

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**PERSISTENCIA DE TANGENCIAS
HOMOCLINICAS
EN DIMENSIONES ALTAS**

Por Neptalí J. Romero B.

TRABAJO PRESENTADO PARA ASCENDER A LA
CATEGORIA DE PROFESOR ASOCIADO

Barquisimeto, Junio 1993.

A la memoria de mi padre, Edmundo Romero

AGRADECIMIENTOS

Llegue mi agradecimiento al Profesor Jacob Palis Jr. por haberme colocado el problema de esta investigación y por su constante apoyo, a Marcelo Viana por sus valiosas conversaciones, al Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA, Brasil) por el valioso ambiente científico que allí se respira.

Debo agradecer también a la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", al Conicit y al Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) por el apoyo económico recibido.

Finalmente, agradezco a mi esposa Coromoto Cuevas y a mis hijos Connie Mariel y Camilo Ernesto, quienes fueron punto de apoyo moral y supieron entender mis prolongados separaciones familiares que este trabajo produjo.

PERSISTENCIA DE TANGENCIAS HOMOCLINICAS EN DIMENSIONES ALTAS

Neptalí Romero*

Dpto. de Matemática. Decanato de Ciencias. UCLA.
Apdo.400. Barquisimeto-Venezuela

Abstract

En este trabajo extendemos al contexto más general, el fenómeno de Newhouse sobre la persistencia de tangencias homoclínicas y la coexistencia de infinitas órbitas periódicas hiperbólicas atractoras. Esto es hecho usando los correspondientes resultados en codimensión uno mostrados por J. Palis y M. Viana, y en una reducción de codimensión en el desdoblamiento de tangencias homoclínicas desarrollada en el presente artículo.

1 Introducción

Desde Poincaré (1890) el concepto de órbita homoclínica; esto es, una órbita en la intersección de las variedades estable e inestable de algún punto periódico hiperbólico, ha venido tomando mucho interés en el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos. Birkhoff en 1935 y Smale en 1965 describieron la dinámica adyacente a una órbita homoclínica transversal; de hecho, cualquier de estas órbitas es siempre parte de un conjunto de Cantor hiperbólico (herradura) cuya estructura de órbitas persiste bajo pequeñas perturbaciones y sus órbitas periódicas son densas.

*Parcialmente financiado por CNPq(Brasil), CONICIT y UCLA(Venezuela)

Acerca de las órbitas homoclínicas no transversales o tangencias homoclínicas, cuando estas son creadas y desdobladas, gran cantidad de cambios ocurren en la dinámica de un difeomorfismo, produciendo un elevado número de fenómenos dinámicos de tipo "caótico".

Decimos que una familia de difeomorfismos $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$, definidos en una variedad M , *desdobla genéricamente una tangencia homoclínica de codimensión $u \geq 1$ en $\mu = 0$* si φ_0 tiene un punto fijo hiperbólico (o periódico) $p_0 \in M$ tal que sus variedades estable e inestable, $W^s(p_0)$ y $W^u(p_0)$; con $\dim W^u(p_0) = u$, tienen una órbita de tangencia la cual, genéricamente, suponemos parabólica (contacto cuadrático) y para valores de $\mu \in (0, \epsilon)$, intersecciones transversales son creadas entre las continuaciones analíticas, $W^s(p_\mu)$ y $W^u(p_\mu)$, de las variedades estable e inestable de p_0 , respectivamente. Además, estas variedades invariantes se mueven con velocidad relativa no nula junta a la tangencia cuando el parámetro varía. En general, puede ser supuesto que el punto fijo p_0 pertenece a un conjunto básico Λ_0 y $|\det(D\varphi_0(p_0))| \neq 1$. Decimos que una familia $\{\varphi_\mu\}$ desdoblado genéricamente una tangencia homoclínica de codimensión uno en $\mu = 0$ es *seccionalmente disipativa* si, $|\sigma \lambda_i| < 1$ para cada $1 \leq i \leq m-1$, $m = \dim M$; donde $\sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ son los autovalores de $D\varphi_0(p_0)$, con $|\sigma| > 1 > |\lambda_i|$.

El problema es entender los cambios que ocurren en la estructura de órbitas de φ_μ , con $|\mu|$ pequeño, provocados por la creación de nuevas órbitas homoclínicas transversales, y en el tipo de dinámica que prevalece en el desdoblamiento. Más precisamente, conocer la dinámica del invariante maximal

$$\Sigma_\mu = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_\mu^n(U \cup U_\mu),$$

donde U es una vecindad de Λ_0 tal que, su continuación analítica Λ_μ satisface

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_\mu^n(U); \text{ y}$$

$$U_\mu = \bigcup_{|j| \leq N} \varphi_\mu^j(V_\mu)$$

para algún $N > 0$. Siendo que V_μ es una vecindad de un punto en la órbita de tangencia, cuyos puntos están a una distancia del orden de $K|\mu|$, K es alguna constante positiva, de la variedad estable local y de la variedad inestable de p_μ , continuación analítica de p_0 .

Los siguientes resultados son conocidos y relativos a este problema:

• **Cascadas de bifurcaciones de duplicación de período.** Si $\mu > 0$, o $\mu < 0$, es un valor del parámetro para el cual φ_μ tiene a Σ_μ como un conjunto hiperbólico, entonces dado cualquier punto periódico $q_\mu \in \Sigma_\mu$ de período k de índice $s = \dim M - u$ y arbitrariamente próximo a la órbita de tangencia, existe una sucesión $\mu_n \rightarrow 0$ tal que φ_{μ_n} tiene en Σ_{μ_n} un punto periódico de período $2^n k$ de índice $s + 1$.

(Yorke-Alligood, [YA], en codimensión uno; Martín Rivas, [M], en el caso general.)

• **Coexistencia de infinitos pozos.** Existen intervalos I próximos a $\mu = 0$ y conjuntos residuales $N \subset I$ tales que φ_μ , $\mu \in N$, tiene infinitas órbitas periódicas atractoras. Además, si $\tau(\Lambda_0) = \tau^s(\Lambda_0)\tau^u(\Lambda_0) > 1$, espesura de Λ_0 , entonces algunas variedades estable e inestable de puntos en Λ_μ , para cada $\mu \in I$, son tangentes.

(Newhouse y Robinson, [N] y [R], cuando $\dim M = 2$; Palis-Viana, [PV], en el caso de codimensión uno y seccionalmente disipativo.)

• **Abundancia de atractores extraños.** Dado $\epsilon > 0$ existen conjuntos en el espacio de parámetros $E \subset (-\epsilon, \epsilon)$ con medida positiva de Lebesgue tal que, para todo $\mu \in E$, φ_μ tiene un atractor extraño del tipo Hénon en Σ_μ .

(Mora-Viana, [MV], $\dim M = 2$, basados en Benedicks-Carleson, [BC]; Viana, [V], codimensión uno y seccionalmente disipativo.)

• **Prevalencia de hiperbolicidad.** Denotando por $B(\varphi_\mu)$ el conjunto de valores del parámetro para los cuales Σ_μ es no hiperbólico, $HD(\Lambda_0)$ la dimensión de Hausdorff de Λ_0 y m la medida de Lebesgue, tenemos:

- Si $HD(\Lambda_0) < 1$, entonces

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m[B(\varphi_\mu) \cap (-\epsilon, \epsilon)]}{\epsilon} = 0$$

(Palis-Takens, [PT1], $\dim M = 2$.)

- Si $HD(\Lambda_0) > 1$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m[B(\varphi_\mu) \cap (-\epsilon, \epsilon)]}{\epsilon} > 0$$

(Palis-Yoccoz, [PY], $\dim M = 2$.)

Ahora introducimos una versión topológica de los anteriores resultados sobre coexistencia de infinitos pozos y persistencia de tangencia. Primero, la siguiente

Definición: Decimos que un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$ es de *tangencias persistentes* si existen aplicaciones continuas Λ_1 y Λ_2 las cuales asignan a cada φ en \mathcal{U} conjuntos básicos $\Lambda_1(\varphi)$ y $\Lambda_2(\varphi)$ del tipo silla tal que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{U}$ existe una tangencia entre $W^s(\Lambda_1(\varphi))$ y $W^u(\Lambda_2(\varphi))$ o tales tangencias pueden ser obtenidas a través de pequeñas perturbaciones de φ . Cuando $\Lambda_1 = \Lambda_2$ decimos que \mathcal{U} es un abierto de *tangencias homoclínicas persistentes*.

Parafraseando los resultados de [PV] en dimensiones altas, tenemos

• Si $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$ tiene un punto fijo hiperbólico $p \in M$ cuyas variedades estable e inestable tienen una órbita de tangencia de codimensión uno. Entonces, arbitrariamente próximo a φ existe un abierto $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$ de tangencias homoclínicas persistentes. Más aun, si el punto silla p es seccionalmente disipativo, existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ tal que cada difeomorfismo en \mathcal{R} tiene infinitos pozos.

El principal propósito de este artículo es el de extender al contexto general el último de los resultados mencionados. De hecho, probaremos

Teorema A. Sea $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$ un difeomorfismo sobre una variedad M , $\dim M \geq 3$, teniendo una silla hiperbólica de índice $1 \leq s \leq m - 2$ tal que, sus variedades estable e inestable tienen una órbita de tangencia. Entonces arbitrariamente próximo de φ existe un abierto $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$ de tangencias homoclínicas persistentes. Además, si los autovalores de $D\varphi(p)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \sigma_1, \dots, \sigma_u$ son débilmente disipativos, esto significa

$$0 < |\lambda_s| \leq \dots \leq |\lambda_1| < 1 < |\sigma_1| \leq \dots \leq |\sigma_u|, \text{ y } |\sigma_1 \lambda_1| < 1, \quad (1)$$

entonces existen conjuntos residuales $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ tal que cada difeomorfismo en \mathcal{R} admite la coexistencia de infinitas órbitas periódicas hiperbólicas de índice $s + 1$.

Teorema B. Sea $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ una familia C^∞ de difeomorfismos sobre M

desdoblando genéricamente una tangencia homoclínica cuadrática de codimensión $u \geq 2$ en $\mu = 0$; sea $p_0 \in M$ el punto silla asociado cuyo índice es s . Existen intervalos I_i de valores del parámetro arbitrariamente próximos de $\mu = 0$ y conjuntos residuales $N_i \subset I_i$ tales que, si los autovalores de $D\varphi_0(p_0)$ satisfacen (1), para cada $\mu \in N_i$, φ_μ tiene infinitas órbitas periódicas hiperbólicas de índice $s + 1$.

