UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Sobre la ergodicidad de transformaciones utilizando tecnicas de compactificación. "

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Marco Antonio Noguera Alvarenga.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Teoria Ergódica.
Tutor: Dr. Sergio Muñoz

Barquisimeto, Venezuela. Junio de 2009

A mi Señor Jesucristo, fuente de vida,
paz y amor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios infinitamente por cada maravilloso regalo que me da dia tras día, por la vida, por permitirme alcanzar una metas mas, por darme la sabiduria y discennimiento. A ti Padre Santo, gracias.

A mis padres Rafael Noguera y Yudy Alvarenga, por su inmenso amor, cariño, por cada una de las atenciones, por los esfuerzo y sacrificios, por ser los forjadores de mi carácter, por apoyarme en cada momento de mi vida, por ser mis amigos, no hay tiempo ni palabras suficientes para manifestar mi amor y mi orgullo por ser su hijo.

A mis hermanos Juan Jose, Lisbet, Jose Rafael por apoyarme y darme siempre buenos consejos, son parte importante de mi vida.

A la memoria de mi hermana Leticia (1971 - 2006), por ser más que una hermana, y por el regalo más grande que me dejaste, enseñarme a ser humilde y sencillo ante todo.

A Yaddy Henriquez, por estar a mi lado en todos y cada uno de los momentos de la carrera, por cada una de las conversaciones, por sufrir conmigo los momentos malos y celebrar los buenos, por esto y muchas cosas más.

A mi tutor Dr. Sergio Muñoz, por brindarme su confianza, por el tiempo invertido en el desarrollo del trabajo, por enseñarme como enfocar de manera clara y correcta la matemática, por darme la oportunidad de trabajar a su lado, y por futuros trabajos.

Al Lcdo. Carlos Garcia por su gran ayuda durante el desarrollo del seminario 1, por brindarme su tiempo, y por todos y cada uno de sus consejos.

A Nestor y David, compañeros desde el comienzo de la carrera y amigos en todo momento, gracias por todas esas conversaciones en las que nos animamos a seguir adelante con los estudios, por apoyarme siempre y creer en mi en cada momento.

A Gladymar, Jesica, por esta linda y sincera amistad que se ha ido formando con el tiempo, por los buenos momentos vividos y por los venideros, y por todas las manifestaciones cariño, apoyo y aprecio.

A Gregorio, Luis, Gaby, Manuel, Marilin, Ma. de los Angeles, Jhon, Iris y todos los compañeros de la promoción, gracias por su buen compañerismo y disposición a crecer juntos.

A mis amigos de la iglesia la Buenas Nuevas de Chivacoa, Jose y Zahidy Leal, Angel, Rosalby, Freddy, Yacenia, Frank, Samuel, Wilmer, Marianela, Johan, Mireya, Bernardo, Luis, Gabriela, Jesica, Carlos, y todos aquellos que con su amistad, apoyo y oraciones han ayudado a mi formación académica y espiritual.

A los muchachos del Coesr, Profesores y amigos de la Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez (UNESR), Prof.Danny Peña y Prof.Willian Árias, por permitirme compartir y trabajar con ustedes y ser fuentes de buenos consejos y apoyo.

A todas aquellas personas que de una u otra manera han estado a mi lado, apoyandome.

A todos ustedes, muchas gracias.

Resumen

El teorema clásico del Folklore referente a la existencia de medidas invariantes, absolutamente continuas, para transformaciones expansoras de Markov del intervalo, requiere de la hipótesis conocida en la literatura como la propiedad de distorsión limitada (ver [2], [12]). En general, cuando las transformaciones de Markov son no expansoras, es complicado obtener un resultado parecido.

Sin embargo, como es conocido (ver [3], [9]) pueden obtenerse teoremas de existencia de buenas medidas invariantes fuera del contexto expansor.

Precisamente, esta monografía es una revisión del artículo de F. Schweiger (ver [9]), la cual pretende resaltar las dificultades que se presentan cuando un sistema posee puntos indiferentes (esto es, puntos fijos, con derivada igual a uno) y además muestra algunos ejemplos bien conocidos en la literatura para ilustrar la teoría presentada en [9]. Las transformaciones del intervalo con puntos indiferentes son bastante estudiadas en la actualidad, entre otros autores, por ejemplo [3], [9], [11] y [13].

Índice

Capítulo 1

Una clase de endomorfismos numérico-teóricos

Para los conceptos involucrados con teoría de la medida y análisis clásico ver [5], [8] y [10].

Sea (B, $\mathfrak{F}$, λ) un espacio de probabilidad. Consideremos la tranformación

$$\mathrm{T} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}$$

sujeta a las siguientes condiciones:

a) T es medible y no singular.

b) Existe una partición $\mathbb{P} = \{B(k)/k \in I\}$, excepto en un conjunto de medida cero, de B, donde I es un conjunto de índices finito o numerable, tal que $B(k) \in \mathfrak{F}$, para todo $k \in I$. Los átomos de $\mathbb{P}$ son llamados fibras.

c)Existe una familia de funciones medibles y no singulares V(k): B $\longrightarrow$ B(k), k $\in$ I tales que $V(k) \circ T \mid_{B(k)} = Id_{(B(k))}$ y $T \circ V(k) = Id_B$.

d) Dado $n \in \mathbb{N}$, para toda colección k_1,...,k_n de n índices en I, definimos,

$$\begin{aligned} V(k_1, ..., k_n) &= V(k_1, ..., k_{n-1}) \circ V(k_n) \\ B(k_1, ..., k_n) &= V(k_1, ..., k_{n-1})B(k_n). \end{aligned}$$

Estos últimos son llamados cilindros de orden n, y $\mathcal{Z}^{(n)}$ denota la familia de todos los cilindros de orden n. Escribiendo $\mathcal{Z} = \bigcup \mathcal{Z}^{(n)}$ con n en $\mathbb{N}$, suponemos que $\mathcal{Z}$ genera a $\mathfrak{F}$. Además suponemos que se cumple,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{Z\in\mathcal{Z}^n}\lambda(Z)\Big) = 0.$$

Antes de colocar la condición e), haremos algunas definiciones.

Sea $n \in \mathbb{N}$, para toda colección k_1,...,k_n de n índices en I,
Consideremos $\Delta(k_1, ..., k_n) = \frac{d\lambda_V}{d\lambda}$, donde λ_V es la medida definida por

$$\lambda_V(k_1, ..., k_n)(A) = \lambda(V(k_1, ..., k_n)(A)), A \in \mathfrak{F}. \tag{1.1}$$

ya que $\lambda_V \ll \lambda$, el teorema de Radon- Nikodym, garantiza la existencia de la función $\Delta(k_1, ..., k_n)$: B $\rightarrow \mathbb{R}$, con la propiedad,

$$\lambda_V(k_1, ..., k_n)(A) = \int_A \Delta(k_1, ..., k_n)d\lambda, \tag{1.2}$$

para cualquier $A \in \mathfrak{F}$.

