.

3. Las reflexiones sobre un plano $P_N : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $N \in \mathbb{R}^3$ con $\|N\| = 1$ y definidas por

$$P_N(v) = v - 2(N \cdot v)N$$

Al plano que pasa por el origen y tiene normal N se le llama plano de reflexión.

4. Reflexiones sobre el origen. La isometría $I(v_1, v_2, v_3) = (-v_1, -v_2, -v_3)$.

Definición 7.1.3 : Sean M_1 y M_2 superficies regulares en \mathbb{R}^n : Una aplicación entre superficies $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ se denomina isometría local si su diferencial por cada $p \in M_1$ satisface

$$\langle v_p, v_p \rangle_p = \langle d_p\varphi(v_p), d_p\varphi(v_p) \rangle_{\varphi(p)}$$

ó

$$\|d_p\varphi(v_p)\| = \|v_p\| \quad (7.4)$$

para todos los vectores v_p tangentes en $T_p M_1$ no nulos. Una isometría es una aplicación entre superficies que es simultáneamente una isometría local y un difeomorfismo.

Observación: Nótese que la isometría sólo puede darse entre superficies difeomorfas. Por ejemplo, el plano y el cilindro no son isométricas pero si son localmente isométricas. Si hacemos rodar el cilindro sobre el plano, obtenemos una correspondencia la cual no cambia las longitudes de curvas o el ángulo entre curvas que se intersecan: considere $M_1 = \{(\cos\theta, \text{sen}\theta, z) / 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$, $M_2 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} - \{0\}$ y $f(\cos\theta, \text{sen}\theta, z) = (\theta, z)$ un difeomorfismo entre las dos superficies; las parametrizaciones correspondientes tienen iguales los coeficientes de sus primeras formas fundamentales (condición para tener una isometría local como se verá mas adelante), lo que produce una isometría; pero ojo! M_2 no es el plano!

Lema 7.1.1 : Una isometría local es un difeomorfismo local.

Demostración: Por la definición se tiene que cada aplicación tangente de una isometría local es inyectiva; así el Teorema de la Función Inversa implica que φ es un difeomorfismo local.

Lema 7.1.2 : La condición $\|d_p\varphi(v_p)\| = \|v_p\|$ es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:

(i) Para todos los vectores tangentes v_p y w_p de M_1 se verifica

$$\langle d_p\varphi(v_p), d_p\varphi(w_p) \rangle = \langle v_p, w_p \rangle \quad (*)$$

(ii) Para cada $p \in M_1$ existen vectores tangentes linealmente independientes $v_p, w_p \in T_p M$ tales que

$$(**) \quad \begin{cases} d_p \varphi(v_p) \cdot d_p \varphi(v_p) = v_p \cdot v_p \\ d_p \varphi(w_p) \cdot d_p \varphi(w_p) = w_p \cdot w_p \\ d_p \varphi(v_p) \cdot d_p \varphi(w_p) = v_p \cdot w_p \end{cases}$$

Demostración: Es claro que (*) implica (7.4). Recíprocamente, supongamos que se verifica (*) como $d_p \varphi$ es lineal, se sigue

$$\begin{aligned} d_p \varphi(v_p) \cdot d_p \varphi(w_p) &= \frac{1}{2} (\|d_p \varphi(v_p + w_p)\|^2 - \|d_p \varphi(v_p)\|^2 - \|d_p \varphi(w_p)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|v_p + w_p\|^2 - \|v_p\|^2 - \|w_p\|^2) \\ &= v_p \cdot w_p \end{aligned}$$

Por otra parte (*) implica (**). Recíprocamente, si se verifica (**), entonces para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|d_p \varphi(av_p + bw_p)\|^2 &= \|a d_p \varphi(v_p) + b d_p \varphi(w_p)\|^2 \\ &= a^2 \|d_p \varphi(v_p)\|^2 + b^2 \|d_p \varphi(w_p)\|^2 + 2ab d_p \varphi(v_p) \cdot d_p \varphi(w_p) \\ &= a^2 \|v_p\|^2 + b^2 \|w_p\|^2 + 2ab v_p \cdot w_p \\ &= \|av_p + bw_p\|^2 \quad \text{lo que es (*)} \end{aligned}$$

Una aplicación entre superficies es una isometría sii conserva las métricas riemannianas.

Lema 7.1.3 Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización local arbitraria. Sean

$$ds_\varphi^2 = E_\varphi du^2 + 2F_\varphi dudv + G_\varphi dv^2$$

y

$$ds_{\overline{\varphi}}^2 = E_{\overline{\varphi}} du^2 + 2F_{\overline{\varphi}} dudv + G_{\overline{\varphi}} dv^2$$

las primeras formas fundamentales asociadas a φ y $\overline{\varphi}$, respectivamente. Entonces la aplicación

$$\psi = \overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \overline{\varphi}(U)$$

es una isometría local si y solo si

$$ds_\varphi^2 = ds_{\overline{\varphi}}^2 \quad (7.5)$$

Demostración: Es claro que

$$\begin{aligned} d_p \psi(\varphi_u) &= d_p(\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ d_p \varphi(e_1) \\ &= d_p \overline{\varphi}(e_1) = \overline{\varphi}_u; \end{aligned}$$

análogamente $d_p \psi(\varphi_v) = \overline{\varphi}_v$. Si ψ isometría local, entonces

$$E_{\overline{\varphi}} = \|\overline{\varphi}_u\|^2 = \|d_p \psi(\varphi_u)\|^2 = \|\varphi_u\|^2 = E_\varphi$$

Análogamente $F_{\overline{\varphi}} = F_{\varphi}$ y $G_{\overline{\varphi}} = G_{\varphi}$; por tanto se verifica (7.5).
Para el recíproco, considere

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t));$$

así que $(\psi \circ \alpha)(t) = \overline{\varphi}(u(t), v(t))$. Luego,

$$\alpha' = u' \varphi_u + v' \varphi_v \quad \text{y} \quad (\Psi \circ \alpha)' = u' \overline{\varphi}_u + v' \overline{\varphi}_v$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \|\alpha'\|^2 &= E_{\varphi} u'^2 + 2F_{\varphi} u'v' + G_{\varphi} v'^2 \\ \|(\psi \circ \alpha)'\|^2 &= E_{\overline{\varphi}} u'^2 + 2F_{\overline{\varphi}} u'v' + G_{\overline{\varphi}} v'^2 \end{cases} \quad (7.6)$$

Luego (7.5) y (7.6) implican que

$$\|\alpha'(t)\| = \|\psi \circ \alpha'(t)\|.$$

Pero cualquier vector tangente a $\varphi(U)$, se puede escribir como $\alpha'(0)$ para alguna curva α ; se sigue que φ es una isometría.

Corolario 4: Sea $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación entre superficies, y consideremos $\varphi : U \rightarrow M_1$ una carta local de M_1 , sea $\overline{\varphi} = \psi \circ \varphi$. Entonces ψ es una isometría local si y solo si para cada carta local de M_1 se verifica $ds_{\varphi}^2 = ds_{\overline{\varphi}}^2$.

Ejemplo 7.1.2 *Aclaremos mejor lo del plano y el cilindro:*

Sea M_1 el cilindro, parametrizado por

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin v, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$$

y M_2 el plano definido por

$$\overline{\varphi}(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$$

Definamos $\psi = \overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ en una vecindad coordenada del cilindro. Entonces,

$$E_{\varphi} = 1 \quad F_{\varphi} = 0 \quad G_{\varphi} = 0$$

$$E_{\overline{\varphi}} = 1 \quad F_{\overline{\varphi}} = 0 \quad G_{\overline{\varphi}} = 0.$$

Sea w cualquier vector del plano tangente a M_1 en cualquier punto $p \in M_1$, entonces w es tangente a una curva $(u(t), v(t))$ y se tiene

$$w = \varphi_u u' + \varphi_v v'$$

Ahora

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E_{\varphi} (u')^2 + 2F_{\varphi} (u')(v') + G_{\varphi} (v')^2 = E_{\overline{\varphi}} (u')^2 + 2F_{\overline{\varphi}} (u')(v') + G_{\overline{\varphi}} (v')^2 \\ &= I_{\psi(p)}(d_p \psi(w)) \end{aligned}$$

Así ψ es una isometría local entre M_1 y M_2 , y no puede ser extendida a todo el cilindro, pues el cilindro no es ni siquiera homeomorfo al plano.

Ejemplo 7.1.3 Consideremos la superficie de revolución de la catenaria

$$\begin{aligned}x &= a \cosh v \\z &= a v, \quad -\infty < v < \infty\end{aligned}$$

que tiene por parametrización

$$\Psi(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, a v) \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty),$$

generando la superficie llamada Catenoide, de la cual se tiene que

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 (1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Esta superficie es localmente isométrica al Helicoide

$$\Phi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a \bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Bueno, hágase el cambio de coordenadas

$$u = \bar{u}, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

el cual es un cambio compatible, pues el determinante jacobiano

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = a \cosh v > 0$$

Así una nueva parametrización del helicoide es dada por

$$(a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a u);$$

de la cual se tiene,

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2 v. \quad \diamond$$

Esto último se puede ver en la figura (7.1) abajo, con las correspondencias indicadas.

Es decir, la isometría que pasa de $\Psi(u, v)$ a $\Phi(\bar{u}, \bar{v})$ convierte (la figura 7.1)

- los radios del helicoide en meridianos del catenoide (v constante)
- las hélices del helicoide en paralelos del catenoide ($u \neq 0$ constante),
- el eje vertical del helicoide en el círculo central del catenoide ($u = 0$).

Podemos ir más allá aún y encontrar una familia uniparamétrica de superficies isométricas que permita transformar una superficie en la otra de forma continua. Esto se ilustra en la figura(?). La carta, en función de un parámetro t , que define cada superficie de esta familia es

$$\varphi(u, v, t) = \begin{pmatrix} \cos u \cosh v \sin t + \cos t \sin u \sinh v, \\ \sin u \cosh v \sin t - \cos t \cos u \sinh v, u \cos t + v \sin t \end{pmatrix}$$

Claramente el helicoide se corresponde con $t = 0$ y el catenoide con $t = \pi/2$.

Una simetría también conserva la distancia intrínseca.

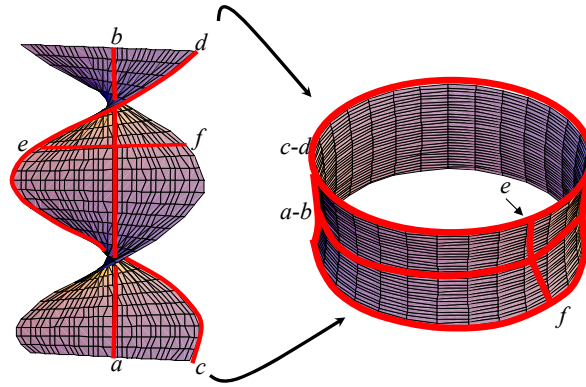


Figura 7.1: Isometría entre un helicoides y un catenoides.

Lema 7.1.4 Sea $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ una isometría. Entonces ψ conserva las distancias intrínsecas ρ_1, ρ_2 de M_1 y M_2 en el sentido siguiente:

$$\rho_2(\psi(p), \psi(q)) = \rho_1(p, q)$$

cualesquiera que sean $p, q \in M_1$.

Demostración: Sea $\alpha : (c, d) \rightarrow M$ una curva con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, siendo $c < a < b < d$. De la definición de simetría local se sigue que las longitudes de arcos cumplen con

$$\mathcal{L}(\alpha)_a^b = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|(\psi \circ \alpha)'\| dt = \mathcal{L}(\psi \circ \alpha)_a^b$$

ya que ψ es un difeomorfismo, existe correspondencia biyectiva entre las curvas en M_1 conectando p y q y las curvas en M_2 conectando $\psi(p)$ y $\psi(q)$; las curvas tienen la misma longitud, con lo que se sigue el resultado deseado.

Generalización de isometría local

Definición 7.1.4 Sea M_1 y M_2 superficies regulares en \mathbb{R}^n una aplicación entre superficies $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ se dice una aplicación conforme si existe $\lambda : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, función diferenciable y positiva en todos los puntos, tal que

$$\|d_p \psi \cdot (v_p)\| = \lambda(p) \|v_p\| \quad (7.7)$$

para todo $p \in M_1$ Un difeomorfismo conforme es una aplicación entre superficie que es simultáneamente una aplicación conforme y un difeomorfismo.

Lema 7.1.5 Una aplicación conforme $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ conserve los ángulos entre vectores tangentes no nulos.

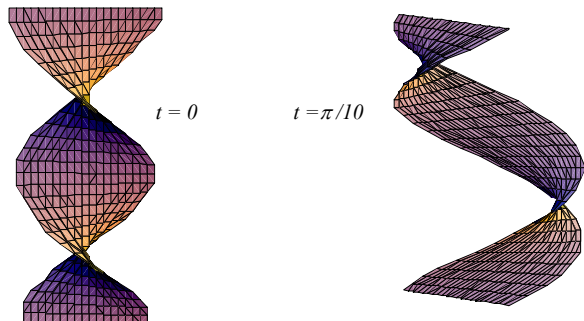


Figura 7.2: Primera transformación.

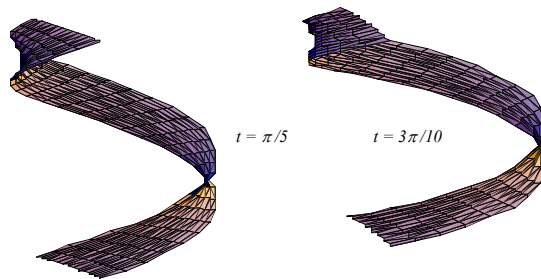


Figura 7.3: Segunda transformación.

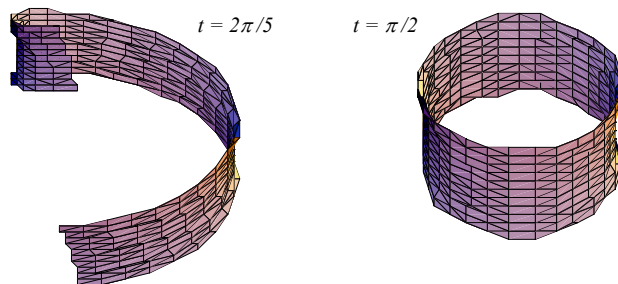


Figura 7.4: Tercera transformación.

