UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

" Una versión multidimensional del teorema de Rolle."

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br.Pérez Gómez María de los A.

como requisito final

para obtener el título de Licenciado

en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Análisis.

Tutor: Dr. Alexander Carrasco.

MCs. Mireya Bracamonte.

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2009

Al dueño de mi vida, Dios, mi Señor.
A los seres que más amo en el mundo, mis padres, Eglia y Jesús.
A mis dos grandes apoyos, Maro y Howard.
A las luces de mis ojos, mis sobrinitos, Jesús y Simón.

Agradecimientos

A **Dios, todopoderoso**, por ser mi guía, mi proveedor, y darme la fortaleza para alcanzar esta meta, esta alegría si pudiera hacerla material, lo haría para entregársela, pero a través de este logro espero poder alcanzar mis sueños que serán para su gloria.

A **mi madre**, serás siempre mi inspiración para lograr mis objetivos. Gracias por darme fuerzas cuando lo necesito, por enseñarme que de todo se aprende, gracias por tus sabios consejos, y, muy importante, gracias por hacerme la comida, aunque detestes la cocina, eres la mejor mamá del mundo.

A **mi papá**, por todo el cariño y apoyo que me ha brindado. Excelente padre. Gracias por estar presente en todos los momentos de mi vida.

A mi **querida hermana**, María José (Maro), por su apoyo, por su amor, y porque siempre he contado con ella en los momentos más difíciles, orientándome siempre en el camino. A mi cuñado, David, por todos los detalles que siempre ha tenido conmigo. No hay forma de pagar todo lo que me han dado.

A **mi segunda madre**, Marina (mamaina), quien cuidó de mí con todo el amor del mundo, que hizo de mi infancia una de las etapas más felices de mi vida, gracias por darme esos dos regalitos, María Eugenia y Edimar, quienes con sus ocurrencias me llenan de sonrisas.

A **mis dos pedacitos de cielo**, mis sobrinos, Jesús y Simón, quienes con sus juegos y su amor logran apartar de mí las tristezas y preocupaciones.

A **mi novio**, Howard, y a su mamá quienes me han brindado su comprensión, estímulo y apoyo constante. Nene gracias por tu paciencia, por ese gran amor que me demuestras día a día y que me hace tan feliz. Te amo.

A mi sobrina y ahijada, **Joselyn**, que más que sobrina es mi amiga, gracias por tantos momentos de compañía y cariño.

A mi abuela **Irma** y mi abuelo **Pen** (Q.E.P.D), por estar pendientes de mí, a toda mi familia materna, y con especial cariño a mi tía Yamelis.

A mi tutor, **Alexander Carrasco**, por su asesoría y dirección en el cumplimiento de este proyecto, gracias por su tiempo y su paciencia ante mi inexperiencia. A mi tutora, **Mireya Bracamonte**, por su disposición incondicional y permanente para aclarar mis dudas, gracias por su confianza, sinceridad y palabras de aliento, gracias por todo ese tiempo que me dedicó. Estaré en deuda con ustedes toda mi vida.

A **mis queridos amigos**, Marylin, Luis, Toñeco, Joel y Tony, quienes me han acompañado durante toda mi carrera universitaria, compartiendo grandes momentos y brindándome todo su apoyo, gracias por hacer esos días de estudios más divertidos. Los quiero mucho.

A **mis amigas**, Laura y Anaisby, que han sido como unas hermanas para mí. Gracias por su amistad sincera e incondicional y por todas las aventuras que hemos vivido juntas.

A cada uno de los **profesores** que participaron en mi desarrollo profesional e integral, sin su ayuda y conocimientos no estaría donde me encuentro ahora, con especial agradecimiento a las profesoras Maribel Perdomo, María Luisa Capodieci, Jurancy Ereú, Liliana Pérez y a los profesores José Luis Linarez, Francisco Montesdeoca, Neptalí Romero, Wilmer Colmenárez, Rómulo Castillo, Mario Rodríguez, Eibar Hernández Wilfredo Ángulo y Fernando Villafañe.

A las personas que han puesto de su parte para que el trajín diario sea más llevadero, gracias Liseth, Borys, José, Rafita, Alexander, Willennys, Andreina, Shirley, Juan Brizuela (Juanchis), Jackelyn (La catira), Sra. Luisa, Sra. Dilcia, y a toda la promo XL, en especial a Néstor, Gladymar, Erika. Gracias por ser parte de esta alegría, siempre los recordaré.

Resumen

En este trabajo se desarrolla en detalle el artículo de Massimo Furi y Mario Martelli, [4], donde se demuestra una versión multidimensional del teorema de Rolle.
Así mismo, se desarrolla el artículo de J. Ferrer, [3], en el cual se presenta un ejemplo en un espacio de dimensión infinita, donde el teorema de Rolle no se cumple.
Este trabajo está estructurado en tres capítulos. El capítulo 1, de preliminares, donde se presentan algunos resultados fundamentales del análisis matemático necesarios para el desarrollo del mismo.
En el capítulo 2, se desarrolla en forma detallada el teorema de Rolle, comenzando con la versión para el caso real y luego, como es usual, se presenta el teorema del Valor Medio, posteriormente, continuamos con la versión multidimensional del teorema de Rolle.
En el capítulo 3, se muestra a través de un ejemplo, que el teorema de Rolle no se cumple, necesariamente, en espacios de dimensión infinita.

Índice

Introducción

El teorema del Valor Medio ha sido un instrumento fundamental en el cálculo infinitesimal, según el criterio de algunos autores, fue probablemente uno de los resultados más profundos acerca de la derivada. Sin embargo, contrario a lo que podría pensarse, su demostración es relativamente fácil, aún cuando la demostración del mismo por primera vez, fue una verdadera hazaña.

Hoy en día es usual presentar la demostración del teorema de Valor Medio precedida por el teorema, que se le atribuye al matemático francés Michell Rolle (1652-1719), llamado teorema de Rolle y más recientemente, en 1995, Massimo Furi y Mario Martelli presentaron dos versiones del teorema de Rolle para funciones $f : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en [4].

La clásica propiedad de diferenciabilidad de funciones reales con un número finito de variables conocida como el teorema de Rolle, no siempre se cumple cuando se trabaja con infinitas variables.

En este trabajo, además de presentar una versión multivariable del teorema de Rolle, desarrollaremos en detalle un ejemplo donde se muestra que en el espacio de Hilbert ℓ_2 el teorema de Rolle no se cumple.

Capítulo 1

Preliminares.

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario presentar algunas definiciones, resultados y notaciones que serán utilizadas para la mejor comprensión del trabajo, por lo cual se da inicio al mismo con este capítulo. Cabe destacar que la conformación del capítulo es un poco complicada puesto que, tratando de que el trabajo sea autocontenido, en la medida de lo posible, necesitamos conjugar cosas que, para algunos pueden ser elementales, con otras que para un estudio detallado requieren un estudio profundo. Para mayor información puede consultarse textos desde cálculo vectorial, como [2], hasta textos de análisis funcional, [1], [5].
La geometría euclídea se desarrolla en los siglos XIX y XX, con la aparición del concepto de espacio vectorial. Recibe el nombre en honor a Euclides, matemático griego (aproximadamente 300 a.C) quien escribió los conceptos básicos de la geometría plana, aunque por supuesto no en un contexto vectorial.

Comencemos recordando que un **espacio vectorial** o **espacio lineal** sobre $\mathbb{K}$, es un conjunto X de objetos llamados vectores dotado de una operación $(+)$ de $X \times X$ en X llamada **Adición** de vectores y una operación $(\cdot)$ de $\mathbb{K} \times X$ en X, llamada **multiplicación** de vectores por escalar que satisfacen las siguientes condiciones:

1) La adición es conmutativa y asociativa.

2) Existe el **vector nulo** $0 \in X$, a veces llamado el **origen** de X, tal que $x+0=x$ para todo $x \in X$.

3) Para todo escalar α, β y $x, y \in X$, se cumple $\alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ y $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

4) Para cada vector $x \in X$, existe el vector $-x$ tal que $x+(-x)=0$.

5) Para cada vector x, $1x = x$.

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial real y considérese una aplicación*

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \cdot z. \end{aligned}$$

Dicha aplicación recibe el nombre de ***producto escalar****, si para cada x, x', z en V y λ, λ' en $\mathbb{R}$ se verifica que*

1) $x \cdot z = z \cdot x$,

2) $(\lambda x + \lambda' x') \cdot z = \lambda(x \cdot z) + \lambda'(x' \cdot z)$,

3) $x \cdot x > 0$ *para todo* $x \neq 0$.