Dada una constante $C \geq 1$, llamamos a los cilindros $B(k_1, ..., k_n)$ un *R-cilindro* con constante C, si este satisface la condición de Renyi,

$$\sup_{x\in B}\Delta(k_1, ..., k_n)(x) \leq C \inf_{x\in B}\Delta(k_1, ..., k_n)(x) \tag{1.3}$$

la constante C es independiente de la escogencia de $x \in B$.

Además, T tiene la propiedad de *distorsión limitada* si se satisface,

$$\sup_{x\in B,n\in\mathbb{N},k_1,...,k_n\in I}\Delta(k_1, ..., k_n)(x) \leq C \inf_{x\in B,n\in\mathbb{N},k_1,...,k_n\in I}\Delta(k_1, ..., k_n)(x) \tag{1.4}$$

Observación. Propiedad de distorsión limitada es equivalente a que todos los cilindros son R-cilindros. Observe que la constante C es uniforme en x, en n y en la escogencia de los $k_1, ..., k_n$ en I.

El conjunto de todos los R-cilindros con constante C son denotado por $\mathcal{G}(C, T)$. Seria ideal determinar una constante $C \geq 1$ tal que $\mathcal{G}(C, T) = \mathcal{Z}$. En tal caso se puede demostrar la existencia de una medida finita invariante equivalente a λ (Ver [1]).

En nuestros ejemplos , ver capitulo 2, podemos encontrar casos en que $\mathcal{G}(C,T)$ es una subclase propia de $\mathcal{Z}$ para toda $C \geq 1$. Los ejemplos sugieren la imposición de la siguiente condición:

e) Es posible determinar una constante $C \geq 1$ y una subclase no vacía $\mathfrak{R}(C,T) \subseteq \mathcal{G}(C,T)$, tal que,

e.1) Si $B(k_1,\ldots,k_n) \in \mathfrak{R}(C,T)$ entonces $B(a_1,\ldots,a_n,k_1,\ldots,k_n) \in \mathfrak{R}(C,T)$ para cualquier secuencia $(a_1,\ldots,a_n)$ que se escoja en I.

e.2) Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathfrak{D}_n = \{B(k_1,\ldots,k_n) \in \mathcal{Z}^{(n)} : B(k_1,\ldots,k_s) \in \mathcal{Z}\backslash\mathfrak{R}(C,T), 1 \leq s \leq n\}$ suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{B(k_1,\ldots,k_n)\in\mathfrak{D}_n} \lambda(B(k_1,\ldots,k_n)) \quad = \quad 0$$

Observación. Cuando B $= [0,1]$, λ es la medida de Lebesgue y T es derivable, es usual encontrar en la literatura la propiedad de distorsión limitada, escrita de la siguiente forma,

$$\sup_{w,z\in B(k_1,\ldots,k_n),n\in\mathbb{N}} \left(\frac{(T^n)'(w)}{(T^n)'(z)}\right) \leq C$$

En efecto, como

$$\sup_{x\in B,n\in\mathbb{N},k_1,\ldots,k_n\in I} \Delta(k_1,\ldots,k_n)(x) \quad \leq \quad C \inf_{x\in B,n\in\mathbb{N},k_1,\ldots,k_n\in I} \Delta(k_1,\ldots,k_n)(x)$$

y para cualquier y, t en B y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y) \leq C \inf_{x\in B,n\in\mathbb{N},k_1,\ldots,k_n\in I} \Delta(k_1,\ldots,k_n)(x) \leq C\Delta(k_1,\ldots,k_n)(t)$$

de lo cual obtenemos que

$$\frac{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y)}{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(t)} \leq C$$

Recordemos que $V(k_1,\ldots,k_n)= V(k_1,\ldots,k_{n-1})\circ V(k_n) = \ldots = V(k_1)\circ V(k_2)\circ \ldots \circ V(k_n)$ donde además $V(k)\circ T\mid_{B(k)} = Id_{(B(k))}$ y $T\circ V(k) = Id_B$, por lo que $V(k)=\big(T\mid_{B(k)}\big)^{-1}$ con esto, obtenemos

$$\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y) = \frac{d\lambda_V(k_1,\ldots,k_n)}{d\lambda}(y) = \big(T^{-1}\circ T^{-1}\circ\ldots\circ T^{-1}\big)'(y) = \big(T^{-n}\big)'(y)$$

Por el teorema de la función inversa,

$$\big((T^n)^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{(T^n)'(T^{-n}(y))}.$$

De lo cual nos resulta que,

$$\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y) = \big(T^{-n}\big)'(y) = \frac{1}{(T^n)'((T^{-n}(y)))} = \frac{1}{(T^n)'(V(k_1,\ldots,k_n)(y))}$$

Como

$$V(k)\text{: B}\longrightarrow B(k),\ V(k_1,k_2)\text{: B}\longrightarrow B(k_1,k_2),$$

y sucesivamente nos queda,

$$V(k_1,\ldots,k_n) : \text{B} \longrightarrow B(k_1,\ldots,k_n)$$

entonces como $y\in B$, se tiene que,

$$V(k_1,\ldots,k_n)(y)\in B(k_1,\ldots,k_n)$$

llamemos $z = V(k_1,\ldots,k_n)(y)\in B(k_1,\ldots,k_n)$, de esta manera,

$$\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y) = \frac{1}{\big(T^n\big)'(z)}$$

con $z\in B(k_1,\ldots,k_n)$.

Análogamente tenemos que

$$\Delta(k_1,...,k_n)(t) = \frac{1}{(T^n)'(w)}$$

con $w = V(k_1,\ldots,k_n)(t)\in B(k_1,\ldots,k_n)$.

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y)}{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(t)} = \frac{(T^n)'(w)}{(T^n)'(z)}$$

con w,z en $B(k_1,\ldots,k_n)$.

Y como $\dfrac{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(y)}{\Delta(k_1,\ldots,k_n)(t)} \leq C$, entonces, $\dfrac{(T^n)'(w)}{(T^n)'(z)} \leq C$.

Así,

$$\sup_{w,z\in B(k_1,\ldots,k_n),n\in\mathbb{N}} \left(\frac{(T^n)'(w)}{(T^n)'(z)}\right) \leq C.$$

1.1. Algunos resultados generales

Antes de enunciar y demostrar el teorema principal de este trabajo, introduciremos la siguiente definición. Ver [9].

Definición Sea $n \in \mathbb{N}$, para cualquier colección $k_1, ..., k_n$ de índices en I, se define la clase $\mathfrak{B}_n$, una subclase de $\mathfrak{R}(C,T)$, por

$$\mathfrak{B}_n = \{B(k_1, ..., k_n) \in \mathcal{Z}^{(n)} : B(k_1, ..., k_n) \in \mathfrak{R}(C,T), B(k_1, ..., k_{n-1}) \in \mathfrak{D}_{n-1}\}.$$

Observe que, $\left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_j\right) \bigcup \mathfrak{D}_n$ es un cubrimiento disjunto de B.