La demostración de estos teoremas está basada en los resultados análogos en codimensión uno de Palis-Viana, ver [PV], y en una *reducción de codimensión en tangencias homoclínicas*, la cual es obtenida en la próxima sección. Este resultado establece:

Teorema C. *Si $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ es una familia genérica C^∞ de difeomorfismos sobre M desdoblando genéricamente una tangencia homoclínica de codimensión $u \geq 2$ in $\mu = 0$. Entonces, dado $k \geq 3$ existe una sucesión de intervalos $I_n \rightarrow 0$ tal que, para cada $\mu \in I_n$, φ_μ tiene una subvariedad $S_{\mu,n}$ de clase C^k , localmente invariante, de codimensión $u - 1$ y normalmente expansiva tal que, la familia $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I_n}$ restringida a $S_{\mu,n}$ desdobra genéricamente una tangencia homoclínica de codimensión uno. Más aun, si φ_0 satisface (1), para cada $\mu \in I_n$, φ_μ restringida a $S_{\mu,n}$ es seccionalmente disipativa.*

Existe un punto técnico que debe ser observado en el uso directo de los resultados de Palis-Viana en el teorema previo. Dado que las variedades centro-estables no son en general C^∞ , es necesario eliminar las condiciones de linealización usadas por ellos. Esto lo haremos en la sección 3.

Como consecuencia de la reducción de codimensión en las tangencias homoclínicas, los siguiente resultados son obtenidos de manera inmediata:

- *Existencia de cascadas de bifurcaciones de duplicación de período en cualquier codimensión.*

- *Abundancia de lo que llamamos conjuntos sillas extraños en familias genéricas desdoblando una tangencia homoclínica de codimensión $u \geq 2$.*

Estos conjuntos sillas extraños aparecen de forma natural como atractores extraños del tipo Hénon normalmente expansivos en las subvariedades de codimensión uno proveídas por el Teorema C.

Expreso mi gratitud al Profesor Jacob Palis Jr. por sugerirme el problema así como su constante apoyo. Gracias también a Marcelo Viana por sus

valiosas conversaciones y al IMPA por su excelente ambiente científico.

2 Reducción de codimensión en tangencias homoclínicas

Vamos a considerar una familia C^∞ de difeomorfismos a un parámetro $\varphi_\mu : M \rightarrow M$, M es una variedad C^∞ de dimensión $m \geq 3$, tal que en $\mu = 0$ una tangencia homoclínica parabólica de codimensión $u \geq 2$ es desdoblada genéricamente, la cual está asociada a punto fijo (o periódico) hiperbólico $p_0 \in M$ de índice $s \geq 1$. Esto significa, ver [NPT], que próximo a un punto de tangencia r , existe coordenadas μ -dependientes (x_1, \dots, x_m) , en las que

$$r = (0, \dots, 0);$$

$$W^s(p_\mu) = \{x_{s+1} = \dots = x_m = 0\}; \text{ y}$$

$$W^u(p_\mu) = \{x_1 = \dots = x_{m-(u+1)} = 0, x_m = -x_{m-u}^2 + \mu\};$$

donde p_μ es la continuación analítica de p_0 .

Entre las condiciones genéricas a ser consideradas para tales familias, suponemos que los autovalores de $D\varphi_0(p_0)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \sigma_1, \dots, \sigma_u$ son simples y satisfacen:

- i) son débilmente disipativos, ver (1);
- ii) si $\sigma_1 \in \mathbf{R}$, suponemos positivo y $|\sigma_2| > \sigma_1$; si $\sigma_1 \notin \mathbf{R}$, entonces $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$ y $|\sigma_1| < |\sigma_3|$;
- iii) para $k \geq 3$ fijo, existen C^k -coordenadas lineales μ -dependientes, definidas en una vecindad V of p_0 , digamos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ y $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_u)$, ver [S] y [T].

Bajo tales condiciones, para $(\xi, \eta) \in \varphi_\mu^{-1}(V) \cap V$ tenemos

$$\varphi_\mu(\xi, \eta) = (E_\mu \xi, U_\mu \eta);$$

donde E_μ (resp. U_μ) es una matriz cuadrada de la forma

$$E_\mu = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_s) \tilde{E}_\mu, \text{ (resp. } U_\mu = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_u) \tilde{U}_\mu),$$

siendo \tilde{E}_μ y \tilde{U}_μ ortogonales, y

$$\tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } \lambda_j \in \mathbf{R} \\ |\lambda_j| & \text{si } \lambda_j \notin \mathbf{R} \end{cases},$$

similarmente definimos $\tilde{\sigma}_j$.

Sean $r = (\xi_0, 0^u) \in W_{loc}^s(p_0) \cap V$ y $q = (0^s, \eta_0) \in W_{loc}^u(p_0) \cap V$ puntos en la órbita de tangencia; y sea $N > 0$ tal que $\varphi_0^N(q) = r$. Entonces para μ, ξ y η suficientemente pequeños, $\varphi_\mu^N(\xi, \eta + \eta_0) \in V$; por tanto en las coordenadas (ξ, η) escribimos

$$\varphi_\mu^N(\xi, \eta + \eta_0) = (H(\mu, \xi, \eta), G(\mu, \xi, \eta));$$

obviamente $H(0, 0^s, 0^u) = \xi_0$ y $G(0, 0^s, 0^u) = 0^u$.

Vamos a caracterizar el contacto cuadrádito de la tangencia y la genericidad de su desdoblamiento en términos de H y G . Excepto se diga lo contrario, las derivadas parciales son calculadas en $\mu = 0$, $\xi = 0^s \in \mathbf{R}^s$ y $\eta = 0^u \in \mathbf{R}^u$.

De la intersección cuasi-transversal en la órbita de tangencia, existe una única dirección $W \subset T_q W^u(p_0)$ donde $D\varphi_0^N(q)(W)$ es la dirección común entre $T_r W^s(p_0)$ y $T_r W^u(p_0)$; recordamos que $Z_r = T_r W^s(p_0) + T_r W^u(p_0)$ es de codimensión uno, ver [NPT].

Sea $(0^s, v = (v_1, \dots, v_u))$ un vector no nulo en W ; denotando $D\varphi_0^N$ por la matriz

$$\begin{bmatrix} \partial_\xi H & \partial_\eta H \\ \partial_\xi G & \partial_\eta G \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\sum_{i=1}^u \partial_{\eta_i} G_k v_i = 0, k = 1, \dots, u; \quad (2)$$

donde G_k es la k -ésima componente de G .

Asumiendo $v_1 \neq 0$, $\partial = (0^s, (a_1, \dots, a_u))$ con $a_i = (-1)^{1+i} \det \partial_\eta G(i/1)$, es ortogonal a Z_r ; y $\{(e_1, 0^u), \dots, (e_s, 0^u), \partial_{\eta_2} \varphi_0^N(q), \dots, \partial_{\eta_u} \varphi_0^N(q), \partial\}$ es una base de $T_r M$; e_i denota el i -ésimo vector canónico de \mathbf{R}^s y $\partial_\eta G(i/1)$ es la matriz obtenida de $\partial_\eta G$ eliminando al fila i y columna 1. También existen curvas C^k $C_\mu \subset W_{loc}^u(p_\mu) \cap V$ con ecuaciones paramétricas

$$C_\mu : q + (0^s, (h_\mu^1(t), \dots, h_\mu^u(t)), |t| \leq \epsilon_0;$$

para algún $\epsilon_0 > 0$, con

$$h_0^i(0) = 0 \text{ y } \frac{d}{dt} h_0^i = v_i, \quad i = 1, \dots, u;$$

a menos de una readaptación de coordenadas y una reparametrización, la ∂ -coordenada de $\varphi_\mu^N(q)$ es μ . Además, este valor es un extremo relativo, suponemos máximo en la ∂ -coordenada restringida a $\varphi_\mu^N(C\mu)$. En efecto, la ∂ -coordenada de $q + (0^s, (h_\mu^1(t), \dots, h_\mu^u(t)))$ es

$$\alpha(\mu, t) = \frac{1}{\|\partial\|^2} \sum_{i=1}^u a_i G_i(\mu, 0^s, (h_\mu^1(t), \dots, h_\mu^u(t))),$$

para simplificar, ∂ es supuesto unitario.

En este sentido, de la genericidad de la tangencia y su desdoblamiento, sigue:

$$\sum_{i=1}^u a_i G_i(\mu, 0^s, 0^u) = \mu; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^u a_i \partial_{\mu\mu} G_i = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^u a_i \sum_{j=1}^u \partial_{\mu\eta_j} G_i v_j = 0; \text{ y} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^u a_i L_i(v, v) < 0; \quad (6)$$

donde L_i es la forma cuadrática $\partial_{\eta\eta} G_i$, $i = 1, \dots, u$.

Demostración del Teorema C: Para cada $n \geq 1$ y μ próximo de cero, sea (b_1, \dots, b_u) vector dado por

$$(b_1, \dots, b_u) \tilde{U}_\mu^n = (a_1, \dots, a_u) \quad (7)$$

La siguiente condición genérica es impuesta:

$$b_1 \neq 0; \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i \neq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k_1} b_i \eta_i > 0; \quad (8)$$

donde k_1 es la dimensión de la expansión débil en $W^u(p_0)$, and $(\eta_1, \dots, \eta_u) = \eta_0$.

Haciendo $V_0 = \{(\xi, \eta) : \|\xi - \xi_0\| \leq 1, \|\eta - \eta_0\| \leq 1\}$, suponemos sin pérdida de generalidad que $V_0 \subset V$. En V_0 están definidos difeomorfismos sobre sus respectivas imágenes, $V_{\mu,n}^u$ y $V_{\mu,n}^s$, dados por

$$\Psi_{\mu,n}^u(\xi, \eta) = (E_\mu^n \xi, \eta) \text{ y } \Psi_{\mu,n}^s(\xi, \eta) = (\xi, U_\mu^{-n} \eta).$$

Debe observarse que $V_{\mu,n}^s$ es el conjunto de puntos $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u$ tales que $(\xi, U_\mu^n \eta) \in V_0$, $\varphi_\mu^n(V_{\mu,n}^s) = V_{\mu,n}^u$ y $\varphi_\mu^n(\xi, \eta) = \Psi_{\mu,n}^u \circ (\Psi_{\mu,n}^s)^{-1}(\xi, \eta)$.