Definición 1.2. *Se define* ***espacio vectorial euclídeo*** *a todo espacio vectorial real E dotado de un producto escalar.*

Ejemplo 1.1. *En $\mathbb{R}^n$, para $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$ el producto*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n,$$

es un producto escalar que llamaremos ***producto escalar canónico****.*

Observación 1.1. *(a) Si dotamos a $\mathbb{R}^n$ del producto escalar canónico, éste define un espacio vectorial euclídeo que llamaremos* ***espacio vectorial euclídeo usual*** *de $\mathbb{R}^n$.*
(b) Un espacio ***vectorial topológico*** *es un espacio vectorial dotado de una topología de forma que las operaciones suma y producto por escalares sean funciones continuas.*

Definición 1.3. *Sea X un espacio vectorial.* ***La norma en*** *X, es una función de valor real $\|\cdot\|$, en X que satisface las siguientes condiciones para todo elemento $x, y \in X$, y cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:*

1) $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 1.4. *Un espacio vectorial dotado de una norma, es llamado* ***espacio normado*** *y denotado por $(X, \|\cdot\|)$.*

Observación 1.2. *Todo espacio normado genera una métrica, en la cual la distancia $d(x, y)$ entre dos puntos x, y se define por*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

La importancia de esto radica en que todo espacio normado se convierte en un espacio vectorial topológico.

Definición 1.5. *Sea E un espacio vectorial euclídeo. Para cualquier vector $\mathbf{x} \in E$, se define la norma de $\mathbf{x}$ como*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Ejemplo 1.2. *En el espacio euclídeo usual de $\mathbb{R}^n$ se tiene la norma*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definición 1.6. *En un espacio normado X se dice que una sucesión (x_n) es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo n, m mayores que N se tiene que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.*

Definición 1.7. *Sea X un espacio normado. Si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X, se dice que X es* ***Completo****.*

Definición 1.8. *Un* ***Espacio de Banach*** *es un espacio normado el cual es completo con la métrica definida por su norma.*

Ejemplo 1.3. *Podemos citar algunos ejemplos de espacios de Banach importantes como son:*

- *Sea X el espacio vectorial de todas las n-uplas de números reales o complejos ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$). La norma del supremo definida como*

$$\|\cdot\|_\infty = \max_i(|x_i|),$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. El espacio (X, $\|\cdot\|_\infty$) es denotado por ℓ_∞^n.

- *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces la función*

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. El espacio X conjuntamente con la norma $\|\cdot\|_p$ es denotado por ℓ_p^n. En nuestro desarrollo utilizaremos $X = \mathbb{R}^n$.

- *Para $1 \leq p < \infty$ el espacio $\ell_p(\mathbb{N})$ de todos las sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, las cuales satisfacen $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ dotado de la norma*

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, es un espacio de Banach.

- *El espacio $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ denota el espacio normado de todas las sucesiones de valores escalares acotadas cuya norma se define como*

$$\|\cdot\|_\infty = \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\},$$

para $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. *En adelante* $\ell_\infty(M)$ *denota el espacio normado de todas las funciones acotadas* $f : M \to \mathbb{F}$ *con* $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$, *donde* $\mathbb{F}$ *denota el campo de escalares.*

- *El espacio* $c = c(\mathbb{N})$ *es el subespacio lineal de* $\ell_\infty(\mathbb{N})$ *formado por todas las sucesiones de valores escalares* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ *en las cuales* $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i)$ *existe y es finito.*

- *El espacio* $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ *es un subespacio lineal de* c *formado por todas las sucesiones escalares* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ *en las cuales* $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i) = 0$.

Teorema 1.1. *Sea* w *un vector no nulo del espacio vectorial normado* F *entonces existe un funcional lineal acotado* ϕ, *definido en todo el espacio, tal que*

$$\|\phi\| \neq 0$$

y

$$\phi(w) = \|\phi\|\|w\|.$$

Un tipo particular de espacios de Banach son los **espacios de Hilbert** y un ejemplo típico es ℓ_2, en los que la norma proviene de un producto interior, tal como ocurre en el espacio euclídeo.

Teorema 1.2. *(Desigualdad de Minkowsky) Sea* p *un número real mayor que* 1. *Entonces para cualesquiera números complejos* x_i, y_i *con* $i \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.3. $(\ell_2, \|.\|_2)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración:

Basta probar que ℓ_2 es completo.

Sea $A_n = \{\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, ...\}$ $n = 1, 2, 3, ...$ una sucesión de Cauchy en ℓ_2. Por definición de sucesión de Cauchy se tiene que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ M > 0/m, n > M \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{mk} - \alpha_{nk}|^2 < \epsilon. \tag{1.1}$$

De aquí,

$$|\alpha_{mk} - \alpha_{nk}|^2 < \epsilon,$$

para $k = 1, 2, 3, ...$

En consecuencia, para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\alpha_{nk}\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, el cual es completo, por lo que, la sucesión es convergente.
Ahora bien, definamos como α_k al valor límite de cada sucesión $\{\alpha_{nk}\}$, es decir,

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} \alpha_{nk}.$$

De esta forma, podemos considerar la siguiente sucesión $\{\alpha_k\}_{k\geq 1}$ la cual denotaremos por a. Probemos que $a \in \ell_2$ y que A_n converge a a.
En efecto, de (1.1) se tiene que

$$\sum_{k=1}^{k_0} (|\alpha_{mk}| - |\alpha_{nk}|)^2 \leq \sum_{k=1}^{k_0} |\alpha_{mk} - \alpha_{nk}|^2 < \epsilon.$$

Luego, si $m \to \infty$ entonces

$$\sum_{k=1}^{k_0} (|\alpha_k| - |\alpha_{nk}|)^2 \leq \epsilon. \tag{1.2}$$

Así, si $k_0 \to +\infty$ obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - |\alpha_{nk}|)^2 \leq \epsilon. \tag{1.3}$$

En conclusión, haciendo uso de la desigualdad de Minkowsky y del hecho que $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|^2 < \infty$, se tiene que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k| - |\alpha_{nk}| + |\alpha_{nk}|)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k| - |\alpha_{nk}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|^2} < \infty.$$

Esto prueba que $a = \{\alpha_k\}$ es un elemento de ℓ_2. Más aún, como ϵ es fijo pero arbitrario, (1.3) implica que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k| - |\alpha_{nk}|)^2} = 0.$$

En consecuencia, la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ converge a a.
Por lo tanto ℓ_2 es un espacio de Hilbert. ■

Algunas de las notaciones que hay que tener presente para la comprensión de la lectura son las siguientes:
$\mathbf{0}_{(m\times n)}$ se refiere a la matriz nula de m filas y n columnas.
Definimos el disco, bola abierta y esfera en $\mathbb{R}^n$ respectivamente, como:

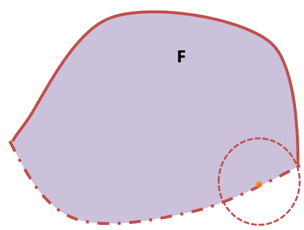
$$\begin{aligned}
D(\mathbf{x}_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| \leq r\}.\\
B(\mathbf{x}_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < r\}.\\
S(\mathbf{x}_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| = r\} = \partial D(\mathbf{x}_0, r).
\end{aligned}$$

Así mismo, hacemos uso de algunas notaciones comunes como son las de U, B, S referidas a la bola abierta unitaria, la bola cerrada unitaria y la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

§1.1. Conceptos topológicos.

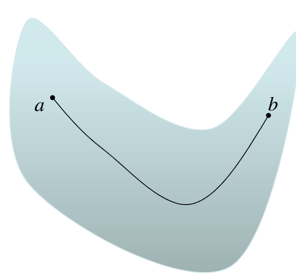
A continuación mostraremos una serie de definiciones necesarias para la comprensión de los teoremas siguientes que serán utilizados para demostrar que la imagen de $D(\mathbf{x}_0, r)$ a través de una función continua es un intervalo cerrado y acotado, resultado que será de gran utilidad para nuestros fines.

Definición 1.9. *Sean X un espacio normado, $F \subset X$ y $x_0 \in X$. x_0 es un **punto adherente** de F si para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $B(x_0, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$.*



Definición 1.10. *Llamamos **clausura** de un conjunto F, y lo denotamos por $Cl(F)$ o $\overline{F}$, al conjunto formado por todos los puntos adherentes de F.*

Definición 1.11. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ se llama **conexo por caminos** si, para cada par de puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de X existe una función $f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = \mathbf{a}$ y $f(1) = \mathbf{b}$.*
Esto es, si dos puntos cualesquiera pueden conectarse mediante una curva totalmente contenida en el conjunto.