Demostración: Bien (7.7) es equivalente a

$$d_p\psi(v_p) \cdot d_p\varphi(w_p) = \lambda(p)^2 v_p \cdot w_p$$

para vectores no nulas cualesquiera v_p y w_p tangentes a M_1 . Entonces

$$\frac{d_p\psi(v_p) \cdot d_p\psi(w_p)}{\|d_p\psi(v_p)\| \|d_p\psi(w_p)\|} = \frac{v_p \cdot w_p}{\|v_p\| \|w_p\|}$$

Así que $d_p\psi$ conservan ángulos.

Proposición 7.1.6 *Si existen sistemas de coordenadas locales $\varphi : U \rightarrow M$ y $\bar{\varphi} : U \rightarrow \bar{M}$ con $E = \delta \bar{E}$, $F = \delta \bar{F}$, $G = \delta \bar{G}$ para todo (u, v) donde $\delta(u, v) > 0$ es una función diferenciable, entonces la aplicación*

$$\psi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \bar{M}$$

es una transformación localmente conforme.

Demostración:

La demostración es similar a la del lema 7.1.3. \diamond

Teorema 7.1.7 *Dos superficies regulares cualesquiera son localmente conformes.*

Demostración:

Ver [9].

Ejemplo 7.1.4 *La proyección estereográfica es una aplicación conforme de la esfera en el plano.*

Bien, sea \mathcal{P} la proyección estereográfica de la esfera dada por

$$\mathcal{P}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

El plano Ω es dado por

$$\Phi(u, v) = (u, v, 0).$$

Así,

$$\mathcal{P}_u = \left(\frac{4(-u^2 + v^2 + 4)}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16u}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right)$$

$$\mathcal{P}_v = \left(\frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4(u^2 - v^2 - 4)}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16v}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right)$$

Para la esfera tenemos

$$E_{S^2} = \langle \mathcal{P}_u, \mathcal{P}_u \rangle = \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \quad F_{S^2} = \langle \mathcal{P}_u, \mathcal{P}_v \rangle = 0,$$

$$G_{S^2} = \langle \mathcal{P}_v, \mathcal{P}_v \rangle = \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \quad .$$

Para el plano Ω se tiene

$$\Phi_u = (1, 0, 0), \quad \Phi_v = (0, 1, 0)$$

$$E_\Omega = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = 1, \quad F_\Omega = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0, \quad G_\Omega = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = 1.$$

haciendo $\delta = \delta(u, v) = \frac{4}{u^2 + v^2 + 4}$, tenemos

$$E_{S^2} = \delta^2 E_\Omega, \quad F_{S^2} = \delta^2 F_\Omega, \quad G_{S^2} = \delta^2 G_\Omega.$$

Entonces la proyección estereográfica \mathcal{P} es una aplicación conforme.

7.2. Teorema de Gauss. Ecuaciones de Compatibilidad

Igual como se procedió a colocar el aparato Frenet en cada punto de una curva regular, en este capítulo, se hará lo mismo al considerar o asignar una base en cada punto $p \in M$ de una superficie regular orientable; se estudiarán además sus derivadas en término de esa base.

Dada una superficie regular M y una parametrización $\varphi: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ con orientación N . Es posible asignar a cada punto de $\varphi(\mathcal{U})$ un triedro natural dado por $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$. La pregunta que vamos a responder a continuación es, cómo varían estos vectores al movernos por la superficie; es decir, cuáles son la derivadas de estos vectores con respecto a las coordenadas (u, v) . Para ello, expresaremos estas derivadas como combinaciones lineales de los elementos de la base:

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, \\
\varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N, \\
\varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \bar{L}_2 N, \\
\varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N, \\
N_u &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v, \\
N_v &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

donde los a_{ij} , $i, j = 1, 2$, fueron determinados en el capítulo anterior, en términos de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental I_p . Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, son llamados símbolos de Christoffel de M en la parametrización φ . Ya que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ concluimos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos relativos a los índices bajos. En 7.8, las 4 primeras ecuaciones son llamadas fórmulas de Gauss-Codadazi y las dos últimas se llaman fórmulas de Weingarten.

Ahora, tomando el producto interno con N en las fórmulas de Gauss-Codadazi, obtenemos que

$$L_1 = e, \quad L_2 = \bar{L}_2 = f, \quad L_3 = g$$

donde e, f y g son los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental II_p .

Para determinar los símbolos de Christoffel, se toma el producto interior con φ_u y φ_v en la formulas de Gauss-Codadazi:

$$\begin{cases}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v,
\end{cases} \tag{7.9}$$

Para cada par de (7.9), el determinante del sistema es $EG - F^2 \neq 0$, con lo que podemos escribir los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) correspondiente a φ como :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{G E_u - 2F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2E F_u - E E_v - F E_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{2E G_u - F E_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2G F_v - G G_u - F G_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{E G_u - 2F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)} \end{array} \right. \quad (7.10)$$

con $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$.

Aquí, se toma el producto de las matrices,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}.$$

Y con,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

se procede a obtener los coeficientes.

Ejemplo 7.2.1 *Vamos a calcular los símbolos de Christoffel para la superficie de revolución parametrizada por*

$$\varphi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) \neq 0$$

Bien,

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + g'(v)^2;$$

de lo cual obtenemos, derivando con respecto a u y v que

$$E_u = 0, \quad E_v = 2ff', \quad F_u = F_v = 0, \quad G_u = 0, \quad G_v = 2(f'f'' + g'g'').$$

Del sistema (7.9) y (6.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0 \quad y \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

7.2.1. Fórmulas intrínsecas para la curvatura de Gauss

Teorema 7.2.1 *Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. La curvatura de Gauss de φ está dada por*

$$\mathbb{K} = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{vv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{vv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \det \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{vv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{vv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} \right\} \quad (7.11)$$

o

$$\mathbb{K} = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \right\} \quad (7.12)$$

Demostración: Ver [3] Pag.432.

Teorema 7.2.2 *(Teorema de Egregium de Gauss) Sea $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ una isometría local entre dos superficies regulares $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotemos las curvaturas de gaussianas de M_1 y M_2 por \mathbb{K}_1 y \mathbb{K}_2 , respectivamente. Entonces*

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2 \circ \Phi$$

Demostración:

$\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta local de M_1 , y pongamos $\bar{\varphi} = \Phi \circ \varphi$. Entonces la restricción $\Phi/\varphi(\mathcal{U}) : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \bar{\varphi}(\mathcal{U})$ es una isometría local. Así que,

$$E_\varphi = E_{\bar{\varphi}}, \quad F_\varphi = F_{\bar{\varphi}}, \quad G_\varphi = G_{\bar{\varphi}}.$$

Pero entonces,

$$(E_\varphi)_u = (E_{\bar{\varphi}})_u, \quad (F_\varphi)_u = (F_{\bar{\varphi}})_u, \quad (G_\varphi)_u = (G_{\bar{\varphi}})_u.$$

De forma similar, se procede para las restantes derivadas parciales. En particular el Teorema 7.2.1 implica que $\mathbb{K}_\varphi = \mathbb{K}_{\bar{\varphi}}$, donde \mathbb{K}_φ y $\mathbb{K}_{\bar{\varphi}}$, denotan las curvaturas de Gauss de φ y $\bar{\varphi}$, respectivamente. Por tanto,

$$\mathbb{K}_2 \circ \Phi = \mathbb{K}_{\bar{\varphi}} \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \Phi = \mathbb{K}_\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{K}_1 \quad \diamond$$

Otra forma de ver esto, es utilizando el hecho de que

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = E \mathbb{K} \quad (7.13)$$

En el caso $M_1 = M_2 = M$, siendo $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización por $p \in M$ y si $\Phi : V \subset M \rightarrow M$, donde $V \subset \varphi(\mathcal{U})$ es una vecindad de p , es una isometría local por p , entonces $\bar{\varphi} = \Phi \circ \varphi$ es una parametrización de M por $\Phi(p)$. Ya que Φ es una isometría, los coeficientes de la primera Forma Fundamental en las parametrizaciones φ y $\bar{\varphi}$ coinciden por los correspondientes puntos q y $\Phi(q)$ con $q \in V$; así que, los correspondientes símbolos de Christoffel también coinciden. Por la ecuación (6.6), \mathbb{K} puede calcularse por un punto como función de los símbolos de Christoffel en una parametrización del mismo. De aquí que $\mathbb{K}(q) = \mathbb{K}(\Phi(q))$ para todo $q \in V$.

Observación: Si recordamos aquí, los hechos probados sobre curvas en los primeros capítulos; vemos que la relación entre las distintas curvaturas, aparecen reflejadas en el triedro de Frenet-Serret y el Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas, donde esencialmente se asegura que la curvatura y la torsión determinan la curva en el espacio. Pero, en el caso de Superficies (Variedades de dimensión 2 embebidas en \mathbb{R}^3) el invariante básico es la curvatura, el cual es complicado (más que en el de curva), dado que ésta puede curvarse de modo diferente para distintas direcciones. Como vimos la Curvatura se describe aquí, por dos números llamados las "curvaturas principales" que, proporcionan mucha información sobre la geometría de la superficie, pero que, no permiten discernir la geometría intrínseca de la misma (propiedad preservada por isometrías). Aunque Gauss(1827) hizo el descubrimiento sorprendente (presentado por él como paper), de que una combinación particular de las mismas, $\mathbb{K} = k_1 k_2$, sí es intrínseca. Lo que es conocido como el teorema anterior (7.2.2) o Teorema de Egregium de Gauss; que por lo relevante de sus consecuencias, se ha considerado uno de los hechos más importantes de la geometría diferencial. La ecuación (7.13) se conoce como la *la fórmula de Gauss*; lo que nos permite ver, que el concepto de curvatura de una superficie no está relacionado en absoluto, con la idea de que la superficie esté sumergida en un espacio superior envolvente que tenga de algún modo una curvatura propia. Esta curvatura de la superficie, utilizando un símil terrenal, podrá ser calculada por los habitantes de la misma, con sólo instrumentos de medidas de la superficie (coeficientes de la Primera Forma Fundamental y sus derivadas), sin referencia, cualquiera que sea, al espacio circundante; y mide en el entorno del punto que se trate, la diferencia entre la superficie dada y le plano euclídeo tangente generado (lo cual, a esta altura de la teoría debería estar claro). También, cabe decir aquí, ya para concluir esta observación, que la curvatura media \mathbb{H} no es intrínseca, pues, basta considerar dicha función sobre el cilindro que, siendo localmente isométrico al plano tiene curvatura media no nula.

Bien, los nueve coeficientes de las ecuaciones dadas en (7.8) no son independientes entre sí. De hecho, existe una relación entre e, f, g , sus derivadas, y los símbolos de Christoffel.

Teorema 7.2.3 (*Ecuaciones de Mainardi-Codazzi*) Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular. Entonces,

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = e \Gamma_{22}^1 + f (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2. \end{cases} \quad (7.14)$$

Demostración: Al derivar las ecuaciones (7.15) dadas abajo y el hecho de que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ y $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, nos dará el resultado deseado.

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e N, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + f N, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + g N, \end{aligned} \quad (7.15)$$

Bien, de las dos primeras ecuaciones de (7.15) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{uv} - \varphi_{vu} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e N) - \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + f N) \\ &= \left(\frac{\Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\Gamma_{12}^1}{\partial u} \right) \varphi_u + \left(\frac{\Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\Gamma_{12}^2}{\partial u} \right) \varphi_v + (e_v - f_u) N \\ &\quad - \Gamma_{12}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) \varphi_{uv} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv} + e N_v - f N_u. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Ampliando mas (7.16) con la ayuda de (7.15) para las expresiones de φ_{uu} , φ_{uv} y φ_{vv} . También

vamos a necesitar de las ecuaciones de Weingarten de N . Al agrupar términos, resulta que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right. \\
&\quad \left. + e \frac{gF - fG}{EG - F^2} - f \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \varphi_u \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + e \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \varphi_v \\
&\quad + (e_v - f_u - e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2) + g\Gamma_{11}^2) N \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \varphi_u \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right. \\
&\quad \quad \left. - E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \varphi_v \\
&\quad + (e_v - f_u - e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2) + g\Gamma_{11}^2) N.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Dejando las componentes normales de (7.17), tenemos la primera ecuación de (7.14). De manera similar, sabiendo que $\varphi_{uvv} = \varphi_{uvu}$ y utilizando las ecuaciones segunda y tercera de (7.15), obtenemos la segunda ecuación de (7.14).

Corolario 7.2.4 *Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, para la cual $f = F = 0$. Entonces,*

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial v} = \frac{E_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{cases} \tag{7.18}$$

Corolario 7.2.5 *Sea $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular local y asintótica. Entonces,*

$$\begin{cases} \frac{\partial \log f}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 \\ \frac{\partial \log f}{\partial v} = \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \end{cases} \tag{7.19}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \log f}{\sqrt{EG - F^2}} \right) = -2\Gamma_{12}^2 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \log f}{\sqrt{EG - F^2}} \right) = -2\Gamma_{12}^1 \end{cases} \tag{7.20}$$

Demostración:

Lo de asintótica implica que $e = g = 0$ con lo que se sigue (7.19) y (7.20). \diamond

La fórmula de Gauss y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi son conocida bajo el nombre de ecuaciones de compatibilidad de la teoría de superficie:

Si definimos $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, $L_{11} = e$, $L_{12} = L_{21} = f$ y $L_{22} = g$, podemos definir $g_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $L_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $i, j = 1, 2$. Así que, dadas tales funciones g_{ij} y L_{ij} , ellas deben satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad para que puedan ser los coeficientes fundamentales de alguna carta:

1. Deben ser simétricas: $g_{ij} = g_{ji}$ y $L_{ij} = L_{ji}$;
2. g_{ij} y $\det g$ han de ser positivos;
3. Han de satisfacer las fórmulas de Gauss y de Mainardi-Codazzi.

Por otro lado, dadas las funciones g_{ij} y L_{ij} , existe una única carta (salvo isometría) para ellas; es decir, movimientos en el espacio o flexiones tal que g_{ij} y L_{ij} , son sus coeficientes fundamentales. La fórmula precisa de esta afirmación constituye el teorema de Bonnet.

Teorema 7.2.6 (Bonnet). Sean $g_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $L_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que satisfacen las condiciones de compatibilidad. Entonces, en cada punto $u \in \mathbb{R}^2$, existe un abierto U y una aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \varphi(U)$, carta de M , cuyos coeficientes fundamentales son g_{ij} y L_{ij} . Además, si existen dos cartas con las mismas propiedades, ambas están relacionadas mediante un movimiento en el espacio; es decir, mediante una transformación afín isométrica.

Demostración: Ver [3].