En las hipótesis establecidas en la sección anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema Principal Cualquier cilindro es, excepto un conjunto de medida cero, la unión de R-cilindros.

Demostración 1. Ya que $\left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{B}_j\right) \bigcup \mathfrak{D}_m$ es un cubrimiento disjunto de B, para cilindros $B(a_1, ..., a_t) \in \mathfrak{B}_t$ con $1 \leq t \leq m$ y $B(b_1, ..., b_m) \in \mathfrak{D}_m$ podemos expresar B de la siguiente forma,

$$B = \bigcup_{t=1}^{m} \Big(\bigcup_{B(a_1,...,a_t) \epsilon \mathfrak{B}_t} B(a_1, ..., a_t) \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m) \epsilon \mathfrak{D}_m} B(b_1, ..., b_m) \Big).$$

Consideremos un cilindro $B(k_1, ..., k_n) \in \mathcal{Z} \setminus \mathfrak{R}(C,T)$.

Sabemos que $B(k_1, ..., k_n) = V(k_1, ..., k_n)B$, sustituyendo B por la exprersión anterior y usando las definiciones hechas en d), obtenemos

$$B(k_1, ..., k_n) = V(k_1, ..., k_n)\Big(\Big(\bigcup_{t=1}^{m} \Big(\bigcup_{B(a_1,...,a_t) \in \mathfrak{B}_t} B(a_1, ..., a_t) \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m) \in \mathfrak{D}_m} B(b_1, ..., b_m) \Big) \Big)$$

$$= \bigcup_{t=1}^{m} \Big(\bigcup_{B(a_1,...,a_t) \in \mathfrak{B}_t} V(k_1, ..., k_n)B(a_1, ..., a_t) \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m) \in \mathfrak{D}_m} V(k_1, ..., k_n)B(b_1, ..., b_m) \Big)$$

$$= \bigcup_{t=1}^{m} \Big(\bigcup_{B(a_1,...,a_t) \in \mathfrak{B}_t} B(k_1, ..., k_n, a_1, ..., a_t) \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m) \in \mathfrak{D}_m} B(k_1, ..., k_n, b_1, ..., b_m) \Big).$$

Y por e.1), tenemos que como $B(a_1,...,a_t) \in \mathfrak{R}(C,T)$ entonces $B(k_1,...,k_n,a_1,...,a_t)$ $\in \mathfrak{R}(C,T)$.

Al tomar la medida λ de esta última expresión nos queda,
$\lambda B(k_1,...,k_n) =$
$\sum_{t=1}^{m} \lambda\big(\bigcup_{B(a_1,...,a_t)\in\mathfrak{B}_t} B(k_1,...,k_n,a_1,...,a_t)\big) + \lambda\big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big).$

En particular nos interesa estudiar el valor de $\lambda\big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big)$.
Sabemos que, al ser $\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)$ una unión disjunta,

$$\lambda\big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big) = \sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda\big(B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big)$$

Pero como $B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m) = V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m)$ entonces

$$\lambda\big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big) = \sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda\big(V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m)\big).$$

Ahora bien, veamos que valor tiene $\lim_{m\to\infty} \lambda\big(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big)$.

Definamos $A_m = \bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(b_1,...,b_m) \in \mathfrak{F}$.

Veamos si $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ es una sucesión decreciente.

Recordemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y toda colección $k_1,...,k_n$ de I el conjunto índices tenemos que para $B(k_1,...,k_n) \in \mathcal{Z}$ se tiene que $B(k_1,...,k_n) \subset B(k_1,...,k_{n-1})$, en particular para todo cilindro en $\mathfrak{D}_n$, por la forma en que está definido en e.2). De esta forma, generalizando la relación $B(k_1,...,k_n) \subset B(k_1,...,k_{n-1})$ en $\mathfrak{D}_{n-1}$, tenemos que

$$\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(b_1,...,b_m) \subset \bigcup_{B(b_1,...,b_{m-1})\in\mathfrak{D}_{m-1}} B(b_1,...,b_{m-1}).$$

Y por lo tanto, $A_m \subset A_{m-1}$.

Es decir, $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $\mathfrak{F}$.

Y de esta manera, $\{V(k_1,...,k_n)A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ es una sucesión decreciente.

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(A_m)\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(b_1,...,b_m))\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda(B(b_1,...,b_m))\\
&= 0
\end{aligned}$$

En el último paso usamos la hipótesis e.2), y como $V(k_1,...,k_m)$: B $\longrightarrow B(k_1,...,k_m)$ es medible y no-singular y entonces

$$\lambda\big(V(k_1,...,k_n)\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\big) = 0. \tag{1.5}$$

Y ya que $V(k_1,...,k_n)$ es una tranformación medible inyectiva, tenemos que

$$V(k_1,...,k_n)\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} V(k_1,...,k_n)A_m. \tag{1.6}$$

Y además,

$$\begin{aligned}
V(k_1,...,k_n)A_m &= V(k_1,...,k_n) \bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(b_1,...,b_m)\\
&= \bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m)\\
&= \bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)
\end{aligned}$$

Y también,

$$\lambda(\bigcap_{m=1}^{\infty} V(k_1,...,k_n)A_m) = \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(V(k_1,...,k_n)A_m) \tag{1.7}$$

Y utilizando (1.6) y (1.7), tenemos que,

$$\begin{aligned}
\lambda(V(k_1,...,k_n)\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) &= \lambda(\bigcap_{m=1}^{\infty} V(k_1,...,k_n)A_m) \qquad \text{por } (1.6)\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(V(k_1,...,k_n)A_m) \quad \text{por } (1.7)\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(V(k_1,...,k_n) \bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(b_1,...,b_m))\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \lambda(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m))\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} (\sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)).
\end{aligned}$$

Pero como $\lambda(V(k_1,...,k_n)\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = 0$ por (1.5),

entonces $\lim_{m\longrightarrow\infty}(\sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda(V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m))) = 0.$

Y como,

$$\lambda(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m)\big) = \sum_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} \lambda\big(V(k_1,...,k_n)B(b_1,...,b_m)\big).$$

Podemos concluir que, $\lim_{m\to\infty}\Big(\lambda(\bigcup_{B(b_1,...,b_m)\in\mathfrak{D}_m} B(k_1,...,k_n,b_1,...,b_m))\Big) = 0.$

Esto quiere decir que desde el punto de vista probabilístico no aporta nada en límite.

Así, cualquier cilindro es, excepto un conjunto de medida cero, la union disjunta de R-cilindros.