Ahora definimos reparametrizaciones n -dependientes y transformaciones de coordenadas μ -dependientes sobre V_0 por las siguientes fórmulas:

$$\Psi_n(a; x, y) = (\mu = \mu(a, n), \Psi_{a,n}(x, y)),$$

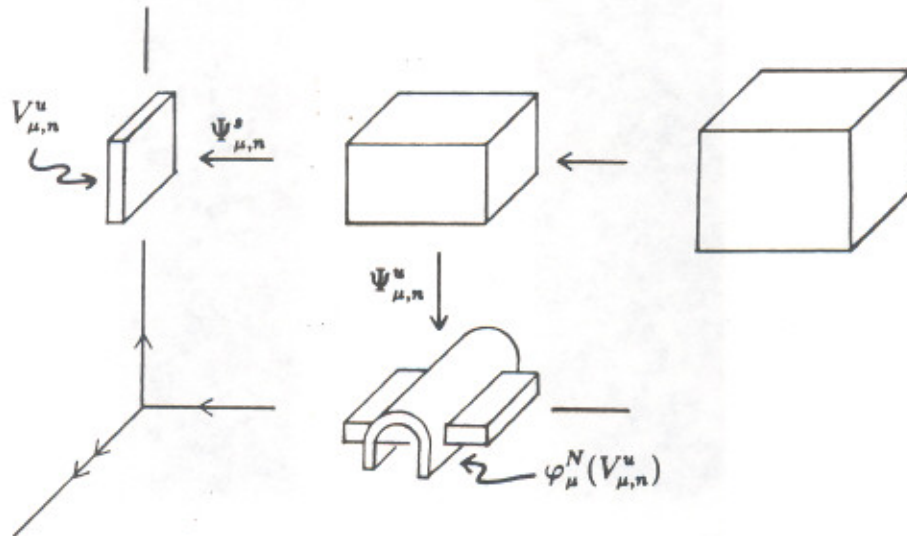


Figura 2.1

donde

$$\mu = \frac{1}{1 + \tilde{\sigma}_1^{-n} L_{a,n}^1(M_n^{-1} C_n)} \left[- \frac{(\sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n))^2}{\sum_{i=1}^u a_i L_i(v, v)} \tilde{\sigma}_1^{-2n} a \right. \\ \left. - \tilde{\sigma}_1^{-2n} Q_{a,n}(M_n^{-1} C_n) - \sum_{i=1}^u a_i \partial_\xi G_i E_\mu^n \xi_0 + \tilde{\sigma}_1^{-n} \sum_{i=1}^{k_1} b_i \eta_i \right]$$

$$-\tilde{\sigma}_1^{-2n} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)}{\sum_{i=1}^u a_i L_i(v, v)} \right) \left(\frac{L_{a,n}^2(M_n^{-1}C_n)}{2} + \frac{(L_{a,n}^2(M_n^{-1}C_n))^2}{4} \right) \Bigg]$$

$$\Psi_{a,n}(x, y) = (\beta_n x + \xi_0, B_n y + \eta_0);$$

donde $\beta_n = \tilde{\sigma}_1^{-n} \omega^n$ con $1 < \omega < \min\{\tilde{\sigma}_1, |\lambda_1 \sigma_1|^{-1}\}$;

$$B_n = \begin{bmatrix} dv_1 \tilde{\sigma}_1^{-n} & -\rho_1^{-n} b_2 / b_1 & \cdots & -\rho_1^{-n} b_u / b_1 \\ dv_2 \tilde{\sigma}_1^{-n} & \rho_2^{-n} & & \circ \\ \vdots & & \ddots & \\ dv_u \tilde{\sigma}_1^{-n} & \circ & & \rho_u^{-n} \end{bmatrix}$$

siendo que

$$d = -\frac{a \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)}{\sum_{i=1}^u a_i L_i(v, v)} \text{ y } \rho_j = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_j^{-1}, j = 1, \dots, u;$$

$M_{a,n}$ es una matriz no singular y para $a \in J$, intervalo compacto,

$$0 < \inf_{a,n} \|M_{a,n}\| \leq \sup_{a,n} \|M_{a,n}\| < \infty \text{ (ver Lema 2.1);}$$

$C_{a,n} \in \mathbf{R}^{u-1}$ y para $a \in J$ tenemos

$$\sup_{a,n} \|C_{a,n}\| < \infty \text{ (ver Lema 2.1);}$$

$L_{a,n}^1$ y $L_{a,n}^2$ son formas lineales con

$$\sup_{a,n} \|L_{a,n}^i\| < \infty, i = 1, 2 \text{ (ver Lema 2.1);}$$

$Q_{a,n}$ es una forma cuadrática y

$$\sup_{a,n} \|Q_{a,n}\| < \infty \text{ (ver Lema 2.1).}$$

Debe ser observado que para $a \in J$, y n suficientemente grande, $\mu = O(\tilde{\sigma}_1^{-n})$.
Definimos ahora

$$\varphi_n(a; x, y) = (\mu; \varphi_{a,n} = \Psi_{\mu,n}^u \circ \Psi_{a,n}(x, y)) \text{ y}$$

$$\Phi_{a,n}(x, y) = \varphi_{a,n}^{-1} \circ \varphi_{\mu}^{n+N} \circ \varphi_{a,n}(x, y) = (\bar{H}_{a,n}(x, y), \bar{G}_{a,n}(x, y)),$$

donde

$$\bar{H}_{a,n}(x, y) = \beta_n^{-1} (H(\mu, E_{\mu}^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) - \xi_0), y$$

$$\bar{G}_{a,n}(x, y) = B_n^{-1} (U_{\mu}^n G(\mu, E_{\mu}^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) - \eta_0).$$

Denotamos cada $y \in \mathbf{R}^n$ por $y = (y_1, \bar{y}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{u-1}$ y $\bar{G}_{a,n} = (G_{a,n}^1, G_{a,n}^2)$, siendo que $G_{a,n}^1 \in \mathbf{R}$ y $G_{a,n}^2 \in \mathbf{R}^{u-1}$.

Lema 2.1. a) Para cada $a \in J$, intervalo compacto, $\bar{H}_{a,n}$ converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$ en la topología C^k (uniformemente sobre compactos)

b) Las aplicaciones $G_{a,n}^1$ y $G_{a,n}^2$ tienen la forma:

$$G_{a,n}^1(x, y_1, \bar{y}) = k_{a,n} + \ell_{a,n}^1(\bar{y}) + q_{a,n}(\bar{y}) + \ell_{a,n}^2(\bar{y})y_1 - ay_1^2 + R_{a,n}^1(x, y_1, \bar{y});$$

$$G_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}) = \bar{\sigma}_u^n(C_{a,n} + M_{a,n}\bar{y}) + R_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y});$$

donde

$\ell_{a,n}^1$ y $\ell_{a,n}^2$ son formas lineales tales que

$$\sup_{a,n} \|\ell_{a,n}^i\| < \infty, \quad i = 1, 2;$$

$q_{a,n}$ es una forma cuadrática y

$$\sup_{a,n} \|q_{a,n}\| < \infty;$$

$$k_{a,n} = 1 + \ell_{a,n}^1(M_n^{-1}C_n) - q_{a,n}(M_n^{-1}C_n) - \frac{\ell_{a,n}^2(M_n^{-1}C_n)}{2a} - \frac{(\ell_{a,n}^2(M_n^{-1}C_n))^2}{4a};$$

$R_{a,n}^1$, $\bar{\sigma}_u^{-n} R_{a,n}^2$ convergen a cero cuando $n \rightarrow \infty$ en la topología C^k (uniformemente sobre compactos); $M_{a,n}$ y $C_{a,n}$ como arriba.

Demostración: a) La conclusión sigue inmediatamente después de los siguientes hechos:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{a,n}(x, y) &= \mu \beta_n^{-1} \partial_{\mu} H + \beta_n^{-1} \partial_{\xi} H E_{\mu}^n \xi_0 + \beta_n^{-1} \partial_{\eta} H B_n y \\ &+ \partial_{\xi} H E_{\mu}^n x + \beta_n^{-1} r_n(\mu, E_{\mu}^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y); \end{aligned}$$

donde $r_n, \partial_\mu r_n, \partial_\xi r_n$, y $\partial_\eta r_n$ se anulan en $\mu = 0, \xi = 0^s$ y $\eta = 0^u$; $\mu = O(\tilde{\sigma}_1^{-n}), |\lambda_1 \sigma_1| < 1$ y $|\beta_n^{-1} \sigma_1^{-n}| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

b) Es claro que

$$G_{a,n}^1(x, y) = \sum_{i=1}^u \langle F_1(B_n^{-1}), C_i(U_\mu^n) \rangle G_i(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) - \langle F_1(B_n^{-1}), \eta_0 \rangle;$$

aquí, $F_1(B)$ y $C_i(B)$ denotan la fila uno y columna i de la matriz B , y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto euclidiano.

Es fácil de verificar que

$$F_1(B_n^{-1}) = \frac{\tilde{\sigma}_1^{2n}}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} (b_1 \tilde{\sigma}_1^{-n}, \dots, b_u \tilde{\sigma}_u^{-n});$$

con $\theta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\langle F_1(B_n^{-1}), C_\ell(U_\mu^n) \rangle = \frac{\tilde{\sigma}_1^{2n}}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} a_\ell \text{ para } \ell = 1, \dots, u; \quad (9)$$

$$\langle F_1(B_n^{-1}), \eta_0 \rangle = \frac{\tilde{\sigma}_1^n \sum_{i=1}^{k_1} b_i \eta_i}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} + \bar{\theta}_n; \quad (10)$$

donde $\bar{\theta}_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} G_\ell(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) &= \mu \partial_\mu G_\ell + \partial_\xi G_\ell E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0) + \partial_\eta G_\ell B_n y \\ &+ \mu \partial_{\mu\xi} G_\ell E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0) + \frac{1}{2} \partial_{\xi\xi} G_\ell (E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0)) \\ &+ \frac{1}{2} \mu^2 \partial_{\mu\mu} G_\ell + \mu \partial_{\mu\eta} G_\ell B_n y + \partial_{\eta\xi} G_\ell (B_n y, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0)) \\ &+ \frac{1}{2} L_\ell(B_n y, B_n y) + \bar{G}_\ell(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y); \end{aligned}$$

donde \bar{G}_ℓ es C^k y se anula junto con sus derivadas parciales de hasta segundo orden en $\mu = 0, \xi = 0^s$ y $\eta = 0^u$. Dado que $|\beta_n \tilde{\sigma}_1^{2n}| \|E_\mu^n\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow$

∞ , $|\lambda_1 \sigma_1| < 1$ y $\mu = O(\tilde{\sigma}_1^{-n})$, tenemos para cualquier multi-índice α en (x, y) , con $0 \leq |\alpha| \leq k$, que

$$\begin{aligned} & |\sigma_1|^{2n} \partial^\alpha \left[\beta_n \partial_\xi G_\ell E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0) + \mu \partial_{\mu\xi} G_\ell E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0) \right. \\ & + \partial_{\eta\xi} G_\ell(B_n y, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0)) + \frac{1}{2} \partial_{\xi\xi} G_\ell(E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), (E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0))) \\ & \left. + \tilde{G}_\ell(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$ sobre partes compactas.