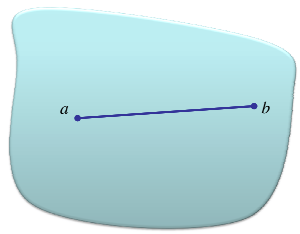
Observación 1.3. *A tal función f se llama un* ***camino*** *de* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$. *Si $f(0) \neq f(1)$ la imagen de [0,1] por medio de f se denomina* ***arco*** *que une a* $\mathbf{a}$ *con* $\mathbf{b}$. *Entonces X es conexo por caminos si cada dos puntos distintos de X pueden unirse por medio de un arco contenido en X. Si $f(t) = t \cdot \mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}$ para $0 \leq t \leq 1$, la curva que une a* $\mathbf{a}$ *con* $\mathbf{b}$ *se llama segmento rectilíneo.*

Definición 1.12. *Sea X un espacio normado. Una* ***separación*** *de X es un par de subconjuntos disjuntos, no vacíos y abiertos cuya unión es X. El espacio X se dice no conexo o disconexo si no existe una separación de X.*

Una caracterización que es muy usual es que, un espacio X es conexo si y sólo si subconjuntos no triviales de X no pueden ser abiertos y cerrados simultáneamente. De forma similar, diremos que un subconjunto A de un espacio normado X es **conexo** si no puede ser descrito como unión disjunta de conjuntos abiertos.

Definición 1.13. *Una colección de subconjuntos ϑ de un conjunto X es un* ***recubrimiento*** *de X, o una cubierta de X, si la unión de los elementos de la colección ϑ es igual a X. Además, si los subconjuntos de X de dicha colección ϑ satisfacen el ser disjuntos por pares, ϑ es llamada* ***partición*** *de X.*
Si el conjunto X tiene estructura de espacio topológico, el recubrimiento ϑ es llamado ***recubrimiento abierto****, o indistintamente* ***cubierta abierta****, si cada elemento de ϑ es un conjunto abierto en X.*
Un espacio topológico X es ***compacto*** *si todo cubrimiento abierto de X posee una subcolección finita que cubre a X, usualmente lo expresamos diciendo que X posee un subcubrimiento finito.*

Definición 1.14. *Un conjunto X de $\mathbb{R}^n$ se llama* ***convexo*** *si todo par de puntos de X puede unirse con un segmento rectilíneo, cuyos puntos pertenecen todos a X.*
Note que si X es convexo es conexo, aunque el recíproco, en general, no es cierto.



Así, por ejemplo la esfera de $\mathbb{R}^n$ es convexa y conexa.

Definición 1.15. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y supongamos que $\mathbf{a} \in X$. Se dice que $\mathbf{a}$ es un **punto interior** de X si existe una n-bola abierta con centro en $\mathbf{a}$, cuyos puntos pertenecen todos a X.*

Definición 1.16. *Un conjunto X de $\mathbb{R}^n$ se llama **abierto** si todos sus puntos son interiores. Es decir X es abierto si y sólo si, $X = intX$ donde $intX$ denota al conjunto de todos los puntos interiores de X.*

Definición 1.17. *Un punto $\mathbf{x}$ se llama exterior al conjunto X de $\mathbb{R}^n$ si existe una n-bola centrada en $\mathbf{x}$ que no contiene puntos de X. Un punto que no es interior ni exterior a X se llama **punto frontera**. El conjunto de todos los puntos fronteras de X se llama **frontera de** X.*

Definición 1.18. *Un conjunto X de $\mathbb{R}^n$ se dice que es **acotado** si el conjunto*

$$\{d(x, y)/x, y \in X\}$$

es acotado en $\mathbb{R}$, donde $d(x, y)$ denota la distancia desde el punto x hasta el punto y.

Definición 1.19. *Llamamos **campo escalar** a una función cuyo dominio está en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ y con el recorrido en el espacio unidimensional $\mathbb{R}$ para $n > 1$.*

Definición 1.20. *Llamamos **campo vectorial** a una función cuyo dominio está en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ y con el recorrido en el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$ para $n, m > 1$.*

Definición 1.21. *(Límite en Campos Vectoriales) Sea* $f : X \to \mathbb{R}^m$*, donde* X *es un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*. Si* $a \in \mathbb{R}^n$ *y* $b \in \mathbb{R}^m$ *escribimos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

para significar que

$$\lim_{\|x-a\| \to 0} \|f(x) - b\| = 0. \tag{1.4}$$

El símbolo del límite de la igualdad (1.4) es el límite corriente del cálculo elemental. En esta definición no se exige que f *esté definida en el mismo punto* a*.*

Definición 1.22. *Consideremos una función* $f : X \to \mathbb{R}^m$*, donde* X *es un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *decimos que* f *es* ***continua*** *en* $\mathbf{a}$ *si* f *está definida en* $\mathbf{a}$ *y si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Además, si un campo vectorial f *tiene los valores en* $\mathbb{R}^m$*, cada uno de los valores* $f(x)$ *tiene* m *componentes y podemos escribir*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)).$$

Los m *campos escalares* $f_1, ..., f_m$ *se llaman* ***componentes del campo vectorial*** f*. Diremos que* f *es* ***continuo*** *en un punto si, y sólo si, cada componente* f_k *es continuo en dicho punto.*

Definición 1.23. *Sean* X *y* Y *espacios topólogicos y* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Diremos que* f *es un* ***homeomorfismo*** *si* f *y* f^{-1} *son continuas. En este caso, diremos que* X *y* Y *son homeomorfos.*

§1.2. Propiedades topológicas.

Aquí presentamos algunos teoremas clásicos que son de gran utilidad en el desarrollo del trabajo y de los cuales se da una breve demostración en algunos casos.

Teorema 1.4. *La imagen de un conjunto conexo mediante una función continua es un conjunto conexo.*

Demostración:
Sean $f : X \to Y$ una función continua y supongamos que X es conexo. Debemos demostrar que $f(X) = Z$ es conexo. Como la función obtenida al restringir el rango de f al conjunto Z también es continua, es suficiente considerar $g : X \to Z$ que es sobreyectiva.
Suponga que $\{A, B\}$ es una separación de Z, es decir

$$A \cap B = \emptyset, \qquad A, B \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad Z = A \cup B.$$

Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X, además son abiertos en X porque g es continua y no vacíos porque g es sobreyectiva. En consecuencia éstos forman una separación de X lo cual es una contradicción con la hipótesis. $\blacksquare$

Teorema 1.5. *Todo subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ conexo por caminos es conexo.*

Demostración:
Supongamos que X no es conexo y sean $\{U, V\}$ una separación de X, $a \in U$ y $b \in V$. Si $f : [0, 1] \to X$ es un camino en X de a a b entonces el teorema (1.4) nos garantiza que $f([0, 1])$ es conexo en $X = U \cup V$ y por tanto

$$f([0, 1]) \subset U$$

o bien,

$$f([0, 1]) \subset V,$$

lo cual es una contradicción pues $f(0) = a \in U$ y $f(1) = b \in V$. Por lo tanto X es conexo. $\blacksquare$

Teorema 1.6. *La imagen de un conjunto compacto a través de una función continua es un conjunto compacto.*

Demostración:
Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua con X compacto. Sea ϑ un cubrimiento abierto del conjunto $f(X)$. La colección

$$\{f^{-1}(A)/A \in \vartheta\}$$

es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto existe un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), ..., f^{-1}(A_n)\}$ de X, así $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ es una subcolección finita de ϑ que cubre a $f(X)$. Por tanto $f(X)$ es compacto. ■

Corolario 1.7. *Si M es conexo y N es homeomorfo a M, entonces N también es conexo.*

Corolario 1.8. *Si A es conexo entonces Cl(A) es conexo.*

Teorema 1.9. *Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico X. Si $A \subset B \subset Cl(A)$ entonces B es conexo.*

Demostración:
Supongamos que B no es conexo y $\{U, V\}$ es una separación de B.

$$A \subset B = U \cup V \Rightarrow A \subset U \veebar A \subset V$$

Supongamos que $A \subset U$, en el otro caso la prueba será análoga. Luego $Cl(A) \subset Cl(U) = U$, además $B \subset Cl(A)$, por tanto

$$B \cap V = \emptyset$$

lo cual es una contradicción pues $B = U \cup V$. ■

Teorema 1.10. $\mathbb{R}$ *es conexo.*

Demostración:
Supongamos que $\mathbb{R}$ no es conexo y sea $\{U, V\}$ una separación de $\mathbb{R}$, tal que $a \in U$ y $b \in V$. Supongamos sin perder generalidad que $a < b$. Sea $X = \{x \in U/x < b\}$. Y observemos que:

1) $X \neq \emptyset$ (pues $a \in X$)

