UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

" EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DE UNA ECUACIÓN DE RICCATI. "

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Jenifer Cristina González Veriles.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Tutor: Dr. Francisco Montes de Oca.

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2009

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

" EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DE UNA ECUACIÓN DE RICCATI. "

Presentado por el ciudadano Br. Jenifer Cristina González Veriles. titular de la Cédula de Identidad Nº 16.769.887. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

[1] Aprobado ó Reprobado

A mi Padre Celestial, *por darme la sabiduria para culminar con éxito esta etapa de mi carrera.*

"Si a alguno de ustedes le falta sabiduría, pídasela a Dios, y él se la dará, pues Dios da a todos generosamente sin menospreciar a nadie".

Santiago 1 : 5

AGRADECIMIENTOS

- A Dios por darme la fortaleza y derramar de su gracia y favor sobre mi vida y por cumplir este anhelo de mi corazón, gracias Dios te amo.
- A mi amado esposo Elvi, por ser esa ayuda idonea que Dios me dio y ser ese apoyo en todo el transcurso de mi carrera.
- A mi amada hija Alexandra que estuvo conmigo en la realización de este trabajo siempre regalandome una sonrisa y motivandome a seguir adelante.
- A mi madre Cenaira por que con su esfuerzo y apoyo logramos culminar está etapa de mi carrera.
- A mis padres espírituales los Apóstoles José y Morela de Alavad y a la Pastora Patricia Céspedes por cada oración y ayuda que me han dado.
- A mi tutor Dr. Francisco Montes de Oca por orientarme en la realización de este trabajo.

“ EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DE UNA ECUACIÓN DE RICCATI. ”

RESUMEN

En este trabajo especial de grado se aborda el problema sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de una ecuación de Riccati sustentado en los artículos "**Existence and Stability of Periodic Solutions in a Riccati equation**" y "**Estudios Cualitativos de las Soluciones de la Ecuación de Crecimiento de Población con Cosecha** " de **Montes de Oca Francisco** y **Lazer Alan** respectivamente. El primer capítulo consta de los preliminares en el cual se realiza una introducción, se dan todas las definiciones y se enuncian con su respectiva demostración, los resultados fundamentales para el desarrollo de los artículos antes mencionado.

El segundo capítulo se centra en el desarrollo de manera detallada de los resultados expuestos en los artículos por Montes de Oca Francisco y Lazer Alan, utilizando las herramientas estudiadas en los cursos de Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos.

A continuación el resultado mas importante:

Dada la ecuación $\dot{x}(t) = a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - h(t)$ donde $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son funciones T$-$ periódicas, continuas y positivas. Supongamos que $h_M(t) < \frac{a_L^2}{4b_M}$
tenemos entonces que existen dos soluciones T$-$ periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $(x_1(t) > x_2(t))$. Por otra parte si $x(t)$ es una solución de la ecuación con

(i) $x(0) > x_1(0)$ entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es (β, ∞) con $\beta < 0$ y $\lim_{t\to\beta^+} x(t) = \infty$ y $\lim_{t\to\infty}(x(t) - x_1(t)) = 0$

(ii) $x_2(0) < x(0) < x_1(0)$ entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(-\infty, +\infty)$ con $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0$ y $\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - x(t)) = 0$

(iii) $0 < x(0) < x_2(0)$ entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(-\infty, \gamma)$ con $\gamma > 0$ y $\lim_{t\to\gamma^-} x(t) = -\infty$ y $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0$.

Índice

Introducción

Consideremos la Ecuación Diferencial de Riccati no Autónoma

$$x'(t) = a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - h(t) \tag{1}$$

donde las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son continuas, positivas y $T-$ períodica en $(-\infty, +\infty)$
Esta ecuación representa un módelo logístico de crecimiento poblacional sometido a los efectos de una cosecha periódica. Aquí $x(t)$ representa la población en el instante t, $a(t)$ representa la taza de crecimiento de la población, $b(t)$ mide el efecto de inhibición de la especie sobre si misma y $h(t)$ mide la taza de la cosecha.
En [5], Lazer cosideró el caso de la ecuación (1) donde las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son constantes positivas y $h(t)$ es una función continua, positiva y T- periódica. Lazer demostró que si se sastifacen las desigualdades

$$0 < h(t) < \frac{a^2}{4b}$$

entonces la ecuación diferencial (1) tiene dos soluciones T-periódicas , $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $(x_2(t) < x_1(t))$. una solución estable y una inestable.
En [3] Montes de Oca generaliza el resultado de Lazer en la forma siguiente consideró que las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son positivas, continuas y $T-$periódicas y demostró que si se sastiface la desigualdad.

$$h_M < \frac{a_L^2}{4b_M},$$

donde $h_M = max\{h(t) : t \in [0, T]\}$, $b_M = max\{b(t) : t \in [0, T]\}$
y $a_L = min\{a(t) : t \in [0, T]\}$ entonces existen dos soluciones $T-$periódicas de la ecuación (1) una de ellas estable y la otra inestable.
Se desarrollarán demostraciones rigurosas y detalladas de los resultados arriba mencionados, con el propósito de: Comprender y analizar el estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación de Riccati con coeficientes periódicos.

Capítulo 1

Preliminares

Esta primera parte del trabajo esta compuesta por definiciones, enunciados y pruebas necesarias para poder desarrollar los artículos [3] y [5]. Estos preliminares son extraidos de [1], [4], [7]y esto nos permitira que el trabajo sea autocontenido.

§1.1. Ecuación de Riccati

Los Teoremas planteados en esta sección presentan ciertos procedimientos para resolver la ecuación de Riccati que exigen el conocimiento previo de una o más soluciones particulares de esta ecuación. También se realiza el estudio de las soluciones de una ecuación de Riccati con coeficientes constantes. Desafortunadamente, no existe un método general que nos permita obtenerlas en el caso no autónomo. Para el desarrollo de está sección utilizamos la referencia [[4],sección 2].
Consideremos la ecuación general de Riccati

$$\dot{x} = -b(t)x^2 + a(t)x - h(t), \tag{1.1}$$

donde $a(t)$,$b(t)$,$h(t)$ son funciones continuas en algún intervalo de números reales.

Teorema **1.1.1.** *Si $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y x_p es una solución particular de (1.1) entonces cada solución $x(t)$ de (1.1) se puede escribir así:*

$$x = x_p + \frac{1}{w},$$

donde $w(t)$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\dot{w} + [a(t) - 2b(t)x_p(t)]w = b(t).$$

Demostración: Veamos que el cambio de variable dependiente:

$$x(t) = x_p(t) + \frac{1}{w(t)}$$

transforma la ecuación de Riccati (1.1) en una ecuación lineal de primer orden. En efecto:

$$\dot{x}(t) = (x_p(t) + \frac{1}{w(t)})' = \dot{x}_p(t) - \frac{\dot{w}(t)}{w^2(t)}$$

y

$$x^2(t) = (x_p(t) + \frac{1}{w(t)})^2 = x_p^2(t) + 2\frac{x_p(t)}{w(t)} + \frac{1}{w^2(t)}.$$

Introduciendo estas igualdades en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\dot{x}_p(t) - \frac{\dot{w}(t)}{w^2(t)} + b(t)x_p^2(t) - a(t)x_p(t) - \frac{a(t)}{w(t)} + h(t) = -2\frac{x_p(t)b(t)}{w(t)} - \frac{b(t)}{w^2(t)}.$$

Por ser x_p una solución particular de (1.1) tenemos que:

$$-\tfrac{\dot{w}(t)}{w^2(t)} - \tfrac{a(t)}{w(t)} = -2\tfrac{x_p(t)b(t)}{w(t)} - \tfrac{b(t)}{w^2(t)}.$$