Observando que

$$\begin{aligned} \bullet \partial_\eta G_\ell B_n y &= d \tilde{\sigma}_1^{-n} y_1 \sum_{i=1}^u \partial_{\eta_i} G_\ell v_i - \frac{\rho_1^{-n}}{b_1} \partial_{\eta_1} G_\ell \sum_{i=2}^u b_i y_i \\ &+ \sum_{i=2}^u \rho_i^{-n} \partial_{\eta_i} G_\ell y_i; \end{aligned}$$

$$\bullet \partial_{\mu\eta} G_\ell B_n y = d \tilde{\sigma}_1^{-n} y_1 \sum_{i=1}^u \partial_{\mu\eta_i} G_\ell v_i + \tilde{\sigma}_1^{-n} L_{a,n,\ell}^1(\bar{y}); \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \bullet L_\ell(B_n y, B_n y) &= d^2 \tilde{\sigma}_1^{-2n} y_1^2 L_\ell(v, v) + d \tilde{\sigma}_1^{-2n} y_1 L_{a,n,\ell}^2(\bar{y}) \\ &+ \tilde{\sigma}_1^{-2n} Q_{a,n,\ell}(\bar{y}); \end{aligned}$$

donde $L_{a,n,\ell}^i$, $i = 1, 2$ y $Q_{a,n,\ell}$ son formas lineales y cuadráticas, respectivamente, tales que

$$\sup_{a,n} \|L_{a,n,\ell}\| < \infty, \quad i = 1, 2, \quad \text{y} \quad \sup_{a,n} \|Q_{a,n,\ell}\| < \infty.$$

Tenemos de la ortogonalidad de ∂ y Z_r , de (3), \dots y (10) que

$$\begin{aligned} G_{a,n}^1(x, y_1, \bar{y}) &= \frac{\tilde{\sigma}_1^{2n}}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \left[\mu + \sum_{i=1}^u a_i \partial_\xi G_i E_\mu^n \xi_0 \right. \\ &+ \tilde{\sigma}_1^{-n} \mu L_{a,n}^1(\bar{y}) + d^2 \tilde{\sigma}_1^{-2n} y_1^2 \sum_{i=1}^u a_i L_i(v, v) + d \tilde{\sigma}_1^{-2n} L_{a,n}^2(\bar{y}) y_1 \\ &\left. + \tilde{\sigma}_1^{-2n} Q_{a,n}(\bar{y}) \right] - \frac{\tilde{\sigma}_1^n \sum_{i=1}^{k_1} b_i \eta_i}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} + r_{a,n}^1(x, y_1, \bar{y}); \end{aligned}$$

donde

$$L_{a,n}^j(\bar{y}) = \sum_{i=1}^u L_{a,n,i}^j(\bar{y}), \quad j=1,2; \quad \text{y} \quad Q_{a,n}(\bar{y}) = \sum_{i=1}^u a_i Q_{a,n,i}(\bar{y}),$$

(usadas en la definición de μ), y $r_{a,n}^1$ converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$ en la topología C^k (uniformemente sobre compactos).

De la definición de la reparametrización es fácil verificar

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\sigma}_1^{2n}}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \left[\mu + \sum_{i=1}^u a_i \partial_\xi G_i E_\mu^n \xi_0 - \tilde{\sigma}_1^{-n} \sum_{i=1}^{k_1} b_i \eta_i \right] \\ &= 1 + \frac{1}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \left[\tilde{\sigma}_1^n \mu L_{a,n}^1(M_{a,n}^{-1} C_{a,n}) - Q_{a,n}(M_{a,n}^{-1} C_{a,n}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d}{2a} L_{a,n}^2(M_{a,n}^{-1} C_{a,n}) - \frac{d}{4a} (L_{a,n}^2(M_{a,n}^{-1} C_{a,n}))^2 \right]. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} G_{a,n}^1(a, y_1, \bar{y}) &= 1 - \frac{L_{a,n}^2(M_{a,n}^{-1} C_{a,n})}{2a \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} - \frac{1}{4a} \left(\frac{L_{a,n}^2(M_{a,n}^{-1} C_{a,n})}{\sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \left[\tilde{\sigma}_1^n \mu L_{a,n}^1(\bar{y} + M_{a,n}^{-1} C_{a,n}) + Q_{a,n}(\bar{y}) - Q_{a,n}(M_{a,n}^{-1} C_{a,n}) \right] \\ &+ \frac{L_{a,n}^2(\bar{y})}{\sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} y_1 - a y_1^2 + R_{a,n}^1(x, y_1, \bar{y}); \end{aligned}$$

con $R_{a,n}^1 \rightarrow 0$ en la topología C^k sobre partes compactas.

Haciendo

$$\begin{aligned} \ell_{a,n}^1 &= \frac{\sigma_1^n \mu L_{a,n}^1}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)}, \quad \ell_{a,n}^2 = \frac{L_{a,n}^2}{\sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)} \quad \text{y} \\ q_{a,n} &= \frac{Q_{a,n}}{d \sum_{i=1}^{k_1} b_i v_i (1 + \theta_n)}, \end{aligned}$$

tenemos la primera parte de b).

Un simple cálculo muestra que

$$G_{a,n}^2(x, y) = \mu \tilde{B}_n U_\mu^n \partial_\mu G + \tilde{B}_n U_\mu^n \partial_\xi G E_\mu^n (\beta_n x + \xi_0)$$

$$+\tilde{B}_n U_\mu^n \partial_\eta G B_n y + \tilde{B}_n U_\mu^n \tilde{G}(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y) - \tilde{B}_n \eta_0;$$

donde \tilde{G} es C^k y se anula junto con sus derivadas parciales en $\mu = 0$, $\xi = 0^s$ y $\eta = 0^u$.

Hacemos las siguientes observaciones:

• $\partial_\eta G B_n y = \partial_\eta \tilde{B}_n \bar{y}$ para cada $y \in \mathbf{R}^u$, esto es una consecuencia de $\partial_\eta G v = 0$ con \tilde{B}_n siendo la matriz B_n sin la columna uno.

• Usando (8), la ortogonalidad de (a_1, \dots, a_u) con la imagen de $\partial_\eta G$ y $\rho_i \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_u$ para $i = 1, \dots, u$; sigue que

$$\tilde{B}_n U_\mu^n \partial_\eta G = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_u)^n E \tilde{U}_\mu^n \partial_\eta G,$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \circ \\ & & \ddots & \\ \circ & & & 1 \end{bmatrix}_{(u-1) \times u}$$

• Como \tilde{U}_μ es ortogonal, la imagen de $\tilde{U}_\mu^n \partial_\eta G \tilde{B}_n$ es ortogonal a (b_1, \dots, b_u) . En particular esto implica que la matriz $M_{a,n}$, definida abajo, es no singular. Es fácil ver que

$$\|\tilde{B}_n\| = \delta_n \tilde{\sigma}_1^{-n} \text{ con } 0 < \inf_n \delta_n \leq \sup_n \delta_n < \infty;$$

$$\|\tilde{B}_n\| \leq O(|\rho_2|^n) \text{ y } \|\tilde{B}_n U_\mu^n\| \leq O(|\sigma_1 \sigma_u|^n),$$

entonces $M_{a,n} = \tilde{\sigma}_1^n E \tilde{U}_\mu^n \partial_\eta G \tilde{B}_n$ y $C_{a,n} = \mu \tilde{\sigma}_1^{-n} \tilde{B}_n U_\mu^n \partial_\mu G - \tilde{B}_n \eta_0$ están acotadas y $\|M_{a,n}\| > 0$.

De esta manera

$$G_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}) = \tilde{\sigma}_u^n (C_{a,n} + M_{a,n} \bar{y}) + R_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y});$$

donde

$$R_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}) = \tilde{B}_n U_\mu^n (\partial_\xi G E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0) + \tilde{G}(\mu, E_\mu^n(\beta_n x + \xi_0), B_n y));$$

obviamente $\tilde{\sigma}_u^{-n} R_{a,n}^2$ converge a cero en la topología C^k sobre partes compactas, cuando $n \rightarrow \infty$. \square

2.1 Existencia de gráficos localmente invariantes

Es claro que cualquier aplicación $h : \text{dom}h \subset \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{u-1}$ cuyo gráfico es $\Phi_{a,n}$ -invariante satisface, de acuerdo al lema previo, la ecuación funcional

$$h(x, y_1) = \tilde{\sigma}_1^{-n} M_{a,n}^{-1} [h(\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), G_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) - R_{a,n}^2(x, y_1, h(x, y_1))] - M_{a,n}^{-1} C_{a,n}. \quad (11)$$

Dado que gráficos de aplicaciones locales no son necesariamente transformados por $\Phi_{a,n}$ en gráficos de aplicaciones teniendo al menos el mismo dominio, procederemos a estudiar una versión extendida de (11).

Para $a \in J$, intervalo compacto, y n suficientemente grande consideramos extensiones $\tilde{H}_{a,n}$, $\tilde{G}_{a,n}^1$ y $\tilde{R}_{a,n}^2$ de $\tilde{H}_{a,n}$, $G_{a,n}^1$ y $R_{a,n}^2$ respectivamente, coincidiendo en $Q = [-T, T]^s \times [-T, T] \times [-T, T]^{u-1}$ para algún $T > 0$, y tales que para alguna constante $K > 0$

$$\|\tilde{H}_{a,n}\|_k \leq K \|\tilde{H}_{a,n} \mid Q\|_k, \|\tilde{G}_{a,n}^1\|_k \leq K \|G_{a,n}^1 \mid Q\|_k \text{ y } \|\tilde{R}_{a,n}^2\|_k \leq K \|R_{a,n}^2 \mid Q\|_k.$$

Estudiaremos entonces el problema de encontrar soluciones globalmente definidas de

$$h(x, y_1) = \tilde{\sigma}_1^{-n} M_{a,n}^{-1} [h(\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), \tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) - \tilde{R}_{a,n}^2(x, y_1, h(x, y_1))] - M_{a,n}^{-1} C_{a,n}. \quad (12)$$

Observamos que soluciones acotadas de (12) satisfacen $\|h + M_{a,n}^{-1} C_{a,n}\| \leq \gamma_{a,n}$, donde $\gamma_{a,n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$; de hecho,

$$\gamma_{a,n} = O(\max\{|\sigma_u|^{-n}, \|\tilde{\sigma}_u^{-n} \tilde{R}_{a,n}^2\|\}).$$

Sea

$$\Theta_{a,n} = \{h \in C(\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^{u-1}) : \|h + M_{a,n}^{-1} C_{a,n}\| \leq \gamma_{a,n} \text{ y } L(h) \leq 1\},$$

donde $L(h)$ es la constante de Lipschitz de h . Claramente $\Theta_{a,n}$ es completo con la norma del supremo; además, $\Gamma_{a,n} : \Theta_{a,n} \rightarrow \Theta_{a,n}$ dado por (12) es un operador bien definido y para n grande es una contracción. Si $h_{a,n}$ es el punto fijo de $\Gamma_{a,n}$, entonces $h_{a,n}$ define un gráfico invariante para

$$\tilde{\Phi}_{a,n} = (\tilde{H}_{a,n}, \tilde{G}_{a,n}^1, \tilde{G}_{a,n}^2);$$

dónde

$$\tilde{G}_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}) = \tilde{\sigma}_1^n (C_{a,n} + M_{a,n}^{-1} \bar{y}) + \tilde{R}_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}),$$

y por tanto localmente invariante para $\Phi_{a,n}$.