2) b es una cota superior de X. Por tanto existe $c = sup\ X$ y $c \leq b$. Por definición de supremo se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X \subset U$ tal que,

$$c - \epsilon < x \leq c < c + \epsilon.$$

Por lo que $c \in Cl(U) = U$ y como $b \in V$, entonces $c \neq b$. En consecuencia, $c < b$. Pero, U es abierto, por lo que, existe $\epsilon > 0$ tal que,

$$c + \epsilon < b,$$

y

$$(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U,$$

por lo tanto

$$(c - \epsilon, c + \epsilon) \in X,$$

lo cual es una contradicción porque c es el supremo de X. ■

Proposición 1.1. *Un subconjunto de la recta es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración:
($\Leftarrow$) Probaremos que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo.
En efecto, cualquier intervalo abierto es conexo porque es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Ahora si consideramos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tenemos que,

$$Cl((-\infty, a)) = (-\infty, a] \text{ y } Cl((a, +\infty)) = [a, +\infty),$$

y del corolario (1.8), obtenemos que los intervalos de la forma $[a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$ también son conexos.
Por otro lado,

$$(a, b) \subset (a, b],\ [a, b) \subset Cl((a, b)) = [a, b],$$

en consecuencia, por el teorema (1.9) $[a, b)$ y $(a, b]$ son conexos.
Por tanto, todos los intervalos en $\mathbb{R}$ son conexos.
($\Rightarrow$) Sea $X \subset \mathbb{R}$ conexo. Supongamos que $a, b \in X$ y que $a < c < b$. Probaremos que en este caso $c \in X$.
En efecto, si suponemos que c no pertenece a X, tenemos una separación de X.

$$X = [X \cap (-\infty, c)] \cup [X \cap (c, +\infty)],$$

la cual es no trivial porque $a \in X \cap (-\infty, c)$ y $b \in X \cap (c, +\infty)$ lo cual es una contradicción porque X es conexo.
Concluyendo, tenemos que, si $a < c < b$ con $a, b \in X$ entonces $c \in X \subset \mathbb{R}$, y esta propiedad garantiza que X es un intervalo. ■

§1.3. Diferenciabilidad para campos vectoriales

La teoría de diferenciación para campos vectoriales es una extensión directa de la teoría ya conocida, para campos escalares.
Sea $f : X \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial definido en un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Si a es un punto interior de X e y un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$ definimos la derivada de f en la dirección del vector y, $f'(a; y)$ mediante

$$f'(a; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h},$$

siempre que tal límite exista. La derivada $f'(a; y)$ es un vector de $\mathbb{R}^m$.

Designemos con f_k el k-ésimo componente de f. Observemos que la derivada $f'(a; y)$ existe si y sólo si $f'_k(a; y)$ existe para cada $k = 1, 2, ..., m$, en cuyo caso tenemos

$$f'(a; y) = (f'_1(a; y), ..., f'_m(a; y)) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(a) e_k,$$

donde e_k es el k-ésimo vector coordenado unidad.

Decimos que f es diferenciable en un punto interior a si existe una transformación lineal

$$T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

tal que,

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a,v),$$

donde $E(a,v) \to 0$ cuando $v \to 0$ donde $\|v\| < r$ para un cierto $r > 0$. El término $E(a,v)$ es un vector de $\mathbb{R}^m$.
La transformación lineal T_a se llama **diferencial total** o **simplemente diferencial** de f en a.

Teorema 1.11. *Supongamos que f es diferenciable en a con diferencial T_a existe entonces la derivada $f'(a;y)$ para todo y de $\mathbb{R}^n$ y tenemos*

$$T_a(y) = f'(a;y).$$

Además, si $f = (f_1, ..., f_m)$ y si $y = (y_1, ..., y_n)$ tenemos

$$\begin{aligned} T_a(y) &= \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y e_k \\ &= (\nabla f_1(a) \cdot y, ..., \nabla f_m(a) \cdot y) \\ &= Df(a)y. \end{aligned}$$

siendo $Df(a)$ la matriz $m \times n$ cuya fila k-ésima es $\nabla f_k(a)$, e y una matriz columna $n \times 1$.

La matriz $Df(a)$ se llama ***matriz jacobiana*** *de f en a. Su elemento k_j es la derivada parcial $D_j f_k(a)$. Así pues, tenemos*

$$Df(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

§1.4. Derivada de Frechét

Es conocido que la funciones diferenciables de variable real tienen propiedades que facilitan su estudio, ahora desarrollaremos propiedades análogas para funciones de varias variables.

Definición 1.24. *Sean E y F espacios normados, X un subconjunto abierto de E y $\varphi : X \to F$ una aplicación continua dada. Decimos que φ es* ***frechét diferenciable*** *en a si existe el operador lineal L, tal que,*

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

De forma equivalente, si existe el operador lineal L, tal que,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = L(x-a) + r(x),$$

donde,

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0 \text{ y } r(a) = 0.$$

El operador L es llamado ***derivada de Frechét.***

Enunciamos, sin demostración, dos teoremas que son requeridos para demostrar el teorema de Rolle para funciones reales de variable real. El lector interesado puede consultar textos como [7].

Teorema 1.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es una función acotada. Además, f posee máximo absoluto y mínimo absoluto en $[a, b]$.*

Teorema 1.13. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0. Supongamos que f es diferenciable en x_0 y que posee un extremo en dicho punto, entonces, $f'(x_0) = 0$.*

Las proposiciones que siguen a continuación serán de gran importancia al momento de demostrar el teorema de Rolle para espacios multidimensionales dado en el artículo [4].

Proposición 1.2. *Sea $f : D(\mathbf{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in B(\mathbf{x}_0, r)$ un punto extremo de f. Suponga que f es diferenciable en c. Entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración:

Hagamos la demostración para el caso en el que f alcanza un mínimo relativo, el caso que sea un máximo es análogo. Elijamos arbitrariamente un vector $h \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(t) = f(c + t \cdot h)$$

definida para $|t| < \epsilon$ suficientemente pequeño.

Entonces g tiene un mínimo relativo para $t = 0$, luego, $g'(0) = 0$. Pero

$$g'(t) = f'(c + t \cdot h) \cdot h,$$

en consecuencia,

$$f'(c) \cdot h = 0.$$

Como esto se cumple para todo vector $h \in \mathbb{R}^n$, tenemos que la aplicación lineal $f'(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la nula. ■

Proposición 1.3. *Sea $f : D(\mathbf{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la imagen de f es un intervalo cerrado y acotado.*

Demostración:
En primer lugar, dado que $D(\mathbf{x}_0, r)$ es una bola n-dimensional cerrada se cumple que $D(\mathbf{x}_0, r)$ es conjunto convexo, mas aún, todo conjunto convexo es conexo por caminos, así, tenemos que $D(\mathbf{x}_0, r)$ es conexo. En consecuencia $D(\mathbf{x}_0, r)$ es conexo y también es compacto. Luego, por teorema como f es continua la imagen de $D(\mathbf{x}_0, r)$ a través de f es un conjunto compacto y conexo por tanto es un intervalo de la forma $[m, M]$. ■

Finalizamos con el siguiente teorema que nos es indispensable en el último capítulo de este trabajo y nos limitamos a enunciar.

Teorema 1.14. *(a) Si r es una raíz de multiplicidad m para el polinomio $P(x)$, entonces las sucesiones $(n^j r^n)$, con $j = 0, ..., m-1$, son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea*

$$P(E)a = 0.$$

(b) Sea $P(x) = (x - r_1)^{m_1} ... (x - r_s)^{m_s}$ el polinomio característico de la ecuación de recurrencia homogénea

$$P(E)a = 0.$$

Entonces, la solución más general para esta ecuación es de la forma

$$n \geq 1 : \ a_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{ij} n^j r_i^{n-1} \text{ , donde } C_{ij} \text{ son constantes.}$$

Capítulo 2

Teorema de Rolle.

§2.1. Teorema de Rolle para funciones reales de variable real.

Teorema 2.1 (Teorema de Rolle en una variable). *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b). *Supongamos que* $f(a) = f(b)$. *Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que,* $f'(c) = 0$.

Demostración:
Para obtener la demostración, consideramos dos casos:
Caso 1: cuando f es constante.
Si suponemos que $f(x) = d$ para cada $x \in (a, b)$, es bien conocido que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces para cualquier $c \in (a, b)$ se cumple la tesis.