Multiplicando por $w^2(t)$ se tiene la ecuación lineal de primer orden

$$-\dot{w}(t) - a(t)w(t) = -2b(t)x_p w(t) - b(t).$$

Por tanto w satisface la ecuación diferencial lineal:

$$\dot{w} + (a(t) - 2b(t)x_p)w = b(t).$$

TEOREMA **1.1.2.** *Si se conocen dos soluciones particulares x_1 y x_2 de (1.1) entonces la solución general de (1.1) está dada por:*

$$x(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)V(t)}{1 - V(t)},$$

donde $V(t)$ es solución de la ecuación diferencial lineal

$$\dot{V}(t) + [x_1(t) - x_2(t)]b(t)V(t) = 0.$$

Esto es,

$$V(t) = ke^{-\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s)-x_2(s))ds}.$$

Demostración: Sea $x(t)$ una solución de (1.1) tal que $x(t) \neq x_1(t)$ y $x(t) \neq x_2(t)$. Por unicidad podemos suponer que $x_1(t) < x_2(t) < x(t)$ para todo $t \in Dom x_1(t) \bigcap Dom x_2(t) \bigcap Dom x(t)$. Como

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1(t) - b(t)x_1^2(t) - h(t)$$

$$\dot{x}_2 = a(t)x_2(t) - b(t)x_2^2(t) - h(t)$$

$$\dot{x} = a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - h(t)$$

entonces

$$\dot{x} - \dot{x}_1 = a(t)(x - x_1) - b(t)(x^2 - x_1^2) = [a(t) - b(t)(x + x_1)](x - x_1)$$

y

$$\dot{x} - \dot{x}_2 = a(t)(x - x_2) - b(t)(x^2 - x_2^2) = [a(t) - b(t)(x + x_2)](x - x_2).$$

Así tenemos:

$$\frac{\dot{x} - \dot{x}_1}{x - x_1} = a(t) - b(t)(x + x_1)$$

y

$$\frac{\dot{x} - \dot{x}_2}{x - x_2} = a(t) - b(t)(x + x_2).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dot{x} - \dot{x}_1}{x - x_1} - \frac{\dot{x} - \dot{x}_2}{x - x_2} = -b(t)(x_1 - x_2).$$

O sea:

$$\tfrac{d}{dt} \ln \left[\frac{x - x_1}{x - x_2}\right] = -b(t)(x_1(t) - x_2(t)).$$

Integrando en ambos lados entre t_0 y t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{x(s) - x_1(s)}{x(s) - x_2(s)}\right] ds = -\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds.$$

Así,

$$\ln \left[\frac{(x(t) - x_1(t))}{(x(t) - x_2(t))} \frac{(x(t_0) - x_2(t_0))}{(x(t_0) - x_1(t_0))}\right] = -\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds.$$

Al aplicar exponencial en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\left[\frac{x(t) - x_1(t)}{x(t) - x_2(t)}\right] \left[\frac{x(t_0) - x_2(t_0)}{x(t_0) - x_1(t_0)}\right] = e^{-\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds}$$

ó

$$\frac{x(t) - x_1(t)}{x(t) - x_2(t)} = \frac{x(t_0) - x_1(t_0)}{x(t_0) - x_2(t_0)} e^{-\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds}.$$

Haciendo $V(t) = ke^{-\int_{t_0}^{t} b(s)(x_1(s)-x_2(s))ds}$, $k = \frac{x(t_0)-x_1(t_0)}{x(t_0)-x_2(t_0)}$ tenemos que:

$$\frac{x(t) - x_1(t)}{x(t) - x_2(t)} = V(t).$$

Despejando $x(t)$ nos queda:

$$x(t) = \frac{x_1 - x_2V(t)}{1 - V(t)},$$

donde V es solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{V}(t) + (x_1(t) - x_2(t))b(t)V(t) = 0.$$

§1.2. Modelo de Población Sometido a los Efectos de la Cosecha

El crecimiento de algunas poblaciones aisladas se puede formular en términos de la ecuación diferencial logística. Así, consideremos la situación donde miembros de la población son cosechados a una razón constante. Esto corresponde, por ejemplo, a una población de seres vivos, de la cual es removido un determinado número de ellos al año, por medio de cacería o cosecha. Si la rata de cosecha en unidades de tiempo es h, entonces el tamaño de la población está ahora gobernada por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax - bx^2 - h, \tag{1.2}$$

donde a, b y h son constantes positivas. Supondremos que la cosecha satisface la desigualdad

$$h < \frac{a^2}{4b}. \tag{1.3}$$

En este caso la ecuación diferencial es autónoma, es decir, el campo
$F(x) = ax - bx^2 - h$ es independiente del tiempo.

Teorema **1.2.1.** *Si las constantes a,b y h son positivas y si la cosecha h satisface la desigualdad $h < \frac{a^2}{4b}$ entonces la ecuación diferencial (1.2) tiene dos puntos de equilibrio: $\alpha_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4bh}}{2b}$ y $\alpha_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4bh}}{2b}$ con $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ y*

1. *Si $x(t)$ es una solución de (1.2) con $x(0) > \alpha_1$, entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(\delta, +\infty)$ con $-\infty < \delta < 0$ y*

$$\lim_{t\to\delta^+} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \alpha_1.$$

2. *Si $x(t)$ es una solución de (1.2) con $\alpha_2 < x(0) < \alpha_1$, entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(-\infty, \infty)$ y*

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \alpha_2, \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \alpha_1.$$

3. *Si $x(t)$ es una solución de (1.2) con $x(0) < \alpha_2$, entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(-\infty, \delta)$ con $0 < \delta < \infty$ y*

$$\lim_{t\to\delta^-} x(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = \alpha_2.$$

Demostración:

La hipótesis $h < \frac{a^2}{4b}$ implica que la ecuación $-bx^2 + ax - h = 0$ tiene raices reales dadas por:

$$\alpha_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bh}}{2b} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bh}}{2b}.$$

Como a,b y h son positivas entonces $0 < \alpha_2 < \alpha_1$.

Por el Teorema 1.1.2 la solución general de (1.2) está dada por:

$$x(t) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(t)}{1 - V(t)};$$

donde $V(t)$ es la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$\dot{V}(t) - (\sqrt{a^2 - 4bh})V = 0.$$

Por lo tanto $V(t) = V(0)e^{\lambda t}$, donde $\lambda = \sqrt{a^2 - 4bh} > 0$ y $V(0) = \dfrac{\alpha_2 - x(0)}{\alpha_1 - x(0)}$.

