Medidas Físicas para Atractores Hiperbólicos Singulares

Wilmer José Colmenárez Rodriguez

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"

Barquisimeto, 2008

Medidas Físicas para Atractores Hiperbólicos Singulares

Por
Wilmer José Colmenárez Rodriguez

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría de Profesor ASOCIADO en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología

Barquisimeto, 2008

Medidas Físicas para Atractores Hiperbólicos Singulares

Por

Wilmer José Colmenárez Rodriguez

Trabajo de Ascenso Aprobado

Dr. Francisco Montes de Oca

Dr. Neptalí Romero

Dr. Fernando Villafañe

Barquisimeto, octubre de 2008

Medidas Físicas para Atractores Hiperbólicos Singulares

W. J. Colmenárez*

Departmento de Matemática DCyT,

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado",

Barquisimeto, Venezuela

e-mail: wilmerc@ucla.edu.ve

20 de Octubre de 2008

Abstract

En este trabajo se demuestra la existencia de una única medida física (o de Sinai-Ruelle-Bowen) para atractores hiperbólicos singulares de clase C^2 para flujos en dimensión tres. Estos atractores son parcialmente hiperbólicos con dierección central que expande volumen y contienen singularidades hiperbólicas del campo de vectores asociado. El atractor de Lorenz expansor y la herradura singular son los principales ejemplos de tales atractores.

1 Introducción

Uno de los mayores problemas en la Teoría Ergódica de Sistemas Dinámicos es la existencia de medidas físicas para atractores caóticos no triviales. Para un flujo diferenciable X_t sobre una variedad diferenciable compacta M, una *medida física* (también llamada *medida SRB* después de los trabajos de Sinai, Ruelle y Bowen) es una medida de probabilidad de Borel μ sobre M la cual es invariante por el flujo y tal que

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(X_t(z))dt = \int \varphi d\mu, \quad \text{para toda función real continua } \varphi,$$

*El autor agradece los financiamientos parciales obtenidos de FONACIT y CDCHT/UCLA en Venezuela, y también a CNPq en Brasil.

y esta convergencia se verifica para todo punto z en un subconjunto $B(\mu)$ de M (la *cuenca ergódica* de μ) con medida de Lebesgue positiva.

M. Viana en [V2] ha conjeturado que las medidas físicas existen para clases amplias de sistemas diferenciables que satisfacen ciertas propiedades de hiperbolicidad no uniforme (exponentes de Lyapunov no nulos). En [Pa], J. Palis conjeturó que todo sistema diferenciable puede ser aproximado por otro con un número finito de atractores, cada uno de los cuales soporta una única medida física. Para sistemas uniformemente hiperbólicos la existencia y propiedades de medidas físicas fue estudiada por Sinai [S] y Ruelle [Ru] para el caso de transformaciones y por Bowen-Ruelle [BR] para el caso de flujos. En las últimas décadas las medidas físicas han sido estudiadas para diversos ejemplos y clases de sistemas discretos hiperbólicos no uniformemente, algunos con singularidades o criticalidades, como transformaciones de Hènon, cuadráticas reales, de Lozi, de tipo Lorenz, etc., y también para algunas clases de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (vea por ejemplo [V2] y las referencias allí citadas). Para el caso de flujos, la existencia de medidas físicas ha sido mostrada para atractores de Lorenz expansores y contractivos (o de Rovella, [Rov]) en [Bu] y [M] respectivamente.

En este trabajo el interés se centra en el problema de existencia de medidas físicas para los llamados *atractores hiperbólicos singulares* estudiados en [MPP]. Recordemos la definición exacta de estos atractores. Consideremos un campo de vectores X de clase C^r, con $r \geqslant 2$, sobre una variedad Riemanniana compacta y tridimensional M y sea X_t el correspondiente flujo C^r. Un subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ invariante por X_t es llamado un *atractor* si existe un conjunto abierto $U \supset \Lambda$ positivamente invariante, en el sentido que $X_t(U) \subset U$, tal que

- $\Lambda = \bigcap_{t \geqslant 0} X_t(U)$ (un tal conjunto U es llamado una *región de atracción* de Λ), y
- $X\big|_\Lambda$ es *topologicamente transitivo*, esto es, Λ es el conjunto ω-límite de alguna órbita de X en Λ.

Un atractor Λ es *parcialmente hiperbólico* si el fibrado tangente sobre Λ admite una descomposición continua $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ invariante por la diferencial DX_t y tal que el *subfibrado estable* E^s_Λ es unidimensional y contraído uniformemente por DX_t, mientras que el *subfibrado central* E^c_Λ es *dominado* por E^s_Λ. En términos precisos estas condiciones significan que existen constantes positivas λ y c tales que para todo $x \in \Lambda$ se tiene

- E^s_x es *contractor*, en el sentido que

$$\left\| DX_t(x)\big|_{E^s_x} \right\| \leqslant ce^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0, \quad \text{y}$$

- E^c_x es *dominado* por E^s_x, en el sentido que

$$\left\| DX_t(x)\big|_{E^s_x} \right\| \cdot \left\| DX_{-t}(X_t(x))\big|_{E^c_{X_t(x)}} \right\| \leqslant ce^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Ahora, un *atractor hiperbólico singular* es un atractor parcialmente hiperbólico que contiene singularidades del campo de vectores, todas ellas hiperbólicas, cuya dirección central E^c_Λ es *expansora de volumen*:

$$\left| \det \left(DX_t(x)\big|_{E^c_x} \right) \right| \geqslant ce^{\lambda t} \quad \text{para } \ t > 0.$$

Estos atractores fueron estudiados en [MPP] y [MP2] en conexión con una propiedad de transitividad robusta, y dos de los principales y motivadores ejemplos son el atractor de Lorenz expansor [G] y la herradura singular [LP].

En esta trabjo se demuestra el siguiente resultado principal:

Teorema 1 *Todo atractor hiperbólico singular para campos de vectores de clase C^2 en variedades de dimensión tres posee una única medida física.*

Para construir medidas invariantes para $X_t\big|_\Lambda$ procedemos a través del siguiente esquema lógico en un estilo similar como para el caso del atractor de Lorenz expansor según [Ro]. Primero efectuamos una discretización en el tiempo del flujo por medio de la construcción de una familia finita de secciones transversas locales (usando ideas en [Bo1], [Bo2], [BW] y [Ra]), y luego consideramos la respectiva transformación de Poincaré definida por los retornos a la unión de esas secciones. Un paso clave es asegurar que toda sección transversa local en esta familia sea un rectángulo con un *transversal inestable*, que no es otra cosa que un pedazo de variedad inestable transversa a cada una de las lásminas estables contenidas en el rectángulo. La existencia de esos transversales inestables es una consecuencia del

Teorema de la Variedad Inestable de Pesin [Pe], cuya validez en nuestro contexto descansa sobre la hiperbolicidad no uniforme mostrada en [C], para atractores hiperbólicos singulares con órbitas periódicas densas. Con relación a este hecho, recordamos que todo atractor hiperbólico singular en variedades 3D tienen órbitas periódicas densas, como fue recientemente demostrado en [AP]. Continuando con el esquema, se procede luego a asociar una transformación factor unidimensional a la transformación de retorno, proyectando sobre el espacio cociente de láminas estables en cada sección transversa. La existencia de tal transformación factor está garantizada por una especie de propiedad de Markov parcial de la familia de secciones transversas locales, incluida en el procedimiento de discretización anteriormente mencionado. Esta transformación factor es expansora por pedazos de clase $C^{1+\alpha}$, porque el flujo es C^2 y los transversales inestables describen la dinámica a través de las transformaciones de holonomía de la laminación estable. Resultados obtenidos en [K] sobre transformaciones expansoras por pedazos, permiten encontrar una única medida de probabilidad invariante absolutamente continua para esta transformación factor. Partiendo de ella, se construye la medida física para la transformación de retorno y finalmente, la medida física para el flujo es obtenida mediante construcciones estándares ([CFS], [Ry], [V1]) relativas transformaciones factor y flujos especiales.

El trabajo está organizado como sigue. La demostración del teorema principal (Teorema 1) es dada en la sección 4. Primeramente, en la sección 2 se presentan algunos preliminares geométricos y el enunciado de un resultado (Teorema 2) sobre secciones transversas locales. Una demostración de este teorema es dada posteriormente en la sección final 5. Antes, en la sección 3 usamos las construcciones gemétricas previamente efectuadas en la sección 2 para describir las transformaciones de retorno y factor asociadas al atractor hiperbólico singular. En particular, desarrollamos un análisis unidimensional que conduce a la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas para la transformación factor unidimensional expansora por pedazos.

2 Preliminares Geométricos

En esta sección describimos algunos hechos preliminares y nociones acerca de secciones transversa locales. Esto nos posibilitará enunciar el Teorema 2 sobre la existencia de una familia finita de secciones transversas locales con un transversal inestable o expansor. La demostración del Teorema 2 será dada en la sección 5, página 22.

Considere un campo de vectores X de clase C^2 con flujo asociado $\{X_t\}$ sobre una variedad Riemanniana compacta y sin borde M de dimensión tres. Sea $\Lambda = \bigcap_{t\geqslant 0} X_t(U)$ un atractor hiperbólico singular para X_t con región de atracción U.

Por hiperbolicidad singular, el subfibrado estable unidimensional E^s_Λ sobre Λ es uniformemente contractor. Así, por la teoría de hiperbolicidad uniforme (vea [PT]), este subfibrado es tangente a una foliación unidimensional $\mathcal{F}^{ss}$, la cual es exponencialmente contraída por DX_t. Esta foliación es $C^{1+\alpha}$ para algún $0 < \alpha < 1$ porque X es C^2, y ella se extiende a un entorno $U_0 \subset U$ de Λ en virtud de la compacidad de Λ. Para un número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se definen las *hojas estables locales* de tamaño ε para puntos $z \in U_0$ como los conjuntos

$$\mathcal{F}^{ss}_\varepsilon(z) = \big\{ y \in \mathcal{F}^{ss}(z) : \, dist(X_t(z), X_t(y)) \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \geqslant 0 \big\},$$

donde *dist* denota la distancia inducida sobre M por la estructura Riemanniana. Para puntos z en Λ la correspondiente hoja estable local es la *variedad estable fuerte local* denotada por $W^{ss}_\varepsilon(z)$ (vea [PT]).

Por una *superficie* en M entendemos una 2-variedad compacta conexa con borde inmersa en M, la cual es homeomorfa a la bola cerrada en $\mathbb{R}^2$, y con borde ∂T regular por pedazos, consistente de un número finito de componentes regulares (diferenciables). Más precisamente, una *componente regular* del borde de una superficie es la clausura en la superficie de una componente conexa del conjunto de puntos regulares de la frontera. Estas componentes son curvas suaves compactas, algunas de las cuales pueden tener intersección tangencial en algunos puntos *cuspidales* del borde. De acuerdo con [Bo2], una *sección transversa local* para Λ es una superficie $T \subset M$ tal que $T \cap \Lambda \neq \varnothing$ y existe un número real positivo ξ satisfaciendo $X_{[-\xi,\xi]}(x) \cap T = \{x\}$ para todo punto $x \in T$. Un tal número ξ es llamado un *tiempo de cruce* de T. Para una sección transversa local T escribimos $\operatorname{int} T$ para el conjunto $T \setminus \partial T$, el *interior de* T. La función $(z,t) \mapsto X_t(z)$ es un difeomorfismo de $T \times [-\xi, \xi]$ sobre un entorno cerrado $U_\xi(T)$ de x en M, cuando $x \in \operatorname{int} T$. La función proyección $\operatorname{pr}_T : U_\xi(T) \to T$, definida como $\operatorname{pr}_T(X_t(z)) = z$ para $z \in T$ y $|t| \leqslant \xi$, es de clase C^2 (vea [Bo1]). A lo largo de este trabajo escribiremos LCS (resp. ξ-LCS) como abreviación para sección transversa local (resp. sección transversa local con tiempo de cruce ξ).