Caso 2: Cuando f no es constante.
Por teorema (1.12) existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tal que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para cada $x \in [a, b]$. Veamos que $x_m \in (a, b)$ o $x_M \in (a, b)$.
En efecto, supongamos que x_m y x_M son los extremos del intervalo $[a, b]$. Sin perder generalidad podemos suponer que el máximo es alcanzado en b y el mínimo en a; es decir, para cada $x \in [a, b]$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Ahora bien, por hipótesis, $f(a) = f(b)$. De esto se sigue $f(x) = f(a) = f(b)$, para cada $x \in [a, b]$. Así f es constante lo cual contradice nuestro supuesto inicial. Luego, cualquiera sea el caso, $x_m \in (a, b)$ o $x_M \in (a, b)$ el teorema (1.13) garantiza que $f'(x_m) = 0$ o $f'(x_M) = 0$, respectivamente. $\blacksquare$

Ahora, como es usual, después de haber demostrado el teorema de Rolle estamos listos para conocer la demostración del teorema del Valor Medio.

Teorema 2.2. *(Teorema del Valor Medio) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

equivalentemente

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración:
Introducimos la nueva función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Veamos que g satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

1) La función g es continua en $[a, b]$, ya que g es la suma de dos funciones continuas en $[a, b]$ que son f y el polinomio

$$p(x) = -f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

2) La función g es diferenciable en (a, b), ya que f y el polinomio $p(x)$ también lo son. Además,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.1}$$

3) $g(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$ y

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

En consecuencia, las hipótesis del teorema de Rolle se satisfacen, luego, existe $c \in (a, b)$ tal que,

$$g'(c) = 0. \tag{2.2}$$

Si en (2.1) tomamos $x = c$ obtenemos

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2.3}$$

de (2.2) y (2.3) se tiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\blacksquare$

Mediante el siguiente ejemplo se muestra que no es posible extender de manera natural el teorema de Rolle en una variable a varias variables.

Ejemplo 2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$f(x, y) = (x(x^2 + y^2 - 1), y(x^2 + y^2 - 1)),$$

la función f es continua en $D(\mathbf{0}, 1)$, diferenciable en $B(\mathbf{0}, 1)$ y $f(\hat{x}) = 0$ para todo $\hat{x} \in S(\mathbf{0}, 1)$ además, $f'(\hat{x}) \neq 0_{(2\times 2)}$ para todo $\hat{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$.

En efecto, es claro que f es continua en $D(\mathbf{0}, 1)$ y diferenciable en $B(\mathbf{0}, 1)$ y para todo $\hat{x} = (x, y) \in S(\mathbf{0}, 1)$ se tiene que $\|\hat{x}\| = 1$ así,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Luego,

$$f(x,y) = (x(x^2+y^2-1), y(x^2+y^2-1)) = (x(1-1), y(1-1)) = (0,0).$$

Por lo tanto $f(\hat{x}) = 0$ para cada $\hat{x} \in S(0,1)$.

Por otro lado, si consideramos $f_1 = x(x^2+y^2-1)$ y $f_2 = y(x^2+y^2-1)$ tenemos,

$$f'(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2-1 & 2xy \\ & \\ 2xy & 3y^2+x^2-1 \end{pmatrix}$$

en consecuencia, $f'(\hat{x}) = 0$ si y sólo si $2xy = 0$, $3x^2+y^2-1 = 0$ y $3y^2+x^2-1 = 0$. Ahora bien, $2xy = 0$ siempre y cuando $x = 0$ o $y = 0$, debemos considerar los dos casos siguientes:

Caso 1: Cuando $x = 0$

En este caso necesitamos que $3x^2+y^2-1 = y^2-1 = 0$ lo que implica que $y = \pm 1$ y así $3y^2-1 = 2 \neq 0$.

Caso 2: Cuando $y = 0$

Así, $3y^2+x^2-1 = x^2-1 = 0$ en consecuencia $x = \pm 1$ y por tanto $3x^2-1 = 2 \neq 0$. De lo cual se sigue que, $f'(\hat{x}) \neq 0_{(2\times 2)}$ para cada $\hat{x} \in B(\mathbf{0},1)$. ■

Ahora estamos listos para desarrollar nuestro resultado principal.

§2.2. Versión multivariable del teorema de Rolle.

Teorema 2.3. *Sea $f : D(\mathbf{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continua en $D(\mathbf{x}_0, r)$ y diferenciable en $B(\mathbf{x}_0, r)$. Suponga que existe un vector $v \in \mathbb{R}^p$ tal que,*

(i) *v es ortogonal a $f(x)$ para cada $x \in S(\mathbf{x}_0, r)$.*

Entonces existe un vector $c \in B(\mathbf{x}_0, r)$ tal que, $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo , $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:
Sea $k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = v \cdot x$. Definimos $g : D(\mathbf{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = k(f(x)),$$

la cual es continua por ser composición de funciones continuas, además g es diferenciable en $B(\mathbf{x}_0, r)$, y su derivada en un punto x viene dada por $v \cdot f'(x)u$, para todo u en $\mathbb{R}^n$.
Por proposición (1.3) la imagen de g es un intervalo cerrado y acotado, digamos $[m, M]$. Ahora como

$$g(x) = k(f(x)) = v \cdot f(x),$$

y por hipótesis v es ortogonal a $f(x)$ tenemos,

$$v \cdot f(x) = 0$$

para todo x en $S(\mathbf{x}_0, r)$, en consecuencia, $g = 0$ *en* $S(\mathbf{x}_0, r)$.
De aquí, podemos suponer sin pérdida de generalidad que g alcanza un máximo valor M en un punto $c \in B(\mathbf{x}_0, r)$, luego, por la proposición (1.2) tenemos que,

$$g'(c) = 0,$$

es decir,

$$v \cdot f'(c)u = 0$$

para cada $u \in \mathbb{R}^n$.
En el caso de que g alcance un mínimo la demostración es análoga. ■

Observación 2.1. *La hipótesis (**i**) puede ser reemplazada por la siguiente hipótesis equivalente:*

(ii) $\mathbf{v} \cdot f(\mathbf{x})$ *es constante en* $S(\mathbf{x}_0, r)$*, y la conclusión del teorema puede ser expresada en una forma geométrica mas intuitiva como*

$$v \text{ es ortogonal a los vectores } \frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(c).$$

El siguiente corolario es usualmente demostrado sin necesidad del teorema precedente, sin embargo, en este caso nos permite demostrar que es una consecuencia inmediata de la reciente versión presentada. Con lo cual podemos ver no sólo el teorema de Rolle, sino también el teorema de valor medio.

Corolario 2.4 (Cauchy)**.** *Sea $a < b$ y $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

Demostración:
Note que en el caso en que $f(a) = f(b)$ y $g(a) = g(b)$ no hay nada que probar.

Ahora supongamos que $[f(b) - f(a)]^2 + [g(b) - g(a)]^2 > 0$.

Definamos $S : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ por $S(t) = (g(t), f(t))$.

Sea $v = (f(b) - f(a), g(a) - g(b))$ luego,

$$v \cdot S(a) = v \cdot S(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

De aquí por el teorema (2.3) (ver observación (2.1)) existe un punto $c \in (a, b)$ tal que,

$$v \cdot S'(c)t = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Para $t \neq 0$ nosotros tenemos

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

■

Observación 2.2. *Haciendo $g(x) = x$ obtenemos el teorema del valor medio y si además $f(b) = f(a)$ entonces obtenemos el teorema de Rolle.*

El siguiente corolario es el teorema del valor medio de [6].

Corolario 2.5. *Sea $a < b$ y $v : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ k-veces diferenciable. Supongamos que $v(a), v(b)$ y la derivada de orden k-1 de v evaluadas en a y en b son ortogonales a un vector v_0 distinto del nulo entonces para algún $c \in (a, b), v^{(k)}(c)$ es ortogonal a v_0.*

Demostración:
Por el teorema (2.3) obtenemos la existencia de un punto $c_1 \in (a, b)$ tal que v_0 es ortogonal a $v'(c_1)$. El teorema puede ser ahora aplicado a v' en el intervalo $[a, c_1]$ lo que genera un punto $c_2 < c_1$ tal que v_0 es ortogonal a $v''(c_2)$. Este procedimiento puede ser repetido k-1 veces y obtenemos $c = c_k < c_{k-1}$ tal que $v_0 \cdot v^{(k)}(c) = 0$, como se requería. ■

Corolario 2.6. *Sea $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomórfica. Suponga que existe un punto $a \neq b$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe z_0, z_1 en el segmento lineal abierto que une a a con b tal que,*

$$Re(f'(z_0)) = Im(f'(z_1)) = 0.$$

Demostración:
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomórfica tal que, $f(a) = f(b)$ y sea $p, q \in \mathbb{R}^2$ dados por

$$p = (Re\, a, Im\, a) = (p_1, p_2) \quad \text{y} \quad q = (Re\, b, Im\, b) = (q_1, q_2)$$

además, cualquier $z \in \mathbb{C}$ puede ser expresado en forma binómica como $z = x + iy$ y

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Definimos $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ por $g(t) = [u(q + t(p - q)),\ v(q + t(p - q))]$.