1. Sea x(t) una solución de (1.2) con $x(0) > \alpha_1$. Entonces

$$x(t) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}}$$

está definida excepto cuando $1 - V(0)e^{\lambda t} = 0$; es decir, $e^{\lambda t} = \frac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)}$.
$x(0) > \alpha_1$ implica que $1 > \frac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)} > 0$. Por lo tanto

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)}\right) < 0.$$

Existe $\delta = t < 0$ tal que la solución está definida en el intervalo $(\delta, +\infty)$. Por otra parte

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}} = \alpha_1$$

y

$$\lim_{t\to\delta^+} \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}} = +\infty.$$

2. Sea x(t) una solución de (1.2) con $\alpha_2 < x(0) < \alpha_1$. Entonces

$$x(t) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}}.$$

La condición inicial $\alpha_2 < x(0) < \alpha_1$ implica que $V(0) = \dfrac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)} < 0$. Por lo tanto $1 - V(0)e^{\lambda t} \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Así x(t) está definida en $(-\infty, \infty)$.
Observe que en este caso tenemos:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha_1 \qquad y \qquad \lim_{t \to -\infty} x(t) = \alpha_2.$$

3. Sea x(t) una solución de (1.2) con $x(0) < \alpha_2$ Entonces

$$x(t) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}}$$

está definida excepto cuando $1 - V(0)e^{\lambda t} = 0$; es decir, $e^{\lambda t} = \dfrac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)}$.
$x(0) < \alpha_2$ implica que $\dfrac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)} > 1$. Por lo tanto

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\alpha_1 - x(0)}{\alpha_2 - x(0)}\right) > 0$$

existe $\beta = t > 0$ tal que la solución está definida en el intervalo $(-\infty, \beta)$. Por otra parte

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}} = \alpha_2$$

y

$$\lim_{t \to \beta^-} \frac{\alpha_2 - \alpha_1 V(0)e^{\lambda t}}{1 - V(0)e^{\lambda t}} = -\infty.$$

Luego obtenemos el espacio fase que se indica en la Figura 1.1

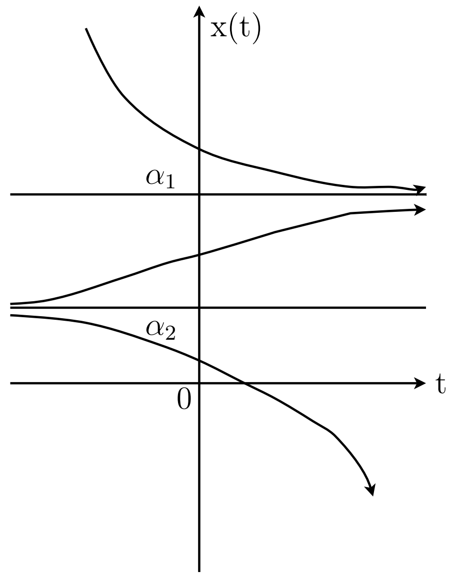

FIGURA 1.1: ESPACIO FASE $bh - \frac{a^2}{4} < 0$ Y $b > 0$

Observación 1. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \alpha_1$ implica que $x(t)$ está acotada en $[0, +\infty)$.

Observación 2. $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \alpha_2$ implica que $x(t)$ está acotada en $(-\infty, 0]$.

§1.3. Teorema de comparación entre dos ecuaciones escalares

TEOREMA **1.3.1.** *Sean D un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(t,y)$ y $g(t,y)$ funciones continuas $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones, f ó g, es localmente lipschitziana en D con respecto de la variable y. Sean y, z:$[a,b] \to \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$. Supongamos que se verifica*

$$g(t,y) \leq f(t,y)$$

en D, y que

$$z(a) \leq y(a)$$

entonces,

$$z(t) \leq y(t)$$

para todo $t \in [a,b]$.

Demostración: en [7]

TEOREMA **1.3.2.** *Sean D un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(t,y)$ y $g(t,y)$ funciones continuas $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones, f ó g, es localmente lipschitziana en D con respecto de la variable y. Sean y, z:$[b,a] \to \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$. Supongamos que se verifica*

$$g(t,y) \leq f(t,y)$$

en D, y que

$$y(a) \leq z(a)$$

entonces,

$$y(t) \leq z(t)$$

para todo $t \in [b,a]$.

Demostración en [7]

§1.4. Ecuación Diferencial T− Periódica

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad con \qquad f(t+T,x) = f(t,x), \tag{1.4}$$

$f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^1 en la variable x. Debido a la periodicidad de f, las soluciones de la ecuación (1.4) posee ciertas propiedades: las cuales son utiles para el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones. Para tomar ventaja de estas propiedades nosotros supondremos a través de esta sección que las soluciones de la ecuación (1.4) están definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Es fácil verificar, por sustitución directa, que si $x(t)$ es una solución de (1.4), entonces para cualquier entero k, $x(t+kT)$ es también una solución de (1.4).
Denotamos por $\varphi(t, t_0, x_0)$ la solución de la ecuación (1.4) a través del punto (t_0, x_0). La observación de arriba, más la unicidad de las soluciones de problemas con valor inicial, implican que

$$\varphi(t+T, t_0+T, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0) \tag{1.5}$$

$$\varphi(t+T, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0+T, t_0, x_0)). \tag{1.6}$$

DEFINICIÓN **1.4.1.** Una solución $\varphi(t, t_0, x_0)$ de la ecuación diferencial T− periódica (1.4) es una solución T− periódica si

$$\varphi(t+T, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0) \qquad \text{para todo } t.$$

Si, además, $\varphi(t+\tau, t_0, x_0) \neq \varphi(t, t_0, x_0)$ para cualquier $0 < \tau < T$, entonces T es llamado el período minimal.

§1.5. Función de Poincaré

En esta sección la función $f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, de clase C^1 en la variable x y $f(t+T, x) = f(t, x)\ \forall t, x \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN **1.5.1.** La función de Poincaré (función periódica) de la ecuación diferencial $T-$ periódica (1.4) es la función escalar

$$\Pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad x_0 \longrightarrow \varphi(T, 0, x_0).$$

La función de Poincaré toma el valor inicial x_0 en $t_0 = 0$, para el valor de la solución $\varphi(t, 0, x_0)$ en $t = T$. De esta manera resulta de la ecuación (1.6) que la $k-$ésima iteración de x_0 bajo Π está dada por

$$\Pi^k(x_0) = \varphi(kT, 0, x_0).$$

LEMA **1.5.1.** *$\varphi(t, 0, x_0)$ es una solución $T-$ periódica de la ecuación diferencial (1.4) si y sólo si $\varphi(0, 0, x_0) = \varphi(T, 0, x_0)$; esto es, $\Pi(x_0) = x_0$.*

Demostración: ver [[1],lema 4.8,pág.114].

TEOREMA **1.5.1.** *Si $\varphi(t, 0, x_0)$ es la solución de la ecuación diferencial $T-$ periódica $\dot{x} = f(t, x)$, con $\varphi(0, 0, x_0) = x_0$. Entonces $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, 0, x_0)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial para la ecuación diferencial*

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, 0, x_0))z, \qquad z(0) = 1, \tag{1.7}$$

esto es,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, 0, x_0) = exp\left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, 0, x_0))ds\right]. \tag{1.8}$$

Demostración: ver [[1],lema 4.20,pág.129].

TEOREMA **1.5.2.** *Sea $\varphi(t,0,x_0)$ la solución de la ecuación diferencial $T-$ periódica $\dot{x} = f(t,x)$, con $\varphi(0,0,x_0) = x_0$ y Π la función de Poincaré. Entonces la derivada de la función de Poincaré está dada por:*

$$\Pi'(x_0) = exp\left[\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,0,x_0))dt\right]. \tag{1.9}$$

Demostración: Ver [[1],lema 4.21, pág. 130].

TEOREMA **1.5.3.** *Sea $\varphi(t,0,x_0)$ una solución $T-$ periódica de la ecuación diferencial $T-$ periódica (1.4) y defina*

$$a_0 \equiv \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,0,x_0))dt.$$

Entonces

1. *$\varphi(t,0,x_0)$ es asintoticamente estable si $a_0 < 0$.*

2. *$\varphi(t,0,x_0)$ es inestable si $a_0 > 0$.*

Demostración: Ver [[1], teorema 4.22, pág. 130].