7.3. Transporte paralelo. Geodésicas

Con el objeto de dar una exposición cada vez más sistemática de la geometría intrínseca de superficies, los conceptos serán introducidos de tal manera que dependan solamente de la primera forma fundamental I_p ; los objetos aquí tendrán existencia propia y no necesitarán del espacio ambiente para “vivir” o ser definidos.

Comenzaremos con la definición de *Derivada Covariante*; nos permitirá definir uno de los conceptos básicos sobre los cuales se edifica la geometría riemanniana: el *transporte paralelo* a lo largo de curvas. También conocer las geodésicas, es decir, las curvas que localmente minimizan la distancia (parametrizadas por un múltiplo de la longitud de arco).

Las geodésicas son aquellas curvas cuyo campo vector tangente es paralelo (es decir, con derivadas covariante nula) a lo largo de la curva; se conocerán los detalles más adelante. Bien, recordemos que un campo de vectores (tangente) sobre un abierto $U \subset M$ de una superficie regular M es una correspondencia W que asigna a cada $p \in U$ un vector $W(p) \in T_p M$. El campo de vectores W es diferenciable por p , si para alguna parametrización $\varphi(u, v)$ en p , las componentes a y b de $W(p) = \varphi_u a + \varphi_v b$, en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son

funciones diferenciables por p . W es diferenciable en U si éste es diferenciable para cada $p \in U$.

La definición de derivada covariante, en una primera instancia, viene a generalizar la de la derivada direccional $v[f] = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, de una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con respecto al vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ en el punto p . De hecho, al reemplazar f por un campo de vectores W , observamos que la función $t \rightarrow W(p+tv)$ es un campo de vectores en la curva $t \rightarrow p+tv$. Ahora bien, la derivada de W con respecto a v será la derivada de $t \rightarrow W(p+tv)$ en $t = 0$. Así, una definición, con W campo de vectores en \mathbb{R}^3 es:

Definición 7.3.1 : *Sea W un campo de vectores en \mathbb{R}^3 y sea v un vector tangente a \mathbb{R}^3 en el punto p . Entonces, la derivada covariante de W con respecto a v es el vector tangente*

$$\begin{aligned} \nabla_v W(p) &= W(p+tv)'(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(p+tv) - W(p)}{t} \Big|_p \end{aligned}$$

en el punto p .

$\nabla_v W$ mide la rapidez inicial de variación de $W(p)$ a medida que p se desplaza en la dirección v (ver figura 7.5).

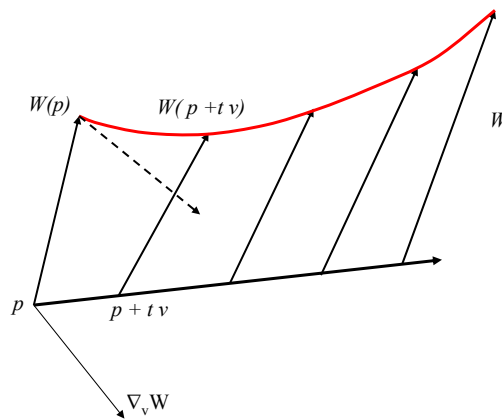


Figura 7.5: La Derivada Covariante $\nabla_v W(p)$.

Por ejemplo, suponga que $W = x^2\bar{e}_1 + yx\bar{e}_2$, $v = (-1, 0, 2)$ y $P = (2, 1, 0)$, entonces

$$W(p+tv) = (2-t)^2 \bar{e}_1 + 2t\bar{e}_2,$$

donde, en un sentido estricto, \bar{e}_1 y \bar{e}_2 también se evalúan en $p + tv$. Por consiguiente,

$$\nabla_v W(p) = W(p + tv)'(0) = -4\bar{e}_1(p) + 2\bar{e}_2(p)$$

Lema 7.3.1 : Si $W = \sum w_i \bar{e}_i$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y si v es un vector tangente en p , entonces

$$\nabla_v W(p) = \sum v[w_i] \bar{e}_i(p)$$

Demostración: Tenemos que

$$W(p + tv) = \sum w_i(p + tv) \bar{e}_i(p + tv)$$

en la restricción de W a la curva $t \rightarrow p + tv$. Para diferenciar un campo vectorial así (en $t = 0$), se diferencian sencillamente sus coordenadas euclidianas (en $t = 0$). Pero, según la definición de la derivada direccional, la derivada de $w_i(p + tv)$ es $v[w_i]$, con esto se tiene que

$$\nabla_v W(p) = W(p + tv)'(0) = \sum v[w_i] \bar{e}_i(p)$$

En resumen, para aplicar ∇_v a un campo vectorial, se aplica v a sus coordenadas euclidianas.

Teorema 7.3.2 Sean v y w vectores tangentes a \mathbb{R}^3 en p , y sean Y y Z campos vectoriales en \mathbb{R}^3 . Entonces

1. $\nabla_{av+bw} Y = a\nabla_v Y + b\nabla_w Y$, para todos los números a y b .
2. $\nabla_v(aY + bZ) = a\nabla_v Y + b\nabla_v Z$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
3. $\nabla_v(fY) = v[f]Y(p) + f(p)\nabla_v Y$ $\forall f \in C^\infty$
4. $\nabla_v[Y \cdot Z] = \nabla_v Y \cdot Z(p) + Y(p) \cdot \nabla_v Z$

[Ver [7],[6]] Se puede tomar la derivada covariante de un campo vectorial W con respecto a un campo vectorial V , en lugar de hacerlo con respecto a un solo vector tangente v . El resultado es el campo vectorial $\nabla_V W$ que en cada punto p es $\nabla_{V(p)} W$; así que, $\nabla_V W$ consiste en todas las derivadas covariantes de W con respecto a los vectores de V . Por tanto, si $W = \sum w_i \bar{e}_i$, entonces $\nabla_V W = \sum V[w_i] \bar{e}_i$, donde $V[w_i]$ en p es $V(p)[w_i]$.

Corolario 7.3.3 Sean los campos vectoriales en \mathbb{R}^3 V, W, Y y Z . Entonces.

1. $\nabla_V(aY + bZ) = a\nabla_V Y + b\nabla_V Z$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\nabla_{fV+gW} Y = f\nabla_V Y + g\nabla_W Y$, $\forall f, g \in C^\infty$
3. $\nabla_V(fY) = V[f]Y + f\nabla_V Y$, $\forall f \in C^\infty$
4. $V[Y \cdot Z] = \nabla_V Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_V Z$

Consideremos ahora la derivada covariante en el caso de una superficie regular M :

Definición 7.3.2 : Sea W un campo vectorial diferenciable sobre el abierto $U \subset M$ y $p \in U$. Sea $\bar{z} \in T_p(M)$. Considere una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \bar{z}$, y sea $W(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la restricción del campo vectorial W a la curva α . El vector obtenido por la proyección normal de $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$ sobre el plano T_pM es llamado la derivada covariante por p del campo vectorial W relativo al vector \bar{z} . Esta derivada covariante es denotada por $\left(\frac{DW}{dt}\right)(0)$ ó $(D_{\bar{z}}W)(p)$. [Ver figura 7.6]

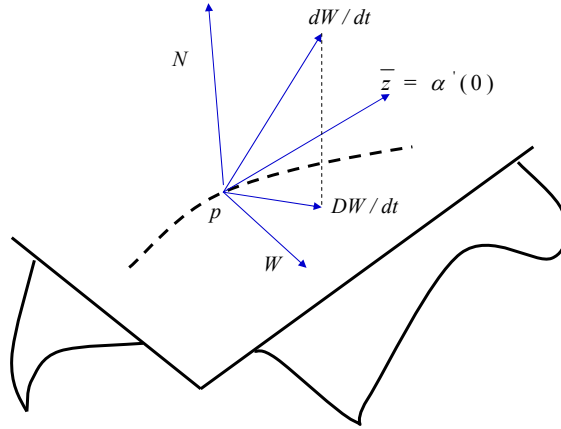


Figura 7.6: La Derivada Covariante $\left(\frac{DW}{dt}\right)(0)$.

La definición arriba utiliza el vector normal N de M y de una curva particular α , tangente a M por p . La diferenciación covariante es un concepto geométrico intrínseco de M y no depende de la curva α que se escoja: considere $\varphi(u, v)$ una parametrización de M por p . Sea $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, la expresión de α en la parametrización φ y el campo W en términos de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ asociada a φ es

$$\begin{aligned} W(t) &= a(u(t), v(t))\varphi_u + b(u(t), v(t))\varphi_v \\ &= a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v \end{aligned}$$

Así

$$\frac{dW}{dt} = a(\varphi_{uu}u' + \varphi_{uv}v') + b(\varphi_{vu}u' + \varphi_{vv}v') + a'\varphi_u + b'\varphi_v$$

donde “'” denota la derivada con respecto a t . Ya que $\frac{DW}{dt}$ es la componente de $\frac{dW}{dt}$ en el plano tangente, utilizamos las ecuaciones de Gauss para φ_{uu} , φ_{uv} y φ_{vv} , sin las componentes normales, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma'_{12} bv')\varphi_u + \\ &\quad (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v \end{aligned} \quad (7.21)$$

La expresión (7.21) muestra que $\frac{DW}{dt}$ depende solamente del vector $(u', v') = \bar{z}$ y no de la curva α . Además, (7.21) viene en términos de los símbolos de Christoffel; es decir, a través de la Primera Forma Fundamental, lo que prueba el carácter geométrico intrínseco.

En particular, si M es plana con $E = G = 1$ y $F = 0$, resulta que $\Gamma_{ij}^k = 0$ y $\frac{dW}{dt} = \frac{DW}{dt}$ (la derivada covariante coincide con la derivada usual de vectores en el plano). Esto es la derivada covariante, es una generalización de la derivada de vectores en el plano.

Otra consecuencia de (7.21) es que la derivada covariante puede ser extendida en un campo vectorial definido solamente por los puntos de una curva parametrizada. Ejemplo de ello, el campo vectorial tangente $W = \alpha'(t)$, es un campo vectorial a lo largo de α . [Ver figura 7.7]

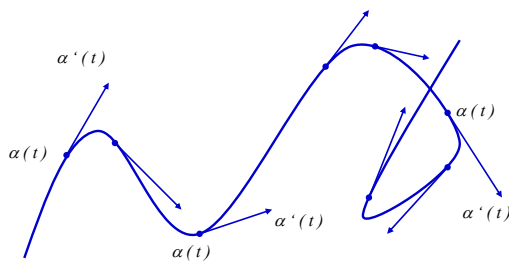


Figura 7.7: El campo vectorial tangente $W = \alpha'(t)$,

Definición 7.3.3 : Sea W un campo de vectores diferenciable a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$. La expresión (7.21) de $\left(\frac{DW}{dt}\right)(t), t \in I$, es bien definida y es llamada la derivada covariante de W por t .

Desde el punto de vista externo a la superficie, en el orden de obtener la derivada covariante de un campo W a lo largo de $\alpha : I \rightarrow M$ por $t \in I$, tomaremos la derivada usual del campo (dW/dt) por t y proyectamos este vector ortogonalmente sobre el plano tangente $T_{\alpha(t)}M$ (lo que coincide con nuestra definición 7.3.1 de derivada covariante). Esto es,

$$\left(\frac{DW}{dt}\right)(t) = (dW/dt)|_t - \langle (dW/dt)|_t, N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}M$$

Así que, si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva parametrizada α , la derivada covariante de un campo W a lo largo de α es la misma para ambas superficies. Si $\alpha(t)$ es una curva en M , pensada como la trayectoria de un punto que se mueve en ella, $\alpha'(t)$ es la rapidez y $\alpha''(t)$ la aceleración de α , respectivamente. La derivada covariante $\frac{D\alpha'}{dt}$ del campo vectorial tangente $\alpha'(t)$ es la componente tangencial de la aceleración $\alpha''(t)$. Intuitivamente $\frac{D\alpha'}{dt}$ es la aceleración del punto $\alpha(t)$, “visto desde la superficie M ”. Aquí se tiene

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt} + \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

Definición 7.3.4 : Un campo vectorial W a lo largo de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ se dice que sea paralelo si $\left(\frac{DW}{dt}\right)(t) = 0$ para cada $t \in I$.

Ejemplo 7.3.1 Por ejemplo, en el caso particular del plano tenemos:

Dados dos puntos distintos p y q , los unimos por una curva α . Tomamos un vector arbitrario v en p y consideramos un vector igual a lo largo de los puntos de la curva α . Esto es posible, ya que cada punto de α el paralelismo euclídeo garantiza la existencia de una única recta con la dirección de v . Ahora es posible extraer de dicha recta una copia de v en cada punto de la curva. Así el campo W definido es constante, la longitud de los vectores y sus ángulos con una dirección fija son constante $\left(\frac{dW}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0\right)$. [Ver figura (7.8)abajo]

Es importante tener en cuenta que si elegimos cualquier otra curva γ uniendo p y q el vector resultante de trasladar v desde p hasta q es el mismo. (Esto es, el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva cerrada en el plano coincide con él mismo cuando se recupera el punto de partida). [Ver figura (7.9) abajo]

La extensión de este procedimiento para el transporte de vectores sobre curvas en superficies se debe a Levi Civita quien, en 1917 desarrolló una estrategia que describimos aquí:

Tomemos dos puntos p y q sobre M y $\alpha(t)$ una curva que los une. Sea ahora v un vector en T_pM , como lo muestra la figura (7.10) abajo. Cortamos una tira estrecha de papel de forma que podamos cubrir la curva considerada y la representamos sobre el

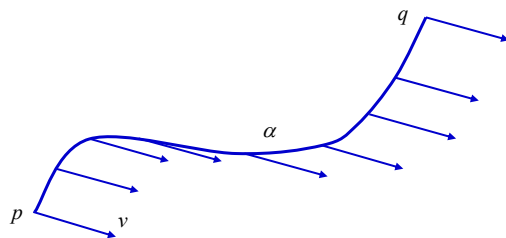


Figura 7.8: El transporte paralelo en el plano.

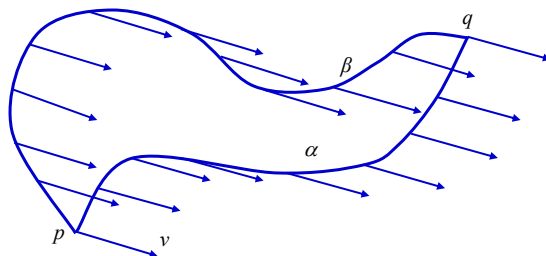


Figura 7.9: El transporte paralelo sobre curvas cerradas en el plano.

papel, dibujando el vector v en el mismo. (Aquí es importante señalar que, si bien siempre podrá ser recubierta la traza de la curva, no sucede así con la superficie, ya que en tal caso necesitaríamos una deformación no-simétrica de la tira de papel).