Para verificar si g satisface las hipótesis del teorema (2.3) debemos ver que

$$(\tilde{x},\tilde{y})\cdot g(t) \text{ es constante en } S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\partial[0,1]$$

es decir, debemos verificar si

$$(\tilde{x},\tilde{y})\cdot g(0)=(\tilde{x},\tilde{y})\cdot g(1).$$

Por lo cual es suficiente probar que $g(0)=g(1)$.

En efecto,

$$\begin{cases} g(0)=(u(q),v(q)) \\ g(1)=(u(p),v(p)) \end{cases} \tag{2.4}$$

ahora bien, por hipótesis,

$$u(p)+iv(p)=f(a)=f(b)=u(q)+iv(q).$$

es decir,

$$u(p)=u(q) \quad \text{y} \quad v(p)=v(q).$$

Entonces, de esto y de (2.4) se desprende que $g(0)=g(1)$.
Haciendo uso nuevamente del teorema (2.3) garantizamos la existencia de $t_0\in(0,1)$ tal que,

$$(\tilde{x},\tilde{y})\cdot g'(t_0)t=0 \;\; \forall t\, \in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

En particular se debe cumplir para

$$t=1 \quad \text{y} \quad (\tilde{x},\tilde{y})=(Re\, a\,-\,Re\, b, Im\, a\,-\,Im\, b). \tag{2.6}$$

Busquemos $g'(t)$. Recordando que,

$$g(t)=(u(q+t(p-q)),v(q+t(p-q))).$$

$$
\begin{aligned}
g'(t) = Dg(t) \quad &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(q+t(p-q)) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(q+t(p-q)) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(q+t(p-q)) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(q+t(p-q)) \end{pmatrix} (p-q) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(q+t(p-q)) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(q+t(p-q)) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(q+t(p-q)) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(q+t(p-q)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Re\, a \,-\, Re\, b \\ Im\, a \,-\, Im\, b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (Re\, a \,-\, Re\, b)\dfrac{\partial u}{\partial x}(q+t(p-q)) + (Im\, a \,-\, Im\, b)\dfrac{\partial u}{\partial y}(q+t(p-q)) \\ \\ (Re\, a \,-\, Re\, b)\dfrac{\partial v}{\partial x}(q+t(p-q)) + (Im\, a \,-\, Im\, b)\dfrac{\partial v}{\partial y}(q+t(p-q)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora sustituimos $g'(t_0)$ *y* (2.6) *en* (2.5) para obtener

$$(Re\, a \,-\, Re\, b,\, Im\, a \,-\, Im\, b) \cdot g'(t_0) = 0.$$

así,

$$(Re\, a - Re\, b)^2\ \frac{\partial u}{\partial x}(q+t_0(p-q)) \ +\ (Re\, a - Re\, b)(Im\, a - Im\, b)\ \frac{\partial u}{\partial y}(q+t_0(p-q)) \ + \\ (Re\, a - Re\, b)(Im\, a - Im\, b)\ \frac{\partial v}{\partial x}(q+t_0(p-q)) \ +\ (Im\, a - Im\, b)^2\ \frac{\partial v}{\partial y}(q+t_0(p-q)) = 0$$

Como f es analítica satisface las ecuaciones de Cauchy, a saber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así, lo anterior nos queda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(q+t_0(p-q))((Re\, a \,-\, Re\, b)^2 \ +\ (Im\, a \,-\, Im\, b)^2) = 0,$$

como $a \neq b$ alguno de los sumandos $(Re\, a \,-\, Re\, b)$ o $(Im\, a \,-\, Im\, b)$ debe ser no nulo. De aquí se sigue que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(q + t_0(p-q)) = 0. \tag{2.7}$$

Por otra parte tenemos que, $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;+\; i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, así,

$$f'(q + t_0(p-q)) = \frac{\partial u}{\partial x}(q + t_0(p-q)) \;+\; i\frac{\partial v}{\partial x}(q + t_0(p-q)).$$

En este caso,

$$Re(f'(q + t_0(p-q))) = \frac{\partial u}{\partial x}(q + t_0(p-q)). \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8), llamando $z_0 = q + t_0(p-q)$, tenemos

$$Re(f'(z_0)) = \frac{\partial u}{\partial x}(q + t_0(p-q)) = 0.$$

De forma semejante, por el teorema (2.3) para

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (Im\, b \,-\, Im\, a,\, Re\, a \,-\, Re\, b)$$

existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot g'(t_1)t = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
En particular se debe cumplir para $t = 1$, así

$$(Im\, b \,-\, Im\, a,\, Re\, a \,-\, Re\, b) \cdot g'(t_1) = 0.$$

Esto es,

$$(Im\, b - Im\, a)(Re\, a - Re\, b)\,\frac{\partial u}{\partial x}(q+t_1(p-q)) \;-\; (Im\, b - Im\, a)^2\,\frac{\partial u}{\partial y}(q+t_1(p-q)) \;+$$
$$(Re\, a - Re\, b)^2\,\frac{\partial v}{\partial x}(q+t_1(p-q)) \;+\; (Im\, a - Im\, b)(Re\, a - Re\, b)\,\frac{\partial v}{\partial y}(q+t_1(p-q)) = 0.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy tenemos,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(q+t_1(p-q))(-(Re\,a\ -\ Re\,b)^2\ -\ (Im\,b\ -\ Im\,a)^2)=0,$$

esto implica que,

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(q+t_1(p-q))((Re\,a\ -\ Re\,b)^2\ +\ (Im\,b\ -\ Im\,a)^2)=0,$$

como $a \neq b$ alguno de los sumandos es no nulo, en consecuencia,

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(q+t_1(p-q))=0,$$

pero,

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(q+t_1(p-q))=\frac{\partial v}{\partial x}(q+t_1(p-q))$$

y

$$Im(f'(q+t_1(p-q)))=\frac{\partial v}{\partial x}(q+t_1(p-q)),$$

así si, $z_1=q+t_1(p-q)$ tenemos que,

$$Im(f'(z_1))=\frac{\partial v}{\partial x}(q+t_1(p-q))=0.$$

Por tanto $Re(f'(z_0))=Im(f'(z_1))=0$. ■

Teorema 2.7 (Segunda versión del teorema de Rolle en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $f: D(\mathbf{x}_0,r)\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ continua en $D(\mathbf{x}_0,r)$ y diferenciable en $B(\mathbf{x}_0,r)$. Sea $v\in\mathbb{R}^p,\ z_0\in B(x_0,r)$ tal que,*

(ii) *$v\cdot(f(x)-f(z_0))$ no cambia de signo en $S(\mathbf{x}_0,r)$.*

Entonces, existe un vector $c\in B(\mathbf{x}_0,r)$ tal que, $v\cdot f'(c)u=0\ \forall\ u\in\mathbb{R}^n$.

Demostración:

Podemos suponer sin perder generalidad que $v\cdot(f(x)-f(z_0))\leq 0$ para todo x en $S(\mathbf{x}_0,r)$ esto implica que,

$$v\cdot f(x)\leq v\cdot f(z_0)\ \forall\ x\in S(\mathbf{x}_0,r).$$

Ahora, definamos $g : D(\mathbf{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $g(x) = v \cdot f(x)$, la cual es continua en $D(\mathbf{x}_0, r)$ y diferenciable en $B(x_0, r)$, pues f es continua en $D(\mathbf{x}_0, r)$, y diferenciable en $B(x_0, r)$, así, g alcanza máximo y mínimo, pero, por hipótesis

$$v \cdot f(x) \leq v \cdot f(z_0) \ \forall \ x \in S(\mathbf{x}_0, r),$$

en consecuencia, g alcanza un máximo en el interior, esto es,

$$\exists \ c \in B(\mathbf{x}_0, r)/v \cdot f(c) = M,$$

donde $M = max\{v \cdot f(x)/x \in D(\mathbf{x}_0, r)\}$, así por la proposición (1.2) $g'(c) = 0$, es decir, $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. ■

Observación 2.3. *En el caso cuando $n = p = 1$ el teorema (2.7) se convierte en: Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que para $v \in \mathbb{R}$ y para algún $z_0 \in (a, b)$ se cumple que $v \cdot (f(x) - f(z_0)) \leq 0$ donde $x = \{a, b\}$.*
Asi, si v es no negativo, se cumple que,

$$\begin{aligned} f(x) - f(z_0) \leq 0 &\implies f(x) \leq f(z_0) \\ &\implies f(z_0) \geq f(a) \wedge f(z_0) \geq f(b) \\ &\implies f(z_0) \geq max\{f(a), f(b)\}. \end{aligned}$$

Si v es no positivo, se cumple que,

$$\begin{aligned} f(x) - f(z_0) \geq 0 &\implies f(x) \geq f(z_0) \\ &\implies f(a) \geq f(z_0) \wedge f(b) \geq f(z_0) \\ &\implies f(z_0) \leq min\{f(a), f(b)\}. \end{aligned}$$

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que, $v \cdot f'(c) \cdot u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, esto es, $f'(c) = 0$. Note que, cuando $f(a) = f(b)$, para cada $z \in (a, b)$ (en particular para z_0), se cumple

$$f(z) \geq max\{f(a), f(b)\} \ \veebar \ f(z) \leq min\{f(a), f(b)\}.$$

En el caso de que $v \cdot (f(x) - f(z_0)) \geq 0$, el resultado es análogo.