$\square$

Teorema 1. Supongamos que λ es la medida de Lebesgue, B es un intervalo, tal que $\lambda B = 1$, T satisface las condiciones a), b), c), d), e), todos los $V(k)$ son continuamente diferenciables y existe un punto fijo y en B tal que , $T'(y) = 1$, entonces para cualquier $C \geq 1$ la clase $\mathcal{G}(C,T)$ es una subclase propia de $\mathcal{Z}$.

Demostración 2. Sea y en B un punto fijo con derivada 1. Existe $b \in I$, tal que $y \in B(b)$, luego como $T(y) = y$, se tiene que $y \in B(b,b,\ldots,b)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\big(T\mid_{B(b)}\big)^{-1}(y) = y$, tenemos que $V(b)(y) = y$.

Además para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y la secuencia $b,b,\ldots,b$ de n índices en I, lo cual denotaremos b; n.

$$\Delta(b;n)(y) = \frac{d\lambda_V(b;n)}{d\lambda}(y) = \big(V(b;n)\big)'(y).$$

Como $V(b;n)(y) = V(b;n-1) \circ V(b)(y)$, al aplicar regla de la cadena, y teniendo en cuenta que y es un punto fijo obtenemos,

$$\Delta(b;n)(y) = \big(V(b;n-1)\big)'V(b)(y) \cdot \big(V(b)\big)'(y) = \big(V(b;n-1)\big)'(y) \cdot \big(V(b)\big)'(y).$$

Y continuando con este proceso obtenemos que,

$$\Delta(b;n)(y) = \Big(\big(V(b)\big)'(y)\Big)^n.$$

Y esto a su vez es,

$$\Big(\big(V(b)\big)'(y)\Big)^n = \Big(\Big(\big(T\mid_{B(b)}\big)^{-1}\Big)'(y)\Big)^n.$$

Por el teorema de la función inversa y considerando el echo de que y es un punto fijo, tenemos que,

$$\begin{aligned}\Big(\big(T^{-1}\big)'(y)\Big)^n &= \Big(\frac{1}{T'\big(T^{-1}(y)\big)}\Big)^n \\ &= \Big(\big(T'(y)\big)^{-1}\Big)^n\end{aligned}$$

y como, $T'(y) = 1$ entonces $\Big(\big(T'(y)\big)^{-1}\Big)^n = 1$
Así, $\Delta(b,b,\ldots,b)(y) = \Big(\big(T'(y)\big)^{-1}\Big)^n = 1.$

De esta manera $\sup\limits_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \geq \Delta(b;n)(y) = 1.$

Así, $\sup\limits_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \geq 1.$

Por otro lado, por (1.1) y (1.2), tenemos que,

$$\lambda B(b;n) = \lambda V(b;n)\big(B\big) = \lambda_V(b;n)\big(B\big) = \int_B \Delta(b;n)(x)d\lambda x.$$

Pero $\lambda B(b;n) \to 0$, cuando n tiende a infinito, por la condición d), entonces $\int_B \Delta(b;n)(x)d\lambda x \to 0$, cuando n tiende a infinito, denotemos $\epsilon(n) = \int_B \Delta(b;n)(x)d\lambda x$.

Sabemos que, $\int_B \Delta(b;n)(x)d\lambda x \geq \int_B \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x)d\lambda x$,
y además

$$\begin{aligned}
\int_B \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x)d\lambda x &= \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \int_B d\lambda x \\
&= \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \cdot \lambda(B) \\
&= \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x).
\end{aligned}$$

En el último paso recuerde que, λ es la medida de Lebesgue y $\lambda(B) = 1$.
Entonces, $\inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \leq \epsilon(n)$, donde $\lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$.
En resumen, $\sup_{x\epsilon B} \Delta(b;n)(x) \geq 1$ y $\inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \leq \epsilon(n)$, donde $\lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$.
De esta forma, si n es suficientemente grande no puede ocurrir que,

$$\sup_{x\in B} \Delta(b;n)(x) \leq C \inf_{x\in B} \Delta(b;n)(x).$$

Tomando N suficientemente grande, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para $N \leq n$, $B(\underbrace{b, b, \ldots, b}_{n})$ es un cilindro no Renyi.

Por tanto, cuando existe al menos un punto fijo con derivada 1, existe una clase de cilindros no Renyi no vacía, de esta forma la clase $\mathcal{G}(C,T)$ es una subclase propia de $\mathcal{Z}$.

□

Capítulo 2

Ejemplos.

2.1. Ejemplo lineal.

Sea $([0,1],\mathfrak{F},m)$ un espacio de probabilidad con $\mathfrak{F}$ la σ - álgebra de Borel, y m la medida de lebesgue.

Definamos $\{B(k)|k \in I\}$ una partición de $[0,1]$, con $I = \{0,1\}$ el conjunto de índices, donde $B(0) = [0, \frac{1}{2}]$, y $B(1) = (\frac{1}{2}, 1]$. Cada $B(k)$ es medible con $k \in I$.

Consideremos la transformación $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$Tx = \begin{cases} 2x, & x \in B(0) \\ 2x-1, & x \in B(1) \end{cases}$$

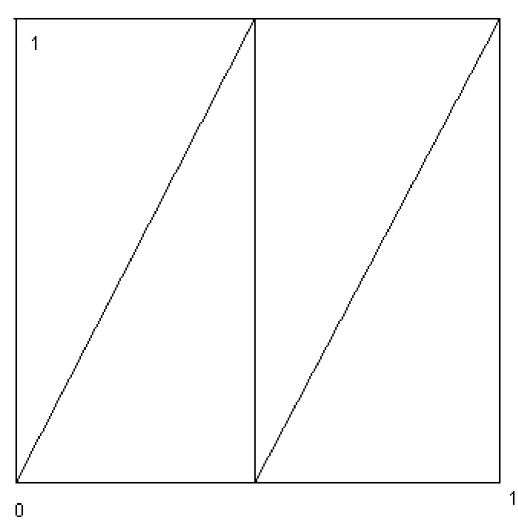

Figura 2.1: Gráfica de T

Se define $T^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ por

$$T^{-1}x = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x+1}{2} & \end{cases}$$

Denotemos $V(0)(x) = \dfrac{x}{2}$ y $V(1)(x) = \dfrac{x+1}{2}$, y observe que,

$$V(0) : [0,1] \to B(0) \text{ y}$$
$$V(1) : [0,1] \to B(1).$$

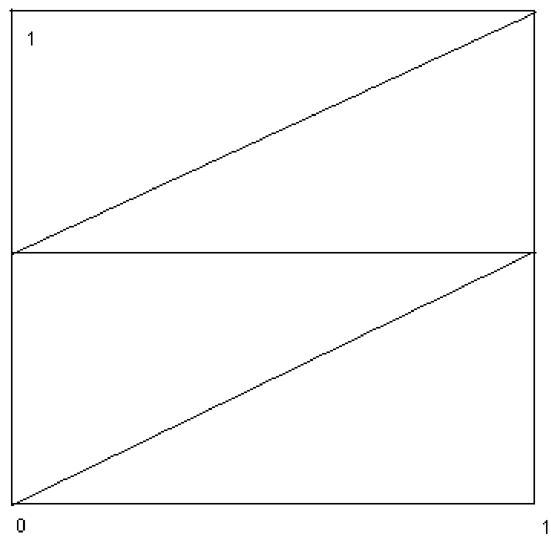

Figura 2.2: Gráfica de V(0) y V(1).