Ahora estudiaremos la diferenciabilidad de $h_{a,n}$. Sea $\Xi_{a,n}$ el espacio de las aplicaciones continuas $L : \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^{u-1})$, $\Xi_{a,n}$ es completo con

$$\|L - L'\|_0 = \sup_{x, y_1} \|L(x, y_1) - L'(x, y_1)\|.$$

Para cada $h \in \Theta_{a,n}$ definimos el operador Γ_h in $\Xi_{a,n}$ por

$$\begin{aligned} \Gamma_h(L)(x, y_1) = & \tilde{\sigma}_1^{-n} M_{a,n}^{-1} [L(\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), \tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \\ & \circ (D\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), D\tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \quad (13) \\ & - D\tilde{R}_{a,n}^2(x, y_1, h(x, y_1))] \circ (I_s, 1, L(x, y_1)). \end{aligned}$$

Como $D\tilde{H}_{a,n}$, $D\tilde{G}_{a,n}^1$ y $\tilde{\sigma}_1^{-n} D\tilde{R}_{a,n}^2$ son acotadas y

$$\begin{aligned} (\Gamma_h(L) - \Gamma_h(L')) = & \tilde{\sigma}_1^{-n} M_{a,n}^{-1} [L(\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), \tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \\ & \circ (D\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), D\tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \\ & \circ (0^s, 0, (L - L')(x, y_1)) + (L - L')(H_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), G_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \\ & \circ (D\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h(x, y_1)), D\tilde{G}_{a,n}^1(x, y_1, h(x, y_1))) \circ (I_s, 1, L'(x, y_1)) \\ & - D\tilde{R}_{a,n}^2(x, y_1, h(x, y_1)) \circ (0^s, 0, (L - L')(x, y_1))], \end{aligned}$$

entonces, para alguna sucesión k_n , con $k_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\|\Gamma_h(L) - \Gamma_h(L')\|_0 \leq k_n \|L - L'\|_0, \text{ para } L, L' \in \Xi_{a,n}.$$

Por lo que, para n grande, Γ_h es una contracción. Así, el operador $\Delta_{a,n}$ sobre $\Theta_{a,n} \times \Xi_{a,n}$ definido por $\Delta_{a,n}(h, L) = (\Gamma_{a,n}(h), \Gamma_h(L))$, es continuo y contrae tanto la base como la fibra. Luego, del Teorema de contracción en las fibras, ver [HPS], para n grande y $a \in J$, $\Delta_{a,n}$ tiene un único punto fijo atractor $(h_{a,n}, L_{a,n}) \in \Theta_{a,n} \times \Xi_{a,n}$.

Observamos que si $h \in \Theta_{a,n}$ es diferenciable, entonces $D\Gamma_{a,n}(h) = \Gamma_h(Dh)$; en general para cada $m > 0$, $D\Gamma_{a,n}^m(h) = \Gamma_h^m(Dh)$; como consecuencia de

$$(\Gamma_{a,n}^m(h), \Gamma_h^m(Dh)) \rightarrow (h_{a,n}, L_{a,n}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

concluimos que $h_{a,n}$ es diferenciable y $Dh_{a,n} = L_{a,n}$.

Veamos que $h_{a,n}$ es C^k . Para esto probaremos que $\tilde{S}_{a,n}$ definida por el gráfico global de $h_{a,n}$ es k -normalmente hiperbólica, k -normalmente expansiva en este caso, entonces usamos

Teorema ([HPS]) Sea $S \subset M$ una subvariedad invariante de $\varphi \in \text{Diff}^k(M)$ la cual es r -normalmente hiperbólica, $1 \leq r \leq k$. Si S es compacta y C^1 , entonces es C^r .

Requerimos que $\tilde{S}_{a,n}$ sea compacta para usar directamente el resultado anterior, pero los mismos argumentos son válidos debido a que las aplicaciones $\tilde{H}_{a,n}$, $\tilde{G}_{a,n}^1$ y $\tilde{\sigma}_1^{-n} \tilde{R}_{a,n}^2$ tienen derivadas acotadas hasta el orden k . (Ver Apéndice I de [PT])

Recordamos la definición de r -normalmente expansivo.

Definición: Dados $\varphi \in \text{Diff}^k(M)$, $k \geq 1$, y $S \subset M$ una subvariedad φ -invariante. Se dice que S es r -normalmente expansiva, $1 \leq r \leq k$, si existe una descomposición $T_x M = T_x S \oplus E_x^u$ en cada $x \in S$ tal que

- la descomposición depende continuamente en x y $D\varphi(x)(E_x^u) = E_{\varphi(x)}^u$ para cada $x \in S$;
- para alguna métrica riemanniana, constantes $C > 0$ y $\sigma > 1$ se tiene para cada par de vectores unitarios $u \in T_x S$, $v \in E_x^u$ y todo $n > 0$:

$$\frac{\|D\varphi^n(x)v\|}{\|D\varphi^n(x)u\|^r} \geq C\sigma^n.$$

Lema 2.2. Para n suficientemente grande y $a \in J$, $\tilde{S}_{a,n}$ es k -normalmente expansiva.

Demostración: En $\mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{u-1}$ consideramos $E_1 = \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \times \{0^{u-1}\}$ y E_2 el complemento ortogonal de E_1 . Para cada $s \in \tilde{S}_{a,n}$ definimos el cono

$$C_{a,n}(s) = \{v = v_1 + v_2 \in E_1 \oplus E_2 : \|v_1\| \leq |\sigma_u|^{-\frac{n}{2}} \|v_2\|\};$$

afirmamos que $\{C_{a,n}(s)\}_s$ define un campo de conos inestable relativo a $\tilde{\Phi}_{a,n}$ en $\tilde{S}_{a,n}$, esto significa:

- $\overline{D\tilde{\Phi}_{a,n}(s)(C_{a,n}(s))} \subset \text{int}(C_{a,n}(\tilde{\Phi}_{a,n}(s))) \cup \{0\}$;

- $\exists \rho > 1$ tal que, para cada $v = v_1 + v_2 \in C_{a,n}(s)$

$$\|D\tilde{\Phi}_{a,n}(s)v\| \geq \rho\|v\|, \text{ donde } \|v\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|).$$

En efecto, dado que $D\tilde{H}_{a,n}$ y $D\tilde{G}_{a,n}^1$ son C^k -acotadas, existe una constante $K_2 > 0$ tal que, para cada $v = v_1 + v_2 \in C_{a,n}(s)$

$$\max(\|D\tilde{H}_{a,n}(s)v\|, \|D\tilde{G}_{a,n}^1(s)v\|) \leq K_2\|v_2\|. \quad (14)$$

Por otra parte, como $\tilde{G}_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y}) = \tilde{\sigma}_u^n(C_{a,n} + M_{a,n}\bar{y}) + \tilde{R}_{a,n}^2(x, y_1, \bar{y})$, entonces

$$\begin{aligned} \|D\tilde{G}_{a,n}^2(s)v\| &\geq |\sigma_u|^n\|v_2\|(|M_{a,n}| - |\sigma_u|^{-n}\|\partial_{\bar{y}}\tilde{R}_{a,n}^2(s)\| \\ &\quad - |\sigma_u|^{-\frac{3}{2}n}(\|\partial_x\tilde{R}_{a,n}^2(s)\| + \|\partial_{y_1}\tilde{R}_{a,n}^2(s)\|)) \end{aligned}$$

Luego, para n suficientemente grande y $a \in J$,

$$\|D\tilde{G}_{a,n}^2(s)v\| \geq \frac{1}{2} \inf_{a,n} \|M_{a,n}\| |\sigma_u|^n \|v_2\|. \quad (15)$$

Nuestra afirmación sigue de (14) y (15).

Ahora, a través de intersecciones de iterados positivos del campo de cono a lo largo de las órbitas, es obtenido para cada $s \in \tilde{S}_{a,n}$ un $(u-1)$ -plano $E_{a,n}^u \subset C_{a,n}(s)$, el cual varía continuamente en s y

$$\|D\tilde{\Phi}_{a,n}|E_{a,n}^u\| \geq \rho_n,$$

para un ρ_n del orden de $|\sigma_u|^n$. En particular, para cada $v \in E_{a,n}^u$ y todo $m > 0$

$$\|D\tilde{\Phi}_{a,n}^m(s)v\| \geq \rho_n\|v\|. \quad (16)$$

Más aun, el fibrado $E_{a,n}^u$ converge, cuando $n \rightarrow \infty$, al fibrado canónico de los $(u-1)$ -planos $\{0^s\} \times \{0\} \times \mathbf{R}^{u-1}$.

Veamos como es el comportamiento de $D\tilde{\Phi}_{a,n}$ en $T\tilde{S}_{a,n}$. Sea $h_{a,n}$ la solución de (11); cualquier vector $v \in T_s\tilde{S}_{a,n}$ con $s = (x, y_1, h_{a,n}(x, y_1))$ es de la forma

$$v = (w, Dh_{a,n}(x, y_1)w), \quad w \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}.$$

Como $\|Dh_{a,n}\| \leq \gamma_{a,n}$ entonces, $\|v\| = \|w\|$; en particular el fibrado tangente de $\tilde{S}_{a,n}$ converge al fibrado canónico de los $(s+1)$ -planos $\mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \times \{0\}^{u-1}$. De

$$D\tilde{\Phi}_{a,n}(s) = (D\tilde{H}_{a,n}(s), D\tilde{G}_{a,n}^1(s), Dh_{a,n}(\tilde{H}_{a,n}(s), \tilde{G}_{a,n}^1(s)),$$

tenemos para alguna constante $K_3 > 0$ y todo vector $v \in T_s \tilde{S}_{a,n}$,

$$\|D\tilde{\Phi}_{a,n}(s)v\| \leq K_3\|v\|.$$

Así, de esta desigualdad y (16) sigue el lema. \square

Hasta ahora tenemos para cada $a \in J$ y n grande que $\Phi_{a,n}$ admite una subvariedad de dimensión $s + 1$ (gráfico local de $h_{a,n}$) de clase C^k y con un fibrado normal a lo largo del cual la derivada crece con una tasa del orden de $|\sigma_u|$.