Capítulo 2

Existencia y Estabilidad de Soluciones Periódicas

En este capítulo desarrollaremos de manera detallada los resultados expuestos en los artículos [3] y [5] por Lazer, Alan y Montes de Oca, Francisco respectivamente. Consideremos la ecuación no$-$autónoma de Riccati

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - h(t), \tag{2.1}$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $h(t)$ son funciones continuas, positivas y T$-$periódicas en $(-\infty, +\infty)$.
Dada una función $f(t)$, T$-$ periódica y continua. Denotamos por
$f_L(t) = \text{mín}\{f(t) : t \in [0, T]\}$ y $f_M = \text{máx}\{f(t) : t \in [0, T]\}$.
La ecuación (2.1) representa un modelo logístico de crecimiento poblacional sometido a los efectos de una cosecha periódica. Aquí $x(t)$ representa la población en el instante t, $a(t)$ representa la taza de crecimiento de la población, $b(t)$ mide el efecto de inhibición de la especie sobre si misma y $h(t)$ mide la taza de la cosecha.
Definamos como ecuación diferencial superior e inferior de (2.1), respectivamente a:

$$\dot{y}(t) = a_M y(t) - b_L y^2(t) - h_L. \tag{2.2}$$

$$\dot{z}(t) = a_L z(t) - b_M z^2(t) - h_M. \tag{2.3}$$

Note que a_L, a_M, b_L, b_M, h_L y h_M son constantes positivas.
Consideremos la desigualdad:

$$h_M < \frac{a_L^2}{4b_M}. \tag{2.4}$$

Como $h_L < h_M$ y $a_L^2 b_L < a_M^2 b_M$ siempre se cumple, entonces (2.4) implica que

$$h_L < \frac{a_M^2}{4b_L}. \tag{2.5}$$

Las desigualdades (2.4) y (2.5) implican que las ecuaciones de Riccati (2.2) y (2.3) tienen como puntos de equilibrio a: α_{M_1},α_{M_2} y α_{L_1},α_{L_2} respectivamente, con:

$$\begin{aligned}
\alpha_{M_1} &= \frac{a_M + \sqrt{a_M^2 - 4b_L h_L}}{2b_L} \\
\alpha_{M_2} &= \frac{a_M - \sqrt{a_M^2 - 4b_L h_L}}{2b_L} \\
\alpha_{L_1} &= \frac{a_L + \sqrt{a_L^2 - 4b_M h_M}}{2b_M} \\
\alpha_{L_2} &= \frac{a_L - \sqrt{a_L^2 - 4b_M h_M}}{2b_M}.
\end{aligned}$$

Las siguientes desigualdades $0 < \alpha_{M_2} < \alpha_{L_2} < \alpha_{L_1} < \alpha_{M_1}$, se satisfacen; en efecto, $\alpha_{L_2} < \alpha_{L_1}$ y $\alpha_{M_2} < \alpha_{M_1}$ son evidentes. Probemos que $\alpha_{M_2} < \alpha_{L_2}$ y $\alpha_{L_1} < \alpha_{M_1}$. Consideremos $F_M(x) = a_M x - b_L x^2 - h_L$ y $F_L(x) = a_L x - b_M x^2 - h_M$ los campos asociados a (2.2) y (2.3) respectivamente, note que estos campos son parábolas que abren hacia abajo cuyos vértices son $V_M = \left(\frac{a_M}{2b_L}, \frac{a_M^2}{4b_L} - h_L\right)$ y $V_L = \left(\frac{a_L}{2b_M}, \frac{a_L^2}{4b_M} - h_M\right)$ respectivamente, estos vertices estan en el primer cuadrante; además $V_M > V_L$ y $F_M(x) > F_L(x)$. Por lo tanto, $\alpha_{M_2} < \alpha_{L_2}$ y $\alpha_{L_1} < \alpha_{M_1}$.

Observación 3. Si tomamos $\alpha_{L_2} < \epsilon < \alpha_{L_1}$ y consideramos el campo asociado a (2.3) $F_L(z) = a_L z - b_M z^2 - h_M = -b_M(z - \alpha_{L_1})(z - \alpha_{L_2})$ entonces
$F_L(\epsilon) = a_L\epsilon - b_M\epsilon^2 - h_M = -b_M(\epsilon - \alpha_{L_1})(\epsilon - \alpha_{L_2}) > 0.$
Luego, por comparación

$$a(t)\epsilon - b(t)\epsilon^2 - h(t) \geq a_L\epsilon - b_M\epsilon^2 - h_M = F_L(\epsilon) > 0.$$

Por lo tanto,

$$a(t)\epsilon - b(t)\epsilon^2 - h(t) > 0 \text{ para todo } t.$$

Observación 4. Si tomamos $k_1 > \alpha_{M_1}$ y consideramos el campo asociado a (2.2) $F_M(y) = a_M y - b_L y^2 - h_L = -b_L(y - \alpha_{M_1})(y - \alpha_{M_2})$ entonces
$F_M(k_1) = a_M k_1 - b_L k_1^2 - h_L = -b_L(k_1 - \alpha_{M_1})(k_1 - \alpha_{M_2}) < 0.$
Luego, por comparación

$$a(t)k_1 - b(t)k_1^2 - h(t) \leq a_M k_1 - b_L k_1^2 - h_L = F_M(k_1) < 0.$$

Por lo tanto,

$$a(t)k_1 - b(t)k_1^2 - h(t) < 0 \text{ para todo } t.$$

Observación 5. Si tomamos $0 < k_2 < \alpha_{M_2}$ y consideramos el campo asociado a (2.2) $F_M(y) = a_M y - b_L y^2 - h_L = -b_L(y - \alpha_{M_1})(y - \alpha_{M_2})$ entonces
$F_M(k_2) = a_M k_2 - b_L k_2^2 - h_L = -b_L(k_2 - \alpha_{M_1})(k_2 - \alpha_{M_2}) < 0$.
Luego, por comparación

$$a(t)k_2 - b(t)k_2^2 - h(t) \leq a_M k_2 - b_L k_2^2 - h_L = F_M(k_2) < 0.$$

Por lo tanto,

$$a(t)k_2 - b(t)k_2^2 - h(t) < 0 \text{ para todo } t.$$

Lema **2.0.2.** *Si $x_L(t,\epsilon)$ es la solución de (2.3) con $x_L(0,\epsilon) = \epsilon$ entonces $x_L(t,\epsilon) > \epsilon$ para todo $t > 0$.*

Demostración:
Por el Teorema 1.2.1 parte 2 $x_L(t,\epsilon)$ está definida en $(-\infty,+\infty)$. Como $x_L(0,\epsilon) = \epsilon$ y $F_L(\epsilon) > 0$ entonces

$$\begin{aligned} x_L'(0,\epsilon) &= a_L x_L(0,\epsilon) - b_M x_L^2(0,\epsilon) - h_M \\ &= a_L\epsilon - b_M\epsilon^2 - h_M \\ &= F_L(\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Por la continuidad de x_L' tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $x_L'(t,\epsilon) > 0$ para todo $t \in (0,\delta]$. Así, $x_L(t)$ es creciente en $(0,\delta]$ y por lo tanto, $x_L(t,\epsilon) > \epsilon$ para todo $t \in (0,\delta]$. Supongamos por reducción al absurdo que $x_L(t,\epsilon)$ no es mayor que ϵ para todo $t > 0$, entonces existe $t_1 > \delta$ tal que $x_L(t_1,\epsilon) = \epsilon$. Por el teorema de Rolle existe $t_2 \in (0,t_1)$ tal que $x_L'(t_2,\epsilon) = 0$ implica que $a_L x_L(t_2,\epsilon) - b_M x_L^2(t_2,\epsilon) - h_M = 0$; es decir, $x_L(t_2,\epsilon)$ es un punto de equilibrio. Por lo tanto, $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ ó
$x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_2}$. Si $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ entonces por unicidad $x_L(t,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ para todo t, en particular $x_L(0,\epsilon) = \epsilon = \alpha_{L_1}$, lo cual produce una contradicción, ya que $\epsilon < \alpha_{L_1}$. Similarmente, si $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_2}$ entonces por unicidad $x_L(t,\epsilon) = \alpha_{L_2}$ para todo t, en particular $x_L(0,\epsilon) = \epsilon = \alpha_{L_2}$, lo cual produce una contradicción, ya que $\alpha_{L_2} < \epsilon$.
Así,

$$x_L(t,\epsilon) > \epsilon \qquad \text{para todo } t > 0.$$

Lema **2.0.3.** *Si $x_M(t,k_1)$ es la solución de (2.2) con $x_M(0,k_1)=k_1$ entonces $x_M(t,k_1)<k_1$ para todo $t>0$.*