Retiramos la tira de papel de la superficie y la dejamos sobre el plano, con lo que la curva $\alpha(t)$ dará lugar a una curva sobre el mismo. Transportamos ahora la imagen de v paralelamente de p a q utilizando el paralelismo euclídeo. [Ver figura (7.11) abajo] Colocamos de nuevo la tira de papel sobre la superficie, lo que dará lugar a un conjunto de vectores tangentes a la superficie a lo largo de la curva $\alpha(t)$, como lo muestra la figura (7.12) abajo.

Ahora no es complicado observar que el resultado de desplazar paralelamente un vector de un punto a otro de una superficie depende de la curva elegida. esto es, el proceso depende del camino. este fenómeno geométrico se denomina *holonomía*; esto lo explicaremos un poco más adelante, cuando veamos las propiedades correspondientes que se derivan del *transporte paralelo*.

Proposición 7.3.4 : Sean W y V dos campos de vectores paralelos a lo largo de $\alpha : I \rightarrow M$. Entonces $\langle W(t), V(t) \rangle$ es constante. En particular, $\|W(t)\|$ y $\|V(t)\|$ son constantes y el ángulo $\theta = \angle(W(t), V(t)) = cte.$, para todo $t \in I$.

Demostración: Decir que el campo de vectores W es paralelo a lo largo de α , significa que $\frac{dW}{dt}$ es normal al plano al cual es tangente M para $\alpha(t)$; es decir,

$$\langle V(t), \frac{dW}{dt} \rangle = 0 \quad , \quad t \in I$$

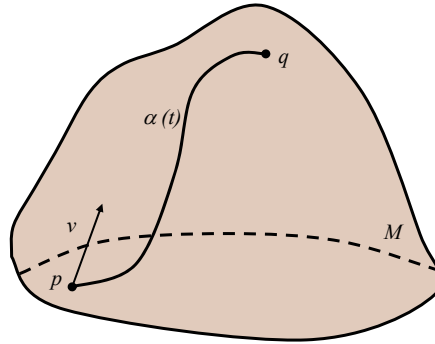


Figura 7.10: Como se transportar paralelamente el vector v sobre superficie.

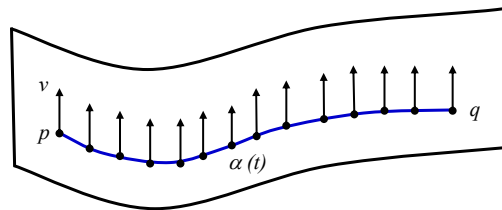


Figura 7.11: El transporte paralelo sobre la tira de papel.

De igual forma, $\frac{dV}{dt}$ es también normal al plano tangente, por $\alpha(t)$. Así que,

$$\langle V(t), W(t) \rangle' = \langle \frac{dV}{dt}, W(t) \rangle + \langle V(t), \frac{dW}{dt} \rangle = 0$$

para $t \in I$ por tanto $\langle V(t), W(t) \rangle = c t t e.$, $t \in I$. \diamond

Podemos decir entonces, que los campos de vectores paralelos a lo largo de una curva, no cambian su longitud ni sus ángulos relativos uno del otro, al igual como los campos paralelos euclidianos que son de longitud constante y hacen ángulos constantes. Así, podemos ver la traslación paralela alrededor de un triángulo sobre la esfera mostrado en la figura (7.13) abajo.

Ejemplo 7.3.2 *El campo de vectores tangentes de un meridiano (parametrizado por longitud de arco) en una esfera unitaria S^2 es un campo de vectores paralelos en S^2 . En realidad, ya que los meridianos son grandes círculos sobre S^2 , la derivada usual de tal campo es normal a S^2 . Así, su derivada covariante es cero. [Ver gráfica abajo]*

El transporte paralelo del vector v en el ejemplo (7.3.1) del plano mencionado arriba, tiene su justificación en:

Proposición 7.3.5 : *Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva parametrizada en M y sea $W_0 \in T_{\alpha(t_0)}(M), t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores paralelos $W(t)$ a lo largo de $\alpha(t)$, con $W(t_0) = W_0$.*

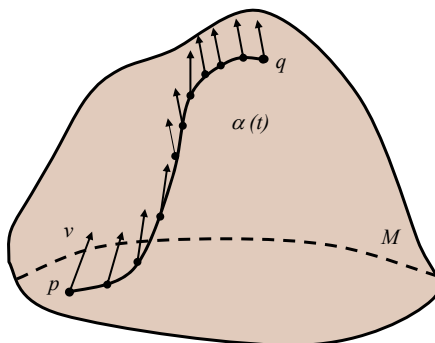


Figura 7.12: El transporte paralelo de v sobre la superficie.

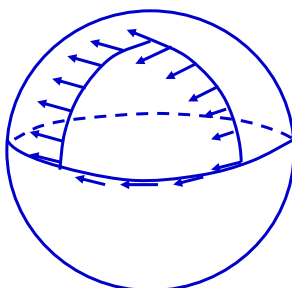


Figura 7.13: El transporte paralelo sobre un triángulo de S^2 .

Demostración: (Se demostrará al final de esta sección; tiene sus fundamentos en el teorema de existencia de ecuaciones diferenciales dada una condición inicial.)

De esto se desprende:

Definición 7.3.5 Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva parametrizada y $W_0 \in T_{\alpha(t_0)}(M)$, $t_0 \in I$. Sea W el campo de vectores paralelo a lo largo de α , con $W(t_0) = W_0$. El vector $W(t_1)$, $t_1 \in I$, es llamado transporte paralelo de W_0 a lo largo de α por el punto t_1 .

Observación: Si $\alpha : I \rightarrow M$, $t \in I$, es regular, entonces el transporte paralelo no depende de la parametrización de $\alpha(I)$; si $\beta : J \rightarrow M$, $\sigma \in J$ es otra parametrización regular para $\alpha(I)$, se sigue que:

$$\frac{DW}{d\sigma} = \frac{DW}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} \quad t \in I, \quad \sigma \in J$$

ya que $\frac{dt}{d\sigma} \neq 0$; $W(t)$ es paralelo ssi $W(\sigma)$ es paralelo.

De la proposición 7.3.4 se deduce:

a) Para $p, q \in M$ y una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(\ell) = q$. Denotando $\tau_\alpha : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$ la aplicación que asigna a cada $v \in T_p(M)$ su transporte paralelo a lo largo de α por q . Se prueba que τ es una isometría.

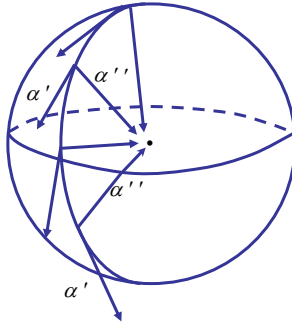


Figura 7.14: El Campo tangente de un meridiano de S^2 es paralelo.

b) También, si dos superficies M y \overline{M} son tangentes a lo largo de una curva parametrizada α y W_0 es un vector de $T_{\alpha(t_0)}(M) = T_{\alpha(t_0)}(\overline{M})$ entonces, $W(t)$ es el transporte de W_0 relativa a superficie de M , sii $W(t)$ es el transporte paralelo de W_0 , relativo a \overline{M} .

En verdad, la derivada covariante $\frac{DW}{dt}$ de W es la misma para ambas superficies. Con lo que la afirmación arriba se sigue, pues el transporte paralelo es único. \diamond

Bien, aquí podemos dar un resumen general del transporte paralelo:

Si M es euclidiana, entonces $W(t)$ es el campo constantemente igual a W_0 (pero el pie de los vectores $W(t)$ cambian para situarse sobre la curva $\alpha(t)$). Así que el transporte paralelo en el espacio euclidiano no depende de las curvas utilizadas para unir los puntos p y q . Esto depende de que el espacio euclídeo es “plano” (o sea, llano, sin curvatura). Pero esto no es cierto para una superficie arbitraria como se verifica fácilmente para la esfera. Es decir, el transporte paralelo depende en general de las curvas usadas para unir dos puntos dados. Una idea intuitiva, del significado de transporte paralelo en superficies, es la siguiente: el campo paralelo $W(t)$ es la manera “más económica” de llevar, a lo largo de la curva, el vector W tangente a M en p hasta un vector tangente en q . Es evidente que el vector se tiene que mover en el espacio cambiante, pues sino dejaría de ser tangente, en otras palabras, W se tiene que acomodar a la superficie M . Más aún, $\tau_\alpha : T_p M \rightarrow T_q M$ entonces $\tau_\alpha^{-1} : T_q M \rightarrow T_p M$ coincide con τ_α a lo largo de la curva α , pero recorrida en el sentido inverso. Ahora, cuando el transporte paralelo depende de las curvas utilizadas (cuando M se aparta de su plano) se mide a través del denominado grupo de holonomía Φ_p de M en el punto p . El grupo Φ_p es un subgrupo de las transformaciones ortogonales del espacio euclídeo $T_p M$. Más precisamente

$$\Phi_p = \{ \tau_\alpha : \alpha \text{ es una curva cerrada por } p. \}$$

En Φ_p se cumple $\tau_{\alpha_1} \circ \tau_{\alpha_2} = \tau_{\alpha_2 * \alpha_1}$, donde $\alpha_1 * \alpha_2$ es la curva obtenida de recorrer primero α_2 y luego α_1 . La holonomía (es decir, el grupo de holonomía que siempre será visto como subgrupo ortogonal del espacio tangente) es una de las nociones más importantes de la geometría riemanniana. La razón es la siguiente: nos permite saber cuáles son los objetos geométricos paralelos en M , a partir de cuáles son los objetos algebraicos, en el espacio tangente en un punto, que son invariantes por la holonomía. Los objetos geométricos pueden ser bastante diversos: tensores paralelos, familias paralelas de tensores. Estos objetos se corresponden, vía la restricción al punto, con tensores algebraicos, subespacios

o familias de tensores algebraicos, que son invariantes por la holonomía [01].

Ejemplo 7.3.3 *Veamos que ocurre en la esfera unitaria y el cono tangente a la misma:*

Sea C una curva paralelo de colatitud ϕ de una esfera unitaria orientada y sea w_0 un vector unitario, tangente a C por algún punto p de C . Sea C parametrizada por longitud de arco s con $s = 0$ por $p \in C$.

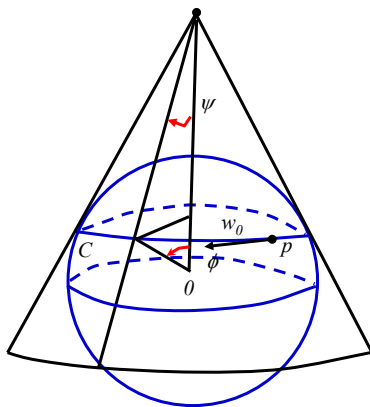


Figura 7.15: El transporte paralelo sobre un paralelo de S^2 .

Considérese el cono, el cual es tangente a la esfera por C . El ángulo $\psi = \pi/2 - \phi$. por la propiedad descrita arriba, el problema se reduce a determinar el transporte paralelo de w_0 , a lo largo de C , relativa al cono tangente.

El cono, menos un generador es, sin embargo, isométrico a un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, dando en coordenadas polares por

$$0 < p < t_2, \quad 0 < \theta < 2\pi \text{ sen } \phi$$

ya que en el plano el transporte paralelo coincide con la noción usual, obtendremos por desplazamiento s de p , correspondiente al ángulo central θ , que el ángulo orientado formado por el vector tangente $t(s)$ con el transporte paralelo $W(s)$ es dado por $2\pi - \theta$.

Las curvas parametrizadas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de un plano a lo largo de la cual el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$ es paralelo, son precisamente las líneas rectas de ese plano. Las curvas parametrizadas que satisfacen una condición análoga para una superficie, son llamadas “geodésicas”.

Definición 7.3.6 : *Una curva parametrizada no constante, $\gamma : I \rightarrow M$, se dice que es geodésica por $t \in I$ si el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ por t , es decir,*

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

γ es una geodésica parametrizada si esta es geodésica para todo $t \in I$.

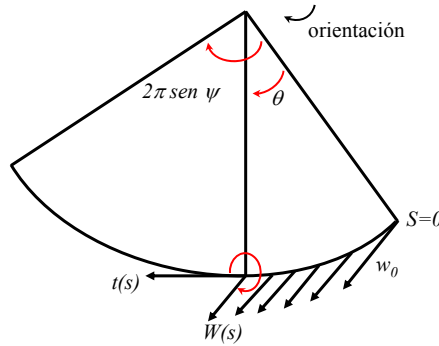


Figura 7.16: El transporte paralelo $W(s)$ es dado por $2\pi - \theta$.

Por la proposición 7.3.4. obtenemos inmediatamente que $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$. Por tanto, podemos introducir la longitud de arco $s = ct$, como parámetro y concluiremos que el parámetro t de una geodésica parametrizada γ es proporcional a la longitud de arco de γ .

Observe que una geodésica parametrizada puede admitir auto intersecciones. Sin embargo, su vector tangente es no nulo, y así la parametrización es regular. La noción de geodésica es claramente local. La definición de geodésica se puede extender a subconjunto de M que son curvas regulares.

Definición 7.3.7 Una curva conexa C en M se dice que es geodésica, si para cada $p \in C$, la parametrización $\alpha(s)$ de una vecindad coordenada de p por la longitud de arco s es una geodésica parametrizada; es decir, $\alpha'(s)$ es un campo vectorial paralelo a lo largo $\alpha(s)$.

Observe que cada recta contenida en una superficie satisface la definición 7.3.7.

Desde el punto de vista anterior de la superficie M , la Def. 7.3.7 equivale a decir que $\alpha''(s) = \kappa(s)n(s)$ es normal principal por cada punto $p \in C$ es paralela al normal N de M por p ; es decir, la componente tangencial de la aceleración $\alpha''(s)$ se anula. Esta condición permite identificar geoméricamente algunas geodésicas.

Ejemplo 7.3.4 Los círculos grandes de una esfera S^2 , C , son geodésicas.

Estos se obtiene por la intersección de la esfera con un plano que pasa a través del origen \hat{O} de S^2 . La normal principal por un punto $p \in C$ yace en la dirección de la recta que conecta p a \hat{O} porque C es un círculo de centro \hat{O} . Ya que S^2 es una esfera, el normal N a S^2 yace en la misma dirección, lo que prueba nuestra afirmación.