Finalmente, veamos que $\Phi_{a,n}$ restringida a

$$S_{a,n} = \text{graph}(h_{a,n} | [-T, T]^s \times [-T, T])$$

es, salvo un cambio de coordenadas, C^k -próxima a la familia cuadrática

$$\Phi_a(x, y_1) = (0^s, 1 - ay_1^2).$$

En las ecuaciones paramétricas de $S_{a,n}$ dadas por $h_{a,n}$, para $(x, y_1) \in S_{a,n} \cap \Phi_{a,n}^{-1}(S_{a,n})$ tenemos

$$\Phi_{a,n}(x, y_1) = (\tilde{H}_{a,n}(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)), G_{a,n}^1(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)))$$

entonces, del Lema 2.1 sigue

$$G_{a,n}^1(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)) = 1 + \frac{c_{a,n}}{2a} - a \left(y_1 - \frac{c_{a,n}}{2a} \right)^2 + r_{a,n}^1(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1));$$

donde

$$c_{a,n} = -\ell_{a,n}^2(M_{a,n}^{-1}C_{a,n}), \text{ y}$$

$$r_{a,n}^1(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)) = R_{a,n}^1(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)) + q_{a,n}(x, y_1, h_{a,n}(x, y_1)) - q_{a,n}(M_{a,n}^{-1}C_{a,n}) + \ell_{a,n}^1(h_{a,n}(x, y_1) + M_{a,n}^{-1}C_{a,n}) + \ell_{a,n}^2(h_{a,n}(x, y_1) + M_{a,n}^{-1}C_{a,n}).$$

Claramente $r_{a,n}^1$ converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$ en la topología C^k sobre partes compactas, pues $\|h_{a,n} + M_{a,n}^{-1}C_{a,n}\|_k \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente sobre compactos.

Por tanto, en las coordenadas a -dependientes

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y}_1 = y_1 - \frac{c_{a,n}}{2a} \end{cases}$$

$\Phi_{a,n}$ restringido a $S_{a,n}$ es dado por

$$\Phi_{a,n}(\tilde{x}, \tilde{y}_1) = (\tilde{H}_{a,n}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, h_{a,n}(\tilde{x}, \tilde{y}_1)), 1 - a\tilde{y}_1^2 + r_{a,n}^1(\tilde{x}, \tilde{y}_1, h_{a,n}(\tilde{x}, \tilde{y}_1))),$$

Ahora la prueba del teorema está completa. \square

Observación 2.1. Como $\Phi_{a,n}$ está C^k -próximo de Φ_a , para a próximo a 2 y n grande tenemos para la familia inicial (ver [PT], [PV]), $\{\varphi_\mu\}_\mu$, las siguientes propiedades:

- Existe una sucesión de intervalos I_n próximos a $\mu = 0$ tal que, para $\mu \in I_n$, φ_μ tiene un punto periódico hiperbólico, P_μ , de período $n + N$, de índice s y con una expansión unidimensional débil en su variedad inestable.
- Existe una sucesión de valores $\mu_n \in I_n$ con $\mu_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que, las variedades estable e inestable de P_{μ_n} tienen una órbita de tangencia. De hecho, en una variedad centro-estable local de P_{μ_n} , $W_{loc}^{cs}(P_{\mu_n})$, existe una tangencia homoclínica de codimensión uno y seccionalmente disipativa asociada a P_{μ_n} . Adicionalmente, debido a la dependencia continua de las variedades centro-estables, para n grande, la familia $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I_n}$ restringida a $W_{loc}^{cs}(P_\mu)$ desdobra genéricamente la tangencia asociada al punto periódico P_{μ_n} .

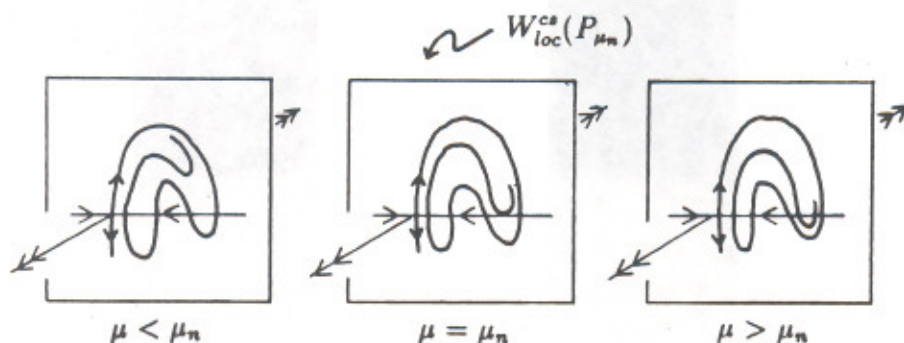


Figure 2.2

Como consecuencia de nuestra reducción de codimensión en tangencias homoclínicas junto con los resultados de Alligood y Yorke, ver [YA] y [PT],

obtenemos una generalización de la existencia de cascadas de bifurcaciones de duplicación de período; lo cual fue probado, recientemente, por Martín Rivas.

3 Demostración de los Teoremas A and B

Esta sección será destinada a demostrar la extensión, basada en los correspondientes resultados en [PV], del fenómeno de persistencia de tangencias homoclínicas.

Dado que las variedades centro-estables no son, en general, C^∞ , estamos obligados a suprimir las hipótesis de linealización consideradas por Palis y Viana. Por tal razón utilizaremos las denominadas variables de Sil'nikov.

3.1 Variables de Sil'nikov y Renormalizaciones

Vamos a definir las variables de Sil'nikov y a establecer algunas de las propiedades fundamentales; las demostraciones de estos resultados están básicamente contenidas en la sección 3 de [AS].

Sea $f : U \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ un difeomorfismo C^k , $k \geq 2$, teniendo al origen como punto fijo (o periódico) hiperbólico. Sin pérdida de generalidad suponemos que f es de la forma

$$f(x, y) = (Ax + f_s(x, y), By + f_u(x, y)),$$

donde $(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u$, $s + u = m$; A y B son operadores lineales con

$$\|A\| \leq \lambda \text{ y } \|B^{-1}\| \leq \sigma^{-1},$$

donde $0 < \lambda < 1 < \sigma$, y f_s, f_u son aplicaciones C^k anulándose junto con sus derivadas en el origen. Podemos suponer que f_s y f_u son del orden de $(\|x\| + \|y\|)\|x\|$ y $(\|x\| + \|y\|)\|y\|$, respectivamente; y también $W_{loc}^s(0) \subset (\mathbf{R}^s \times \{0^u\}) \cap U$, $W_{loc}^u(0) \subset (\{0^s\} \times \mathbf{R}^u) \cap U$.

Para cada entero $n > 0$ y $(x_0, y_n) \in U$ consideramos el sistema

$$\begin{cases} x_j = A^j x_0 + \sum_{\ell=1}^j A^{j-\ell} f_s(x_{\ell-1}, y_{\ell-1}), & j = 1, \dots, n \\ y_j = B^{j-n} y_n - \sum_{\ell=j+1}^n B^{j-\ell} f_u(x_{\ell-1}, y_{\ell-1}), & j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (17)$$

Claramente cualquier solución de este sistema, $\zeta = \{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$, es un pedazo de la órbita que en el comienzo está en el u -plano $x = x_0$, y después de n iterados está en el s -plano $y = y_n$. La existencia de tales soluciones están garantizadas por el siguiente

Lema 3.1. *Existen constantes $r_0 > 0$ y $n_0 \geq 1$ tales que para cada $n \geq n_0$, $0 < r < r_0$ y $(x_0, y_n) \in U$ con $\max(\|x_0\|, \|y_n\|) \leq \frac{r}{2}$, el sistema (17) tiene una única solución. \square*

Fijemos puntos $p = (\xi, 0^u) \in W_{loc}^s(0)$ y $q = (0^s, \eta) \in W_{loc}^u(0)$, denotamos por

$$U_p = \{(x, y) : \|x - \xi\| \leq \epsilon_0, \|y\| \leq \epsilon_0\}, y$$

$$U_q = \{(x, y) : \|x\| \leq \epsilon_1, \|y - \eta\| \leq \epsilon_1\};$$

tomemos ϵ_0 y ϵ_1 suficientemente pequeños para que $fU_p \cap U_q = \emptyset$, $f^{-1}U_q \cap U_p = \emptyset$ y tal que, para cada

$$(x_0, y_n) \in V_0 = \{(x, y) : \|x - \xi\| \leq \epsilon_0, \|y - \eta\| \leq \epsilon_1\},$$

(17) admite solución para todo $n \geq n_0$. En V_0 están definidas aplicaciones

$$\Psi_n^s : V_0 \rightarrow U_p \text{ y } \Psi_n^u : V_0 \rightarrow U_q \text{ dadas por}$$

$$\Psi_n^s(x, y) = (x, y_0(x, y; n)) \text{ y } \Psi_n^u(x, y) = (x_n(x, y; n), y);$$

donde $x_n(x, y; n)$ y $y_0(x, y; n)$ satisfacen

$$f^n(x, y_0(x, y; n)) = (x_n(x, y; n), y)$$

Esto significa que $\zeta(x, y; n) = \{f^j(x, y_0(x, y; n))\}_{j=0}^n$ es la solución (17) con datos $(x, y; n)$

Denotamos por $(x_j(x, y; n), y_j(x, y; n))$, $j = 0, \dots, n$ cada punto de la solución de (17); obviamente $x_0(x, y; n) = x$ y $y_n(x, y; n) = y$.

Los valores $x_n(x, y; n)$ y $y_0(x, y; n)$ son llamados *variables de Sil'nikov con datos* $(x, y; n)$.

Lema 3.2. *Para n grande, ϵ_0 y ϵ_1 pequeños, las aplicaciones Φ_n^s y Φ_n^u son difeomorfismos de clase C^k tales que, para una constante $C > 0$ y $j = 0, \dots, n$ valen las desigualdades*

$$\|x_j(\cdot, \cdot; n)\|_k \leq C\lambda^j \text{ y } \|y_j(\cdot, \cdot; n)\|_k \leq C\sigma^{j-n}. \quad \square \quad (18)$$

Los resultados establecidos previamente tienen una extensión a familias a un parámetro de difeomorfismos de clase C^k . Consideremos una familia $f_\mu : U \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ de clase C^k , que es, $(\mu, x) \rightarrow (\mu, f_\mu(x, y))$ es C^k . Suponiendo que el origen es un punto fijo (o periódico) hiperbólico y

$$f_\mu(x, y) = (A_\mu x + f_{\mu,s}(x, y), B_\mu y + f_{\mu,u}(x, y)),$$

donde $(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u$, $s + u = m$;

$$Df_\mu(0^s, 0^u) = \begin{bmatrix} A_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{bmatrix},$$

para $0 < \lambda = \lambda(\mu) < 1 < \sigma = \sigma(\mu)$ se tiene:

$$\|A_\mu\| \leq \lambda, \|B_\mu^{-1}\| \leq \sigma^{-1} \text{ y}$$

$$W_{loc}^s(0) \subset (\mathbf{R}^s \times \{0^u\}) \cap U \text{ y } W_{loc}^u(0) \subset (\{0^s\} \times \mathbf{R}^u) \cap U.$$

Análogo al problema (17), tenemos el correspondiente para la familia $\{f_\mu\}_\mu$. Si denotamos la solución de tal problema por

$$\zeta_\mu(x, y; n) = \{(x_{\mu,j}(x, y; n), y_{\mu,j}(x, y; n))\}_{j=0}^n$$

entonces, para n grande y todo $j = 0, \dots, n$, $x_{\mu,j}$ y $y_{\mu,j}$ dependen continuamente con el parámetro. También, para una constante $C > 0$ y $j = 0, \dots, n$

$$\|x_{\mu,j}(\cdot, \cdot; n)\|_k \leq C\lambda^j \text{ y } \|y_{\mu,j}(\cdot, \cdot; n)\|_k \leq C\sigma^{j-n}. \quad (19)$$

Sea $\varphi_\mu : M \rightarrow M$ sea una familia de difeomorfismos de clase C^k , $k \geq 4$, desdoblado genéricamente una tangencia homoclínica de codimensión uno en $\mu = 0$. Sea $p_0 \in M$ el punto fijo (o periódico) asociado a la tangencia; suponemos que los autovalores de $D\varphi_0(p_0)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \sigma$, satisfacen

$$0 < |\lambda_{m-1}| \leq \dots \leq |\lambda_1| < 1 < |\sigma| \text{ y } |\lambda_1\sigma| < 1$$

y $m = \dim M$.