La foliación estable induce una laminación sobre cada ξ-LCS. Para cualquier punto $x \in T \cap U_0$ definimos la *lámina estable* $W^s(x,T)$ de x en T como el conjunto

$$W^s(x,T) = \operatorname{pr}_T(\mathcal{F}^{ss}(x,T,\xi)),$$

donde $\mathcal{F}^{ss}(x,T,\xi)$ es la componente conexa de $\mathcal{F}^{ss}(x) \cap U_\xi(T)$ conteniendo el punto x. La colección $W^s(T)$ de láminas estables $W^s(x,T)$ es una partición de T la cual llamamos *laminación estable* de T.

Queremos construir familias de secciones transversas locales con una apropiada geometría, de manera que podamos inducir una transformación unidimensional expansora por pedazos por medio de la proyección sobre un cociente en cada sección transversa. Para este fin establecemos algunas definiciones acerca de las propiedades geométricas requeridas. Sea I^2 el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leqslant 1\}$.

Definición 1 Una sección transversa local $T \subset U_0$ es llamada un *s-rectángulo*, si existe una función continua $\Phi : I^2 \to M$ con imágen $\Phi(I^2) = T$, llamada *s-parametrización* de T, satisfaciendo las siguientes condiciones

(a) La restricción de Φ al conjunto $(0,1) \times (0,1)$ es un difeomorfismo sobre $\operatorname{int} T$.

(b) La imágen $\Phi\big([0,1] \times \{y\}\big)$ de un segmento horizontal es la lámina estable $W^s(T, \Phi(y))$ para cada $y \in [0,1]$.

(c) Los conjuntos $\Phi\big(\{0\} \times [0,1]\big)$ y $\Phi\big(\{1\} \times [0,1]\big)$ son componentes regulares de ∂T, transversos a toda lámina estable en T, y ellos son difeomorfos a intervalos cerrados en la recta. La unión de esos conjuntos es llamada *frontera transversa* de T y es denotada por $\partial^\top T$.

(d) Los conjuntos $\Phi\big([0,1]\times\{0\}\big)$ y $\Phi\big([0,1]\times\{1\}\big)$ son láminas estables de T contenidas en ∂T. Cada una de ellas puede ser o bien una componente regular del borde, difeomorfa a un segmento cerrado no trivial o, en caso contrario, ser un conjunto singular que corresponde a una componente conexa de la intersección de conjuntos como los descritos en (c). En cualquier caso, la unión de estos conjuntos es llamada la *frontera estable* de T y la denotamos por $\partial^s T$.

Para proseguir necesitamos una variante para flujos de la noción de "transversal" en [BM].

Definición 2 Sea $T \subset U_0$ un s-rectángulo con una s-parametrización Φ. Un *transversal* para T es una curva C^2 compacta y conexa $K \subset \Phi\big((0,1)\times[0,1]\big)$ que intersecta transversalmente cada lámina estable de T en un único punto. Un transversal K es *inestable o expansor* (u-*transversal*, para simplificar) si existen constantes positivas C_K, ρ_K con $\rho_K > 1$ tales que para $q \in \operatorname{int} K$ se verifica la siguiente condición de expansión:

$$\|DX_t(q)v\| \geqslant C_K \rho_K^t \|v\|, \quad \text{para todo } t>0 \text{ y todo } v \in T_qK.$$

Si el s-rectángulo T admite un u-transversal, T es llamado *rectángulo admisible.*

Observaciones.

1. Una s-parametrización Φ parametriza al transversal K por medio de una curva $\widehat{K} = \{(\gamma(y), y) \in I^2\}$ que es el gráfico de una función diferenciable $y \mapsto \gamma(y)$ definida sobre $[0,1]$, con $0<\gamma(y)<1$ para todo $y\in[0,1]$.

2. Siempre es posible reparametrizar T por otra s-parametrización (que aún denotamos por Φ) de tal manera que $\widehat{K} = \{\frac{1}{2}\}\times[0,1]$.

Para una familia $\mathcal{T}$ de secciones transversas locales de X_t, denotamos Σ a la unión $\bigcup \mathcal{T}$ de sus elementos, y definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} S_\Sigma &= \big\{q\in\Lambda:\ X_t(q)\notin\Sigma, \ \text{para todo } t\in\mathbb{R}\big\},\\ L_T &= \big\{q\in T:\ X_t(q)\notin\Sigma, \ \text{para todo } t>0\big\} \quad \text{para } T\in\mathcal{T}, \quad \text{y}\\ L_\Sigma &= \bigcup_{T\in\mathcal{T}} L_T. \end{aligned} \tag{1}$$

Dentemos $\text{sing}(X|\Lambda)$ al conjunto de singularidades (hiperbólicas) del campo de vectores X contenidas en Λ.

Definición 3 Una familia finita $\mathcal{T}$ de secciones transversas locales con interiores disjuntos a pares es una *familia de Poincaré* para el atractor hiperbólico singular Λ, si todo elemento de $\mathcal{T}$ intersecta Λ y $S_\Sigma = \text{sing}(X|\Lambda)$. En este caso el conjunto $\Sigma = \bigcup \mathcal{T}$ es llamado una *sección transversa de Poincaré* para Λ.

El *tiempo de retorno* $\tau : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definido como

$$\tau(z) = \begin{cases} \inf\{t > 0 :\ X_t(z) \in \Sigma\} & \text{si } X_{(0,+\infty)}(z) \cap \Sigma \neq \varnothing \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $D(\tau)$ el subconjunto de Σ sobre el cual τ toma valores finitos. La transformación de *Poincaré* o de *primer retorno* F a Σ es definida como

$$F(z) = X_{\tau(z)}(z), \quad \text{para } \ z \in D(\tau).$$

Es claro que $D(\tau) \supset (\Lambda \cap \Sigma) \setminus L_\Sigma$ and $D(\tau) \cap L_\Sigma = \varnothing$.

Tomemos algunas de las condiciones de la definición original de familias de Markov de secciones transversas locales para flujos hiperbólicos en [Bo2], y con ellas damos una versión parcial de la propiedad de Markov en las direcciones estables. En lo que sigue, escribimos $\text{clos}(E)$ o $\bar{E}$ para la clausura de un subconjunto E de M.

Definición 4 Una familia de Poincaré $\mathcal{T}$ es *s-Markov* si verifica la propiedad

$$\text{clos}\big(F(W^s(x,R))\big) \subset W^s(F(x),T) \tag{2}$$

siempre que $x \in (\text{int}\, R) \cap F^{-1}(\text{int}\, T)$ para algunos $R, T \in \mathcal{T}$.

Puesto que Σ es la unión de superficies compactas, podemos considerar la medida de Lebesgue m_Σ en Σ y la integrabilidad de τ con respecto a m_Σ.

Teorema 2 *Sea Λ una atractor hiperbólico singular para un flujo X_t de clase C^2. Entonces, existe una familia s-Markov $\mathcal{T}$ consistente de s-rectángulos admisibles. El tiempo de retorno a la sección transversal de Poincaré $\Sigma = \bigcup \mathcal{T}$ es integrable con respecto a la medida de Lebesgue sobre Σ. Además, para cualquier $T \in \mathcal{T}$ se verifica lo siguiente*

(a) *El conjunto L_T es vacío, o de lo contrario es una lámina estable de T determinada como la intesección de T con la variedad estable débil de alguna singularidad de X en Λ,*

(b) *el respectivo u-transversal de T está contenido en la variedad inestable débil de algún punto en Λ.*

Como planteamos al comienzo de esta sección, la demostración del Teorema 2 será dada en la Sección 5 en la página 22. Por el momento, a lo largo de las próximas dos secciones, supondremos la validez del Teorema 2 para desarrollar una demostración del Teorema 1.

3 Medidas Físicas para Transformaciones Factor y de Retorno

En esta sección mostramos que la transformación de retorno F a la sección de Poincaré Σ de un atractor hiperbólico singular Λ induce una transformación factor unidimensional f de clase $C^{1+\alpha}$ sobre el espacio de las láminas estables en Σ. Usaremos los u-transversales para mostrar que f es una transformación expansora por pedazos de clase $C^{1+\alpha}$. Luego aplicaremos resultados de [K] para obtener una única medida de probabilidad f-invariante la cual es ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Finalmente usamos resultados en [Ry] para obtener una medida SRB de la transformación de retorno F.

Lema 1 *Sea X_t un flujo C^2. Si K es un transversal C^2 para el s-rectángulo T, entonces el espacio cociente $T/W^s(T)$ es $C^{1+\alpha}$-difeomorfo a K.*

Demostración. Sea $\pi_T : T \to T/W^s(T)$ la proyección sobre el espacio cociente y denote $h_K : T \to K$ a la transformación de holonomía sobre K a lo largo de láminas estables dada por

$$h_K(x) = y \quad \text{donde } \{y\} = W^s(x,T) \cap K, \quad \text{para todo } x \in T.$$

Entonces, h_K está bien definida por causa de la definición de transversal. Puesto que $\mathcal{F}^{ss}$ es una foliación $C^{1+\alpha}$, las funciones π_T y h_K son también de clase $C^{1+\alpha}$

(suponiendo que K es al menos $C^{1+\alpha}$). Además, estas funciones son constantes sobre láminas estables. Así, podemos identificar

$$\pi_T(W^s(x,T)) = \pi_T(x) \quad \text{y} \quad h_K(W^s(x,T)) = h_K(x)$$

respectivamente para cada $x \in T$. Por tanto, la transformación $\pi_T \circ h_T^{(-1)}$ está bien definida y es un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de K sobre $T/W^s(T)$, donde $h_K^{(-1)}$ es la aplicación que toma la imagen inversa bajo h_K de puntos en K. En particular $T/W^s(T)$ es difeomorfa a un segmento compacto. ■

Para proseguir establecemos primero algunas notaciones. Sea N una variedad Riemanniana unidimensional con componentes conexas N_i difeomorfas a intervalos compactos, para $1 \leqslant i \leqslant k$. Sea $\operatorname{int} N_i$ el conjunto $N \setminus \partial N_i$ (el *interior* de N_i), donde ∂N_i es el borde de N_i. Sea $f : N \to N$ cualquier transformación C^r por pedazos con $r \geqslant 1$, y $Df \neq 0$ sobre $\operatorname{int} N_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Recordemos que nuestro propósito es estudiar la continuidad absoluta de medidas f-invariantes con respecto a la clase de medidas de Lebesgue sobre N. Entonces podemos omitir cualquier subconjunto finito (conjuntos nulos respecto de Lebesgue en general) de N en nuestros argumentos.

Sea $\mathcal{P}^{(1)} = \{\operatorname{int} N_i : i = 1, \ldots, m\}$ la partición $(\operatorname{mod} 0)$ de N en conjuntos abiertos maximales sobre los cuales f es diferenciable. Para $n > 1$ defina $\mathcal{P}^{(n)}$ como la partición $(\operatorname{mod} 0)$ de N en subconjuntos abiertos maximales tales que $\mathcal{P}^{(n)}(x) = \mathcal{P}^{(n)}(y)$ si y sólo si

$$\mathcal{P}^{(1)}(f^j(x)) = \mathcal{P}^{(1)}(f^j(y)), \quad \text{para todo } j \in \{1, \ldots, n-1\},$$

donde $\mathcal{P}^{(j)}(z)$ denota el elemento de $\mathcal{P}^{(j)}$ al cual z pertenece. Es claro que para un conjunto $\eta \in \mathcal{P}^{(n)}$ dado, la restricción $f^n\big|_\eta$ es un difeomorfismo C^r sobre algún $\xi \in \mathcal{P}^{(1)}$.