El siguiente corolario es una aplicación sencilla del teorema (2.7).

Corolario 2.8. *Sea $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $[a, b]$. Supongamos que $f'(a) = f'(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que,*

$$f'(c)(c - a) = f(c) - f(a).$$

Demostración:
El corolario (2.8) es cierto para f si y sólo si es cierto para

$$g(x) = f(x) - x \cdot f'(a),$$

en efecto,
($\Rightarrow$) Como f es continua tenemos que g es continua.
Por otro lado,

$$g'(x) = f'(x) - f'(a),$$

esto implica que,

$$g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0 \quad \text{y} \quad g'(b) = f'(b) - f'(a) = 0.$$

así $g'(a) = g'(b) = 0$. Veamos que

$$g'(c)(c - a) = g(c) - g(a).$$

Como

$$\begin{aligned} f'(c)(c-a) = f(c) - f(a) &\implies cf'(c) - af'(c) = f(c) - f(a) \\ &\implies cf'(c) - af'(c) - cf'(a) + af'(a) = f(c) - f(a) - cf'(a) + af'(a) \\ &\implies (f'(c) - f'(a))(c - a) = (f(c) - cf'(a)) - (f(a) - af'(a)) \\ &\implies g'(c)(c - a) = g(c) - g(a). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que es cierto para g

$$\begin{aligned} g'(a) = g'(b) &\implies f'(a) - f'(a) = f'(b) - f'(a) \\ &\implies 0 = f'(b) - f'(a) \\ &\implies f'(a) = f'(b). \end{aligned}$$

Como $f(x) = g(x) + xf'(a)$ y g es continua tenemos que f es continua.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g'(c)(c-a) &= g(c) - g(a) \\ (f'(c) - f'(a))(c-a) &= f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a) \\ cf'(c) - af'(c) - cf'(a) + af'(a) &= f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a) \\ f'(c)(c-a) &= f(c) - f(a). \end{aligned}$$

De aquí, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f'(a) = f'(b) = 0$.

Ahora, demostremos el corolario, para ello definamos

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}, & x \neq a \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Note que de la continuidad de f en $[a, b]$ tenemos que h también es continua en $[a, b]$. Sólo falta verificar la diferenciabilidad de h en a, para ello veamos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{h(a+t) - h(a)}{t},$$

pero, $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{h(a+t) - h(a)}{t}$ no existe.

En efecto, supongamos que existe $L < \infty$ de forma que

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = L.$$

Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$-\delta < t < 0 \Rightarrow \left|\frac{h(a+t) - h(a)}{t} - L\right| < \epsilon.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{h(a+t)-h(a)}{t} &= \frac{1}{t}\cdot\frac{f(a+t)-f(a)}{a+t-a}-0\\
&= \frac{1}{t}\cdot\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\\
&= \frac{1}{t^2}\cdot(f(a+t)-f(a)).
\end{aligned}$$

Observemos que para $-\delta < t < 0$, $f(a+t)$ no existe, lo cual es una contradicción, por tanto h es diferenciable en $(a,b]$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}\\
h'(b) &= \frac{f'(b)(b-a)-(f(b)-f(a))}{(b-a)^2}\\
&= \frac{f'(b)}{b-a}-\frac{(f(b)-f(a))}{(b-a)^2}\\
&= \frac{f'(b)}{b-a}-\frac{h(b)}{b-a}\\
&= \frac{f'(b)-h(b)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Como $f'(b)=0$ tenemos que $h'(b)=\dfrac{-h(b)}{b-a}$, en consecuencia si $h(b)\neq 0$ tenemos que

$$h(b)\cdot h'(b) < 0 \quad \text{y} \quad h(a)=0.$$

Ahora bien, $h(b)\neq 0$, por lo tanto, debemos considerar las dos posibilidades, que $h(b)<0$ ó $h(b)>0$.

Si $h(b)$ **>0.**

En este caso $h'(b)<0$ y en consecuencia,

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{h(b+t)-h(b)}{t} \;<\; 0.$$

Luego, existe $\delta > 0$, tal que, para t en $(-\delta, 0)$ se tiene que $h(b+t) - h(b) > 0$. En particular, para $z = b + t$ tenemos que $h(z) > \text{máx}\{h(a), h(b)\} = h(b)$.

Si $h(b)$ <**0.**
Se tiene que $h'(b) > 0$. Así,

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{h(b+t) - h(b)}{t} \quad > \quad 0.$$

Luego, existe $\delta > 0$, tal que, para t en $(-\delta, 0)$ tendremos que $h(b+t) - h(b) < 0$. Como antes, consideramos $z = b + t$ y tenemos que $h(z) < \text{mín}\{h(a), h(b)\} = h(b)$.

En el caso que $h(b) = 0 = h(a)$, todo punto z en (a, b) satisface que

$$h(z) \leq min\{h(a), h(b)\} \;\veebar\; h(z) \geq max\{h(a), h(b)\}.$$

Luego por la observación del teorema (2.7) existe c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$ y esto implica el resultado buscado. $\blacksquare$

Capítulo 3

Falla del teorema de Rolle.

§3.1. Falla del teorema de Rolle en el espacio de Hilbert ℓ_2

Sean L y R dos operadores lineales continuos en ℓ_2 dados por, si $x = (x_1, x_2, ...)$

$$L(x) = (x_2, x_3, ...) \quad \text{y} \quad R(x) = (0, x_1, x_2, ...)$$

Sea T la aplicación $T : \ell_2 \to \ell_2$ definida por $T(x) = (1/2 - \|x\|^2)e_1 + R(x)$.

Ahora consideremos la función

$$f : \ell_2 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - T(x)\|^2}.$$

Veamos que T no tiene puntos fijos, en efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe x en ℓ_2, tal que, $T(x) = x$, así,

$$(1/2 - \|x\|^2, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...) \implies x_1 = 1/2 - \|x\|^2 = x_2 = x_3 = ...$$

Por otro lado,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2,$$

esto implica que,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2 - \|x\|^2)^2,$$

luego, como $x \in \ell_2$ tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

pero,

$$S_1 = (1/2 - \|x\|^2)^2, \; S_2 = 2(1/2 - \|x\|^2)^2, ..., S_n = n(1/2 - \|x\|^2)^2,$$

en consecuencia,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty.$$

Por lo tanto, $\|x\|^2$ diverge, lo cual es una contradicción, debido a que $x \in \ell_2$.

Así, tenemos que f es continua en ℓ_2 y $f(x) = 0 \; \forall \; x \in \; S$.

Identificando en la forma usual ℓ_2 con su dual, tenemos que la derivada de Frechét de $\|x\|^2$ es dada por el operador

$$a \to 2\langle x, a \rangle,$$

en efecto, recordemos la identidad de polarización válido para espacios de Hilbert que en este ejemplo es ℓ_2

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

pues el campo es $\mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \langle x-a, x+a\rangle = \frac{1}{4}(\|x-a+x+a\|^2 - \|x-a-x-a\|^2)\\
&\Longrightarrow \quad \langle x-a, x+a\rangle = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|2a\|^2)\\
&\Longrightarrow \quad \|x\|^2 - \|a\|^2 = \langle x-a, x+a\rangle\\
&\Longrightarrow \quad \|x\|^2 - \|a\|^2 = \langle x-a, x-a+2a\rangle\\
&\Longrightarrow \quad \|x\|^2 - \|a\|^2 = \langle x-a, 2a\rangle + \langle x-a, x-a\rangle\\
&\Longrightarrow \quad \|x\|^2 - \|a\|^2 = 2\langle x-a, a\rangle + \|x-a\|^2.
\end{aligned}$$

Considerando,

$$L(x-a) = 2\langle x-a, a\rangle \quad \text{y} \quad r(x) = \|x-a\|^2,$$

tenemos que,

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a}\frac{\|x-a\|^2}{\|x-a\|} = 0.$$

Por lo tanto, $r(a) = 0$.