Donde

$$T\mid_{B(0)} \circ V(0) = Id_{[0,1]}, \quad V(0) \circ T\mid_{B(0)} = Id_{B(0)},$$

y análogamente,

$$T\mid_{B(1)} \circ V(1) = Id_{[0,1]}, \quad V(1) \circ T\mid_{B(1)} = Id_{B(1)}.$$

La transformación T es continua y de clase C^1 a trozos, y de igual manera las transfosmaciones $V(k)$, con $k \in I$, son transformaciones continuas y de clase C^1, por lo tanto, las transformaciones T y $V(k)$, con $k \in I$, son medibles y no singulares con derivada no nula.

Recordemos que en la condición d) tenemos que, $V(k_1, \ldots, k_n) = V(k_1, \ldots, k_{n-1}) \circ V(k_n)$. Veamos algunos de los $V(k_1, \ldots, k_n)$ que se pueden generar.

Sabemos que,

$$V(0)(x) = \frac{x}{2}.$$

Entonces,

$$V(0,0)(x) = V(0) \circ V(0)(x) = V(0)(\frac{x}{2}) = \frac{\frac{x}{2}}{2} = \frac{x}{2^2} = \frac{x}{4}$$

$$V(0,0,0)(x) = V(0) \circ V(0) \circ V(0)(x) = V(0,0)(\frac{x}{2}) = \frac{\frac{x}{2}}{2^2} = \frac{x}{2^3} = \frac{x}{8}$$

Continuando con este proceso podemos obtener, para una cantidad n de ceros,

$$V(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n})(x) = \underbrace{V(0) \circ \ldots \circ V(0)}_{n}(x) = \frac{x}{2^n}$$

Por su parte, sabemos que

$$V(1)(x) = \frac{x+1}{2}$$

Luego,

$$V(1,1)(x) = V(1) \circ V(1)(x) = V(1)(\frac{x+1}{2}) = \frac{x+3}{4}$$

$$V(1,1,1)(x) = V(1) \circ V(1) \circ V(1)x = V(1,1)(\frac{x+1}{2}) = \frac{x+7}{8}$$

Continuando con este proceso podemos obtener, para una cantidad n de unos,

$$V(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})(x) = \underbrace{V(1) \circ \ldots \circ V(1)}_{n}(x) = \frac{x + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$$

Las posibles variaciones está en las combinaciones entre ceros y uno que se tomen.

Por otro lado, sabemos que $B(k_1, \ldots, k_n) = V(k_1, \ldots, k_{n-1})(B(k_n))$.

Tenemos que $B(0) = [0, 1/2]$, y $B(1) = (1/2, 1]$ y de esto podemos obtener,

$$B(0,0) = V(0)B(0) = [0, \frac{1}{4}]$$

$$B(0,1) = V(0)B(1) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

$$B(1,0) = V(1)B(0) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

$$B(1,1) = V(1)B(1) = [\frac{3}{4}, 1]$$

De esta manera es posible determinar todos los cilindros de cualquier orden, $\mathcal{Z}^{(n)}$ denota la familia de todos los cilindros de orden n, y en particular tenemos que,

$$\mathcal{Z}^{(2)} = \{B(0,0), B(0,1), B(1,0), B(1,1)\}.$$

Y además, $\mathcal{Z} = \bigcup \mathcal{Z}^{(n)}$ con n en $\mathbb{N}$, y lo cual genera a $\mathfrak{F}$.

En cuanto a los $B(k_1, \ldots, k_n)$ con $k_n \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tienen la forma, $B(k_1, \ldots, k_n) = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, donde j es algún elemento en $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$.

Y de esto tenemos que,

$$m(B(k_1, \ldots, k_n)) = \left|\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Y por tanto,

$$m(B(k_1, \ldots, k_n)) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

La transformación T^n es inyectiva y diferenciable restricta a cada uno de los $B(k_1, \ldots, k_n) = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, donde j es algún elemento en $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$, y además $T^n(\frac{j-1}{2^n}) = 0$ y $T^n(\frac{j}{2^n}) = 1$.

Por el teorema de valor medio para algún $x \in B(k_1, \ldots, k_n)$, tenemos que,

$$T^n(\frac{j}{2^n}) - T^n(\frac{j-1}{2^n}) = \big(T^n\big)'(x) \cdot \big(\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n}\big)$$

Por lo tanto,

$$\big(T^n\big)'(x) \cdot \big(\frac{1}{2^n}\big) = 1.$$

Y así,

$$\big(T^n\big)'(x) = 2^n.$$

Análogamente, para algún $y \in B(k_1, \ldots, k_n)$, distinto de x tenemos que,

$$\big(T^n\big)'(y) = 2^n.$$

Por lo tanto, para x y y tenemos que, $\dfrac{\big(T^n\big)'(x)}{\big(T^n\big)'(y)} = \dfrac{2^n}{2^n} = 1.$

Y de esto,

$$\sup_{x,y \in B(k_1,\ldots,k_n), n \in \mathbb{N}} \left(\frac{(T^n)'(x)}{(T^n)'(y)}\right) = 1 \leq C.$$

Para cualquier $C \geq 1$.

Así, T satisface la propiedad de distorsión limitada.

La clase de todos los R-cilindros con constante C son llamados $\mathcal{G}(C,T)$, y como cualquier cilindro es un R-cilindro, entonces , $\mathcal{G}(C,T) = \mathcal{Z}$.

Y de esto obtenemos que,

$$\mathfrak{D}_n = \{B(k_1, ..., k_n) \in \mathcal{Z}^{(n)} : B(k_1, ..., k_s) \in \mathcal{Z} \setminus \mathfrak{R}(C,T), 1 \leq s \leq n\} = \emptyset.$$

Por otro lado, recordemos que,

$$T^{-1}x = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x+1}{2} & \end{cases}$$

Entonces, para cualquier intervalo de la forma $[a,b]$, con $0 \leq a < b \leq 1$, tenemos que, $T^{-1}[a,b] = V(0)[a,b] \bigcup V(1)[a,b] = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \bigcup [\frac{(a+1)}{2}, \frac{(b+1)}{2}]$.

Tomando la medida de Lebesgue, nos queda,

$$\begin{aligned} m(T^{-1}[a,b]) &= m([\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]) + m([\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}]) \\ &= \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b+1}{2} - \frac{a+1}{2} \\ &= \frac{2b+1}{2} - \frac{2a+1}{2} \\ &= b - a \\ &= m([a,b]). \end{aligned}$$

Así, la transformación T, preserva la medida de Lebesgue.