Definición 5 La función f es llamada *expansora por pedazos* si existen constantes positivas C_0, λ_0 con $\lambda_0 < 1$ tales que

$$\inf_{z \in \eta} \|Df^n(z)\| \geqslant C_0 \lambda_0^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \eta \in \mathcal{P}^{(n)}.$$

Sea $W^s(\Sigma)$ el espacio de las láminas estables de Σ. Esto es, $W^s(\Sigma)$ es la partición de Σ en láminas estables $W^s(x,T)$ para $T \in \mathcal{T}$ y $x \in T$, donde $\mathcal{T}$ es la familia s-Markov en el Teorema 2.

Lema 2 *El espacio $N = W^s(\Sigma)$ de las láminas estables de Σ es una variedad unidimensional disconexa de clase $C^{1+\alpha}$ con componentes difeomorfas a intervalos compactos. La transformación de retorno a Σ induce una transformación factor f de clase $C^{1+\alpha}$ sobre N la cual es topológicamente transitiva y expansora por pedazos.*

Demostración. Como establecimos antes, la foliación estable $\mathcal{F}^{ss}$ asociada al flujo parcialmente hiperbólico X_t induce sobre Σ una partición en láminas estables $W^s(x,T)$, para $T \in \mathcal{T}$ y $x \in T$. Puesto que X_t es una flujo C^2, tenemos que $\mathcal{F}^{ss}$ es $C^{1+\alpha}$ para algún $\alpha \leqslant 1$ positivo. Sea N el espacio cociente $\Sigma/W^s(\Sigma)$ de láminas estables en Σ, provisto de la estructura diferenciable $C^{1+\alpha}$ inducida por $\mathcal{F}^{ss}$. Suponga que $\mathcal{T}$ consiste de k secciones locales transversas $T_1, \ldots, T_k$. Entonces, cada $T_i \in \mathcal{T}$ es una LCS admisible, de modo que el espacio cociente $N_i = T_i/W^s(T_i)$ es difeomorfo a un segmento compacto por el Lema 1. Así, $N = \bigcup_{i=1}^k N_i$ es una variedad unidimensional disconexa con un número finito de componentes.

Sea $\pi_s : \Sigma \to N$ la proyección natural sobre el cociente dada por $\pi_s(x) = W^s(x,T)$ para $x \in T$ y $T \in \mathcal{T}$. La propiedad s-Markov (2) implica que la laminación estable sobre Σ es F-invariante, en el sentido que $F(\pi_s(x)) \subset \pi_s(F(x))$. Por tanto, existe una transformación factor $f : N \to N$ de clase $C^{1+\alpha}$ bien definida por la relación $f(\pi_s(x)) = \pi_s(F(x))$, para $x \in \Sigma$.

Tenemos que mostrar ahora que la transformación factor f es topologicamente transitiva. Por hiperbolicidad singular $X_t\big|_\Lambda$ es un flujo transtitivo. Una órbita positiva $\mathcal{O}_X^+(q)$ de un punto $q \in \Lambda \cap \Sigma$ y que es densa para X,corresponde a la f-órbita futura de algún punto $x \in N$. Afirmamos que la f-órbita futura de x es densa en N. Fijemos arbitrariamente un subconjunto abierto y no vacío A de N. Entonces $\pi_s^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto y no vacío de Σ y por tanto también lo es $B = (\operatorname{int}\Sigma) \cap \pi_s^{-1}(A)$. Aún más, si T es una LCS en $\mathcal{T}$ cuyo interior intersecta B, entonces el u-transversal K_T intersecta a B también. Por tanto, $\mathcal{O}_X(q)$ intersecta al subconjunto abierto y no vacío $X_{(-\delta,\delta)}(B) \cap \Lambda$ de Λ en algún punto p. Escogiendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño podemos asegurar que existe $t \in \mathbb{R}$ con $0 < t < \delta$ para el cual $X_t(p) \in B$. Así tenemos que $\pi_s(X_t(p))$ está en A y también en la f-órbita futura de x. Por tanto f es topologicamente transitivo como habíamos afirmado.

Nos resta mostrar que f es expansora por pedazos. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ fijemos un u-transversal K_i del rectángulo u-admisible T_i. Para cada K_i existen constantes $C_i > 0$ y $\lambda_i > 1$ tales que

$$\|DX_t(p) \cdot v\| \geqslant C_j \lambda_i^t \|v\| \quad \text{para todo } \ t > 0,$$

siempre que $q \in K_i^u$ y $v \in T_q K_i^u$. En particular, la transformación de retorno F satisface

$$\|DF^n(q) \cdot v\| \geqslant C_i \lambda_i^{\tau^n(q)} \|v\| \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ sea $h_i : N_i \to K_i^u$ el difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ dado por el Lema 1. Recordemos que para cualquier transformación lineal L entre espacios vectoriales finitodimensionales, la *norma mínima* de L es de definida como

$$m(L) = \inf_{\|u\|=1} \|Lu\|,$$

y ésta satisface la relación $m(L_1 \circ L_2) \geqslant m(L_1) \cdot m(L_2)$ siempre que la compuesta esté definida. Además, la norma mínima coincide con la norma de operadores cuando los espacios son unidimensionales. Denotemos

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \inf_{z \in K_i} \|Dh_j(z)\|, \\ c_2 &= \inf_{z \in \Sigma} m\big(D\pi_s(z)\big) \quad \text{y} \\ c_3 &= \max_{1 \leqslant i \leqslant k} C_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Observamos que c_1, $c_2 > 0$ porque K_i y Σ son compactos, h_i es un difeomorfismo y $D\pi_s$ es acotado lejos de cero, respectivamente.

Ahora, para $n \geqslant 1$, tomemos arbitrariamente un η en $\mathcal{P}^{(n)}$. Supongamos que $\eta \subset N_{i_0}$ y $f^n(\eta) = \operatorname{int} N_{i_1} \in \mathcal{P}^{(1)}$ para algún i_0 and i_1. Consideremos al restricción

$$f^n\big|_\eta = \pi_s \circ \big(F^n\big|_{K_{i_0}^u}\big) \circ h_{i_0}.$$

Dado $x \in \eta$ denotamos $q = h_{i_0}(x) \in K^u_{i_0}$. Puesto que $K^u_{i_0}$ y N_{i_0} son unidimensionales, a partir de (3) y (4) podemos estimar $\|Df^n\big|_\eta(x)\|$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\|Df^n\big|_\eta(x)\| &= \left\|D\Big[\Big(\pi_s \circ F^n\big|_{K^u_{i_0}}\Big) \circ h_{i_0}\Big](x)\right\| \\
&= \left\|D\pi_s\big(F^n(q)\big) \circ D\Big(F^n\big|_{K^u_{i_0}}\Big)(q)\right\| \cdot \|Dh_{i_0}(x)\| \\
&\geqslant m\big[D\pi_s\big(F^n(q)\big)\big] \cdot \left\|D\Big(F^n\big|_{K^u_{i_0}}\Big)(q)\right\| \cdot \|Dh_{i_0}(x)\| \\
&\geqslant c_1c_2c_3\lambda_{i_0}^{\tau^n(q)}.
\end{aligned}$$

Así, $\|Df^n\big|_\eta(x)\| \geqslant C_0\lambda_{i_0}^{\tau^n(q)}$ para todo $x \in \eta$, donde $C_0 = c_1c_2c_3 > 0$. Es claro que $\tau^n(q) \geqslant n\tau_0$, donde $\tau_0 = \inf_\Sigma \tau$. Entonces, fijamos como constante de expansión el número $\lambda_0 = \big(\min\{\lambda_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}\big)^{\tau_0} > 1$, con lo cual obtenemos finalmente

$$\inf_{x\in\eta} \|Df^n(x)\| \geqslant C_0\lambda_0^n,$$

para todo $\eta \in \mathcal{P}^{(n)}$. Por tanto la transformación factor f es expansora por pedazos y el Lema 2 está probado. ■

El próximo paso es analizar las propiedades ergódicas de la transformación factor f. Uno puede hacer esto aplicando los resultados en [K]. Especificamente mostraremos que f admite una única medida de probabilidad invariante μ_f la cual es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en N, y además esta medida es ergódica. Denotemos λ a la medida de Lebesgue sobre la recta.

Cada componente N_i de N es difeomorfa a un intervalo compacto en la recta. Fijemos una función continua h de N sobre el intervalo unidad I, de tal manera que los intervalos $J_i = h(N_i)$ tengan interiores disjuntos a pares y las restricciones $h_i = h\big|_{N_i}$ de h a N_i son inmersiones $C^{1+\alpha}$ sobre $J_i \subset I$ respectivamente, para $i = 1, \dots, k$. Note que h podría no estar bien definida sobre un subconjunto finito de $\bigcup_i \partial N_i$. Pero, puesto que nosotros estamos estamos interesados principalmente en propiedades de continuidad absoluta, podemos suponer h no definida sobre ese conjunto finito. Entonces, h y h^{-1} (donde pueda ser definida esta última) son medibles de Borel. Consideremos sobre N la medida imágen $(h^{-1})_*(\lambda)$ dada por $(h^{-1})_*(\lambda)(A) = \lambda(h(A))$ para conjuntos de Borel $A \subset N$. Esta medida sobre N is diferenciable, de modo que está en la clase de medidas de Lebesgue sobre N.

Ahora, h es un isomorfismo entre los respectivos espacios de probabilidad, y las funciones $g = h^{-1} \circ f \circ h : I \to I$ y f son conjugadas por h, de modo que h es una *conjugación métrica* entre f y g. Note que g es una transformación expansora por pedazos de clase $C^{1+\alpha}$ teniendo a los J_i, para $1 \leqslant i \leqslant k$, como intervalos de monotonía. Se puede entonces deducir propiedades ergódicas de f a partir de las de g. Previamente recordemos alguna terminología y notaciones.

Dada una medida de probabilidad de Borel ν sobre I, el *soporte* de ν es el conjunto $\mathrm{supp}(\nu)$ de puntos que tienen un entorno abierto con ν-medida positiva. El *soporte* de una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ es el conjunto $\mathrm{supp}(\varphi)$ de $x \in I$ tal que $\varphi(x) > 0$. Si $\nu \ll \lambda$ (continuidad absoluta), entonces la *función de densidad* de ν es la derivada de Radon-Nikodym $\varphi = d\nu/d\lambda$. En esta situación denotamos $\nu = \varphi\lambda$ por simplicidad.

Recordemos el operador de *Perron-Frobenius* $P = P_g$ asociado a g, actuando sobre el espacio $\mathcal{B}_0$ de funciones medibles de Borel y acotadas definidas en I,

$$P\varphi = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varphi}{|Dg|} \right) \circ (f\big|_{J_i})^{-1} \cdot \chi_{f(J_i)},$$

donde χ_A denota la función característica del conjunto de Borel A. El operador de Perron-Frobenius es invariante por λ, esto es $\int P\varphi d\lambda = \int \varphi d\lambda$; y se extiende a un operador lineal positivo que es una contracción débil de L^1_λ. Este operador es relevante en nuestro estudio porque las medidas de probabilidad invariantes y absolutamente continuas (*acipm* para abreviar) para g son precisamente las medidas $\varphi\lambda$ con $P(\varphi) = \varphi$ para alguna φ en L^1_λ positiva y normalizada.