Para tales familias probamos la existencia de la siguiente renormalización sin las hipótesis de linealización.

Teorema D. *Sea $\{\varphi_\mu\}_\mu$ como antes, y q un punto en la órbita de tangencia*

en $\mu = 0$. Existen, una constante $N > 0$, una sucesión de reparametrizaciones y transformaciones de coordenadas μ -dependientes

$$\varphi_n(a; x, y) = (\mu = \mu(a, n), \varphi_{a,n}(x, y))$$

tales que:

i) para conjuntos compactos K en $(a; x, y)$ -espacio, $\varphi_n(K) \rightarrow (0; q)$ cuando $n \rightarrow \infty$;

ii) los dominios de las aplicaciones

$$(a; x, y) \rightarrow (a; \Phi_{a,n}(x, y) = \varphi_{a,n}^{-1} \circ \varphi_{\mu}^{n+N} \circ \varphi_{a,n}(x, y))$$

convergen, cuando $n \rightarrow \infty$, a $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m$; y para cada $a \in J$, intervalo compacto, $\Phi_{a,n}$ converge en la topología C^{k-4} sobre partes compactas a la aplicación cuadrática $\Phi_a(x, y) = (0^{m-1}, 1 - ay^2)$.

En la demostración del Teorema D usaremos cambios de coordenadas μ -dependientes especiales, que permitiran eliminar algunos términos "resonantes" en la expresión local del difeomorfismo en una vecindad del punto fijo.

Lema 3.3. Sea $\varphi_{\mu} : U \subset \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}$ una familia de difeomorfismos de clase C^k , $k \geq 4$, teniendo al origen como una silla hiperbólica de índice s . Existe un cambio de coordenadas μ -dependientes de clase C^{k-1} en la que la familia tiene la expresión local

$$\varphi_{\mu}(x, y) = (A_{\mu}\xi + f_{\mu}(\xi, \eta), \sigma_{\mu}\eta + \eta^2(g_{\mu}(\xi, \eta), \xi)); \quad (20)$$

donde

- i) A_{μ} es un operador lineal en \mathbf{R}^s con $\|A_{\mu}\| \leq \lambda < 1$ y $\sigma_{\mu} = \sigma > 1$;
- ii) f_{μ} es C^{k-1} donde

$$Df_{\mu}(0^s, 0), f_{\mu}(0^s, \eta) \text{ y } \frac{\partial^j f_{\mu}}{\partial \eta^j}(0^s, \eta) \text{ para } j = 1, \dots, k-1$$

son nulas;

- iii) g_{μ} es C^{k-4} y $g_{\mu}(0^s, 0) = 0$.

Demostración: Cf. Lema 1 en [GS]. \square

Demostración del Teorema D: Sean (ξ, η) las coordenadas μ -dependientes de clase C^{k-1} en la que la familia es como en (20).

Sean $r = (\xi_0, 0) \in W_{loc}^s(p_0) \cap V$ y $q = (0^s, \eta_0) \in W_{loc}^u(p_0) \cap V$ puntos en la órbita de tangencia, V es el dominio de las coordenadas; sea $N \geq 1$ un entero tal que $\varphi_\mu^N(q) = r$. Entonces, para μ, ξ y η suficientemente pequeños $\varphi_\mu^N(\xi, \eta + \eta_0) \in V$; por tanto, salvo reparametrizaciones y un cambio afin de coordenadas,

$$\varphi_\mu^N(\xi, \eta + \eta_0) = (q + B\eta + H_1(\mu, \xi, \eta), \mu + C\xi + c\eta^2 + H_2(\mu, \xi, \eta)),$$

donde

$$H_1, \partial_\eta H_1, \partial_\mu H_1, \partial_{\eta\eta} H_1, H_2, \partial_\xi H_2, \partial_\mu H_2, \partial_{\mu\eta} H_2 \text{ y } \partial_{\mu\mu} H_2$$

se anulan en $\mu = 0, \xi = 0^s$ y $\eta = 0$; $B \in \mathbf{R}^s - \{0^s\}$, $C \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^s, \mathbf{R})$ y $c < 0$ (el caso $c > 0$ es similar). En estas condiciones $\varphi_\mu^N(q)$ es tal que la η -coordenada, μ , es un máximo local restringido a $W^u(p_\mu)$.

Sea $V_0 = \{(\xi, \eta) : \|\xi - \xi_0\| \leq \epsilon_0, |\eta - \eta_0| \leq \epsilon_1\}$ tal que para n grande, μ, ϵ_0 y ϵ_1 pequeños, y $(\xi, \eta) \in V_0$ están definidas las μ -dependientes variables de Sil'nikov $x_{\mu,n}$ and $y_{\mu,0}$.

Definimos la sucesión de re-escalamientos y reparametrizaciones

$$\Theta_n(a; x, y) = (\mu = \mu(a, n), \Theta_{a,n}(x, y)),$$

donde

$$\mu = -\frac{a}{c}\sigma^{-2n} + \eta_0\sigma^{-n} - Cx_{\mu,n}(\xi_0, \eta_0; n) +$$

$$\sum_{\ell=1}^n \sigma^{-\ell} y_{\mu,\ell-1}^2(\xi_0, \eta_0; n) (g_\mu(x_{\mu,\ell-1}(\xi_0, \eta_0; n), y_{\mu,\ell-1}(\xi_0, \eta_0; n)), x_{\mu,\ell-1}(\xi_0, \eta_0; n));$$

y $\Theta_{a,n}(x, y) = (\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0)$, siendo que $\alpha_n = \sigma^{-n}\omega^n$ con $1 < \omega < \min(\sigma, |\lambda_1\sigma|^{-1})$ y $\beta_n = -\frac{a}{c}\sigma^{-n}$.

Es claro que para $a \in J$ y n grande, $\Theta_{a,n}(x, y) \in V_0$. Si

$$\varphi_n(a; x, y) = (\mu; \varphi_{a,n}(x, y) = \Psi_{\mu,n}^u \circ \Theta_{a,n}(x, y)); \Psi_{\mu,n}^u(x, y) = (x_{\mu,n}(x, y; n), y)$$

entonces, $\varphi_n(K) \rightarrow (0; q)$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada conjunto compacto en $(a; x, y)$.

Por otra parte, dado que

$$\varphi_\mu^n = \Psi_{\mu,n}^u \circ (\Psi_{\mu,n}^s)^{-1} \text{ con } \Psi_{\mu,n}^s(x, y) = (x, y_{\mu,0}(x, y; n))$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_{a,n}(x, y) &= \Theta_{a,n}^{-1} \circ (\Psi_{\mu,n}^s)^{-1} \circ \varphi_\mu^N \circ \Psi_{\mu,n}^u \circ \Theta_{a,n}(x, y) \\ &= (\alpha_n^{-1}(\xi_a(x, y) - \xi_0), \beta_n^{-1}(\eta_a(x, y) - \eta_0)), \end{aligned}$$

donde

$$\xi_a(x, y) = \xi_0 + \beta_n B y + H_1(\mu, x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n), \beta_n y); \quad (21)$$

y η_a es dado implícitamente por

$$y_{\mu,0}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y); n) = \sigma^{-n} \eta_a(x, y) - G_{\mu,n}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y); n) \quad (22)$$

y

$$\begin{aligned} y_{\mu,0}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y); n) &= \mu + c\beta_n^2 y^2 + C x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n) \quad (23) \\ &\quad + H_2(\mu, x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n), \beta_n y); \end{aligned}$$

con

$$G_{\mu,n}(\xi, \eta) = \sum_{\ell=1}^n \sigma^{-\ell} y_{\mu,\ell-1}^2(\xi, \eta; n) (g_\mu(x_{\mu,\ell-1}(\xi, \eta; n), y_{\mu,\ell-1}(\xi, \eta; n)), x_{\mu,\ell-1}(\xi, \eta; n));$$

obviamente $G_{\mu,n}$ is C^{k-4} .

Como H_1 , $\partial_\eta H_1$ y $\partial_\mu H_1$ se anulan en $\mu = 0$, $\xi = 0^s$ y $\eta = 0$, entonces (19) y (21) implican

$$\|\xi_a(\cdot, \cdot) - \xi_0\|_{k-4} \leq K_1 \sigma^{-n}, \quad (24)$$

para alguna constante $K_1 > 0$. Luego, $\|\alpha_n^{-1}(\xi_a(\cdot, \cdot) - \xi_0)\|_{k-4}$ converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente sobre compactos.

De la definición de μ , (22) y (23) sigue:

$$\begin{aligned} \beta_n^{-1}(\eta_a(x, y) - \eta_0) &= 1 - a y^2 + \beta_n^{-1} \sigma^n C(x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n) \\ &\quad - x_{\mu,n}(\xi_0, \eta_0; n)) - \beta_n^{-1} \sigma^n (G_{\mu,n}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)) - G_{\mu,n}(\xi_0, \eta_0)) \\ &\quad + \beta_n^{-1} \sigma^n H_2(\mu, x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n), \beta_n y). \end{aligned}$$

Veamos que

$$\|\beta_n^{-1}(\eta_a(\cdot, \cdot) - \eta_0) - (1 - ay^2)\|_{k-4} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

uniformemente sobre compactos.

Dado que $H_2, \partial_\xi H_2, \partial_\eta H_2, \partial_\mu H_2, \partial_{\mu\mu} H_2, \partial_{\mu\eta} H_2$, y $\partial_{\eta\eta} H_2$ se anulan en $\mu = 0, \xi = 0^s$ y $\eta = 0$, $\mu = O(\sigma^{-n})$ y $\sigma^{2n} \lambda_1^n \alpha_n < 1$ entonces, para cualquier multi-índice α en (x, y) con $0 \leq |\alpha| \leq k - 4$:

$$\begin{aligned} & \sigma^{2n} \|\partial^\alpha (x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n) - x_{\mu,n}(\xi_0, \eta_0; n))\| \text{ y} \\ & \sigma^{2n} \|\partial^\alpha (H_2(\mu, x_{\mu,n}(\alpha_n x + \xi_0, \beta_n y + \eta_0; n), \beta_n y))\| \end{aligned}$$

converge a cero sobre partes compacta cuando $n \rightarrow \infty$.