Demostración:
Por el Teorema 1.2.1 parte 1 $x_M(t,k_1)$ está definida en $(\gamma,+\infty)$ con $-\infty<\gamma<0$. Como $x_M(0,k_1)=k_1$ y $F_M(k_1)<0$ entonces

$$\begin{aligned} x'_M(0,k_1) &= a_M x_M(0,k_1) - b_L x_M^2(0,k_1) - h_L \\ &= a_M k_1 - b_L k_1^2 - h_L \\ &= F_M(k_1) < 0. \end{aligned}$$

Por la continuidad de x'_M tenemos que existe $\delta>0$ tal que $x'_M(t,k_1)<0$ para todo $t\in(0,\delta]$. Así, $x_M(t)$ es decreciente en $(0,\delta]$ y por lo tanto, $x_M(t,k_1)<k_1$ para todo $t\in(0,\delta]$. Supongamos por reducción al absurdo que $x_M(t,k_1)$ no es menor que k_1 para todo $t>0$ entonces existe $t_1>\delta$ tal que $x_M(t_1,k_1)=k_1$. Por el teorema de Rolle existe $t_2\in(0,t_1)$ tal que $x'_M(t_2,k_1)=0$ implica que

$$a_M x_M(t_2,k_1) - b_L x_M^2(t_2,k_1) - h_L = 0;$$

es decir, $x_M(t_2,k_1)$ es un punto de equilibrio. Por lo tanto, $x_M(t_2,k_1)=\alpha_{M_1}$ ó $x_M(t_2,k_1)=\alpha_{M_2}$. Si $x_M(t_2,k_1)=\alpha_{M_1}$ entonces por unicidad $x_M(t_2,k_1)=\alpha_{M_1}$ para todo t, en particular $x_M(0,k_1)=k_1=\alpha_{M_1}$, lo cual produce una contradicción absoluta, ya que $k_1>\alpha_{M_1}>\alpha_{M_2}$. Es decir,que no es necesario estudiar el caso en que $x_M(t_2,k_1)=\alpha_{M_2}$ puesto que, para que esto ocurra la solución corta o debe pasar por α_{M_1}. Así,

$$x_M(t,k_1)<k_1 \text{ para todo } t>0.$$

Lema **2.0.4.** *Si $x_L(t,\epsilon)$ es la solución de (2.3) con $x_L(0,\epsilon)=\epsilon$ entonces $x_L(t,\epsilon)<\epsilon$ para todo $t<0$.*

Demostración:
Por el Teorema 1.2.1 parte 2 $x_L(t,\epsilon)$ está definida en $(-\infty,+\infty)$. Como $x_L(0,\epsilon)=\epsilon$ y $F_L(\epsilon)>0$ entonces

$$\begin{aligned} x'_L(0,\epsilon) &= a_L x_L(0,\epsilon) - b_M x_L^2(0,\epsilon) - h_M \\ &= a_L\epsilon - b_M\epsilon^2 - h_M \\ &= F_L(\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Por la continuidad de x'_L tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $x'_L(t,\epsilon) > 0$ para todo $t \in [-\delta, 0)$. Así, $x_L(t)$ es creciente en $[-\delta, 0)$ y por lo tanto, $x_L(t,\epsilon) < \epsilon$ para todo $t \in [-\delta, 0)$. Supongamos por reducción al absurdo que $x_L(t,\epsilon)$ no es menor que ϵ para todo $t < 0$ entonces existe $t_1 < -\delta$ tal que $x_L(t_1,\epsilon) = \epsilon$. Por el teorema de Rolle existe $t_2 \in (t_1, 0)$ tal que $x'_L(t_2,\epsilon) = 0$ implica que $a_L x_L(t_2,\epsilon) - b_M x_L^2(t_2,\epsilon) - h_M = 0$; es decir, $x_L(t_2,\epsilon)$ es un punto de equilibrio. Por lo tanto, $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ ó $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_2}$. Si $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ entonces por unicidad $x_L(t,\epsilon) = \alpha_{L_1}$ para todo t, en particular $x_L(0,\epsilon) = \epsilon = \alpha_{L_1}$, lo cual produce una contradicción, ya que $\epsilon < \alpha_{L_1}$. Similarmente, si $x_L(t_2,\epsilon) = \alpha_{L_2}$ entonces por unicidad $x_L(t,\epsilon) = \alpha_{L_2}$ para todo t, en particular $x_L(0,\epsilon) = \epsilon = \alpha_{L_2}$, lo cual produce una contradicción, ya que $\alpha_{L_2} < \epsilon$. Así,

$$x_L(t,\epsilon) < \epsilon \qquad \text{para todo } t < 0.$$

LEMA **2.0.5.** *Si $x_M(t,k_2)$ es la solución de (2.2) con $x_M(0,k_2) = k_2$ entonces $x_M(t,k_2) > k_2$ para todo $t < 0$.*

Demostración:

Por el Teorema 1.2.1 parte 3 $x_M(t,k_2)$ está definida en $(-\infty, \gamma)$ con $0 < \gamma < \infty$. Como $x_M(0,k_2) = k_2$ y $F_M(k_2) < 0$ entonces

$$\begin{aligned} x'_M(0,k_2) &= a_M x_M(0,k_2) - b_L x_M^2(0,k_2) - h_L \\ &= a_M k_2 - b_L k_2^2 - h_L \\ &= F_M(k_2) < 0. \end{aligned}$$

Por la continuidad de x'_M tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $x'_M(t,k_2) < 0$ para todo $t \in [-\delta, 0)$. Así, $x_M(t)$ es decreciente en $[-\delta, 0)$ y por lo tanto, $x_M(t,k_2) > k_2$ para todo $t \in [-\delta, 0)$. Supongamos por reducción al absurdo que $x_M(t,k_2)$ no es mayor que k_2 para todo $t < 0$ entonces existe $t_1 < -\delta$ tal que $x_M(t_1,k_2) = k_2$. Por el teorema de Rolle existe $t_2 \in (t_1, 0)$ tal que $x'_M(t_2,k_2) = 0$ implica que $a_M x_M(t_2,k_2) - b_L x_M^2(t_2,k_2) - h_L = 0$; es decir, $x_M(t_2,k_2)$ es un punto de equilibrio. Por lo tanto, $x_M(t_2,k_2) = \alpha_{M_2}$ ó $x_M(t_2,k_2) = \alpha_{M_1}$.Si $x_M(t_2,k_2) = \alpha_{M_2}$ entonces por unicidad $x_M(t_2,k_2) = \alpha_{M_2}$ para todo t, en particular $x_M(0,k_2) = k_2 = \alpha_{M_2}$, lo cual produce una contradicción absoluta, ya que $k_2 < \alpha_{M_2} < \alpha_{M_1}$. Es decir,que no es necesario estudiar el caso en que $x_M(t_2,k_1) = \alpha_{M_1}$ puesto que, para que esto ocurra la solución corta o debe pasar por α_{M_2}. Así,

$$x_M(t, k_2) > k_2 \text{ para todo } t < 0.$$

Denotemos por I_x el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$.