Lema 3 *Para la transformación g anteriormente definida, se verifican las siguientes propiedades*

(i) *La transformación expansora por pedazos g admite una acipm.*

(ii) *El soporte de toda acipm ν de g tiene interior no vacío.*

(iii) *Siendo g transitiva, existe una única acipm para g que es ergódica.*

Demostración. **(i)** Puesto que g es $C^{1+\alpha}$ y expansora por pedazos, los Teoremas 3.3 and 3.5 in [K] se aplican, deduciéndose la existencia de una acipm $\tilde{\mu}$ para g.

(ii) Sea ν una acipm para g con densidad $\varphi = d\nu/d\lambda$. Entonces $P(\varphi) = \varphi$, y por el Teorema 3.3 y el Lema 1.4 (e) en [K], la clase de φ en L^1_λ contiene una función Riemann integrable. Por tanto, podemos suponer que ese es el caso para φ. En particular φ es continua λ-a.e. Defina $C(\varphi) = \{x \in I : \varphi \text{ is continua en } x\}$. Es suficiente mostrar que

$$\operatorname{supp}(\nu) \cap C(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\varphi) \neq \varnothing. \tag{5}$$

De hecho, suponga que (5) se verifica, de modo que podemos tomar un punto $x \in \operatorname{supp}(\nu)$ con $\varphi(x) > 0$ y φ continua en x. Esos dos últimos hechos implican que la función φ es positiva en algún conjunto abierto J que contiene a x. Así, $J \subset \operatorname{supp}(\nu)$ y por tanto $\operatorname{supp}(\nu)$ tiene interior no vacío.

Ahora probaremos (5). Argumentando por reducción al absurdo, suponga que la intersección en (5) sea vacía. Esto implica que el conjunto $A = \operatorname{supp}(\nu) \cap C(\varphi)$ está contenido en $I \setminus \operatorname{supp}(\varphi)$. Además, $\operatorname{supp}(\nu)$ tiene medida de Lebesgue positiva porque $\nu \ll \lambda$ mientras que, por otro lado $\lambda(C(\varphi)) = 1$ por la elección de φ. Entonces

$$\lambda(A) = \lambda\big(\operatorname{supp}(\nu) \cap C(\varphi)\big) = \lambda(\operatorname{supp}(\nu)) > 0. \tag{6}$$

Usando $I \setminus \operatorname{supp}(\varphi) \supset A$ y (6) obtenemos

$$\lambda\big(\operatorname{supp}(\nu) \cap [I \setminus \operatorname{supp}(\varphi)]\big) \geqslant \lambda(\operatorname{supp}(\nu) \cap A) = \lambda(\operatorname{supp}(\nu)),$$

y por tanto $\lambda\big(\operatorname{supp}(\nu) \cap [I \setminus \operatorname{supp}(\varphi)]\big) = \lambda(\operatorname{supp}(\nu))$. De esto y recordando que $\nu = \varphi\lambda$, tenemos

$$\nu\big(\operatorname{supp}(\nu)\big) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\nu)} \varphi \, d\lambda = \int\limits_{\operatorname{supp}(\nu)\cap[I\setminus\operatorname{supp}(\varphi)]} \varphi \, d\lambda = 0,$$

lo cual contradice que $\nu(\operatorname{supp}(\nu)) = 1$. Así, la afirmación (5) y también la parte (ii) están demostradas.

(iii) Sea ν cualquier acipm para g. Como $\operatorname{supp}(\nu)$ tiene interior no vacío, cualquier órbita futura densa de g visita $\operatorname{supp}(\nu)$, el cual es cerrado y g-invariante. Entonces $I \subset \operatorname{supp}(\nu)$. Así, $\lambda(\operatorname{supp}(\nu)) = 1$ para toda acipm ν for f. Por tanto, todas las acipm son equivalentes.

Sea $\tilde{\mu}$ la medida dada por la parte (i) en el enunciado del Lema 3. Afirmamos que $\tilde{\mu}$ es ergódica. De hecho, dado cualquier conjunto de Borel $A \subset I$ invariante por f (en el sentido que $f^{-1}(A) = A$) con $\tilde{\mu}(A) > 0$, tenemos que la medida condicional

$$\tilde{\mu}_A(B) = \frac{\tilde{\mu}(A \cap B)}{\tilde{\mu}(A)}, \quad \text{para conjuntos de Borel } B \subset I,$$

es una acipm para g con $\tilde{\mu}_A(I \setminus A) = 0$. Pero la equivalencia entre $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\mu}_A$ implica que $\tilde{\mu}(A) = 1$ y la ergodicidad queda así demostrada. En particular, $\tilde{\mu}$ es la única acipm para g. ■

Como establecimos anteriormente, h es una conjugación métrica no singular. Entonces el Lema 3 implica que f preserva una única acipm $\mu_f = (h^{-1})_* \tilde{\mu}$ la cual es ergódica y $\mathrm{supp}(\mu_f) = N$. Así, μ_f es la única medida física para f. Ahora, recordando el esquema inicial para la demostración del Teorema 1, vamos a usar la medida μ_f para construir una medida física para la transformación de retorno F.

Lema 4 *La transformación de retorno F tiene una única medida SRB.*

Demostración. De la Proposición 11 in [Ry] existe una única medida de probabilidad μ_F que es invariante por la transformación de Poincaré F y así $\pi_* \mu_F = \mu_f$. Esta medida es definida por medio del funcional

$$\varphi \longmapsto \int_N \inf_{y \in \xi} \big(\varphi \circ f^n\big)(y) d\mu_f(\xi) \quad \text{para funciones continuas } \varphi : \Sigma \to \mathbb{R}. \tag{7}$$

Para mostrar la ergodicidad de μ_F denote $\psi^\vee = \inf_{y \in \xi} \psi(y)$ para cualquier función continua ψ y cualquier lámina estable ξ. Fijemos arbitrariamente una función real continua φ. Puesto que μ_f es ergódica, tenemos de (7):

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu_F &= \lim_{k \to \infty} \int (\varphi \circ F^k)^\vee d\mu_f \\ &= \lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ F^k)^\vee \circ f^j(\xi) \quad \text{para } \mu_f - \text{a.e. } \xi \in N. \end{aligned} \tag{8}$$

Uno puede mostrar que para todo $x \in \xi$ y todo $j \geqslant 0$,

$$|(\varphi \circ F^k)^\vee (f^j(\xi)) - (\varphi \circ F^k)(F^j(x))| \leqslant \varepsilon_k, \tag{9}$$

donde ε_k es la oscilación de φ sobre el conjunto $F^k(\pi^{-1}(f^j \xi))$. Puesto que el diámetro de $F^n \xi'$ va para cero cuando $n \to \infty$ para toda lámina estable $\xi' \in N$, se sigue que $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ por la continuidad de φ.

Escribiendo los correspondientes promedios temporales uno obtiene de (9) y para todo $n \geqslant 1$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ F^k)^{\vee} \circ f^j(\xi) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ F^k)(F^j(x)) \right| \leqslant \varepsilon_k \quad \text{para} \;\; n \geqslant 1.$$

tomado límite y usando (8) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ F^j)(x) = \int \varphi d\mu_F,$$

para todo $x \in \xi$, y puesto que $\pi_* \mu_F = \mu_f$ esto también se verifica para μ_F-casi todo punto $x \in \Sigma$. Así hemos mostrado la ergodicidad de μ_F.

Por otro lado, la laminación estable $W^s(\Sigma)$ es absolutamente continua con respecto a las medidas de Lebesgue sobre Σ y N, porque el campo de vectores X es C^2. Se sigue que $\text{supp}(\mu_F)$ tiene medida de Lebesgue positiva en Σ y por tanto μ_F es una medida física para F. Además, $\text{supp}(\mu_F)$ tiene medida de Lebesgue total en Σ, puesto que lo mismo es cierto para μ_f. Esto implica la unicidad de la medida SRB μ_F para F y el Lema queda demostrado. ■

4 Demostración del Teorema 1

En esta sección construimos una medida física para el atractor hiperbólico singular Λ. Sea Ω el conjunto de puntos $x \in \Sigma$ tales que $X_t(x) \in \Sigma$ para un número infinito de valores de $t > 0$, de modo que $F^n(x)$ está definido para todo $x \in \Omega$ y todo $n \geqslant 0$. Es claro que $\Omega = \Sigma \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} F^{-n}(L_\Sigma)$, donde L_Σ es el conjunto en (1) en la página 10

Consideremos el *semiflujo suspensión* (Z_t, Ω^τ) sobre F teniendo como *función techo* al tiempo de retorno τ. Esto significa que Ω^τ es el espacio cociente de la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\Omega \times [0, +\infty)$ dada por $(x, s) \sim (y, s')$ si y sólo si x y y están en la misma F-órbita futura, digamos $y = F^n(x)$ con $n \geqslant 0$ y $s - s' = \tau(F^n(x))$. Coloquemos sobre Ω^τ la estructura medible de Borel inducida por la función cociente $\pi : \Omega \times [0, +\infty) \to \Omega^\tau$, y definamos el semiflujo medible Z_t on Ω^τ por $Z_t(\pi(x, s)) = \pi(x, s + t)$.

Por el Teorema 2, el tiempo de retorno τ es integrable de Lebesgue. Por tanto la función de densidad $d\mu_f/dm$ es acotada m-a.e. (vea [V1] página 173). De esto y usando la definición de μ_F en (7), uno puede mostrar que el semiflujo suspensión Z_t preserva la medida normalizada

$$\mu_0 = \Big(\int \tau d\mu_F\Big)^{-1} \pi_*\big((\mu_F \times \lambda)\big|_{\mathbb{V}}\big), \tag{10}$$

donde $\mathbb{V}$ es el *dominio fundamental* $\big\{(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leqslant s < \tau(x)\big\}$.

Para relacionar Z_t con X_t consideremos la función $\Psi : \Omega^\tau \to M$ definida como $\Psi(\pi(x,t)) = X_t(x)$ para $(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty)$. Claramente esta función es un homeomorfismo sobre su imagen $\Delta = \Psi(\Omega^\tau)$, la cual coincide con la unión de las órbitas futuras de X que comienzan en puntos de Ω. Esto nos permite considerar el semiflujo suspensión Z_t como una *representación special* ([CFS]) de la restricción de X_t a $\Psi(\Omega^\tau)$. De hecho, tenemos que $\Psi \circ Z_t = X_t \circ \Psi$, y así, Ψ es una equivalencia topológica entre (Z_t, Ω^τ) y $(X_t\big|_\Delta, \Delta)$.

Afirmamos que $\mu_X = \Psi_*(\mu_0)$ es una medida física para X_t. De hecho, es inmediato que esta medida es invariante por X_t. Luego, Ψ es un isomorfismo métrico entre los semifuljos métricos $(Z_t, \Omega^\tau, \mu_0)$ y $(X_t\big|_\Delta, \Delta, \mu_X)$. Puesto que μ_F es ergódica para F y el tiempo de retorno es integrable, la medida μ_0 en (10) es ergódica para el semiflujo especial Z_t y se tiene que $B(\mu_0) = \Omega^\tau$ (vea [CFS], página 231). Entonces, μ_X es también ergódica para X_t y $B(\mu_X) = \Psi(B(\mu_0))$. Sólo nos resta mostrar que $m(B(\mu_X)) > 0$ para la medida de Lebesgue m sobre M, donde $B(\mu_X)$ es la cuenca ergódica de μ_X.