En resumen, hemos obtenido que la transformación T satisface:

- T es expansora, esto es, $\exists\ k > 1$, tal que $T'(x) \geq k$, $\forall\ x \in [0,1]$.
- Preserva la medida de Lebesgue.
- Satisface la propiedad de distorsión limitada.

2.2. Ejemplo No 2.

Sea $(B, \mathfrak{F}, \lambda)$, donde $B = [0,1]$, $\mathfrak{F}$ es la σ - álgebra de Borel y λ la medida de Lebesgue.

Consideremos la transformación, $T : B \to B$, dada por,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} \mod 1, & si \quad x \in [0,1) \\ 1, & si \quad x = 1 \end{cases}$$

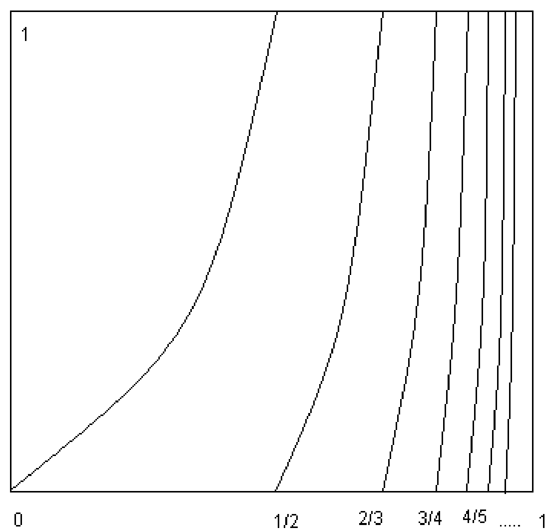

Figura 2.3: Gráfica de T

Y además, tenemos que,

$$T'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}, & si \quad x \in [0,1) \\ 0, & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Donde $\lim_{x \to a} T'(x)$, existe para todo $x \in [0,1]$.

Definamos la partición de B, excepto en un conjunto de medida cero, dada por $B(k) = \left[\dfrac{k}{k+1}, \dfrac{k+1}{k+2}\right]$, con $k \in I$, siendo $I = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de índices numerable.

Se define $V(k) = (T\mid_{B(k)})^{-1}$: $B \to B(k)$, dada por,

$$V(k)(x) = \frac{x+k}{x+k+1}$$

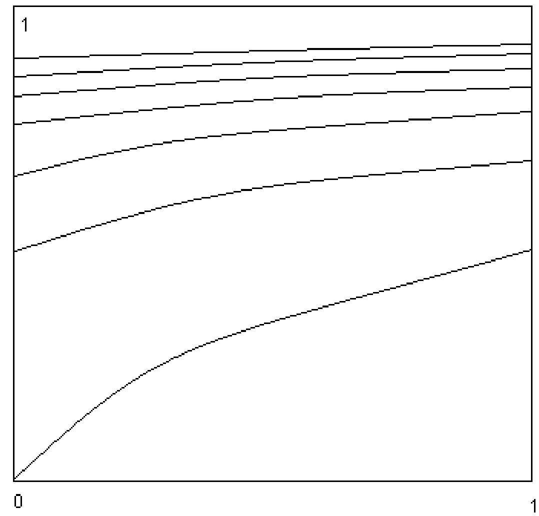

Figura 2.4: Gráfica de las $V(k)$, con $k \in I$

El cual satisface que, $V(k) \circ T = (T\mid_{B(k)})^{-1} \circ T = 1_{B(k)}$, y $T \circ V(k) = T \circ (T\mid_{B(k)})^{-1}$ $= 1_B$.

Tanto la transformación T, como las $V(k)$, con $k \in I$, son transformaciones continuas a trozos, y por lo tanto son medibles, y además son diferenciables de clase C^1 a trozos, entonces son no singulares.

Además, podemos observar que $T^{-1}(A) = \bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)(A)$, con $k \in I$, y para todo $A \in \mathfrak{F}$. Donde los $V(k)(A)$ son disjuntos, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero, con $k \in I$, y para todo $A \in \mathfrak{F}$.

Tomemos la función $f(x) = \frac{1}{x}$, la cual induce una medida que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue λ, y está dada por,

$$\mu(A) = \int_A \frac{d\lambda}{x}, \quad con A \in \mathfrak{F}.$$

Consideremos un intervalo $[a, b]$, con $0 \leq a < b \leq 1$. Calculemos, $\mu(T^{-1}([a, b]))$.

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}([a,b])) &= \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)([a,b])) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} ([\frac{a+k}{a+k+1}, \frac{b+k}{b+k+1}])\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mu\big([\frac{a+k}{a+k+1}, \frac{b+k}{b+k+1}]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{a+k}{a+k+1}}^{\frac{b+k}{b+k+1}} \frac{d\lambda}{x} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\ln(\frac{b+k}{b+k+1}) - \ln(\frac{a+k}{a+k+1})\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\ln(\frac{b+k}{b+k+1}) \cdot (\frac{a+k+1}{a+k})\big) \\
&= \ln(\frac{b}{a}) \\
&= \mu([a,b]).
\end{aligned}$$

Así, μ es una medida T - invariante, absolutamente continua a la medida de Lebesgue.

Ahora bién, como los $V(k) : B \to B(k)$, son diferenciables, entonces,

$$\Delta(k_1, \ldots, k_s)(x) = \big(V(k_1, \ldots, k_s)\big)'(x).$$

De lo cual, aplicando regla de cadena y operaciones algebraicas obtenemos que,

$$\Delta(k_1, \ldots, k_s)(x) = \frac{1}{\big(C_s + D_s x\big)^2}.$$

Donde,

$$C_1 = k_1 + 1, \quad D_1 = 1, \quad C_{s+1} = (C_s + D_s)k_{s+1} + C_s, \quad D_{s+1} = C_s + D_s.$$

Además, si consideramos, $k_s \geq 1$, se tiene,

$$\begin{aligned} C_s &= (C_{s-1}+D_{s-1})k_s + C_{s-1} \\ &= C_{s-1}k_s + D_{s-1}k_s + C_{s-1} \\ &\geq C_{s-1}k_s + D_{s-1} + C_{s-1} \\ &= C_{s-1}k_s + D_s \\ &\geq D_s \end{aligned}$$

ya que, $C_{s-1}k_s \geq 1$, donde $C_{s-1} \geq 1$, y $k_s \geq 1$.

Y por lo tanto, $C_s \geq D_s$.

Así, si $k_s \geq 1$, entonces $C_s \geq D_s$.

Ahora tomemos, $C_s \geq D_s$, y $C_s = (C_{s-1}+D_{s-1})k_s + C_{s-1}$, y $D_s = C_{s-1} + D_{s-1}$.