Se prueba que para cada punto $p \in M$ y cada dirección en $T_p(M)$ existe exactamente una geodésica $C \subset M$ que pasa a través de p y tangente por esta dirección. En el caso de la esfera, por cada dirección en $T_p(S^2)$ pasa un gran círculo que es una geodésica, éstos son las únicas geodésicas de una esfera.

Ejemplo 7.3.5 Consideremos el cilindro circular recto.

Para el cilindro circular recto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$, es claro que los círculos obtenidos por la intersección del cilindro con planos son geodésicas, pues el normal principal por cualquiera de sus puntos es paralelo al normal N del cilindro por este punto.

Por la Def.7.3.7, las líneas rectas del cilindro (generadores) son también geodésicas. Considerando la parametrización

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

del cilindro C por el punto $p \in C$, con $\varphi(0, 0) = p$. Es esta parametrización, $\varphi(u(s), v(s))$ es la expresión de C con s como longitud de arco. Hemos visto que φ es una isometría local que aplica una vecindad U de $(0, 0)$ del plano uv en el cilindro. Ya que la condición de ser geodésica es local e invariante por isometrías, la curva $(u(s), v(s))$ debe ser geodésica en U que pasa por $(0, 0)$. Pero las geodésicas del plano son líneas rectas. En consecuencia, excluyendo el caso ya obtenido,

$$u(s) = as, \quad v(s) = bs, \quad a^2 + b^2 = 1$$

se sigue que cuando una curva regular C (ni círculo ni recta) es una geodésica del cilindro; esta es localmente de la forma

$$(\cos as, \sin as, bs)$$

lo que nos da una hélice. De esta manera, todas las geodésicas de un cilindro recto son determinadas.

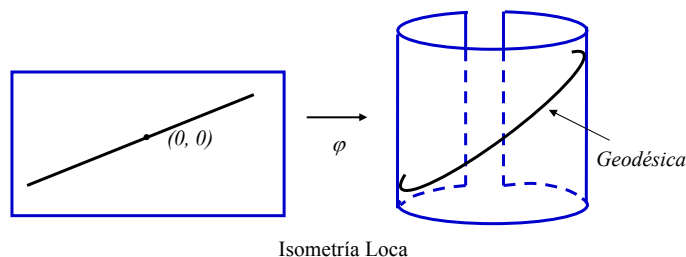


Figura 7.17: El transporte paralelo $W(s)$ es dado por $2\pi - \theta$.

Dos puntos en el cilindro que no están en un círculo paralelo al plano xy , es posible conectarlos a través de un infinito números de hélices (números infinitos de geodésicas). Esto puede ocurrir solamente con geodésicas que hace un “giro completo” ya que el cilindro menos un generador es isométrico al plano.

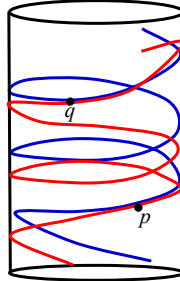


Figura 7.18: Hélices, geodésicas que unen puntos del cilindro.

La geodésica en el plano son caracterizadas como curvas regulares de curvaturas cero. En el caso de no ser geodésica, estas curvas tienen una curvatura con signo (rapidez unitaria).

El parámetro de una geodésica no es arbitrario. El hecho que una curva sea una geodésica depende de su forma y de su parametrización, como vemos en el siguiente ejemplo de una línea recta en \mathbb{R}^2 descrita por la parametrización $p(t) = (t^3, t^3)$; en este caso

$$\frac{dp}{dt} = 3t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Como $\frac{D}{dt} = \frac{d}{dt}$ en \mathbb{R}^2 , tenemos que

$$\frac{Dp}{dt} \left(\frac{dp}{dt} \right) = 6t \frac{\partial}{\partial x} + 6t \frac{\partial}{\partial y} \neq 0.$$

Esta curva $p(t)$ no es una geodésica aunque es una recta. Ver [2]

Así las geodésicas son aquellas curvas para las cuales en algún sentido se generaliza el concepto de línea recta, aunque ellas pueden no ser líneas rectas.

Ahora

Definición 7.3.8 Sea W un campo vectorial diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ sobre una superficie orientada M . Ya que $W(t), t \in I$ es un campo de vectores unitarios, $\left(\frac{dW}{dt}\right)(t)$ es normal a $W(t)$ y en consecuencia

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times W(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[DW/dt]$, se llama el **valor algebraico** de las derivada covariante de W por t .

Obsérvese que el signo de $[DW/dt]$ depende de la orientación de M y que $[DW/dt] = \langle dW/dt, N \times W \rangle$.

Se observa que la definición de transporte paralelo y de geodésica no depende de la orientación de M , pero la curvatura geodésica (análogo a curvatura para curvas planas), que definimos a continuación, cambia su signo, por un cambio de orientación de su superficie M .

Definición 7.3.9 : Sea C una curva regular orientada sobre una superficie orientada M y, sea $\alpha(s)$ una parametrización de C , en una vecindad de $p \in M$, por longitud de arco s . El valor algebraico de la derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ de $\alpha'(s)$ por p es llamada la curvatura geodésica de C por p .

Así que las geodésicas se caracterizan, como curvas regulares cuya curvatura geodésica es nula.

Desde el punto de vista externo a M , el valor absoluto de k_g de C por p , es el valor absoluto de la componente tangencial del vector $\alpha''(s) = k_\alpha(s)n(s)$ donde $k_\alpha(s)$ es la curvatura de C por p y $n(s)$ su vector normal, ya que el valor absoluto de la componente normal del vector $k_\alpha(s)n(s)$ es el valor absoluto de la curvatura normal k_n de $C \subset M$ en p , tendremos que

$$\kappa_\alpha^2 = k_g^2 + k_n^2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{pues, } \alpha''(s) = \alpha''(s)^{Tang} + \alpha''(s)^{Norm} \\ \text{y } \|\alpha''(s)\|^2 = \|\alpha''(s)^{Tang}\|^2 + \|\alpha''(s)^{Norm}\|^2 \end{array} \right] \quad (7.22)$$

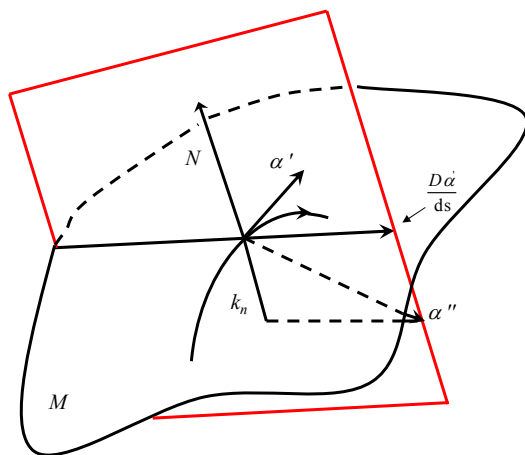


Figura 7.19: Curvatura geodésica.

Por ejemplo, el valor absoluto de la curvatura geodésica k_g de un paralelo C de colatitud ϕ en una esfera unitaria S^2 es según (7.22):

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \phi} = k_n^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2$$

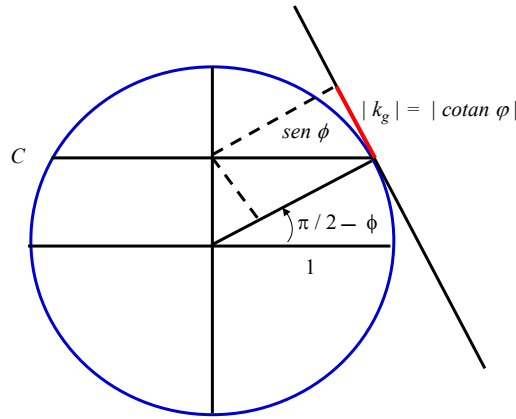


Figura 7.20: Curvatura geodésica.

$\Rightarrow k_g^2 = \cot^2 \phi$. El signo de k_g depende de N en $M = S^2$ y C [ver figura (7.20)].

Observación: La curvatura geodésica de $C \subset M$ cambia de signo cuando cambiamos la orientación de C ó de M .

Obtendremos ahora una expresión del valor algebraico de la derivada covariante. Para ello necesitamos algunos preliminares:

Sean V y W dos campos de vectores diferenciables a lo largo de $\alpha : I \rightarrow M$ (c.p.d.), con $\|V(t)\| = \|W(t)\| = 1, t \in I$. Se quiere definir una aplicación diferenciable $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $\phi(t), t \in I$, es el ángulo determinativo de $V(t)$ a $W(t)$ en la orientación de M . Para eso, consideramos el campo vector \widehat{V} a lo largo de α , definido por la condición de que $\{V(t), \widehat{V}(t)\}$ sea una base ortogonal para cada $t \in I$. Así que

$$W(t) = a(t)V(t) + b(t)\widehat{V}(t)$$

donde a y b son funciones diferenciables en I y $a^2 + b^2 = 1$.

El Lema 7.3.6 abajo muestra que fijando un ángulo determinativo $\phi_0 = \langle V(t_0), W(t_0) \rangle$ es posible extenderlo diferenciable en I , que es lo que se requiere.

Lema 7.3.6 : Sea a y b unas funciones diferenciables en I con $a^2 + b^2 = 1$ y ϕ_0 sea tal que $a(t_0) = \cos \phi_0, \quad b(t_0) = \sin \phi_0$. Entonces la función diferenciable

$$\phi = \phi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

es tal que $\cos \phi(t) = a(t), \sin \phi(t) = b(t), t \in I$ y $\phi(t_0) = \phi_0$.

Demostración: Muestre que la función $(a - \cos \phi)^2 + (b - \sin \phi)^2 = 2 - 2(a \cos \phi + b \sin \phi)$ es nula ó que $A = a \cos \phi + b \sin \phi = 1$. \diamond

Ahora podemos relacionar la derivada covariante de dos campos de vectores a lo largo de una curva a la variación del ángulo que ellos forman.

Lema 7.3.7 : Sea V y W dos campos de vectores diferenciables a lo largo de la curva $\alpha : I \rightarrow M$, con $\|V(t)\| = \|W(t)\| = 1$, $t \in I$. Entonces

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] - \left[\frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\phi}{dt}$$

donde ϕ es el ángulo determinativo diferenciable de V a W , dado en el lema 7.3.6.

Demostración:[3]

Una consecuencia inmediata del lema arriba es: Sea C una curva regular orientada en M , $\alpha(s)$ una parametrización por longitud de arco s de C por $p \in C$, y $V(s)$ un campo de vectores paralelos a lo largo de $\alpha(s)$. Entonces, al tomar $W(s) = \alpha'(s)$, obtenemos

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\phi}{ds}$$

En otras palabras, la curvatura geodésica es la razón de cambio del ángulo que la tangente a la curva hace con una dirección paralela a lo largo de la curva. En el caso del plano, la dirección paralela es fija y la curvatura geodésica se reduce a la curvatura usual.

Proposición 7.3.8 : Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización ortogonal (es decir, $F = 0$) de una vecindad de una superficie orientada M , y $W(t)$ un campo vectorial diferencial de vectores unitarios a lo largo de la curva $\varphi(u(t), v(t))$. Entonces

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\phi}{dt}$$

donde $\phi(t)$ es el ángulo entre φ_u y $W(t)$ en la dirección dada por la orientación.

Demostración: Sean $e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}$ $e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}$ los vectores tangentes unitarios de las curvas coordenadas.

Observe que $e_1 \times e_2 = N$, donde N es la orientación dada de M . por el lema 7.3.7,

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\phi}{dt}$$

donde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ es el campo e_1 restringido a la curva $\varphi(u(t), v(t))$. Ahora

$$\begin{aligned} \left[\frac{De_1}{dt} \right] &= \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle \\ &= \left\langle (e_1)_u, e_2 \right\rangle \frac{du}{dt} + \left\langle (e_1)_v, e_2 \right\rangle \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Ahora, ya que $F = 0$, tendremos que $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v$, y por tanto

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}$$

similarmente,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}$$

Así que, en la expresión dada para $[DW/dt]$, obtenemos:

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\phi}{dt}$$

Ahora podemos probar la proposición 7.3.5:

Si $\alpha : I \rightarrow M$ está contenida en la vecindad de una parametrización ortogonal $\varphi(u, v)$. Entonces, según la proposición 3, la condición de paralelismo del campo W llega a ser

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = \beta(t)$$

Denotando por ϕ_0 un ángulo determinativo orientado de φ_u a W_0 , el campo W es determinado enteramente por

$$\phi = \phi_0 + \int_{t_0}^t \beta(t) dt,$$

el cual prueba la existencia y la unicidad de W en este caso.

Ahora si $\alpha(I)$ no está contenida en una vecindad coordenada, usamos la compacidad de I para dividir $\alpha(I)$ en un número finito de partes, cada una contenida en una vecindad coordenada. Utilizando la unicidad dada en la primera parte para intersecciones no vacías, se puede extender el resultado al presente caso.

Hay otra fórmula para expresar la curvatura geodésica, conocida como la Fórmula de Liouville:

Proposición 7.3.9 : (Liouville)

Sea $\alpha(s)$ parametrizada por longitud de arco s en una vecindad de un punto $p \in M$ de una curva orientada regular C en una superficie orientada M .

Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización ortogonal de M en p y $\phi(s)$ al ángulo que φ_u hace con $\alpha'(s)$ en la orientación dada. Entonces

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \frac{d\phi}{ds}$$

donde $(k_g)_1$ y $(k_g)_2$ son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas $v = \text{cte.}$ y $U = \text{cte.}$, respectivamente.

Demostración: [3]

A continuación se determinan las ecuaciones diferenciales que deben verificar localmente las geodésicas de una superficie en \mathbb{R}^3 .

Lema 7.3.10 : Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por una carta local regular $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$. Entonces las geodésicas de M están determinadas por las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{12}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0, \end{cases} \quad (7.23)$$

donde las funciones Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de φ .

Demostración: Sea α una curva sobre M . Entonces

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad (7.24)$$

donde $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$. Derivando (7.24) dos veces y utilizando la regla de la cadena

$$\alpha'' = \varphi_{uu} u'^2 + \varphi_u u'' + 2\varphi_{uv} u'v' + \varphi_{vv} v'^2 + \varphi_v v''$$

De las fórmulas de Gauss, resulta que

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2)\varphi_u \\ &\quad + (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2)\varphi_v \\ &\quad + (eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2)N, \end{aligned}$$

donde $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ es el campo de vector normal unitario a M . Para que α sea una geodésica, los componentes de α'' respecto a φ_u y φ_v deben ser nulas.