Denotemos m_Σ a la medida de Lebesgue sobre Σ, y escribamos ν para la restricción a $\mathbb{V}$ de la medida producto $m_\Sigma \times \lambda$ sobre $\Sigma \times [0,+\infty)$. Puesto que μ_F es una medida física para F, el conjunto $A = \{(x,s) \in \Sigma \times [0,+\infty) : x \in B(\mu_F),\, 0 \leqslant s < \tau(x)\}$ tiene ν-medida positiva. También tenemos

$$\Psi_*\big(\pi_*\nu\big)[\Psi(\pi A)] = \pi_*\nu\big(\Psi^{-1}[\Psi(\pi A)]\big) = \pi_*\nu(\pi A) \geqslant \nu(A) > 0.$$

Pero, Ψ transforma el dominio fundamental $\mathbb{V}$ difeomorficamente sobre el conjunto Δ. Entonces, la medida $\Psi_*(\pi_*\nu)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m sobre M, lo cual implica que $m\big(B(\mu_X)\big) \geqslant m(\Psi(\pi A)) > 0$, y así obtenemos la prueba de la afirmación enunciada arriba. Por tanto, μ_X es una medida física para X_t. ∎

5 Familias s-Markov

En esta sección demostraremos el Teorema 2 acerca de la existencia de familias s-Markov de secciones transversas locales, como fue establecido en la sección 2. Primeramente construimos una familia de Poincaré de secciones transversas locales admisibles. Para este fin, comienzamos describiendo algunas secciones transversas locales del flujo cuyas trayectorias de retorno están cerca de las singularidades dentro del atractor. Con ellas describimos los retornos en un entorno de cada singularidad. Después de eso, usaremos las ideas de Bowen-Walters en [BW] para construir secciones transversas locales lejos de las singularidades del atractor. Para el primer tipo de construcción, los u-transversales son obtenidos de las órbitas periódicas y de resultados en [MP1], y para la segunda construcción, los u-transversales son tomados como pedazos de variedades inestables de Pesin (vea [C]). Finalmente describimos parcialmente el proceso de refinamiento similar a los desarrollados en [Bo1], [Bo1] y [Ra] para obtener la propiedad de s-Markov.

Como antes, sea $\Lambda = \bigcap_{t\geqslant 0} X_t(U_0)$ un atractor hiperbólico singular con una región de atracción fija U_0 para un campo de vectores X de clase C^2 sobre una variedad Riemanniana tridimensional M. Denote $\mathcal{R}$ el conjunto de puntos regulares del flujo en Λ y $\mathrm{sing}(X|\Lambda)$ el conjunto de singularidades de X en Λ. Para una ξ-LCS $T \subset U_0$ y cualquier punto $x \in T$ definimos la *lámina estable* de x con tamaño $\varepsilon > 0$ en T como

$$W^s_\varepsilon(x,T) = \mathrm{pr}_T\big(\mathcal{F}^{ss}_\varepsilon(x) \cap U_\xi(T)\big).$$

Seguidamente procedemos a construir secciones transversas locales admisibles cerca de las singularidades de X en Λ.

Por hiperbolicidad singular, toda singularidad de X en Λ es hiperbólica y de tipo Lorenz (vea [MPP]). Para una singularidad $\sigma \in \mathrm{sing}(X|\Lambda)$ aplicamos el Teorema de Hartman y Grobman (vea, por ejemplo [PM]) para escoger un entorno abierto $U_\sigma \subset U_0$ de σ tal que $X_t\big|_{U_\sigma}$ es topologicamente conjugado al flujo lineal $L_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sea $h : U_\sigma \to \mathbb{R}^3$ una conjugación local de $X_t\big|_{U_\sigma}$ a L_t tal que

$h(\sigma) = 0$ y

$$h(W^u_{\text{loc}}(\sigma)) = \big\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\big\},$$
$$h(W^s_{\text{loc}}(\sigma)) = \big\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\big\}.$$

donde $W^u_{\text{loc}}(\sigma)$ y $W^s_{\text{loc}}(\sigma)$ son las variedades estable e inestable locales de σ, respectivamente. Podría ocurrir que, para U_σ arbitrariamente pequeño, uno de los conjuntos

$$h^{-1}\big(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}\big) \cap \Lambda, \tag{11}$$
$$h^{-1}\big(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}\big) \cap \Lambda \tag{12}$$

sea vacío. En esta situación podemos suponer, sin pérdida de generalidad que el conjunto en (11) es vacío para lo que sigue. Tome un s-rectángulo $A \subset U_\sigma$ transverso a $W^s_{\text{loc}}(\sigma)$ con una parametrización local $\Phi : [-1, 1]^2 \to A$ de clase C^2 satisfaciendo

1. El conjunto $l_\sigma = \Phi\big(\{0\} \times [-1, 1]\big)$ coincide con $A \cap W^s_{\text{loc}}(\sigma)$ y es una curva conexa que separa a A en dos componentes conexas $A^\pm$. Denote
$$A^* = A \setminus l_\sigma = A^- \bigcup A^+.$$

2. Los conjuntos $l^s_\pm = \Phi\big(\{\pm 1\} \times [-1, 1]\big)$ son disjuntos de l_σ y ellos están contenidos en hojas de la foliación estable, en particular ellas son láminas estables de A.

3. $\Phi\big([-1, 1] \times \{\pm 1\}\big)$ son dos curvas tangentes a la dirección central.

Por el Teorema 5.1 en [MP1], las variedades inestables de cualquier punto periódico en Λ intersectan l_σ transversalmente. Sean $p \in \Lambda$ un punto periódico y l^u_p una componente conexa de $W^u(p) \cap A$ tal que $l^u_p \cap l^s_\sigma \neq \varnothing$. Note que $l^u_p \subset \Lambda$. Tomando A aún más pequeño si fuese necesario, podemos suponer que l^u_p intersecta todas las láminas estables en A en un único punto. Por tanto A es un s-rectángulo admisible con u-transversal $K^u_A = l^u_p$.

Ahora, cambiando h si fuese necesario, podemos suponer que $h(A)$ es el gráfico de una función continua G definida sobre un subconjunto $\text{dom}(G) \subset \{(x, y, 0) :$

$|x|, |y| \leqslant \frac{1}{2}\}$, el cual es un entorno compacto y conexo del origen en el plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ tal que $G(x, y) > 1$ para todo $(x, y) \in \mathrm{dom}(G)$.

Denote $E^{\pm}$ los planos $\big\{(\pm 1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\big\}$ en $\mathbb{R}^3$. Entonces, para todo punto $p \in h(A)$ existe un único $\rho(p) \in \mathbb{R}$ con $\rho(p) > 0$ tal que

$$L_{\rho(p)}(p) \in \begin{cases} E^{-}, & \text{si } p \in h(A^{-}) \\ E^{+}, & \text{si } p \in h(A^{+}), \end{cases} \tag{13}$$

Si $\lambda_u > 1$ denota al mayor autovalor de $DX(\sigma)$, entonces la función ρ satisface la siguiente desigualdad

$$\rho(x, y, z) \leqslant \frac{1}{\lambda_u} \log \left| \frac{1}{x} \right| < -\log(x) \quad \text{para } (x, y, z) \in h(A^*).$$

Sea $\tau : A^* \to \mathbb{R}^+$ una función C^2 tal que

$$\rho(h(q)) \leqslant \tau(q) < -\log(x(q)), \tag{14}$$

donde $x(q)$ es la primera coordenada de $h(q)$. Note que, en particular, τ es integrable con respecto a la medida de Lebesgue en A. Ahora definimos el conjunto

$$V(\sigma) = \overline{\bigcup_{q \in A^*} X_{[0, \tau(q))}(q)}.$$

Por el Teorema B en [MPP] sabemos que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ y así, tomando A suficientemente cerca de σ, el conjunto $V(\sigma)$ contiene un entorno de σ en Λ. Esto es $V(\sigma) \cap \Lambda \supset B(\sigma; r) \cap \Lambda$ para algún $r > 0$ suficientemente pequeño, donde $B(z; r)$ es la bola abierta centrada en $z \in M$ con radio r. En particular, el conjunto $\big(\mathrm{int}\, V(\sigma) \cup \{\sigma\}\big) \bigcap \Lambda$ es un entorno abierto de σ en Λ. Defina

$$B^{\pm} = \overline{\bigcup_{q \in A^{\pm}} X_{\tau(q)}(q)}.$$

Estos conjuntos son s-rectángulos y, por otro lado, los conjuntos

$$K^u_{B^{\pm}} = \overline{\bigcup_{q \in A^{\pm} \bigcap K^u_A} X_{\tau(q)}(q)}$$

son u-transversales de $B^{\pm}$ respectivamente. Así, ambos conjuntos $B^{\pm}$ son s-rectángulos admisibles. Note que τ es el *tiempo de retorno* del flujo desde A hasta $B^{-} \cup B^{+}$.

Ahora consideremos el caso de una singularidad $\sigma \in \Lambda$ para la cual ambos conjuntos en (11) y (12) son no vacíos para U_σ arbitrariamente pequeño. Procedemos como en la construcción anterior. Para $i \in \{1,2\}$ tomemos un s-rectángulo admisible $A_i \subset U_\sigma$ transverso a $W^s_{\mathrm{loc}}(\sigma)$ con una parametrization $\Phi_i : [-1,1]^2 \to A_i$ de clase C^2 satisfaciendo condiciones similares a (i)-(iii) en la página 23. Sean

$$l^{(i)}_\sigma = A_i \cap W^s_{\mathrm{loc}}(\sigma), \;\; l_\sigma = l^{(1)}_\sigma \cup l^{(2)}_\sigma,$$
$$A = A_1 \cup A_2, \;\; A^*_i = A^-_i \bigcup A^+_i, \;\; A^* = A^*_1 \cup A^*_2 \;\text{ y }\; K^u_{A_i}, \;\; \text{para } i = 1,2$$

los conjuntos correspondientes a aquellos definidos anteriormente.

Como antes, también podemos suponer que para $i = 1,2$ el conjunto $h(A_i)$ es el gráfico de una función continua G_i tal que $G_1(x,y) > 1$ y $G_2(x,y) < -1$ para todo $(x,y) \in \mathrm{dom}(G_i)$ respectivamente. Sea $\rho(p)$ como antes (para $p \in h(A^*)$) y denote $\rho_i : h(A^*_i) \to \mathbb{R}$ la restricción al conjunto $h(A^*_i)$ de ρ, satisfaciendo (13) para $i = 1,2$. Similarmente consideremos una función $\tau : A^* \to \mathbb{R}^+$ de clase C^2 tal que

$$\rho(h(q)) \leqslant \tau(q) < -\log(x(q)) \;\text{ para }\; q \in A^*_i. \tag{15}$$

Así, τ es integrable de Lebesgue. Ahora defina el conjunto

$$V(\sigma) = \overline{\bigcup_{q \in A^*} X_{[0,\tau(q))}(q)}.$$

Recordando que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ como en [MPP], podemos tomar A_i muy cerca de σ, de manera tal que el conjunto $V(\sigma)$ contiene un entorno de σ en Λ. En particular, el conjunto $\big(\mathrm{int}\, V(\sigma) \cup \{\sigma\}\big) \bigcap \Lambda$ es un entorno abierto de σ en Λ.