Supongamos que $k_s = 0$,

$$C_s = (C_{s-1}+D_{s-1})k_s + C_{s-1} = C_{s-1}$$

lo cual implica que,

$$C_{s-1} \geq D_s = C_{s-1} + D_{s-1}.$$

Entonces,

$$0 \geq D_{s-1}.$$

Lo cual es una contradicción, ya que $D_s \geq 0$, $\forall\ s \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $k_s \neq 0$. Así, $k_s \geq 1$.

En resumen tenemos que $C_s \geq D_s$ si y sólo si, $k_s \geq 1$.

Ahora bién, como los C_s y D_s están definidos en terminos de los $k_s \in I$ para todo $s \in \mathbb{N}$, y fijada una combinación de elementos en I, los C_s y D_s están fijos, entonces como,

$$\Delta(k_1,\ldots,k_s)(x) = \frac{1}{\left(C_s + D_s x\right)^2},$$

se tiene que,

$$\inf_{x\in B} \Delta(k_1,\ldots,k_s)(x) = \inf_{x\in B} \frac{1}{\left(C_s + D_s x\right)^2} = \frac{1}{\left(C_s + D_s\right)^2}$$

y también,

$$\sup_{x\in B}\Delta(k_1,\ldots,k_s)(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{\big(C_s+D_sx\big)^2}=\frac{1}{\big(C_s\big)^2}.$$

Calculemos los posibles valores de $C\geq 1$, tal que, se satisfaga la condición de Renyi,

$$\sup_{x\in B}\Delta(k_1,\ldots,k_s)(x)\leq C\inf_{x\in B}\Delta(k_1,\ldots,k_s)(x).$$

Por las dos relaciones anteriores tenemos que,

$$\frac{1}{\big(C_s\big)^2}\leq C\frac{1}{\big(D_s+C_s\big)^2}.$$

Despejando C, y agrupando términos semejantes, lo anterior se nos reduce a,

$$1+2\frac{D_s}{C_s}+\Big(\frac{D_s}{C_s}\Big)^2\leq C.$$

Consideremos $k_s\geq 1$, tenemos que $\dfrac{D_s}{C_s}\leq 1$

Y en este caso,

$$1+2\frac{D_s}{C_s}+\Big(\frac{D_s}{C_s}\Big)^2\leq 4.$$

De esta manera, para $C=4$, tenemos que,

$$\mathfrak{R}(4,T)=\{B(k_1,\ldots,k_s):k_s\geq 1\}.$$

Por otra parte, observemos que, $T(0)=\dfrac{0}{1-0}\mod 1=0$, y además, $T'(0)=\dfrac{1}{(1-0)^2}=1$, y como $0\in B(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{s})$ para todo $s\in\mathbb{N}$, y por el teorema 1, para cualquier $C\geq 1$, existe un s suficientemente grande tal que $B(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{s})\in\mathfrak{D}_s$, y más aún $B(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{s})$ no pertenece a $\mathfrak{R}(4,T)$ para todo $s\in\mathbb{N}$.

Así, tenemos que para cualquier $C\geq 1$, $\mathfrak{R}(C,T)$ es una subclase propia de $\mathcal{Z}$.

Y como tenemos que,

$$\mathfrak{R}(4,T)=\{B(k_1,\ldots,k_s):k_s\geq 1\}.$$

Entonces,

$$\mathfrak{D}_s = \{B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})\}.$$

Veamos que valor tiene,

$$\lim_{s\to\infty} \lambda\big(B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})\big).$$

Si $k_s = 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$, por la definición de C_s y D_s, tenemos que, $C_s = (C_{s-1} + D_{s-1})0 + C_{s-1} = \ldots = C_1 = 1$ y $D_s = D_{s-1} + C_{s-1} = D_{s-1} + 1 = \ldots = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{s} = s$.

De esta forma, $\Delta(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})(x) = \dfrac{1}{(1 + sx)^2}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda\big(B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})\big) &= \lambda\big(V(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})B\big) \\
&= \lambda_{V(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})}\big(B\big) \\
&= \int_B \Delta(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})(x) d\lambda x \\
&= \int_B \frac{1}{(1 + sx)^2} d\lambda x \\
&= \frac{1}{s}\big(-\frac{1}{1 + sx}\big)|_B \\
&= \frac{1}{s}\big(1 - \frac{1}{1 + s}\big) \\
&= \frac{1}{1 + s},
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda\big(B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})\big) = \dfrac{1}{1 + s}$.

Así,

$$\lim_{s\to\infty} \lambda\big(B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})\big) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1 + s} = 0.$$

De manera más general tenemos que para cualquier cilindro en $\mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned}
\lambda\big(B(k_1,\ldots,k_s)\big) &= \lambda\big(V(k_1,\ldots,k_s)B\big) \\
&= \lambda_{V(k_1,\ldots,k_s)}\big(B\big) \\
&= \int_B \Delta(k_1,\ldots,k_s)(x)d\lambda x \\
&= \int_B \frac{1}{\big(D_s+C_sx\big)^2}(x)d\lambda x \\
&= \frac{1}{C_s}\Big(-\frac{1}{D_s+C_sx}\Big)|_B \\
&= \frac{1}{C_s}\Big(-\frac{1}{D_s+C_s}+\frac{1}{D_s}\Big) \\
&= \frac{1}{D_s(D_s+C_s)}
\end{aligned}$$

y como $\lim\limits_{s\to\infty} D_s(D_s+C_s) = +\infty$, entonces, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{1}{D_s(D_s+C_s)} = 0$.
Por lo tanto,

$$\lim_{s\to\infty} \lambda\big(B(k_1,\ldots,k_s)\big) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{D_s(D_s+C_s)} = 0$$

Así, en general tenemos que la transformación $T : B \to B$, dada por,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} \mod 1, & si \quad x\in[0,1) \\ 1, & si \quad x=1 \end{cases}$$

está completamente dentro del contexto del capítulo 1, y por lo tanto todo cilindro es, excepto un conjunto de medida cero, la unión de R - cilindros. Ver [9].

2.3. Tranformacion de Boole Compactificada.

Es introducido por G.Boole (ver [4]), y ha sido ampliamente estudiado, ver por ejemplo, [1], [3], [7] y [9].

Se define la Transformación de Boole por $S : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$S(x) = x - \frac{1}{x}.$$

S admite una compactificación esto es, existe un difeomeomorfismo $\psi : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$, dada por $\psi(x) = \tan(2\pi x - \frac{\pi}{2})$, tal que, $\lim\limits_{x \to (-1/2)^+} \widehat{T}'(x)$ y $\lim\limits_{x \to (1/2)^-} \widehat{T}'(x)$, existen. Donde $\widehat{T} = (\psi)^{-1} \circ S \circ \psi$: $(-1/2, 1/2) \to (-1/2, 1/2)$ queda definida por:

$$\widehat{T}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{\tan 2\pi x}{2}).$$

Y además tenemos que,

$$\widehat{T}'(x) = \frac{4}{1 + 3\cos^2 2\pi x}$$

y como $\cos^2 2\pi(1/2) = \cos^2 2\pi(-1/2) = 0$, obtenemos que $\lim\limits_{x \to (-1/2)^+} \widehat{T}'(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to (1/2)^-} \widehat{T}'(x) = 4$.