Consecuencia de este lema 7.3.10 es:

Proposición 7.3.11 Dado un punto $p \in M$ y un vector $w \in T_p(M)$, $w \neq 0$, existe en $\varepsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.

Vamos a presentar algunos cálculos de geodésicas en Superficies de Revolución:

Ejemplo 7.3.6 Consideremos la superficie de revolución obtenida al girar una curva regular del plano XZ que no corte al eje Z alrededor del mismo. Admitiendo la parametrización

$$\varphi(\phi, \theta) = (u(\theta) \cos \phi, u(\theta) \sin \phi, v(\theta)),$$

con

$$E = u(\theta)^2, \quad F = 0, \quad G = u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2.$$

En este sistema de coordenadas (ϕ, θ) los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{-u(\theta)u'(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{u'(\theta)}{u(\theta)}, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\phi}^\theta = 0$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = 0, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}$$

Por el lema 7.3.10 tenemos que, la curva $\alpha(t) = \varphi(\phi(t), \theta(t))$ es geodésica si satisface:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)} \phi' \theta' \\ 0 &= \theta'' - \frac{u(\theta)u'(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \phi'^2 + \frac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \theta'^2 \end{aligned} \quad (7.25)$$

De estas ecuaciones se desprende lo siguiente:

Los meridianos $\phi = ctte.$ y $\theta = \theta(s)$ parametrizados por longitud de arco son geodesicas; esto es, $\phi = ctte.$ satisface la primera ecuación y la segunda queda como

$$\theta'' + \frac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \theta'^2 = 0$$

Por otra parte la Primera Forma Fundamental, $I_p(\alpha'(s))$ arroja lo siguiente

$$I_p(\alpha'(s)) = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

Por lo que

$$(u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2) \theta'^2 = 1,$$

y así,

$$\theta'^2 = \frac{1}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}.$$

Al derivar esto último tenemos,

$$2\theta'\theta'' = -\frac{2(u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta))}{(u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2)^2} \theta' = -\frac{2(u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta))}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} (\theta')^3,$$

como $\theta' \neq 0$,

$$\theta'' = -\frac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \theta'^2$$

Esto es, se satisface la segunda ecuación de (7.25) a lo largo de los meridianos; en consecuencia estos últimos son geodésicas.

Veamos ahora que paralelos $\theta = ctte.$ y $\phi = \phi(s)$, parametrizados por longitud de arco, son geodésicas. Bien, al sustituir en las ecuaciones de (7.25), se se tiene que

$$\phi'' = 0 \quad 0 = \frac{u(\theta)u'(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \phi'^2$$

Puesto que $u(\theta) \neq 0$, la segunda ecuación se verifica sólo si $\phi(s) = ctte.$ (que determina un punto y no una curva), o para $u'(\theta) \neq 0$. Los únicos paralelos $\theta = ctte.$ que son geodésicas son aquellos donde el radio $\theta(\theta)$ sea máximo o mínimo relativo, o tales paralelos sean generados por la rotación de un punto de la generatriz de la curva donde la tangente es paralela al eje de revolución, como podemos observar en la figura(7.21) abajo.

Ahora, en la geodésica $\alpha(t) = \varphi(\phi(t), \theta(t))$ se tiene que

$$\nabla_{\alpha'} \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \phi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)} \phi' \theta' \\ ctte. = u^2(\theta)u(\phi')^2 + (u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2)(\phi')^2 \end{cases}$$

La primera ecuación puede integrarse:

$$\begin{aligned} 0 = \phi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)}\phi'\theta' &\Leftrightarrow \frac{\phi''}{\phi'} = \frac{-2u'(\theta)}{u(\theta)}\theta' \\ &\Leftrightarrow \log(\phi'(s)) = -2\log(u(\theta(s))) + ctte. \\ &\Leftrightarrow \phi'(s) = \frac{\delta}{u^2(\theta(s))} \end{aligned}$$

Luego si se puede obtener $\theta(s)$, integrando se obtiene $\phi(s)$.

Sustituyendo ahora en la segunda ecuación, obtendremos:

$$ctte. = u^2(\theta) \left(\frac{\delta}{u^2(\theta)} \right)^2 + (u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2)(\phi')^2 \Leftrightarrow \theta' = \frac{\sqrt{ctte \cdot u^2(\theta) - \delta^2}}{u(\theta) \sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}$$

Si sabemos resolver esta ecuación diferencial de primer orden en $\theta(s)$ obtendremos la geodésica, con su parametrización.

Por otra parte, en muchas ocasiones sólo nos interesa la curva, y no nos importa parametrizar de una u otra forma. En tal caso, podemos prescindir del parámetro s y suponer que la curva está dada por una ecuación implícita $\phi = \phi(\theta)$.

Así, utilizando la regla de la cadena, la función $\phi(\theta)$ que describe la curva cumple la ecuación:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\phi'(s)}{\theta'(s)} = \frac{\delta \sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}{u(\theta) \sqrt{ctte \cdot u^2(\theta) - \delta^2}}$$

En este caso, ya no es necesario resolver una ecuación diferencial, sino que simplemente integrando se obtiene las ecuaciones implícitas de la geodésica:

$$\phi(\theta) = \int = \frac{\delta \sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}{u(\theta) \sqrt{ctte \cdot u^2(\theta) - \delta^2}} d\theta.$$

Si se desea obtener su parametrización asociada, se puede hacer mediante el cálculo de otra integral. [Ver figura 7.21]

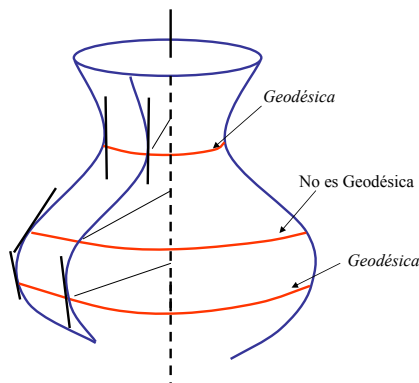


Figura 7.21: Geodésicas en una superficie de revolución.

Ejemplo 7.3.7 El paraboloides es la superficie de revolución que se obtiene al girar una parábola en el plano XZ respecto a su eje. Las funciones que determinan esta son, por tanto: $u(\theta) = \theta$, $v(\theta) = m\theta^2$, con $m \neq 0$.

Las geodésicas quedan caracterizadas por:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{k \sqrt{1^2 + (2m\theta)^2}}{\theta \sqrt{ctte. \theta^2 - k^2}}$$

Cambiando de nombre a las constantes, tenemos:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \lambda \frac{\sqrt{\theta^2 + (\frac{1}{2m})^2}}{\theta \sqrt{\theta^2 - (\frac{1}{2m})^2}} \Rightarrow \phi(\theta) = \int \lambda \frac{\sqrt{\theta^2 + (\frac{1}{2m})^2}}{\theta \sqrt{\theta^2 - (\frac{1}{2m})^2}} d\theta$$

En cuanto a paralelos, como $u'(\theta) = 1 \neq 0$, no existen geodésicas.

Ejemplo 7.3.8 El toro se obtiene al girar una circunferencia en el plano XZ que no corte al eje Z . Las funciones que describen el toro son $u(\theta) = a \cos \theta + b$, $v(\theta) = a \sin \theta$, donde $b > a > 0$.

Respecto a qué paralelos $\theta = ctte.$ son geodésicas, puesto que $u'(\theta) = -a \sin \theta$, sólo se dan para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ que son la circunferencia interior y exterior del toro.

El resto de las geodésicas quedan caracterizadas por:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{ak}{(a \cos \theta + b) \sqrt{ctte. a (a \cos \theta + b)^2 - k^2}}$$

Ejemplo 7.3.9 En este caso, las funciones $u(\theta)$, $v(\theta)$ definen una recta en el plano XZ no paralela al eje Z , esto es, $u(\theta) = m\theta + b$, $v(\theta) = \theta$ con $m \neq 0$. Mediante una traslación podemos suponer $b = 0$.

Las ecuaciones implícitas de las geodésicas que no son paralelos serán $\phi = \phi(\theta)$ con:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{k \sqrt{m^2 + 1^2}}{(m\theta + b) \sqrt{ctte. (m\theta + b)^2 - k^2}}$$

Cambiando de nombre a las constantes de la forma

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\gamma}{\theta \sqrt{\theta^2 - \beta^2}} \Rightarrow \phi(\theta) = \int \frac{\gamma}{\theta \sqrt{\theta^2 - \beta^2}} d\theta = \frac{-\gamma}{\beta^2} \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} \right)$$

Las geodésicas son las curvas de la forma

$$\phi = a \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} \right)$$

Por tanto, las curvas de la forma: $\beta = \sqrt{\theta^2 - \beta^2} \tan \left(\frac{\phi}{a} \right)$

En cuanto a los paralelos que son geodésicas, como $u'(\theta) = m \neq 0$, no hay paralelos que sean geodésicas.

De la afirmación de la proposición 7.3.11, resulta:

Proposición 7.3.12 *Existe un único campo \mathcal{G} en $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ cuyas trayectorias son de la forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde γ es una geodésica de M . El campo \mathcal{G} se denomina el campo geodésico en TM .*

Como consecuencia de la teoría de ecuaciones diferenciales se tiene el siguiente resultado.

Proposición 7.3.13 *Para cada punto $p \in M$ existe un entorno \mathcal{U} de TU , donde (U, φ) es un sistema coordenadas en p y $(p, 0) \in \mathcal{U}$, un número $\delta > 0$ y una aplicación diferenciable $\psi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$ tales que la aplicación $t \rightarrow \psi(t, q, v)$ es la única trayectoria de \mathcal{G} que satisface la condición inicial $\psi(0, q, v) = (q, v)$ para cada $(p, v) \in \mathcal{U}$.*

Observemos que es posible escoger \mathcal{U} de la siguiente forma

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon_1\},$$

donde $V \subset U$ es un entorno de p . Haciendo $\gamma = \pi \circ \psi$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección canónica, podemos reescribir el resultado anterior como sigue.

Proposición 7.3.14 *Dado $p \in M$, existen un abierto $V \subset M$, con $p \in V$, números $\delta > 0$ y $\epsilon_1 > 0$, y una aplicación diferenciable $\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon_1\}$, tales que la curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, es geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad v para cada $(p, v) \in \mathcal{U}$.*

La condición de ser geodésica es una propiedad local de curvas parametrizadas. Esto permite deducir que si dos geodésicas coinciden (como conjuntos) en algún intervalo, entonces su unión, con una adecuada parametrización, es también una geodésica. Además, si dos geodésicas tienen un punto en común y son tangentes en ese punto, entonces su unión es también una geodésica. Esto es,

Proposición 7.3.15 *Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow M$, I conexo, dos geodésicas. Si existe $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$ entonces $\alpha = \beta$.*

como consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.3.16 *Dados $p \in M$, y $v \in T_p M$ existe una única geodésica $\gamma_{(p,v)}(t) = \gamma(t, p, v)$ en M tal que:*

- (1) *La velocidad inicial de γ es v , es decir, $\gamma'(0, p, v) = v$*
- (2) *El dominio $I(p, v)$ de $\gamma_{(p,v)}$ es el mayor posible, es decir, si $\alpha : J \rightarrow M$ es otra geodésica tal que $\alpha'(0) = v$ entonces $j \subset I(p, v)$ y $\alpha = \gamma_{(p,v)} / J$.*

Esto implica que cada geodésica está contenida en una única geodésica maximal $\gamma_{(p,v)}$, esto es, en una geodésica que no es un subconjunto propio de ninguna otra geodésica. Se dice que $\gamma_{(p,v)}$, es geodésicamente inextensible.

Lema 7.3.17 (Lema de Homogeneidad) *Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida en $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t, q, av)$, está definida en $(-\delta/a, \delta/a)$ y se verifica*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Como consecuencia, es posible aumentar (disminuir) la velocidad de una geodésica disminuyendo (aumentando, respectivamente) su intervalo de definición. El lema de homogeneidad nos sitúa en la pista del siguiente problema: ¿Qué reparametrizaciones de una geodésica conservan el carácter de geodésica?

Proposición 7.3.18 *Sea $\gamma : \rightarrow M$ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ es una geodésica si, y sólo si, $h(t) = at + b$.*

Bien, el objetivo de todo lo anterior, es para dar una breve introducción de la *Aplicación Exponencial* y de manera general dar algunas consecuencias de la misma. [Ver [2],[3]]

7.3.1. La Aplicación Exponencial

Las propiedades de homogeneidad de las geodésicas tienen como consecuencia que, dado un punto, existe un entorno tal que todas las geodésicas que parten de ese punto están definidas en un mismo intervalo de \mathbb{R} . Este hecho permite construir, para cada punto m de M , la *aplicación exponencial* $exp_m : T_m M \rightarrow M$, que a cada vector tangente a M , en m le hace corresponder la imagen de 1 por la geodésica que parte de m en la dirección de dicho vector.

Proposición 7.3.19 *Dado $p \in M$, existen un entorno V de p en M , un número $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, donde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TU; q \in V, w \in T_q M, |w| < \epsilon\}$, tal que $\gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, es la única geodésica de M , que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad w , para cada $(q, w) \in \mathcal{U}$.*

Definición 7.3.10 *Sea $p \in M$ y $\mathcal{U} \subset TM$ el abierto dado en la proposición 7.3.19. Entonces la aplicación $exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por*

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, w) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}), \quad v \neq 0,$$

se llama *aplicación exponencial* en \mathcal{U} .

La aplicación exponencial puede interpretarse de otra manera: Sea un punto $q \in \pi(\mathcal{U})$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección canónica.

Definición 7.3.11 *La aplicación $exp_q : B(0, \epsilon) \subset T_q M \rightarrow M$ definida por*

$$exp_q(v) = exp(q, v),$$

donde $B(0, \epsilon)$ es la bola abierta de centro $0 \in T_q M$ y radio $\epsilon > 0$, se denomina *aplicación exponencial en q* .

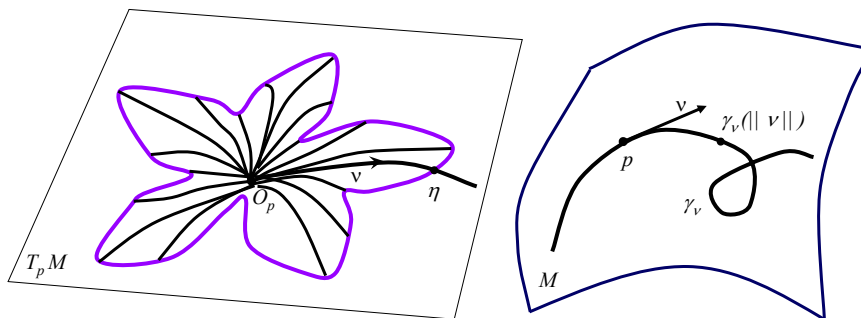


Figura 7.22: La Aplicación Exponencial.