Igual que antes, para $i \in \{1,2\}$ denotemos

$$B^\pm_i = \overline{\bigcup_{q \in A^\pm_i} X_{\tau(q)}(q)}$$

los cuales son s-rectángulos admisibles con u-transversales

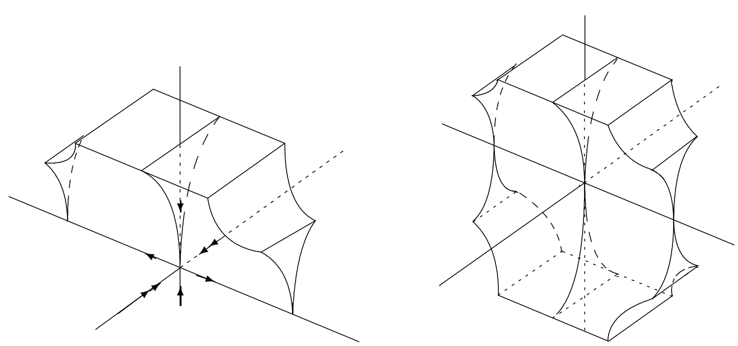
$$K^u_{B^\pm_i} = \overline{\bigcup_{q \in A^\pm_i \bigcap K^u_{A_i}} X_{\tau(q)}(q)}.$$

Entonces tenemos que el borde $\partial V(\sigma)$ de $V(\sigma)$ es la unión finita de superficies suaves con interiores disjuntos a pares a las que llamaremos *componentes regulares* de $\partial V(\sigma)$. La familia de tales componentes para las cuales las lineas de flujo entran en $V(\sigma)$ transversalmente a través de ellas en tiempos crecientes es denotada por $\mathcal{V}^-(\sigma)$. Los elementos en esta familia son s-rectángulos admisibles de tipo A o A_i como fueron construidos arriba en un entrorno de cada singularidad en $\text{sing}(X|\Lambda)$. Por otro lado, la familia de componentes regulares de $\partial V(\sigma)$ con interiores disjuntos a pares, para las cuales las lineas de flujo salen de $V(\sigma)$ transversalmente a través de ellas es denotada por $\mathcal{V}^+(\sigma)$. Los elementos en esta familia son s-rectángulos admisibles del tipo $B^\pm$ o $B_i^\pm$ construidos como arriba en un entorno de cada elemento de $\text{sing}(X|\Lambda)$.

Puesto que cada singularidad de X en Λ es hiperbólica, sólo tenemos un número finito de ellas. Entonces supongamos que $\text{sing}(X|\Lambda)$ consiste de singularidades $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$, $l \geqslant 1$, que son de tipo Lorenz por [MPP]. Sea $V = V(\sigma_1) \cup \cdots \cup V(\sigma_l) \subset U$, donde los conjuntos $V(\sigma_j)$'s son disjuntos a pares. En este contexto denotemos

$$\mathcal{V}(\sigma_j) = \mathcal{V}^-(\sigma_j) \cup \mathcal{V}^+(\sigma_j) \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{V}(\sigma_j). \tag{16}$$

Cualquier otra componente de la frontera de $V(\sigma)$ es tangente al flujo. En lo que sigue consideraremos una colección fija de conjuntos $V(\sigma_j)$ como arriba y aún diremos que $V(\sigma)$ es un *entorno linearizante* de σ.



(a) (b)

Figura 1: Entornos Linearizantes.

Observaciones.

1. Como Λ es un atractor tenemos que $W^u(\sigma) \subset \Lambda$, de tal manera que Λ intersecta todo elemento de $\mathcal{V}$.

2. En el caso de un entorno linearizante como en la figura 1(b), los elementos de la familia $\mathcal{V}^+(\sigma_j)$ son cuatro s-rectángulos admisibles $B_i^{\pm}$. Como en la construcción inicial, la intersección $B_1^- \cap B_2^-$ es un único punto en la frontara de cada uno de esos conjuntos y perteneciente a $W^u(\sigma_j)$, y analogamente para B_i^+, $i = 1, 2$.

3. Sea $L = \bigcup_{\sigma \in \Lambda} l_\sigma$. Denote τ el tiempo de retorno del flujo desde $\cup \mathcal{V}^- \setminus L$ hasta $\mathcal{V}^+$ en la forma en que fue definido en $A \backslash l_\sigma$ para cada $\sigma \in \operatorname{sing}(X|\Lambda)$. Entonces τ es integrable de Lebesgue como observamos anteriormente.

Ahora construimos s-rectángulos admisibles lejos de las singularidades Λ. Sea $D \subset U_0 \setminus V$ un disco transverso al flujo. Siempre supondremos que D tiene diámetro suficientemente pequeño de modo que $D \subset U_0$ y D es la unión de las láminas estables contenidas en él.

Proposición 3 *Dados $x \in \Lambda \setminus V$ y cualquier 2-disco $D \subset U_0 \setminus V$ diferenciable, cerrado y transverso a X_t conteniendo a x en su interior, existe un s-rectángulo admisible T contenido en D tal que x está en el interior de $T \cap \Lambda$ para la topología relativa de $D \cap \Lambda$, esto es existe un subconjunto abierto B de D tal que $x \in B \cap \Lambda$.*

Para demostrar esta proposición necesitamos el siguiente Lema.

Lema 5 *Sea $D \subset U_0$ una superficie transversa disjunta de V y tome un punto $p \in \operatorname{int} D \cap \Lambda$. Entonces, p es un punto aislado de $W^s(p, D) \cap \Lambda$ si y sólo si $p \in W^u(\sigma)$ para alguna $\sigma \in \operatorname{sing}(X|\Lambda)$.*

Demostración. Suponga que p es aislado en $W^s(p, D) \cap \Lambda$. Esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\big(W^s_\varepsilon(p, D) \cap \Lambda\big) \setminus \{p\} = \varnothing. \tag{17}$$

Afirmamos que el conjunto α-límite $\alpha_X(p)$ de p intersecta $\operatorname{sing}(X|\Lambda)$.

Suponiendo esto cierto, tomemos una singularidad $\sigma \in \alpha_X(p)$. Si $p \notin W^u(\sigma)$, entonces la órbita pasada $\mathcal{O}^-_X(p)$ de p intersecta algún elemento $A \in \mathcal{V}^-(\sigma)$ en una sucesión $p_n = X_{-t_n}(p)$, $t_n > 0$ aproximándose al u-transversal K^u_A. Dado cualquier entorno abierto J de p en $W^s_\varepsilon(p)$ tenemos que $X_{-t_n}(J)$ está C^1-cerca de l_σ, y $X_{-t_n}(J) \cap K^u_A \neq \varnothing$ para n suficientemente grande. Si q' es cualquier punto en esta intersección, entonces $q \in \Lambda$ y $X_{t_n}(q') \in J \cap \Lambda$. De esta manera tenemos que p está en la clausura de $W^s_\varepsilon(p)\setminus\{p\}$, contradiciendo nuestra hipótesis. Por tanto $\alpha_X(p)=\{\sigma\}$ y $p\in W^u(\sigma)$. El recíproco sigue del Teorema B in [MPP].

Ahora probaremos la afirmación argumentando por reducción al absurdo. Supongamos que $\alpha_X(p)\cap\operatorname{sing}(X|\Lambda)=\varnothing$. Por el Lema 2.2 en [MPP] sabemos que $\alpha_X(p)\subset\Lambda$ es un conjunto hiperbólico y además $\alpha_X(p)\subset\Lambda^*$, el conjunto residual descrito en [C] consistente de órbitas hiperbólicas no uniformemente.

Dado un punto $q\in\alpha_X(p)$ existe una sucesión $t_n>0$, tal que

$$X_{-t_n}(p)\to q \quad \text{cuando} \;\; n\to+\infty.$$

Como $q\in\Lambda^*$, por el Teorema de la Variedad Inestable de Pesin [Pe] existe $W^u_\delta(q)$ para algún $\delta=\delta(q)>0$ pequeño. Entonces, para n suficientemente grande se tiene

$$W^u_\delta(q)\bigcap X_{-t_n}\big(W^s_\varepsilon(p,D)\setminus\{p\}\big)\neq\varnothing,$$

y cualquier punto z en esta intersección satisface:

- z pertenece a Λ porque siendo Λ un atractor, se tiene $W^u_\delta(q)\subset\Lambda$; y
- $X_{t_n}(z)\in W^s_\varepsilon(p)\cap\Lambda\setminus\{p\}$.

Así, tenemos

$$\operatorname{pr}_D(X_{t_n}(z))\in\big(W^s_\varepsilon(p,D)\cap\Lambda\big)\setminus\{p\},$$

lo cual está en contradicción con (17), como habíamos afirmado. ∎

Demostración. (de la Proposición 3.) Dado un punto regular $x\in\Lambda\setminus V$, sea $D\subset U_0$ un disco transverso con $x\in\operatorname{int}D$. Uno de los siguientes casos puede ocurrir

(1) x está en al clausura de $\big(W^s(x,D)\bigcap\Lambda\big)\setminus\{x\}$, o

(2) x es un punto aislado de $W^s(x,D)\bigcap\Lambda$.

En el primer caso, $x\notin W^u\operatorname{sing}(X|\Lambda)$ por el Lema 5. Por el Teorema de la Variedad Inestable de Pesin [Pe] existe $W^u_{\delta_0}(x,D)$ para algún $\delta_0>0$ pequeño dependiente de x pero no de D. Entonces el conjunto

$$B_{\varepsilon,\delta}(x)=\bigcup_{y\in W^u_\delta(x,D)} W^s_\varepsilon(y,D)$$

es un entorno de x en D con la topología relativa y está contenido en $\operatorname{int} D$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, digamos $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ y $\delta \leqslant \delta_0$.

Entonces, tomamos dos puntos x_1 y x_2, uno en cada componente conexa de $W^s_\varepsilon(x, D) \setminus \{x\}$ y suficientemente cerca de x, de tal manera que $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ y para algún $0 < \delta \leqslant \delta_0$ se verifica lo siguiente

$$\overline{W^u_\delta(x_1, D)},\ \overline{W^u_\delta(x_2, D)} \subset B_{\varepsilon_0,\delta_0}(x).$$

De la misma manera tomamos dos puntos y_1 y y_2, uno en cada component conexa de $W^u_{\delta_0}(x, D) \setminus \{x\}$ suficientemente cercanos de x tales que $y_1, y_2 \in \mathcal{R}$ y

$$W^s_\varepsilon(y_j, D) \cap \overline{W^u_\delta(x_i, D)} \quad \text{es un único punto para} \quad i, j = 1, 2.$$

La curva cerrada simple γ contenida en D obtenida como la unión de las cuatro curvas $W^u_\delta(x_i, D)$ y $W^s_\delta(y_j, D)$ para $i, j = 1, 2$ define un conjunto T como la clausura de la componente conexa de $D \setminus \gamma$ conteniendo a x, por el Teorema de Separación de Jordan. Por construcción, T es un s-rectángulo con $x \in \operatorname{int} T \subset \operatorname{int} D$. Además $K^u_T = W^u_{\delta_0}(x, T)$ es un u-transversal de T y así, T es un s-rectángulo admisible.

Para el caso (2) arriba, suponga que x es aislado en $W^s_\varepsilon(x, D) \cap \Lambda$ para algún $\varepsilon > 0$. Por el Lema 5, $x \in W^u(\sigma)$ para alguna singularidad $\sigma \in \Lambda$.

Sea y el único punto en el conjunto $\mathcal{O}^-(x) \bigcap \partial V(\sigma)$ tal que $X_{-t}(y) \in V(\sigma)$ para todo $t > 0$. Podemos suponer que $V(\sigma)$ es un entorno linearizante como en la figura 1(a). Sea B_1 el elemento de $\mathcal{V}^+(\sigma)$ al cual y pertenece, y denote $B_1(r) = B_1 \cap B(y; r)$ la bola abierta en B_1 con radio $r > 0$ centrada en y. Por definición, B_1 es un s-rectángulo admisible. Sea R_1 un s-rectángulo contenido en $B_1(r)$ y conteniendo y. Un tal R_1 puede ser obtenido como el disco cuya frontera es la unión de las dos componentes de la frontera de B que tienen a y como punto extremo común y las láminas estables $W^s(z, B_1(r))$ para algún z cerca de y pero diferente de él, de modo que $W^s(z, B_1) = W^s(z, B_1(r))$.