LEMA **2.0.6.** *Sea $x(t)$ una solución de (2.1) tal que $x(0) > 0$. Si $x_M(t)$ es una solución de (2.2) tal que $x_M(0) = x(0)$ y $x_L(t)$ es una solución de (2.3) tal que $x_L(0) = x(0)$, entonces*

(i) $x(t) \leq x_M(t)$ *para todo* $t \in I_x \cap I_{x_M} \cap [0, \infty)$.

(ii) $x_L(t) \leq x(t)$ *para todo* $t \in I_x \cap I_{x_L} \cap [0, \infty)$.

(iii) $x_M(t) \leq x(t)$ *para todo* $t \in I_x \cap I_{x_M} \cap (-\infty, 0]$.

(iv) $x(t) \leq x_L(t)$ *para todo* $t \in I_x \cap I_{x_L} \cap (-\infty, 0]$.

Demostración:
Las funciones

$$F(t, x) = a(t)x - b(t)x^2 - h(t)$$

$$F_M(x) = a_M x - b_L x^2 - h_L$$

$$F_L(x) = a_L x - b_M x^2 - h_M$$

son continuas en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$, localmente lipschitziana y de clase C^1 en la variable x.
Sean $x_M(t)$ con intervalo de definición I_{x_M} y $x_L(t)$ con intervalo de definición I_{x_L} soluciones de (2.2) y (2.3) respectivamente con $x_M(0) = x(0)$ y $x_L(0) = x(0)$. Como $F_L(x) \leq F(t, x) \leq F_M(x)$ entonces, por el Teorema1.3.1
$x(t) \leq x_M(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_M} \cap [0, \infty)$ y $x_L(t) \leq x(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_L} \cap [0, \infty)$.
Por tanto, se cumple (i) y (ii).
Por otro lado tenemos que por el Teorema1.3.2 $x_M(t) \leq x(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_M} \cap (-\infty, 0]$ y $x_L(t) \geq x(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_L} \cap (-\infty, 0]$ es decir, se cumple (iii) y (iv).
Así, queda demostrado el Lema.

LEMA **2.0.7.** *Sea $x(t)$ una solución de (2.1).*

(i) Si $x(0) > \alpha_{M1}$ entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es (β, ∞) con $\beta < 0$ y $\lim_{t \to \beta^+} x(t) = \infty$.

(ii) Si $\alpha_{L2} < x(0) < \alpha_{L1}$ entonces el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ es $(-\infty, +\infty)$ y $\alpha_{M2} \leq x(t) \leq \alpha_{M1}$ para todo $t \in (-\infty, +\infty)$.

(iii) Si $x(0) < \alpha_{M2}$ entonces el intervalo maximal de existencia de soluciones de $x(t)$ es $(-\infty, \gamma)$ con $\gamma > 0$ y $\lim_{t\to\gamma^-} x(t) = -\infty$.

Demostración:

Sean $x_M(t)$ y $x_L(t)$ las soluciones de (2.2) y (2.3) respectivamente con $x_M(0) = x_L(0) = x(0)$. Demostremos (i), por el Teorema 1.2.1 parte 1, se tiene $I_{x_M} = (\gamma, \infty)$ y $I_{x_L} = (\delta, \infty)$, con $\gamma < 0$, $\delta < 0$ y $\lim_{t\to\gamma^+} x_M(t) = \infty$ y $\lim_{t\to\delta^+} x_L(t) = \infty$. Por otra parte por el Lema 2.0.6 parte (iii), y el hecho que $\lim_{t\to\gamma^+} x_M(t) = \infty$, tenemos que existe β tal que $\gamma \leq \beta < 0$ y $\lim_{t\to\beta^+} x(t) = \infty$.
Como $x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t)$ se cumple para todo $t \in I_x \cap [0, \infty)$ y por la observación 1 $x_L(t)$ y $x_M(t)$ son funciones acotadas en $[0, \infty)$ entonces $x(t)$ está definida en todo el intervalo $[0, \infty)$. Así $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta < 0$ y $\lim_{t\to\beta^+} x_L(t) = \infty$.
Probemos (ii), como $x(0) \in (\alpha_{L_2}, \alpha_{L_1})$ y $x_M(0) = x_L(0) = x(0)$ entonces $\alpha_{M_2} < \alpha_{L_2} < x_M(0) < \alpha_{L_1} < \alpha_{M_1}$ y $\alpha_{L_2} < x_L(0) < \alpha_{L_1}$. Por el Teorema 1.2.1 parte 2, se tiene que $I_{x_L} = I_{x_M} = (-\infty, \infty)$, $\alpha_{L_2} < x_L(t) < \alpha_{L_1}$ y $\alpha_{M_2} < x_M(t) < \alpha_{M_1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Por el Lema 2.0.6 se tiene

(i) $x(t) \leq x_M(t) \qquad t \in I_x \cap [0, \infty)$

(ii) $x_L(t) \leq x(t) \qquad t \in I_x \cap [0, \infty)$

(iii) $x_M(t) \leq x(t) \qquad t \in I_x \cap (-\infty, 0]$

(iv) $x(t) \leq x_L(t) \qquad t \in I_x \cap (-\infty, 0]$

Por lo tanto,

$$\alpha_{M_2} < x(t) < \alpha_{M_1}, \qquad \forall t \in I_x.$$

En consecuencia $I_x = \mathbb{R}$.
Demostremos (iii), por el Teorema 1.2.1 parte 3, se tiene que $I_{x_M} = (-\infty, \beta)$ y $I_{x_L} = (-\infty, \delta)$ con $0 < \beta < \infty$, $0 < \delta < \infty$ y

$$\lim_{t\to\beta^-} x_M(t) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\delta^-} x_L(t) = -\infty.$$

Por el Lema 2.0.6 parte (ii) y el hecho que $\lim_{t\to\beta^-} x_M(t) = -\infty$, tenemos que existe γ tal que $0 < \gamma \leq \beta$ y $\lim_{t\to\gamma^-} x(t) = -\infty$.
Como $x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t)$ se cumple para todo $t \in I_x \cap (-\infty, 0]$ y por la

observación 2 $x_L(t)$ y $x_M(t)$ son funciones acotadas en $(-\infty, 0]$, entonces $x(t)$ está definida en todo el intervalo $(-\infty, 0]$. Así, $I_x = (-\infty, \gamma)$ con $\gamma > 0$ y $\lim_{t\to\gamma^-} x(t) = -\infty$.