Así, se define la compactificación de la transformación de Boole por, T: $[-1/2, 1/2] \to [-1/2, 1/2]$ dado por,

$$T(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{\tan 2\pi x}{2}).$$

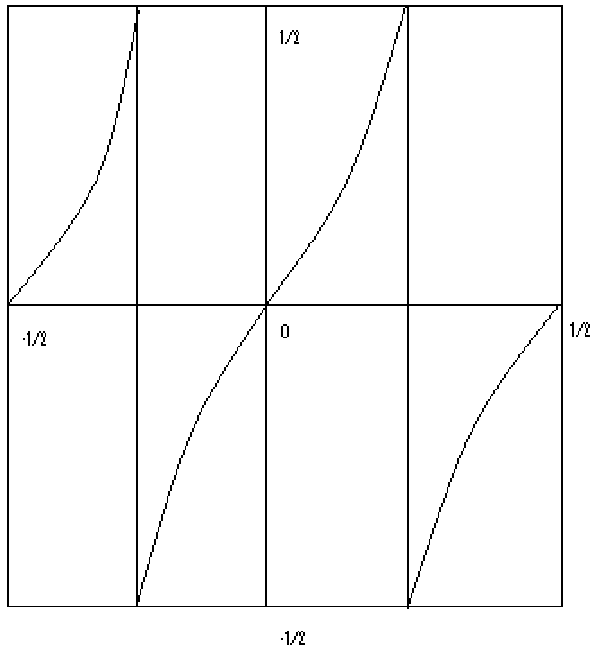

Figura 2.5: Gráfica de la Transformación de Boole compactificada.

Ahora bien, veamos si T, satisface la condiciones establecidas en el capítulo 1, a), b), c), d), y e).

Sea $(B, \mathfrak{F}, \lambda)$ un espacio de probabilidad, con $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\mathfrak{F}$ la σ - álgebra de Borel y λ la madida de lebesgue.

Consideremos el conjunto de índices $I = \{0, 1\}$, y la partición de B, dada por B(0) = [-1/2, 0], y B(1) = (0, 1/2].

Definimos $V(k) = \left(T\mid_{B(k)}\right)^{-1}$: $B \to B(k)$ dada por

$$V(k)(x) = \frac{1}{2\pi}\arctan(2\tan \pi x) + \frac{k}{2}, \quad k \in 0, 1.$$

Las tranformaciones T y $V(k)$ con $k \in I$ son transformaciones continuas excepto en los puntos $1/4$ y $-1/4$ en el compacto $[-1/2, 1/2]$, y por tanto son transformaciones medibles en el sentido de Lebesgue. Además como están dadas en función de las transformaciones tangente y arcotangente las cuales son no singulares, entonces las tranformaciones T y $V(k)$ con $k \in I$, preservan los cunjuntos de medida cero, por lo tanto T como $V(k)$ con $k \in I$, son medibles y no singulares.

En este caso particular, calcular directamente los $\Delta(k_1, \ldots, k_n)$ está más alla de los alcances de este trabajo, pero podemos usar varios resultados, entre ellos el

Teorema de Fischer, ver [9], el cual nos indica cual es la clase de los R- cilindros y cual es la constante C que nos permite construir este conjunto.

Teorema (Fischer). La condición de Renyi, es satisfecha por la clase,

$$\mathfrak{R}(e^{6\pi}, T) = \{B(k_1, \ldots, k_s) : k_{s-1} = 0, k_s = 1 \quad o \quad k_{s-1} = 1, k_s = 0\}.$$

Por otra parte, tenemos que $T(0) = 0$, y además $T'(0) = 1$.

Ahora bién, por el teorema 1, podemos decir que para el punto 0, como se tiene que $0 \in B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})$, para cualquier C, existe un n lo suficientemente grande tal que, $B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})$ no satisface la condición de Renyi. Y además se concluye que, ver [9],

$$\mathfrak{D}_n = \{B(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})\}.$$

Y como $\lim\limits_{n\to\infty} cos 2\pi V(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})(x) = 1$. Ver [9]. Entonces se satisface la condición e.2) del capítulo 1.

De esta manera por el teorema principal, podemos decir que cualquier cilindro es, excepto un conjunto de medida cero, la unión de R-cilindros.

Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos 2\pi x}$, la cual induce una medida absolutamente continua con respecto a la madida de Lebesgue. Dada por,

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{1 - \cos 2\pi x} d\lambda, \quad A \in \mathfrak{F}.$$

La cual es un medida T - invariante, y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Ver [9].

Y como T es la compactificación de S, tenemos que la transformación de Boole $S : \mathbb{R} - \{0\} \to R$, dada por

$$S(x) = x - \frac{1}{x}.$$

es una transformación que preserva la medida μ.

Referencias

[1] J. Aaronnson. ***An introduction to infinite ergodic theory***, volume 50. American Math Society-Mathematical Surveys and Monographs, 1997.

[2] R. Adler. **F-expansions revisited.** *Lecture Notes in Math.*, 318:1–5, 1975.

[3] R. Bowen. **Invariant to Measure for Markov Maps of the Interval, Commun.** *Math. Phis.*, 69:1–17, 1979.

[4] G.Boole. **On the comparison of transdcendents with certain applications to the theory of definite integrals, Philos.** *London, 147 Prat III*, pages 745–803, 1857.

[5] C. Isnard. ***Introducão* à *medida e integrão.*** Projeto Euclides IMPA , Rio de Janeiro, 2007.

[6] R. Mañe. ***Teoria Ergódica.*** Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1983). Springer Verlag, Berlin (1987).

[7] B. Weiss R. Adler. **The ergodic infinite measure preserving tranformation of Boole.** *Israel Journal of Math*, 16:263–278, 1973.

[8] H.L Royden. ***Real Analysis.*** Tercera edición, 1988.

[9] F. Schweiger. **Numbertheoretical endomorphisms with σ-finite invariant measure**. *Israel Journal of Math*, 21(No. 4):308–318, 1975.

[10] T.Apostol. ***Mathematical Analysis.*** Segunda edición. Editorial Reverté, S.A., 1974.

[11] M. Thaler. **A limit Theorem for the Perron-Frobenius operator of transformation on [0, 1] with indifferent fixed points.** *Israel Journal of Math*, 91(No. 4):111–127, 1995.

[12] M. Viana. ***Lecture notes on attractors and physical measure***, volume 3. Monografías del IMCA, 1999.

[13] R. Zweimuller. **Ergodic structure and invariant densities of non-Markovian interval maps with indifferent fixed points.** *Nonlinearity*, 11(No. 4):1263–1276, 1998.