Por continuidad podemos suponer $r > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que todo punto $z \in B_1(r)$ retorna por el flujo a $\operatorname{int} D$ con un tiempo de retorno $\tau_{V,D}(z)$. Entonces definimos el s-rectángulo $T = \big\{X_{\tau_{V,D}}(z) \,:\, z \in R_1\big\}$. Por construcción, T es un s-rectángulo con u-transversal

$$K_T^u = \overline{\bigcup_{z \in K_1^u} X_{\tau_{V,D}(z)}(z)},$$

donde K_1^u es un u-transversal de R_1 y, es claro que $T \cap \Lambda$ es un entorno de x en Λ.

En el caso de $V(\sigma)$ ser como en la figura 1(b), construimos dos s-rectángulos admisibles T_1 y T_2 como arriba cuya intersección es el punto x. Esto finaliza la demostración de la Proposición 3. ∎

5.1 Demostración del Teorema 2.

Ahora procedemos a demostrar el Teorema 2. Dado un subconjunto B de una sección transversa local S denotemos $(B \cap \Lambda)^*$ al interior de $B \cap \Lambda$ como subconjunto del espacio métrico $S \cap \Lambda$ con la topología relativa en S inducida por la de M.

Escriba Λ_V para $\Lambda \backslash V$. La construcción de familias de Poincaré consistientes de s-rectángulos admisibles es efectuada aplicando algunos argumentos desarrollados por Bowen y Walters en [BW] para curvas regulares en Λ_V. Para V pequeño (lo cual significa que cada $V(\sigma)$ tiene diámetro pequeño) podemos fijar un pequeño tiempo $s_0 > 0$ de tal manera que el conjunto $W = X_{(-s_0,s_0)}(V)$ sea un entorno linearizante de sing$(X|\Lambda)$ como en la figura 1. Para $x \in \Lambda \backslash W$ sea $B_x \subset U_0 \backslash W$ un 2-disco transverso con $x \in \operatorname{int} B_x$ y admitiendo un fujo tubular, esto es, existe un $\xi_x > 0$ tal que la restricción a $X_{[-\xi_x,\xi_x]}(B_x)$ de $\{X_t\}$ es conjugado a un flujo local constante. Fijemos un disco cerrado D_x aún menor, de modo que $x \in \operatorname{int} D_x \subset D_x \subset \operatorname{int} B_x$. Escojemos entonces ξ_x de tal manera que $X_{[-2\xi_x,2\xi_x]} B_x$ no intersecte $\cup \mathcal{V}$ (vea (16) en la página 26).

La colección $\{X_{(-\xi_x,\xi_x)}(\operatorname{int} D_x) \, : \, x \in \Lambda \setminus W\}$ es un cubrimiento abierto de $\Lambda_W = \Lambda \setminus W$, y por compacidad existen puntos $x_1, \ldots, x_d$ con la propiedad que

$$\Lambda_W \subset \bigcup_{j=1}^{d} X_{(-\xi_j,\xi_j)}(\operatorname{int} D_{x_j}),$$

donde hemos escrito $\xi_j = \xi_{x_j}$ por simplicidad notacional.

Si alguno de los conjuntos $X_{(-\xi_j,\xi_j)}(\operatorname{int} D_{x_j})$ intersecta V, sustituimos D_{x_j} por $D_{x_j} \setminus V$ y continuamos usando la misma notación D_{x_j} para este conjunto. De esta manera, los conjuntos D_{x_j} son disjuntos de V. Cada D_{x_j} es una sección transversa local de tiempo 2ξ por lo menos, para $\xi = \frac{1}{2}\min\{\xi_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Denote $\xi_0 = 2\max\{\xi_{x_j} : 1 \leqslant j \leqslant d\}$.

Procedamos ahora a construir recursivamente familias finitas de s-rectángulos admisibles disjuntos a pares con tiempo de cruce ξ. Para cada punto $y \in D_{x_1} \cap \Lambda$ escojemos un s-rectángulo admisible $R_y \subset \operatorname{int} B_{x_1}$ dado por el Lema 3, tal que $y \in (R_y \cap \Lambda_W)^*$. La colección $\big\{(R_y \cap \Lambda_W)^* : y \in R_y \cap \Lambda\big\}$ es un cubrimiento abierto de $D_{x_1} \cap \Lambda_W$ y, por compacidad, podemos tomar un subcubrimiento finito $R_{y_1}, \ldots, R_{y_l}$ de $D_{x_1} \cap \Lambda_W$. Seguidamente fijamos números reales distintos $s_1, \ldots, s_l$ con $|s_i| < \frac{1}{2}\xi_1$ para $1 \leqslant i \leqslant l$, y definimos

$$\mathcal{C}_1 = \big\{X_{s_1}(R_{y_1}), \ldots, X_{s_l}(R_{y_l})\big\},$$

donde cada $X_{s_j}(R_{y_j})$ es una sección transversa local de tiempo $\frac{1}{2}\xi_1 \geqslant \xi$ por lo menos. Razonando por recursión, suponga que ha sido definida una familia $\mathcal{C}_{i-1}$ consistente de un número finito de s-rectángulos admisibles disjuntos a pares. El hecho que $\mathcal{C}_{i-1}$ consiste de secciones transversas locales implica que para todo $z \in D_{x_i} \cap \Lambda_W$ el conjunto

$$X_{[-\xi_i, \xi_i]}(z) \cap \big(\cup\, \mathcal{C}_{i-1}\big)$$

es finito. Como $\cup \mathcal{C}_{i-1}$ es un conjunto cerrado y X_t es continuo, existen un intervalo abierto $J_z \subset \big(-\frac{1}{2}\xi_i, \frac{1}{2}\xi_i\big)$ y también una sección transversa local $T_z \subset \operatorname{int} B_{x_i}$ tales que $z \in (T_z \cap \Lambda_V)^*$; al tiempo que la intersección $X_{J_z}(T_z) \cap \big(\cup\, \mathcal{C}_{i-1}\big)$ es vacía. Por compacidad de $D_{x_i} \cap \Lambda_V$ podemos tomar una colección finita de s-rectángulos admisibles $S_{z_1}, \ldots, S_{z_k}$ cuya unión cubre $D_{x_i} \cap \Lambda_V$. Entonces, escojamos números reales distintos $r_1 \in J_{z_1}, \ldots, r_k \in J_{z_k}$ y definamos

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i-1} \cup \big\{X_{r_1}(S_{z_1}), \ldots, X_{r_k}(S_{z_k})\big\},$$

donde cada $X_{r_j}(S_{z_j})$ es un s-rectángulo admisible con tiempo de cruce ξ. Finalmente definimos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_d$. Claramente $\mathcal{C}$ es una familia finita de s-rectángulos admisibles S_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ con tiempo de cruce ξ.

Por construcción tenemos que $\Lambda_W \subset X_{[-\xi_0, \xi_0]}(\cup \mathcal{C})$. Por otro lado, puesto que $\cup \mathcal{C} \subset \Lambda_W$, toda órbita en Λ que sale fuera de V tanto para el pasado como para el futuro intersecta $\cup \mathcal{C}$ en algún tiempo mayor que s_0. Así, $\Lambda_V \subset X_{[-\beta, \beta]}(\cup \mathcal{C})$ donde $\beta = s_0 + \xi_0$.

Ahora extendemos $\mathcal{C}$ a una familia finita $\mathcal{T}^0$ de s-rectángulos admisibles (de tiempo ξ) colocando

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{C} \cup \mathcal{V}, \tag{18}$$

donde $\mathcal{V}$ es la familia de componentes ∂V que son transversas al flujo, (recuerde (16)). También es una consecuencia directa de la construcción que $\mathcal{T}^0$ es una familia de Poincaré para Λ, y más aún que para la sección de Poincaré $\Sigma^0 = \cup\mathcal{T}^0$ se tiene

$$L_{\Sigma^0} = \bigcup_{j=1}^{l} l_{\sigma_j} = \Sigma^0 \cap W^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{sing}(X|\Lambda)).$$

Note que el tiempo de retorno τ a Σ^0 es acotado sobre el conjunto de puntos para los cuales los caminos de retorno no atraviesan V y, de acuerdo con la construcción, esta función de tiempo de retorno está definida sobre el conjunto $\big(\cup\mathcal{T}^0\big)\setminus\big(\bigcup_{i=1}^{l} l_{\sigma_i}\big)$ y es integrable respecto a la medida de Lebesgue.

En lo que sigue construiremos una familia parcialmente Markov comenzando con los elementos de $\mathcal{T}^0$ definidos en (18). Para este propósito generalizamos algunos aspectos de las construcciones efectuadas en [Bo1] y [Ra] para los casos de atractores hiperbólicos y flujos de Anosov. Limitaremos nuestra descripción a la generalización de los lemas técnicos preliminares en [Bo1], a partir de los cuales la construcción final sigue en la misma forma como en ese trabajo fundamentel de Bowen. Los detalles restantes para la propiedad de Markov parcial son similares a los correspondientes en las referencias citadas.

Denote F la transformación de retorno a $\cup\mathcal{T}^0$ como fue definida en la página 11.

Definición 6 Para cualquier par de secciones locales admisibles T, S diremos que T *tiene un retorno s-Markoviano* a S si

$$\overline{F(W^s(x,T))} \subset W^s(F(x), S) \tag{19}$$

para todo $x \in (\mathrm{int}\, T) \cap F^{-1}(\mathrm{int}\, S)$.

Usaremos la siguiente notación: elementos de $\mathcal{T}^0$ serán denotados por T_i^0 ($1 \leqslant i \leqslant k$), mientras que $D_i^0(x) = W^s_\eta(x, T_i^0)$ es la lámina estable de tamaño $\eta \leqslant \delta_0$

del s-rectángulo T_i^0 pasando por $x \in T_i^0$, donde δ_0 es un tamaño uniforme para las hojas locales de la foliación estable sobre U_0.

Defina $g = X_{-t_1}$ donde $t_1 > 0$ es suficientemente grande, de tal manera que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{t_1 j} < a/\gamma$.

Lema 6 *Dado cualquier punto $x \in K_i^u$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, existen puntos*

$$y_{i,1}, \ldots, y_{i,s(i)} \in W_\delta^{ss}(x)$$

tales que para $z_{i,j} = g(y_{i,j})$ se verifica lo siguiente:

1. $g(D_i^0(y_{i,j})) \bigcap D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \neq \varnothing$.
2. $g(D_i^0(y_{i,j})) \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})$.

Demostración. Sea $Y_z = D^0_{J(g(z))}(g(z))$ para cada $z \in D_i^0(x)$. La colección

$$\{g^{-1}(Y_z) : \, z \in D_i^0(x)\}$$

es una familia de subconjuntos cerrados de $W^s_{\frac{1}{2}\alpha} W^s_{\frac{1}{2}\alpha}(x) \subset W^s_\alpha(x)$ cuyos interiores cubren $D_i^0(x)$. Por compacidad podemos considerar un subcubrimiento finito:

$$g^{-1}(Y_{z_1}), \ldots, g^{-1}(Y_{z_{s(i)}}).$$

Entonces definimos

$$y_{i,j} = y_{i,j}(x) = g^{-1}\big[K_{J(g(z_j))} \cap D^0_{J(g(z_j))}(g(z_j))\big],$$

de manera que $Y_{z_j} = D^0_{J(g(z_j))}(g(y_{i,j}))$.