TEOREMA **2.0.1.** *Dada la ecuación (2.1) supongamos (2.4) tenemos entonces que existen dos soluciones $T-$ periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $(x_1(t) > x_2(t))$. Por otra parte si $x(t)$ es una solución de (2.1) con*

(i) $x(0) > x_1(0)$ *entonces el intervalo maximal de existencia de* $x(t)$ *es* (β, ∞) *con* $\beta < 0$ *y* $\lim_{t\to\beta^+} x(t) = \infty$ *y* $\lim_{t\to\infty}(x(t) - x_1(t)) = 0$

(ii) $x_2(0) < x(0) < x_1(0)$ *entonces el intervalo maximal de existencia de* $x(t)$ *es* $(-\infty, +\infty)$ *con* $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0$ *y* $\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - x(t)) = 0$

(iii) $0 < x(0) < x_2(0)$ *entonces el intervalo maximal de existencia de* $x(t)$ *es* $(-\infty, \gamma)$ *con* $\gamma > 0$ *y* $\lim_{t\to\gamma^-} x(t) = -\infty$ *y* $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0$

Demostración

Si escogemos ϵ en el intervalo $(\alpha_{L_2}, \alpha_{L_1})$ por la observación 3 tenemos que $a(t)\epsilon - b(t)\epsilon^2 - h(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sean $x(t, \epsilon)$ y $x_L(t, \epsilon)$ las soluciones de (2.1) y (2.3) respectivamente con $x(0, \epsilon) = x_L(0, \epsilon) = \epsilon$. Por el Teorema 1.2.1 y el Lema 2.0.7, $I_{x_L} = (-\infty, \infty)$ y $I_x = (-\infty, \infty)$. Por el Lema 2.0.6 parte (ii) $x(t, \epsilon) \geq x_L(t, \epsilon)$ para todo $t > 0$ y por el Lema 2.0.2 $x_L(t, \epsilon) > \epsilon$ para todo $t > 0$ tenemos que $x(t, \epsilon) > \epsilon$ para todo $t > 0$, de esta manera $x(T, \epsilon) > \epsilon$.
Similarmente si escogemos $k_1 > \alpha_{M1}$ entonces por la observación 4 tenemos que $a(t)k_1 - b(t)k_1^2 - h(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sean $x(t, k_1)$ y $x_M(t, k_1)$ las soluciones de (2.1) y (2.2) respectivamente con $x(0, k_1) = x_M(0, k_1) = k_1$. Por el Teorema 1.2.1 y el Lema 2.0.7 $I_{x_M} = (\delta, \infty)$ con $\delta < 0$ y $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta < 0$. Por el Lema 2.0.6 parte (i) $x(t, k_1) \leq x_M(t, k_1)$ para todo $t > 0$ y por el Lema 2.0.3 $x_M(t, k_1) < k_1$ para todo $t > 0$ tenemos que $x(t, k_1) < k_1$ para todo $t > 0$, de acá que $x(T, k_1) < k_1$.
Por lo tanto, la función de Poincaré $P : [\epsilon, k_1] \to [\epsilon, k_1]$; $\xi \to x(T, \xi)$ satisface $P(\epsilon) = x(T, \epsilon) > x(0, \epsilon) = \epsilon$ y $P(k_1) = x(T, k_1) < x(0, k_1) = k_1$, lo cual implica que existe un $c \in (\epsilon, k_1)$ tal que $P(c) = c$, es decir, P tiene un punto fijo correspondiente a una solución T$-$ periódica $x_1(t)$ de (2.1) con $x_1(0) = c$
Ahora consideremos la función de Poincaré $\hat{P} : [k_2, \epsilon] \to [k_2, \epsilon]$; $\xi \to x(-T, \xi)$, donde $0 < k_2 < \alpha_{M2}$. Veamos que esta función tiene un punto fijo $d < c$ el cual corresponde

a una solución T− periódica $x_2(t)$ de (2.1). En efecto; tomando el mismo ϵ. Por el Teorema 1.2.1 y el Lema 2.0.7, $I_{x_L} = (-\infty, \infty)$ y $I_x = (-\infty, \infty)$. Por el Lema 2.0.6 parte (iv) $x(t,\epsilon) \leq x_L(t,\epsilon)$ para todo $t < 0$ y por el Lema 2.0.4 $x_L(t,\epsilon) < \epsilon$ para todo $t < 0$ tenemos que $x(t,\epsilon) < \epsilon$ para todo $t < 0$, de esta manera $x(-T,\epsilon) < \epsilon$.
Por otra parte, si escogemos $0 < k_2 < \alpha_{M_2}$ entonces por la observación 5 tenemos que $a(t)k_2 - b(t)k_2^2 - h(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sean $x(t,k_2)$ y $x_M(t,k_2)$ las soluciones de (2.1) y (2.2) respectivamente con $x(0,k_2) = x_M(0,k_2) = k_2$. Por el Teorema 1.2.1 y el Lema 2.0.7 $I_{x_M} = (-\infty, \delta)$ con $\delta > 0$ y $I_x = (-\infty, \gamma)$ con $\gamma > 0$. Por el Lema 2.0.6 parte (iii) $x(t,k_2) \geq x_M(t,k_2)$ para todo $t < 0$ y por el Lema 2.0.5 $x_M(t,k_2) > k_2$ para todo $t < 0$ tenemos que $x(t,k_2) > k_2$ para todo $t < 0$, de acá que $x(-T,k_2) > k_2$.
Claramente $x_2(t) < x_1(t)$.
Probemos que existen exactamente dos soluciones T− periódicas.
Supongamos que existen tres soluciones T− periódicas de (2.1) por unicidad podemos suponer que $x_1(t) > x_2(t)$, $x_3(t) \neq x_1(t)$ y $x_3(t) \neq x_2(t)$ por el Teorema 1.1.2 $x_3(t)$ la podemos escribir de la siguiente manera:

$$x_3(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)V(t)}{1 - V(t)} \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

con

$$V(t) = \frac{x_3(0) - x_1(0)}{x_3(0) - x_2(0)} e^{-\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds}.$$

Por ser $x_3(t)$ solución T− periódica entonces
$x_3(0) = x_3(T)$ implica que $\dfrac{x_1(0) - x_2(0)V(0)}{1 - V(0)} = \dfrac{x_1(T) - x_2(T)V(T)}{1 - V(T)}$.
Esto es, $(1 - V(T))(x_1(0) - x_2(0)V(0)) = (1 - V(0))(x_1(T) - x_2(T)V(T))$.
Usando que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son funciones T− periódica y simplificando obtenemos: $(x_2(0) - x_1(0))(V(T) - V(0)) = 0$. Como $x_2(0) \neq x_1(0)$ entonces $V(T) - V(0) = 0$. Esto implica $e^{-\int_0^T b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds} = 1$, es decir, $-\int_0^T b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds = 0$, lo cual produce una contradicción por ser $b(s) > b_L > 0$ y $x_1(s) - x_2(s) > 0$.
Por lo tanto hay exactamente dos soluciones T− periodicas de (2.1).
Nosotros probaremos que $x_1(t)$ es asintoticamente estable y $x_2(t)$ es inestable.
Como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de (2.1) ellas satisfacen la ecuación (2.1); esto es,

$$\dot{x_1}(t) = a(t)x_1(t) - b(t)x_1^2(t) - h(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = a(t)x_2(t) - b(t)x_2^2(t) - h(t).$$

Entonces

$\dot{x_1}(t) - \dot{x_2}(t) = a(t)(x_1(t) - x_2(t)) - b(t)(x_1(t) - x_2(t))(x_1(t) + x_2(t)).$

Así, tenemos:

$$\frac{\dot{x_1}(t) - \dot{x_2}(t)}{x_1(t) - x_2(t)} = a(t) - b(t)(x_1(t) + x_2(t)).$$

O sea:

$$\frac{d}{dt}\ln(x_1(t) - x_2(t)) = a(t) - b(t)(x_1(t) + x_2(t)).$$

Integrando entre 0 y T

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\ln(x_1(t) - x_2(t))dt = \int_0^T a(t)dt - \int_0^T b(t)(x_1(t) + x_2(t))dt.$$

Por ser $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones T$-$ periódicas $\ln(x_1(t) - x_2(t))\,|_0^T = 0$, así

$$0 = \int_0^T a(t)dt - \int_0^T b(t)(x_1(t) + x_2(t))dt$$

ó

$$\int_0^T a(t)dt = \int_0^T b(t)(x_1(t) + x_2(t))dt.$$

Como $x_1(t) > x_2(t) > 0$, tenemos:

$$\int_0^T a(t)dt = \int_0^T b(t)(x_1(t) + x_2(t))dt < \int_0^T 2b(t)x_1(t)dt \tag{2.6}$$

y

$$\int_0^T a(t)dt = \int_0^T b(t)(x_1(t) + x_2(t))dt > \int_0^T 2b(t)x_2(t)dt. \tag{2.7}$$