Estimimos ahora la C^{k-4} -norma de

$$\tilde{G}_{\mu,n}(x, y) = G_{\mu,n}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)) - G_{\mu,n}(\xi_0, \eta_0).$$

Es fácil verificar mediante un cálculo elemental que en V_0 tenemos una constante $K_2 > 0$ tal que para todo multi-índice α como antes

$$\|\partial^\alpha G_{\mu,n}(\cdot, \cdot)\| \leq K_2 \sigma^{-n}.$$

En particular, para alguna constante $K_3 > 0$

$$\|\tilde{G}_{\mu,n}\| \leq K_3 \sigma^{-2n} \min(\|\xi_a(\cdot, \cdot) - \xi_0\|, \|\eta_a(\cdot, \cdot) - \eta_0\|).$$

Más aun, de (21), (22) y (23)

$$\|\eta_a(\cdot, \cdot) - \eta_0\| \leq K_3 \sigma^{-n}.$$

En consecuencia, de (24)

$$\|\tilde{G}_{\mu,n}\| \leq K_4 \sigma^{-3n}, \text{ para alguna constante } K_4 > 0.$$

Sea α cualquier multi-índice como arriba, entonces

$$\begin{aligned} & \partial^\alpha \tilde{G}_{\mu,n}(x, y) = \\ & = \sum_{j=1}^{|\alpha|} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=j} \frac{\partial^j}{\partial \xi^{\beta_1} \partial \eta^{\beta_2}} G_{\mu,n}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)) h_{\beta_1, \beta_2}(x, y); \end{aligned}$$

donde h_{β_1, β_2} son polinomios homogéneos de grado j en $\partial^\gamma \xi_a(x, y)$ y $\partial^\gamma \eta_a(x, y)$ con $1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|$. En efecto, cada monomio de h_{β_1, β_2} es del tipo $X_{i_1}^{\gamma_1} \cdots X_{i_j}^{\gamma_j}$, donde $\sum \gamma_k = \alpha$, $|\beta_1| = \#\{i_k = 1\}$, $|\beta_2| = \#\{i_k = 2\}$ y

$$X_\ell^\gamma = \begin{cases} \partial^\gamma \xi_a(x, y) & \text{si } \ell = 1, y \\ \partial^\gamma \eta_a(x, y) & \text{si } \ell = 2 \end{cases}$$

Para cada $i = 0, \dots, n$ introducimos la siguiente notación:

$$x_\mu^i(x, y; n) = x_{\mu, i}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)), y$$

$$y_\mu^i(x, y; n) = y_{\mu, i}(\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)).$$

Obviamente son satisfechas

$$x_\mu^{i+1}(x, y; n) = A_\mu x_\mu^i(x, y; n) + f_\mu(x_\mu^i(x, y; n), y_\mu^i(x, y; n));$$

$$y_\mu^{i+1}(x, y; n) = \sigma y_\mu^i(x, y; n)$$

$$+ (y_\mu^i(x, y; n))^2 (g_\mu(x_\mu^i(x, y; n), y_\mu^i(x, y; n)), x_\mu^i(x, y; n));$$

and $x_\mu^0(x, y; n) = \xi_a(x, y)$, $y_\mu^n(x, y; n) = \eta_a(x, y)$.

Ahora es fácil chequear, usando recurrencia y cálculo elemental, que para cada multi-índice α como antes y alguna constante $K_5 > 0$:

$$\|\partial^\alpha x_\mu^i(x, y; n)\| \leq K_5 \sigma^{-n}, y$$

$$\|\partial^\alpha y_\mu^i(x, y; n)\| \leq K_5 \sigma^{-2n+i} \text{ for } i = 0, \dots, n.$$

En particular

$$\|\partial^\alpha \eta_a(x, y)\| \leq K_5 \sigma^{-n}.$$

Así, $\|\tilde{G}_{\mu, n}(\cdot, \cdot)\|_{k-4} \leq K_6 \sigma^{-3n}$ para alguna constante positiva K_6 .

En este sentido, concluimos que $\beta_n^{-1}(\eta_a(x, y) - \eta_0)$ converge en la topología C^{k-4} en partes compactas a la familia cuadrática $h_a(y) = 1 - ay^2$. Luego, la demostración del teorema está completa. \square

3.2 Persistencia de Tangencias

Ahora estamos en posición de extender los resultados sobre la abundancia, desde el punto de vista topológico, de difeomorfismos con coexistencia de infinitos pozos (caso de codimensión uno) y la versión parametrizada de este teorema. Tales extensiones están contenidas en los Teoremas A y B establecidos en la introducción.

Demostración del Teorema A: Comenzamos considerando pequeñas perturbaciones C^∞ de φ tales que el perturbado, ϕ , tiene un punto fijo hiperbólico P cuyos autovalores son como en (1), satisfacen condiciones para C^6 -linealización y la tangencia entre $W^s(P)$ y $W^u(P)$ es no degenerada. Sea $\{\phi_\mu\}_\mu$ cualquier familia a un parámetro con $\phi_0 = \phi$ y satisfaciendo las condiciones genéricas del Teorema C. De la Observación 2.1 tenemos una sucesión de intervalos I_n próximos a $\mu = 0$ y valores $\mu_n \in I_n$ con $\mu_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que, ϕ_{μ_n} tiene un punto periódico hiperbólico P_{μ_n} de período $n + N$, para algún $N \geq 1$, de índice s y teniendo una expansión unidimensional débil en $W^u(P_{\mu_n})$. Además, las variedades estable e inestable de P_{μ_n} tienen una órbita de tangencia parabólica. Asociado a P_{μ_n} existe una variedad centro-estable local de codimensión $u - 1$, de clase C^6 y normalmente expansiva, $u + s = \dim M$, tal que en $W_{loc}^{cs}(P_{\mu_n})$ existe una tangencia homoclínica de codimensión uno y seccionalmente disipativa relativa a P_{μ_n} . Debido a la variación continua de las variedades centro-estables, para n grande, la familia $\{\phi_\mu\}_{\mu \in I_n}$ restringida a $W_{loc}^{cs}(P_\mu)$ desdobra genéricamente esta tangencia homoclínica.

Sea \mathcal{U}_n una vecindad de ϕ_{μ_n} en la cual las continuaciones analíticas de P_{μ_n} y $W_{loc}^{cs}(P_{\mu_n})$ están definidas. Para cada $\Theta \in \mathcal{U}_n$ tenemos una aplicación $h_\Theta : Q \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{u-1}$, Q un conjunto abierto, tal que el gráfico de h_Θ es $W_{loc}^{cs}(P_\Theta)$; estas aplicaciones varían continuamente en Θ . Denotamos por $\tilde{\Theta}$ la representación de Θ^{n+N} en las coordenadas de $W_{loc}^{cs}(P_\Theta)$ dadas por h_Θ . Luego, la familia $\{\tilde{\phi}_\mu\}_{\mu \in I_n}$ desdobra genéricamente la tangencia homoclínica seccionalmente disipativa y codimensión uno en $\mu = \mu_n$ asociada al punto fijo P_{μ_n} . Entonces, existe un conjunto abierto de tangencias homoclínicas persistentes $\tilde{\mathcal{U}}_n$ arbitrariamente próximas a $\tilde{\phi}_{\mu_n}$ y un conjunto residual $\tilde{\mathcal{R}}_n \subset \tilde{\mathcal{U}}_n$ en el que cada difeomorfismo tiene infinitos pozos. Por tanto, el conjunto abierto $\mathcal{V}_n = \{\Theta \in \mathcal{U}_n : \tilde{\Theta} \in \tilde{\mathcal{U}}_n\}$ y el conjunto residual $\mathcal{R}_n = \{\Theta \in \mathcal{V}_n : \tilde{\Theta} \in \tilde{\mathcal{R}}_n\}$ satisfacen las condiciones del teorema. \square

Demostración del Teorema B: Con la notación anterior, para todo n suficientemente grande la familia de clase C^6 , $\{\tilde{\phi}_\mu\}_{\mu \in I_n}$, desdobra genéricamente una tangencia homoclínica seccionalmente disipativa de codimensión uno. Luego, del Teorema D y el resultado análogo de Palis-Viana, existen intervalos $J_n \subset I_n$ arbitrariamente próximo a μ_n y conjuntos residuales $N_n \subset J_n$ tales que para $\mu \in N_n$, $\tilde{\varphi}_\mu$ tiene infinitos pozos. Así, el difeomorfismo original φ_μ , $\mu \in I_n$, tiene infinitos sillas hiperbólicas de índice $s + 1$. \square

Referencias

- [AS] V.S. Afraimovic & L.P. Sil'nikov. On critical sets of Morse-Smale systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* **28** (1973), 179-212.
- [BC] M. Benedicks & L. Carleson. The dynamics of Hénon map. *Ann. of Math.* **133** (1991), 73-164.
- [GS] S.V. Gonchenco & L.P. Sil'nikov. Invariants of Ω -conjugacy of diffeomorphisms with a nongeneric homoclinic trajectory. *Ukr. Math. J.* **42** (1990) **2**, 134-140.
- [HP] M. Hirsch & C. Pugh. Stable manifolds and hyperbolic sets. Global Analysis. *Proc. Symp. Pure Math.* AMS **XIV** (1970), 133-163.
- [HPS] M. Hirsch & C. Pugh & M. Shub. *Invariant manifolds*. Lect. Notes Math. **583**. Springer-Verlag (1977).
- [M] J.C. Martín Rivas. Homoclinic bifurcations and cascades of period doubling bifurcations in higher dimension. Tesis IMPA y por aparecer.
- [MV] L. Mora & M. Viana. Abundance of strange attractors. Por aparecer en *Acta Math.*
- [N] S. Newhouse. The Abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES* **50** (1979), 101-151.
- [NPT] S. Newhouse & J. Palis & F. Takens. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES* **57** (1983), 7-71.

- [PT1] J. Palis & F. Takens. Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits. *Ann. of Math.* **125** (1987), 337-374.
- [PT] J. Palis & F. Takens. *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations, Fractal Dimensions and Infinitely many Attractors*. Cambridge University. Por aparecer.
- [PV] J. Palis & M. Viana. High Dimension Diffeomorphisms Displaying Infinitely Many Sinks. Por aparecer.
- [PY] J. Palis & J.C. Yoccoz. Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimensions. Por aparecer.
- [R] C. Robinson. Bifurcating infinitely many sinks. *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), 433-459.
- [S] S. Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space, II. *Amer. J. Math.* **80** (1958), 623-631.
- [T] F. Takens. Partially hyperbolic fixed points. *Topology.* **10** (1971), 133-147.
- [V] M. Viana. Strange attractors in higher dimensions. Tesis IMPA y por aparecer en *Bull. Braz. Math. Soc.* **24** (1993).
- [YA] J. Yorke & K. Alligood. Cascade of period doubling bifurcations: a prerequisite for horseshoes. *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* **9** (1983), 319-322.