Recordando que $\operatorname{diam}(T_i^0) < \frac{1}{2}\alpha$, se sigue que (vea Lema 2(c) en [Bo1])

$$z_j \in W^s_{\frac{1}{2}\alpha}(x), \quad \text{y} \quad g(y_{i,j}) \in W^s_{\frac{1}{2}\alpha}(x)$$

y por tanto $y_{i,j} \in W^s_\alpha(x)$.

La conclusión se obtiene fácilmente para esta elección de puntos $y_{i,j}$. ■

Ahora definimos recursivamente

$$D_i^1(x) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} g^{-1}\big(D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\big), \quad \text{y}$$

$$D_i^n(x) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} g^{-1}\big(D^{n-1}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\big) \quad \text{para} \;\; n \geqslant 2.$$

Lema 7 *Para $n \geqslant 1$ y $y \in K_i^u$ se verifica lo siguiente*

$$D_i^{n-1}(y) \subset D_i^n(y) \subset W^s_{(1+\cdots+\beta^n)\delta/2}(y) \subset W^s_\delta(y) \tag{20}$$

Demostración. Procediendo por inducción, primero trabajamos con el caso $n = 1$. La relación $g(D_i^0(y)) \subset g(D_i^1(y))$ es exactamente el item (ii) en el Lema 6. Entonces $D_i^0(y) \subset D_i^1(y)$ es inmediata. Por otro lado, de las definiciones previas

$$D_i^1(y) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} g^{-1}\big(D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\big)$$

y por el Lema 2.2(a) en [Ra], existe $g(z) \in g(D_i^0(y)) \cap D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})$. Puesto que $\operatorname{diam}(T^0_{J(z_{i,j})}) < \alpha$, obtenemos

$$D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \subset W^s_\alpha\big(g(D_i^0(y))\big)$$

y variando $j \in \{1, \ldots, s(i)\}$ resulta

$$\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} D^0_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \subset W^s_\alpha\big(g(D_i^0(y))\big), \tag{21}$$

donde el lado izquierdo de (20) es precisamente $g(D_i^1(y))$. Por tanto

$$g(D_i^1(y)) \subset g^{-1}\Big[W^s_\alpha\big(g(D_i^0(y))\big)\Big] \subset W^s_{\beta\alpha}\big(g(D_i^0(y))\big).$$

Además, puesto que $D_i^0(y) \subset W^s_\alpha(y)$ obtenemos finalmente

$$W^s_\alpha\big(D_i^0(y)\big) \subset W^s_{1+\beta}\alpha(y).$$

Ahora, suponga que (21) es válido para $n-1$ y considere el caso de n (con $n-1 \geqslant 1$).

$$\begin{aligned} D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) &\subset D^{n-1}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \\ &\subset W^s_{\beta^{n-1}\alpha}\Big(D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\Big) \qquad (22) \\ &\subset W^s_{(1+\cdots+\beta^n)\alpha}(y) \qquad (23) \\ &\subset W^s_{2\alpha}(y) \subset W^s_\varepsilon(y) \end{aligned}$$

porque $\sum_{l=0}^\infty \beta^l \leqslant 2$ e $2\alpha < \varepsilon$.

De la definición de $D_i^n(x)$ se tiene

$$g\big(D_i^n(x)\big) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} D^{n-1}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})$$

y de la misma manera

$$g\big(D_i^{n-1}(x)\big) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant s(i)} D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})$$

donde $D_i^{n-2}(x)\big) \subset D^{n-1}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})$ por hipótesis inductiva. Entonces

$$g\big(D_i^{n-1}(y)\big) \subset g\big(D_i^{n}(y)\big) \subset W^s_{\beta^{n-1}\alpha}\big(g(D_i^{n-1}(y)\big)$$

donde la última inclusión se tiene por (22). Ahora, variando j obtenemos

$$\begin{aligned} g\big(D_i^{n}(y)\big) &= \bigcup_{1\leqslant j\leqslant s(i)} D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \\ &\subset \bigcup_{1\leqslant j\leqslant s(i)} W^s_{\beta^{n-1}\alpha}\Big(D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\Big) \\ &\subset W^s_{(1+\cdots+\beta^n)\alpha}\Bigg[\bigcup_{1\leqslant j\leqslant s(i)} D^{n-2}_{J(z_{i,j})}(z_{i,j})\Bigg] \\ &\subset W^s_{\beta^{n-1}\alpha}\big(g(D_i^{n-1}(y))\big). \end{aligned}$$

Aplicando g^{-1} a la última inclusión de conjuntos resulta

$$D_i^{n-1}(y) \subset g\big[W^s_{\beta^{n-1}\alpha}\big(g(D_i^{n-1}(y))\big)\big]$$

y por definición de β se tiene

$$D_i^{n-1}(y) \subset D_i^{n}(y) \subset W^s_{\beta^{n}\alpha}\big(g(D_i^{n-1}(y))\big)$$

Pero, como $D_i^{n-1}(y) \subset W^s_{(1+\cdots+\beta^{n-1})\alpha}(y)$ by (23), concluimos que

$$W^s_{\beta^{n}\alpha}\big(g(D_i^{n-1}(y))\big) \subset W^s_{(1+\cdots+\beta^{n-1})\alpha}(y),$$

quedando así demostrado el Lema. ∎

Para cada $y \in K_i^u$ definimos

$$D_i(y) = \overline{\bigcup_{n\geqslant 0} D_i^n(y)} \subset W^s_{2\alpha}(y).$$

Note que $D_i(y) = \overline{\mathrm{int}(D_i(y))}$ en la topología de $W^s_\gamma(y)$.

LEMA 8 *Si* $z \in D_i\big(K_i^u(2\alpha)\big)$*, entonces para algún* T_m^0 $(m \in \{1, \dots k\})$ *con* $g(z) \in T_m^0$ *tenemos:*

$$g\big(D_i(z)\big) \supset D_m(g(z)) \tag{24}$$

Demostración. Dado $y \in K_i^u(2\alpha)$,

$$\begin{aligned} g\big(D_i(y)\big) &= \overline{\bigcup_{n>0} g(D_i^n(y))} \\ &= \overline{\bigcup_{n>0} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} D_{J(z_{i,j})}^{n-1}(z_{i,j})} \\ &= \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} \overline{\bigcup_{n>0} D_{J(z_{i,j})}^{n-1}(z_{i,j})} \\ &= \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s(i)} D_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \end{aligned}$$

Entonces existe $j \in \{1, \dots, s(i)\}$ tal que

$$g(z) \in D_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) \subset D_{J(z_{i,j})}(K_j^u).$$

Por tanto $g\big(D_i(z)\big) = g\big(D_i(y)\big) \supset D_{J(z_{i,j})}(z_{i,j}) = D_{J(z_{i,j})}(g(z))$ y el Lema se verifica tomando $m = J(z_{i,j})$. ■

Como habíamos mencionado anteriomente, la propiedad de Markov parcial es obtenida de los precedentes Lemas de una manera similar al caso de la propiedad Markoviana de particiones asociadas a atractores hiperbólicos de flujos en [Bo1], y al caso de flujos de Anosov en [Ra]. Con esto damos por concluida la demostración del Teorema 2. ■

Referencias Bibliográficas

[AP] A. Arroyo, E. Pujals. *Dynamical Properties of Singular Hyperbolic Attractors.* Por aparecer en Discrete and Continuous Dynamical Systems.

[BV] C. Bonatti, M. Viana. *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting.* Israel Journal of Mathematics. 115: 157–193 1997.

[Bo1] R. Bowen. *Markov Partitions for Axiom A Diffeomorphisms.* American Journal of Mathematics. 92, 1972.

[Bo2] R. Bowen. *Symbolic Dynamics for Hyperbolic Flows.* American Journal of Math. 95: 429–460. 1973.

[BM] R. Bowen and B. Marcus. *Unique Ergodicity for Horocycle Foliations.* Israel Journal of Math. 26(1): 43-67, 1977.

[BR] R. Bowen, D. Ruelle. *The Ergodic Theory of Axiom A Flows.* Inventiones Mathematicae 29: 181–202. 1975.

[BW] R. Bowen, P. Walters. *Expansive One-Parameter Flows.* Journal of Diff. Equations 12: 180–193. 1972.

[Bu] L. A. Bunimovich. *Statistical properties of Lorenz attractors.* En: Nonlinear Dynamics and Turbulence (edited by G. I. Barenblatt et. al.) 71–92. 1983.

[C] W. Colmenárez. *Nonunifrom Hyperbolicity for Singular Hyperbolic Attractors.* Transaction of the AMS. 357(4): 4131–4140. 2005.

[CFS] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Y. G. Sinai. *Ergodic Theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 245. Srpinger Verlag, New York 1982.

[G] J. Guckenheimer. *A strange strange attractor.* In: The Hopf bifurcation and applications. Marsden, J. and MacCraken, A. (Eds.). Applied Mathematical Series 9, Springer Verlag. Berlin, 1976.

[K] G. Keller. *Generalized Bounded Variation and Applications to Piecewise Monotonic Transformations.* Z. Wahrsc. Verw. Gebiete 69: 461–478. 1985.

[LP] R. Labarca and M. J. Pacífico, M.J. *Singular Horseshoe* Topology, 25: 337–352. 1986.

[M] R. Metzger. *Sinai-Ruelle-Bowen measures for contracting Lorenz maps and flows.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 17(2): 247–276. 2000.

[MP1] C. Morales and M. J. Pacifico. *Mixing Attractors for 3-Flows.* Nonlinearity. 14(2): 359–378. 2001.

[MP2] C. Morales, M. J. Pacifico. *Sufficient Conditions for Robustness of Attractors.* Pacific Journal of Math. 216(2): 327–342. 2004. Preprint at `http://arxiv.org/pdf/math/.DS/0303310`.

[MPP] C. Morales, M. J. Pacifico and E. Pujals. *Singular Hyperbolic Systems.* Proc. Amer. Math. Soc. 127(11): 3393–3401. 1999.

[Pa] J. Palis. *A Global View of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors.* Astérisque. 261: 335–347. 2000.

[PM] J. Palis, W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer-Verlag. New Yorke, 1982.

[PT] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity & Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations.* Cambridge University Press. 1993.

[Pe] Ya. Pesin. *Families of Invariant Manifolds Corresponding to non-zero Characteristic Exponents.* Math. USSR-Izv. 10: 1261–1305. 1976.

[Ra] M. Ratner. *Markov Partitions for Anosov Flows on n-Dimensional Manifolds.* Israel Journal of Mathematics. 15: (1973).

[Ro] C. Robinson. *Transitivity and Invariant Measures for the Geometric Model of Lorenz Attractor.* Ergodic Theory & Dynamical Systems.4: 605–611. 1984.

[Rov] A. ROVELLA. *The dynamics of perbations of the contracting Lorenz attractor.* Bull. Raz. Math. Soc. 24(2): 233–259. 1993.

[Ru] D. RUELLE. *A Measure Associated with Axiom A Attractors.* Amer. J. of Math. 98: 619-654. 1976.

[Ry] M. RYCHLIK. *Invariant Measure and the Variational Principle for Lozi Mappings.* Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1983.

[S] YA. SINAI. *Gibbs Measures in Ergodic Theory.* Russian Math. Surveys. 27: 21–69. 1972.

[V1] M. VIANA. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems.* 21° Brazillian Colloquium of Math. IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[V2] M. VIANA. *Dynamics: A Probabilistic and Geometric Perspective.* Documenta Mathematica. Extra volume, ICM 1998.

[Y] L.-S. YOUNG. *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity.* Annals of Mathematics. 147: 585–650. 1998.