Geoméricamente, la aplicación exponencial $exp_q(v)$ es el punto de M , que se obtiene al recorrer una distancia $|v|$, a partir de q , a lo largo de la geodésica que pasa por q con velocidad igual a $\frac{v}{|v|}$. Por el lema de homogeneidad, lo anterior es equivalente a recorrer una *distancia* igual a 1, a partir de q , a lo largo de la geodésica que parte de q con velocidad v , como lo muestra la figura 7.22.

Es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposición 7.3.20 *Sea $m \in M$. Entonces:*

- (1) exp_m es una aplicación diferenciable con $exp_m(0) = m$.
- (2) Existe $\epsilon > 0$, tal que $exp_m : B(0, \epsilon) \subset T_m M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de la bola $B(0, \epsilon)$ en un abierto de M .

Nótese que

$$d(exp_m)_0 v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} exp_m(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(tv) = v,$$

es decir,

$$d(exp_m)_0 v = v$$

Esto muestra que $d(exp_m)_0$ es un isomorfismo, y por tanto exp_m es un difeomorfismo local.

De esto último, para $m \in M$ y \mathcal{U} entorno abierto de 0 en $T_m M$, se tiene que $V = exp_m(\mathcal{U})$ se denomina *entorno normal* de m y decimos que (\mathcal{U}, exp_m) es un *sistemas de coordenadas normales* en m ; en la proposición, $B(m, \epsilon) = exp_m(B(0, \epsilon))$ se denomina *bola normal* (o *geodésica*) de centro m y radio $\epsilon > 0$.

7.3.2. Completitud y el teorema de Hopf-Rinow.

Una superficie regular M se dice *completa* cuando las geodésicas en M están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, en la proposición 7.3.11 siempre es posible escoger $\epsilon = \infty$. Observar que si M es completa, exp_m está definida en v para todo $v \in T_m M$. Se

puede demostrar que toda superficie cerrada es completa; en particular, toda superficie compacta es completa.

Ejemplo 7.3.10 *El cono*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

es una superficie regular no completa ya que la rectas $z = \sqrt{x^2 + y_0^2}$, $x > 0$, con $y_0 \neq 0$ fijo son geodésicas que no pueden ser extendida para $x = 0$.

Teorema 7.3.21 (Hopf-Rinow). *Si M es una superficie regular, conexa y completa, entonces dados $p, q \in M$ existe una geodésica $\gamma_{p,q}$ en M tal que la distancia intrínseca de p a q es igual a la longitud de la curva γ de p a q ; es decir, $d(p, q) = \ell(\gamma_{p,q})$.*

Ejemplo 7.3.11 *El teorema anterior es falso si no hay la hipótesis de completitud. Esto es, sea $M = S^2 - p$ la superficie obtenida quitándole un punto p a la esfera unitaria S^2 . Dados dos puntos p_1, p_2 en el círculo máximo que pasa por p , simétricos respecto de p y en el semicírculo abierto que contiene a p , entonces no hay geodésica de longitud mínima en M uniendo p_1 con p_2 .*

Corolario 7.3.22 *Si M es completa y acotada, entonces es compacta.*

Demostración: Como M es completa, para cada $p \in M$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es sobreyectiva. En efecto, si $q \in M$ y $\ell = d(p, q)$, entonces por el teorema de Hopf-Rinow existe una geodésica γ que une p con q tal que $\ell(\gamma) = \ell$ (podemos suponer que γ está parametrizada por longitud de arco). Si $v = \gamma'(0)$, entonces $q = \exp_p \ell v$, es decir, $q \in \text{Im}(\exp_p)$. Como M es acotada, existe un entorno $\overline{B_r}$ de 0 en $T_p M$, $\overline{B_r} = \{w \in T_p M : |w|_p \leq r\}$, tal que $\exp_p(\overline{B_r}) = \exp_p(T_p M) = M$. Como \exp_p es continua y $\overline{B_r}$ es compacto, entonces M es compacta. \diamond

Bueno, vamos a terminar enunciando el teorema de Gauss-Bonnet para superficie, el cual requiere de la teoría del *Cálculo de Variaciones* para su demostración; por su puesto, se puede mirar esta última en el Do Carmo, para aquellos que sienta la curiosidad sobre la misma.

Teorema 7.3.23 (Gauss-Bonnet). *Sea M una superficie completa, regular, cuya curvatura de Gauss \mathbb{K} satisfice*

$$\mathbb{K} \geq r^2, \quad r > 0.$$

Entonces M es compacta y su diámetro δ satisfice

$$\delta \leq \frac{\pi}{r}.$$

7.4. Ejercicios.

Ejercicio 7.1 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Consideremos

$$\text{Isom}(S) = \{\phi : S \rightarrow S : \phi \text{ es una isometría}\}.$$

Prueba que $(\text{Isom}(S), o)$ es un grupo.

Ejercicio 7.2 Comprueba que el cono de una hoja (quitándole el vértice) definido por $\{z = \sqrt{x^2 + y^2} : (x, y) \neq 0\}$ es localmente isométrico al plano.

Ejercicio 7.3 Sea $\phi : S \rightarrow S'$ una isometría local. Calcula $|Jac \phi|$ y dí qué consecuencia se saca del resultado obtenido.

Ejercicio 7.4 Prueba que la restricción de un movimiento rígido de \mathbb{R}^3 a cualquier superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es una isometría local que además preserva la segunda forma fundamental. (Una aplicación entre superficies $f : S \rightarrow S'$ se dice que preserva la segunda forma fundamental si $II'_{f(p)}(df_p(v)) = II_p(v)$ para cada $p \in S$ y cada $v \in T_p S$, donde II, II' denotan las segundas formas fundamentales de S, S' respectivamente.)

Ejercicio 7.5 Sean $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $X : \mathcal{U} \rightarrow S, \tilde{X} : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{S}$ dos parametrizaciones para las cuales $E = \tilde{E}, F = \tilde{F}, G = \tilde{G}$ en \mathcal{U} . Prueba que, entonces, $\phi = \tilde{X} \circ X^{-1} : X(\mathcal{U}) \rightarrow \tilde{S}$ es una isometría local.

Ejercicio 7.6 Prueba que el helicoides y la catenoide son dos superficies localmente isométricas.

Ejercicio 7.7 Sea $\phi : S \rightarrow S'$ una aplicación conforme entre las superficies $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ que preserva las áreas de regiones acotadas (es decir, $\text{Área}(\phi(R)) = \text{Área}(R)$ para cada región acotada $R \subset S$). Prueba que ϕ es una isometría.

Ejercicio 7.8 Considera las superficies de revolución cuyas intersecciones con el plano $\{y = 0\}$ son las siguientes:

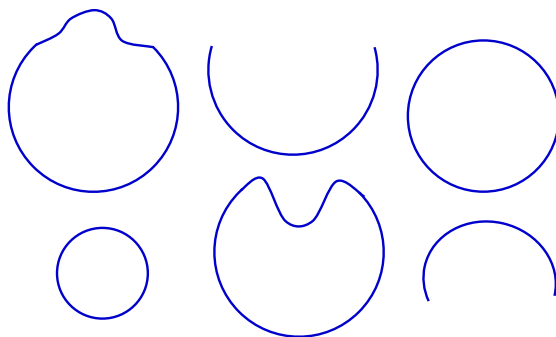


Figura 7.23: superficies de revolución.

y dí cuáles de ellas son isométricas, localmente isométricas, conformes, localmente conformes.

Ejercicio 7.9 Sea $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0\}$ y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por

$$\varphi(u, v) = (u \operatorname{sen} \alpha \cos(v), u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(v), u \cos \alpha),$$

para α constante. Demuestra que φ es un difeomorfismo local de U en un cono C con vértice en el origen y de ángulo 2α en el vértice. ¿Es φ una isometría local de $H = \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in U\}$ en C ?

Ejercicio 7.10 Compruebe que un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S'$ entre dos superficies es una isometría si y sólo si la longitud de arco de cualquier curva parametrizada en S coincide con la longitud de arco de la curva imagen por φ .

Ejercicio 7.11 Sea $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas regulares parametrizadas por la longitud de arco tales que sus curvaturas respectivas k_{α_1} y k_{α_2} cumplen $k_{\alpha_1}(s) = k_{\alpha_2}(s) \neq 0, s \in I$. Sea V un entorno abierto de un punto (s_o, v_o) tal que

$$x_1(s, v) = \alpha_1(s) + v\alpha_1'(s), \quad x_2(s, v) = \alpha_2(s) + v\alpha_2'(s)$$

son superficies regulares. Demuestra que $x_1(V)$ y $x_2(V)$ son isométricas.

Deduce de lo anterior que $Xx_1(v)$ es localmente isométrico a un abierto de un plano.

Ejercicio 7.12 Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y S una superficie tal que $F(S) = S$. Demuestre que F restringida a S es una isometría de S en sí misma.

Deduce que si S es una superficie de revolución respecto del eje e , entonces los giros alrededor de e son isometrías de la superficie en sí misma.

Ejercicio 7.13 Sea S el cilindro de ecuación $x^4 + y^2 = 1$. Construye una isometría de S en sí mismo tal que tenga exactamente dos puntos fijos.

Ejercicio 7.14 Sea X una parametrización de una superficie regular en la que $F = 0 = f$. Demuestra que las ecuaciones de compatibilidad vienen dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \quad \text{Fórmula de Gauss}$$

$$e_v = HE_v, \quad g_u = HG_u \quad \text{Ecuaciones de Codazzi-Mainardi}$$

Ejercicio 7.15 Demuestre que las superficie parametrizadas como

$$X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \log u), \quad Y(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$$

tienen igual curvatura de Gauss en los puntos $X(u, v), Y(u, v)$ pero sin embargo, $Y \circ X^{-1}$ no es una isometría.

Ejercicio 7.16 Consideremos un helicoido, un cilindro circular recto y una esfera. Demuestra que ninguna de las tres superficies anteriores es localmente isométrica a ninguna otra.

Ejercicio 7.17 Razona si existen isometrías locales entre los siguientes pares de superficies:

- a) cilindro y cono,
- b) paraboloido elíptico y esfera.

Ejercicio 7.18 Sea S una superficie y F un movimiento rígido de \mathbb{R}^3 tal que $F(S) = S$. Si el conjunto de puntos fijos de F restringido a S es una curva regular $C \subseteq S$ (no necesariamente conexa), demuestra que cada componente conexa de C es geodésica de S . Deduce a partir del resultado anterior que todo meridiano de una superficie de revolución es una geodésica.

Ejercicio 7.19 Prueba que si una curva en una superficie es al mismo tiempo geodésica y línea de curvatura, entonces es una curva plana.

Ejercicio 7.20 Prueba que si una geodésica (sin puntos de curvatura cero) es una curva plana, entonces es una línea de curvatura.

Ejercicio 7.21 Pon un ejemplo de una línea de curvatura en una superficie, S que sea al mismo tiempo una curva plana y que no sea geodésica de S .

Ejercicio 7.22 Prueba que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces dicha superficie está contenida en un plano o en una esfera.

Ejercicio 7.23 Prueba que una curva de una superficie S es al mismo tiempo geodésica y curva asintótica de S si y sólo si es un segmento de recta.

Ejercicio 7.24 Sea $\alpha(s)$ una curva p.p.a. sobre una superficie S con aplicación de Gauss N . Llamamos curvatura geodésica de α en $\alpha(s)$ al número

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s) \rangle.$$

Demuestra que:

- $\alpha''(s) = k_g(s)N(s) \wedge \alpha'(s) + k_n(s)N(s)$, donde k_n es la curvatura normal de la curva y $N(s) = N(\alpha(s))$,
- la curvatura $k(s)$ de $\alpha(s)$ satisface la igualdad $k(s)^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2$,
- α es geodésica en S si y sólo si su curvatura geodésica es cero en todo punto.

Ejercicio 7.25 Calcula la curvatura geodésica de todo paralelo de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

Ejercicio 7.26 Calcula la curvatura geodésica de un paralelo cualquiera en un toro de revolución.

Ejercicio 7.27 Sea S una superficie de revolución parametrizada como

$$X(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v)).$$

Calcula sus símbolos de Christoffel, las ecuaciones de sus geodésicas y deduce que:

- todo meridiano es una geodésica de S ,
- un paralelo de S a altura $g(v_0)$ es geodésica si y sólo si $f'(v_0) = 0$,
- si $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ es una geodésica entonces $f(v(s))^2 u'(s)$ es constante. O equivalente, observa que si $\theta(s)$ es el ángulo que forma la geodésica con cada paralelo que corta y $r(s)$ es el radio del paralelo entonces $r(s) \cos(\theta(s))$ es constante.

Ejercicio 7.28 Se considera el toro de revolución parametrizado por

$$X(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Sea $\gamma(s)$ una geodésica tangente al paralelo $u = \pi/2$. Prueba que dicha geodésica está totalmente contenida en la región del toro definida por $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$.

Ejercicio 7.29 En el toro de revolución obtenido al girar, alrededor del eje z , la circunferencia de ecuaciones, $(x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0$, con $0 < r < R$, se consideran los paralelos obtenidos al girar los puntos $(R+r, 0)$, $(R-r, 0)$ y (R, r) de dicha circunferencia. Comprueba si alguno de ellos es geodésica, curva asintótica o línea de curvatura del toro.

Ejercicio 7.30 Si S es una superficie completa y $p \in S$, demuestra que la aplicación exponencial $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ es una aplicación sobreyectiva.

Ejercicio 7.31 Sea M la superficie de ecuación $x + y = z^3$. Determinar en cada punto de M las direcciones asintóticas. Calcular las líneas asintóticas. Demostrar que el conjunto de puntos planos de M es una curva, que convenientemente parametrizada constituye una geodésica de M .

Ejercicio 7.32 Sea p un punto de una superficie M . Estudiar las relaciones lógicas que existen entre las siguientes afirmaciones, dando una demostración, o planteado un contraejemplo.

- El punto p es un punto plano de M .*
- Por p pasan tres rectas distintas contenidas en M .*
- Todas las geodésicas de M que pasan por p tienen curvatura nula en p .*
- La curvatura de Gauss de M en p es nula.*

Ejercicio 7.33 Se considera $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2\}$. Demostrar que $o = (0, 0, 0)$ es un punto plano de M . Calcular los demás puntos umbílicos de M , y demostrar que el valor de la curvatura de Gauss en todos ellos (excluido o), es $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$.