Así, de (2.6) y (2.7)

$$\int_0^T 2b(t)x_2(t)dt < \int_0^T a(t)dt < \int_0^T 2b(t)x_1(t)dt.$$

Por el Lema 1.5.2 y las desigualdades anteriores la derivada de la función de Poincaré P satisfacen las desigualdades

$$P'(x_1(T)) = exp\left(\int_0^T (a(t) - 2b(t)x_1(t))dt\right) < 1$$

y

$$P'(x_2(T)) = exp\left(\int_0^T (a(t) - 2b(t)x_2(t))dt\right) > 1.$$

Así, por el Teorema 1.5.3 $x_1(t)$ es asintóticamente estable y $x_2(t)$ es inestable.
Por otra parte, sea $x(t)$ una solución de (2.1), como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones T$-$ periódicas de (2.1) entonces por el Teorema 1.1.2

$$x(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)V(t)}{1 - V(t)}$$

donde $V(t) = ke^{-\int_0^t b(s)(x_1(s)-x_2(s))ds}$, $k = \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)}$. Demostremos (i) sea $x(0) > x_1(0)$, entonces $k = \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)} > 0$. $x(t)$ está definida excepto cuando $1 - V(t) = 0$; es decir, $\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$. Veamos que existe un valor de $t = \beta$ tal que se satisfaga la ecuación anterior.
Definamos $f(t) = -\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$, estudiemos el comportamienro de esta función:

- $f(0) = 0$
- $f'(t) = -b(t)(x_1(t) - x_2(t)) < 0$; es decir, f es decreciente
- El rango de la función f es $\mathbb{R}$. En efecto, definamos $\text{máx}_{t\in[0,T]}(x_1(t) - x_2(t)) = L > 0$ y $\text{mín}_{t\in[0,T]}(x_1(t) - x_2(t)) = D > 0$.
  Nosotros sabemos que $b_L \leq b(s) \leq b_M$. Multiplicando por $-(x_1(s) - x_2(s))$ tenemos que

  $$-b_L(x_1(s) - x_2(s)) \geq -b(s)(x_1(s) - x_2(s)) \geq -b_M(x_1(s) - x_2(s))$$

  Así,

  $$-b_M L \leq -b(s)(x_1(s) - x_2(s)) \leq -b_L D.$$

  Integrando entre 0 y t obtenemos:
  Si $t > 0$
  $$-b_M Lt \leq \int_0^t -b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds \leq -b_L Dt$$
  Haciendo $t \to +\infty$, tenemos $\text{lím}_{t\to+\infty} \int_0^t -b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds = -\infty$.
  Si $t < 0$ entonces
  $$\int_0^t -b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds = \int_t^0 b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$$

y como $b_L D \le b(s)(x_1(s) - x_2(s)) \le b_M L$ entonces

$$\int_t^0 b_L D ds \le \int_t^0 b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds \le \int_t^0 b_M L ds.$$

Así, $-b_L Dt \le f(t) \le -b_M Lt$ haciendo $t \to -\infty$, tenemos $\lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$.

Por otra parte, $x_2(0) < x_1(0) < x(0)$ implica que $1 > \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)} > 0$; es decir, $\dfrac{1}{k} > 1$. Por lo tanto, $\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$, entonces existe $\beta < 0$ tal que $f(\beta) = \ln\left(\dfrac{1}{k}\right)$ ya que f es decreciente. Es decir, existe $\beta < 0$ tal que $\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\int_0^\beta b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$.
Por tanto, $V(\beta) = 1$. Así, $x(t)$ está definido en $(\beta, +\infty)$ y
$\lim_{t\to\beta^+} \dfrac{x_1(t) - x_2(t)V(t)}{1 - V(t)} = +\infty$.
Además por ser $x_1(t)$ asintóticamente estable es un atractor.
Por lo tanto, $\lim_{t\to+\infty}(x(t) - x_1(t)) = 0$.
Probemos(ii) sea $x_2(0) < x(0) < x_1(0)$ entonces $k = \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)} < 0$. Por lo tanto, $1 - ke^{\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))}ds \ne 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, $x(t)$ está definida en $(-\infty, +\infty)$.Además por ser $x_1(t)$ un atractor y $x_2(t)$ un repulsor se cumple que:

$$\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to+\infty}(x_1(t) - x(t)) = 0.$$

Demostremos (iii) Sea $0 < x(0) < x_2(0)$ entonces $k = \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)} > 1$. $x(t)$ está definida excepto cuando $1 - V(t) = 0$, es decir, $\ln(\dfrac{1}{k}) = -\displaystyle\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$.
Veamos que existe un valor de $t = \gamma$ tal que se satisface la ecuación anterior.Del estudio de la función $f(t) = -\int_0^t b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$ y del hecho que
$x(0) < x_2(0) < x_1(0)$ implica que $k = \dfrac{x(0) - x_1(0)}{x(0) - x_2(0)} > 1$ y así $\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que $\ln(\dfrac{1}{k}) = -\displaystyle\int_0^\gamma b(s)(x_1(s) - x_2(s))ds$. Por tanto $V(\gamma) = 1$.Así, $x(t)$ está definido en $(-\infty, \gamma)$ y $\lim_{t\to\gamma^-} \dfrac{x_1(t) - x_2(t)V(t)}{1 - V(t)} = -\infty$ y además por ser $x_2(t)$ un repulsor tenemos que $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - x_2(t)) = 0$.

TEOREMA **2.0.2.** *Consideremos la ecuación (2.1) donde las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son constantes positivas y $h(t)$ es una función continua, positiva, $T-$ periódica y supongamos que se satisface la desigualdad $h(t) < \frac{a^2}{4b}$ entonces la ecuación diferencial (2.1) tiene dos soluciones $T-$ periódicas, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $(x_2(t) < x_1(t))$. Además la solución mayor es estable y la solución menor es inestable.*

Demostración

Veamos que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior, por ser $a(t)$, $b(t)$ constantes positivas tenemos que $a_L = a_M = a$ y $b_L = b_M = b$. Por lo tanto, $h_M < \dfrac{a^2}{4b} = \dfrac{a_L^2}{4b_M}$.

Así, el teorema queda demostrado.

Referencias

[1] J. Hale and H. Kosak. *Dynamics and Bifurcations.* Springer- Verlag, New York, 1991.

[2] Stephen Hirsch, Morris. Smale and Robert Devaney. ***Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos***. New York: Academic Press, 2004.

[3] A Lazer. **Estudios Cualitativos de las soluciones de la Ecuación de Crecimiento de Población con cosecha**. *Bogotá– Colombia: Matemática Enseñanza universitaria*, (17):29–39, Diciembre 1980.

[4] F Montes de Oca. **Dinamica Poblacional de una Especie**. *Barquisimeto– Venezuela: II ENEM.UCLA*, pages 21–29, 40–45, Junio 1996.

[5] F Montes de Oca. **Existence and Stability of Periodic Solutions in a Riccati equation. Proceeding of Nonlinear Differential Equations**. *a conference celebrating the sixtieth birthday of Alan Lazer. University of Miami*, 1999.

[6] F. Montes de Oca and J. Sarabia. **The Logistc Differential Equations subject to Harverting, Dynamic Systemas and Applications**. (5):303–310, 1996.

[7] Rafael Novo, Sylvia. Obaya and Jesús Rojo. ***Ecuaciones y Sistemas Diferenciales***. McGRAW-HILL/ INTERAMERICANA DE ESPAÑA,S.A., 1995.