Ejercicio 7.34 Sea M una superficie y $p \in M$ probar:

- Cualquier recta L de \mathbb{R}^3 contenida en M , es asintótica.*
- Si M es tangente a un plano afín Π en todos los puntos de una curva regular C , probar que C es línea de curvatura asintótica, y todos los puntos de C son parabólicos.*

Ejercicio 7.35 Si las M_r son como el ejercicio (**buscar número del ejercicio**), probar que para $-1r < 0$, M_r no es superficie. En el resto de los casos, demostrar que todas las superficies M_r son difeomorfas, pero sin embargo dos (distintas) cualesquiera de ellas no pueden ser isométricas.

Ejercicio 7.36 Sea α una curva regular parametrizada por el arco, sin puntos de inflexión, definida sobre una superficie M : Demostrar que α es geodésica, si y sólo si el plano osculador de α es ortogonal al plano tangente a M en cada punto. Probar que si α es geodésica plana entonces es línea de curvatura.

Ejercicio 7.37 Se considera el cilindro $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

- Probar que las curvas $x = \cos t, y = \sin t, z = at$, con $a \in \mathbb{R}$ son geodésicas de M .
- Encontrar todas las geodésicas de M .
- Demostrar que si p y q son dos puntos distintos cualesquiera del cilindro, existen o bien dos, o bien infinitas geodésicas, que los unen. ¿Qué pares de puntos p y q verifican una u otra propiedad?

Ejercicio 7.38 Sea $\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Determinar (en función de ζ) los símbolos de Christoffel de la superficie $z = \zeta(x, y)$, y las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, en la carta de Monge $x = u, y = v, z = \zeta(u, v)$. Calcular también la curvatura de Gauss.

Ejercicio 7.39 Sea $\alpha : I \rightarrow M$, una curva birregular parametrizada por el arco, sobre la superficie M . Supongamos que M contiene a todas las rectas binormales de α . Demostrar que α es necesariamente una geodésica de M . Probar que cualquier curva birregular en \mathbb{R}^3 es geodésica de alguna superficie. ¿Sabes explicar ahora el nombre el plano rectificante?.

Ejercicio 7.40 Sea $\alpha : I \rightarrow M, u \rightarrow \alpha(u)$, una curva birregular plana PPA, sobre una superficie M . Sea $\Pi(u)$ el plano afín ortogonal a $\alpha(u)$. Supongamos que se tiene la siguiente propiedad: para cada $u \in I, \Pi(u) \cap M$ es un abierto de una recta afín $R(u)$. Bajo estas condiciones se pide:

- Demostrar que hay al menos dos planos $\Pi(u_1), \Pi(u_2)$ que no son paralelos.
- Estudiar la relación lógica que hay entre las afirmaciones a), b) y c), dando una demostración, o planteando un contraejemplo
 - La curva geodésica α es geodésica de M .
 - Todas las rectas $R(u)$ son paralelas.
 - α es línea de curvatura de M .

Ejercicio 7.41 Probar que las curvaturas principales de una superficie M , en una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ son las soluciones en k de la ecuación:

$$\det \begin{pmatrix} e - kE & f - kE \\ f - hF & g - kG \end{pmatrix} = 0$$

Ejercicio 7.42 Sea $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$ una carta de la superficie $m, p \in \mathcal{U}$ un punto no umbílico. Probar que $\xi = \lambda(\partial\varphi/\partial u)_p + \mu(\partial\varphi/\partial v)_p$ define una dirección principal si y sólo si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ verifica

$$\det \begin{pmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0$$

Ejercicio 7.43 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva alabeada PPA y (T, N, B) su triedro de Frenet. Llamamos *bisectriz rectificante* en $\alpha(s)$ a la recta afín que pasa por $\alpha(s)$, y tiene por dirección la del vector $T(s) + B(s)$. Supóngase que la unión de todas las bisectrices rectificantes de α forman una superficie M . Se pide

- Dar una parametrización local de M , en torno a cada punto.*
- Expresar la curvatura de Gauss K de M en los puntos de α , en función de la curvatura k y la torsión τ de α .*
- Demostrar que α , es curva plana si y solo si la curvatura media H de M en los puntos de α , es nula.*
- Estudiar si α es una geodésica de M .*
- Estudiar si α es línea de curvatura de M .*
- Probar que si las funciones de curvatura y torsión de α son iguales, entonces cualquier recta contenida en la superficie que corte a α es una bisectriz rectificante de α .*

Ejercicio 7.44 Si dos superficies se cortan bajo un ángulo constante sobre una curva plana, probar que la curva es línea de curvatura de ambas superficies.

Ejercicio 7.45 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, u \rightarrow \alpha(u)$ una curva alabeada PPA con curvatura $k_\alpha = k < 1$, y torsión $T_\alpha = \tau$ ambas **constantes**. Denotamos por $T(u), N(u), B(u)$ al triedro de Frenet de α . Se considera la aplicación $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = \alpha(u) + (\cos v)N(u) + (\sin v)B(u)$$

y supondremos que $M = \text{im}\varphi$ es una superficie. Se pide:

- Determinar la curvatura de Gauss y probar que no depende de la torsión τ .*
- Demostrar que las curvas $\beta(t) = \alpha(u) + (\cos t)N(u) + (\sin t)B(u)$ para cada u fijo, son geodésicas y líneas de curvatura.*

Ejercicio 7.46 Sea p un punto de superficie M . Estudiar qué relación existe entre las siguientes afirmaciones:

- El punto p es hiperbólico.*
- Hay puntos de M a ambos lados del plano afín tangente en p , arbitrariamente próximos a p .*
- Hay curvas regulares α en M , tales que $\alpha(0) = p$, y $\alpha''(0) = 0$.*

Ejercicio 7.47 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PPA contenida en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 y sea $\varphi(u, v) = v\alpha(u)$ para $u \in I, v > 0$. Supuesto que φ define una parametrización global para una superficie M se pide:

- Determinar (en función de u, v y α) los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales.
- Calcular las curvaturas principales y curvatura de Gauss.
- Demostrar que α es línea de curvatura de M .
- Demostrar que un punto de M con coordenadas (u, v) es plano si y sólo si el plano afín osculador de α en $\alpha(u)$, pasa por el centro de \mathbb{S}^2 (es decir, por el origen de coordenadas). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PPA contenida en la esfera unitaria \mathbb{S}^2

Ejercicio 7.48 Sea M la superficie $z = 2x^2 + 2y^2$, $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, 2t^2)$, $X(x, y, z) = (-y, x, z)$. Se pide

- Probar que α es una curva en M , y $A = X \circ \alpha$
- Si $B = \Delta A/dt$, determinar explícitamente los componentes $B_1(t), B_2(t), B_3(t)$.
- Determinar en las coordenadas (ρ, θ) de la parametrización $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = 2\rho^2$ las componentes intrínsecas de A y B .

Ejercicio 7.49 Para cada $r > 0$ se considera el cono $M^r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 z^2, z > 0\}$, y la curva $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 1)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Probar que el ángulo que giran los vectores que se transportan paralelamente en M^r dando una vuelta a lo largo de la circunferencia α , desde $p = \alpha(0)$ hasta el mismo $p = \alpha(2\pi)$ es de $2\pi r / \sqrt{1 + r^2}$.

Ejercicio 7.50 Sean M_1, M_2 superficies de \mathbb{R}^3 , y sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\forall t \in I, \alpha(t) \in M_1 \cap M_2, \quad \text{y} \quad T_{\alpha(t)}M_1 = T_{\alpha(t)}M_2$$

Demostrar que M_1 y M_2 inducen sobre la curva α el mismo transporte paralelo.

Ejercicio 7.51 Calcular el ángulo que girará un vector tangente a la esfera \mathbb{S}^2 después de la traslación paralela a lo largo de una curva cerrada α , en los siguientes casos:

- α es un meridiano.
- α es un paralelo.
- α se compone de dos meridianos, y una parte de dos paralelos y una parte del ecuador contenida entre ellos.
- α se compone de dos meridianos, y una parte de un paralelo contenido entre ellos.

Ejercicio 7.52 Sea M una superficie conexa. Estudiar que relación hay entre las siguientes afirmaciones:

- El transporte paralelo entre dos puntos cualesquiera $p, q \in M$ no depende de la curva que los une.

- b) M tiene curvatura de Gauss nula.
 c) M está contenida en un plano.

Ejercicio 7.53 Determinar el ángulo que giran los vectores al trasladarse paralelamente alrededor de la curva

$$\alpha(t) = \left(r \cos t, r \sin t, \frac{r^2}{2} \right) 0 \leq t \leq 2\pi$$

del paraboloido M de ecuación $2z = x^2 + y^2$, siendo $r > 0$ una constante. Se pide además:

- a) Determinar la curvatura geodésica de α . ¿Puede alguna parametrización de α , ser geodésica).
 b) Probar que la integral de la curvatura de Gauss en todo M es exactamente igual a 2π .
 c) Determinar todas las geodésica de M , que pasan por el origen $\hat{0} = (0, 0, 0)$.

Ejercicio 7.54 Demostrar que la curva intersección de un plano con la esfera \mathbb{S}^2 tiene en \mathbb{S}^2 curvatura geodésica constante. Determinar dicha curvatura en función de la distancia del plano al centro de la esfera. ¿Todas las curvas en \mathbb{S}^2 con curvatura geodésica constante pueden obtenerse por este procedimiento?.

7.5. Paquetes matemáticos para geometría.

A continuación se darán unas direcciones electrónicas para graficar curvas y superficies:

1)

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/vmunoz/geometria.html

NOTA: Todos los programas de esta página son de distribución libre.

Estelas: Programa para representar curvas planas y curvas en el espacio. Instalación: Descomprimir los ficheros de *Estelas.zip* en una carpeta © Angel Montesinos (Universidad de Valencia) y Javier Lafuente García (Universidad Complutense de Madrid).

Siluetas: Programa para representar la gráfica de $z=f(x,y)$ en tres dimensiones. Instalación: Descomprimir el fichero *Siluetas.zip* © Angel Montesinos (Universidad de Valencia) y Javier Lafuente García (Universidad Complutense de Madrid).

Superficies: Programa para es estudio de la Geometría de las superficies. Instalación: Descomprimir el fichero *Superficies.zip* © Angel Montesinos (Universidad de Valencia). Las actualizaciones de este programa, el manual y varios ejemplos de superficies pueden descargarse desde

<http://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/Superficiesw32>.

2)

Dibuja superficies en implícitas y paramétricas. En ellas se puede considerar la métrica inducida por el ambiente que puede ser euclídeo o minkowskiano. También trabaja con métricas pseudoriemannianas en un abierto del plano. Calcula la curvatura en cada punto,

dibuja geodésicas, realiza transporte paralelo.

<http://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/Superficies Mac folder>

3)

Contiene información sobre el libro de A. Gray de geometría diferencial con Mathematica para representar gráficamente curvas y superficies, calcular curvaturas, y otros cálculos de interés en geometría diferencial.

<http://www.wargaming.net/Programming/151/ModernDifferentialGeometryCurvesSurfacesWithMathematica.htm>

4) Este enlace lo he colocado a pesar de que no hemos trabajado con los lenguajes descritos abajo, pero como el software libre a futuro será la herramienta de mas uso , e allí su importancia.

Visualization ToolKit (VTK) es un código fuente abierto, se trata de software libre para gráficas de ordenador en 3D, procesamiento de imagen y visualización, utilizado por miles de investigadores en el mundo. VTK consiste en una librería de clase C++ y varios modos de interfaces que incluyen Tcl/Tk, Java, and Python. VTK dispone de una amplia variedad de algoritmos que incluyen métodos escalares, vectoriales, tensoriales y volumétricos. Tiene técnicas avanzadas y numerosos algoritmos para mezclar imágenes 2D y 3D. Ha sido instalado y comprobado en plataformas basadas en Unix, Windows 98 y Mac OSX.

<http://public.kitware.com/VTK/>

7.6. Enlaces Interesantes.

1) Geometría diferencial de curvas y superficies. JAVIER LAFUENTE.

www.mat.ucm.es/~jlafuent/ – 17k

2) Apuntes. de. Geometría Diferencial. de. Curvas y Superficies. Angel Montesdeoca.

<http://www.gt.matfun.ull.es/angel/apuntes/gth.pdf>

3) Una introducción a la curvatura. Eduardo García Rio.

divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/01-02/PG01-02-garciario.pdf

4) EMENTOS. DE. GEOMETRIA DIFERENCIAL EN. José Darío Sánchez Hernández.

www.branchingnature.org/DarioSanchezGeometria_diferencial_R3_aprendizaje_2004.pdf

5) Teorema Fundamental de Superficies y el Criterio de Frobenius. Misael Avendaño Camacho.

euler.mat.uson.mx/depto/tesis/tesis/misael-avendano.pdf

6) CALCULO DE VARIACIONES Y EL TEOREMA DE BONNET. MARÍA LAURA BARBERIS.

www.union-matematica.org.ar/reunion_anual/antiores/cursos_alumnos04/cursos_barberis.pdf

7) Superficies minimales. Fernando Galaz-García.

www.cimat.mx/fdogg/minsurf.pdf

8) El transporte paralelo; un nexo entre las geometrías intrínseca y extrínseca. Carlos Olmos.

www.union-matematica.org.ar/reunion_anual/reunion05/conferencias05/OLMOS.pdf

9) INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL. LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO.

www.unirioja.es/cu/luhernan/gdfolder/gd.pdf

Bibliografía

- [1] M. Berger & b. Gostiaux, *Differential geometry: Manifolds, curve and surfaces*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1988.
- [2] William M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry.*, Academic Press, 1986.
- [3] M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces.*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] Lima E., *Variedades diferenciables.*, Monografía IMPA., 1973.
- [5] Tavares Geovan, *Notas de geometría diferencial: funciones de morse y clasificación de superficies.*, Monografía IMPA., 1979.
- [6] M.Fernandez & A.Gray L.Cordero, *Geometría diferencial de curvas y superficies con matemática.*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [7] O'Neill, *Geometría diferencial elemental.*, Academic Press, 1969.
- [8] R.Millman & G. Parker, *Elements of differential geometry.*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [9] Chern. S.S, *On the existence of isothermal parameters.*, Proceedings of A.M.S, 1957.
- [10] James J. Stoker, *Differential geometry.*, Wiley Classic Library, 1989.