Así, de la definición (1.24) la derivada de Frechét de $\|x\|^2$ es el operador $a \mapsto 2\langle x, a\rangle$ como queríamos probar.

Además, tenemos que la aplicación T es diferenciable en x y para cada u en ℓ_2

$$T'(x)u = -2\langle x, u\rangle e_1 + R(u).$$

Tomando en cuenta todo esto, la derivada de Frechét para $T(x)$ es el operador

$$u \mapsto -2\langle x, u\rangle e_1 + R(u).$$

y así, la derivada de Frechét para $\|x - T(x)\|^2$ está dada por el funcional

$$u \mapsto 2\langle x - T(x), (1 - T'(x))u\rangle.$$

Ahora, como $\|x - T(x)\|^2$ no se anula, decimos que f es Frechét diferenciable en todo $x \in \ell_2$ y aplicando la derivada de un cociente tenemos que para cada $u \in \ell_2$

$$\begin{aligned} f'(x)u &= \frac{-2\langle x, u\rangle \|x - T(x)\|^2 - (1 - \|x\|^2)(2\langle x - T(x), u - T'(x)u\rangle)}{\|x - T(x)\|^4} \\ &= \frac{1}{\|x - T(x)\|^4}[-2\|x - T(x)\|^2\langle x, u\rangle - 2(1 - \|x\|^2)\langle x - T(x), u - T'(x)u\rangle]. \end{aligned}$$

Pero, como

$$\langle T(x), e_1\rangle = 1/2 - \|x\|^2, \quad \langle x, R(u)\rangle = \langle L(x), u\rangle \quad \text{y} \quad L(T(x)) = x,$$

se sigue que,

$$\begin{aligned} \langle x - T(x), u - T'(x)u\rangle &= \langle x - T(x), u\rangle - \langle x - T(x), T'(x)u\rangle \\ &= \langle x - T(x), u\rangle - \langle x - T(x), -2\langle x, u\rangle e_1 + R(u)\rangle \\ &= \langle x - T(x), u\rangle + 2\langle x, u\rangle\langle x, e_1\rangle - \langle x, R(u)\rangle - 2\langle x, u\rangle\langle T(x), e_1\rangle + \\ &\quad \langle T(x), R(u)\rangle \\ &= \langle x - T(x), u\rangle + 2\langle x, u\rangle x_1 - 2\langle x, u\rangle(1/2 - \|x\|^2) - \langle x - T(x), R(u)\rangle \\ &= \langle x - T(x), u\rangle + 2x_1\langle x, u\rangle - (1 - 2\|x\|^2)\langle x, u\rangle - \langle L(x - T(x)), u\rangle \\ &= \langle x - T(x) + 2x_1 x - (1 - 2\|x\|^2)x - L(x - T(x)), u\rangle \\ &= \langle x - T(x) + 2x_1 x - x + 2\|x\|^2 x - L(x) + L(T(x)), u\rangle \\ &= \langle -T(x) + 2x_1 x + 2\|x\|^2 x - L(x) + x, u\rangle \\ &= \langle (1 + 2x_1 + 2\|x\|^2)x - T(x) - L(x), u\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de $f'(x)u$ es dado por la expresión,

$$\frac{-2}{\|x - T(x)\|^4}\langle (\|x-T(x)\|^2+(1-\|x\|^2)(1+2x_1+2\|x\|^2))x-(1-\|x\|^2)(L(x)+T(x)), u\rangle.$$

Esto es,

$$f'(x) = \frac{-2}{\|x - T(x)\|^4}[(\|x-T(x)\|^2+(1-\|x\|^2)(1+2x_1+2\|x\|^2))x-(1-\|x\|^2)(L(x)+T(x))].$$

Mostremos que la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución en U. Supongamos por reducción al absurdo que $f'(x) = 0, \ \|x\| < 1$. Luego, si llamamos

$$s = \frac{\|x - T(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} + 1 + 2x_1 + 2\|x\|^2, \tag{3.1}$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\|x - T(x)\|^2 + (1 - \|x\|^2)(1 + 2x_1 + 2\|x\|^2))x - (1 - \|x\|^2)(L(x) + T(x)) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\frac{\|x - T(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} + (1 + 2x_1 + 2\|x\|^2))x - (L(x) + T(x)) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\frac{\|x - T(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} + (1 + 2x_1 + 2\|x\|^2))x = L(x) + T(x) \\
&\Longrightarrow \quad sx = L(x) + T(x) \\
&\Longrightarrow \quad sL(x) = L(L(x)) + L(T(x)) \\
&\Longrightarrow \quad 0 = L(L(x)) - sL(x) + L(T(x)).
\end{aligned}$$

Esto es, $x \in Ker(L^2 - sL + I)$ es una sucesión recurrente de orden dos en ℓ_2.
La ecuación característica asociadas para este tipo de sucesiones es

$$t^2 - st + 1 = 0,$$

la cual nos da tres alternativas diferentes de acuerdo al signo del discriminante.

Caso 1: $|s| = 2$
La única raíz es $s/2$ y tiene multiplicidad dos y por teorema (1.14) tenemos que las sucesiones

$$u = (1, s/2, (s/2)^2, (s/3)^3, ...) \quad \text{y} \quad v = (0, s/2, 2(s/2)^2, 3(s/3)^3, ...)$$

son elementos bases del $Ker(L^2 - sL + I)$.

Así,

$$x = Au + Bv,$$

para ciertos números reales A, B además para cada $n \geq 1$

$$x_n = A(s/2)^{n-1} + B(n-1)(s/2)^{n-1},$$

y como $u, v \in \ell_2$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 < \infty,$$

luego la cola de u, v tiende a cero, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ representa la cola de la suma $Au + Bv$ en consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

por otro lado,

$$(s/2)^{n-1} + (n-1)(s/2)^{n-1}$$

crece cuando n tiende a infinito, y por tanto, $A = B = 0$, es decir $x = 0$, pero, $f'(0) = 16e_1$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: $|s| < 2$.

La ecuación característica tiene dos raíces complejas dadas por

$$\alpha = cos\theta + isen\theta \quad \text{y} \quad \beta = cos\theta - isen\theta, \quad sen\theta \neq 0.$$

Entonces, por el teorema (1.14) tenemos que, existen constantes C_{ij} tales que, para $n \geq 1$,

$$x_n = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{1-1} C_{ij} n^j r_i^{n-1} = \sum_{i=1}^{2} C_i r_i^{n-1},$$

en consecuencia, la solución mas general viene dada por,

$$\begin{aligned} x_n &= A(cos\theta + isen\theta)^{n-1} + B(cos\theta - isen\theta)^{n-1}, \ n \geq 1 \\ &= (A+B)cos((n-1)\theta) + i(A-B)sen((n-1)\theta). \end{aligned}$$

Pero, $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ debe pertenecer a ℓ_2, así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

y, para que esto ocurra se debe cumplir que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pero,

$$cos((n-1)\theta) \quad \text{y} \quad sen((n-1)\theta)$$

oscila cuando n tiende a infinito, luego,

$$A + B = A - B = 0 \Longrightarrow A = B = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Caso 3. $|s| > 2$.
Tenemos entonces dos raíces reales

$$\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4}}{2}.$$

Claramente, una de estas raíces tiene valor absoluto más grande que 1 y la otra más pequeña 1.
Supongamos que $|\alpha| > 1$ y $|\beta| < 1$.
Continuando, por teorema (1.14) tenemos que la solución mas general en este caso es

$$x_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}, \ n \geq 1,$$

y, para que la solución converja debe cumplirse que $A = 0$.

Luego, tenemos que, $x_1 = B\beta^{1-1} = B$, por lo tanto, $B = x_1$, así,

$$x_n = x_1\beta^{n-1} \ n \geq 1.$$

En consecuencia, x es la progresión geométrica $x = (x_1, x_1\beta, x_1\beta^2, x_1\beta^3, ...)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (x_1 \beta^{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_1^2 \beta^{2(i-1)} \\
&= \frac{x_1^2}{1-\beta^2}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\|x - T(x)\|^2 = \langle x - T(x), x - T(x) \rangle.$$

Pero,

$$R(x) = (0, x_1, x_1\beta, x_1\beta^2, ...),$$

por lo que,

$$
\begin{aligned}
T(x) &= (\frac{1}{2} - \frac{x_1^2}{1-\beta^2})e_1 + (0, x_1, x_1\beta, x_1\beta^2, ...) \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{x_1^2}{1-\beta^2}, x_1, x_1\beta, x_1\beta^2, ...),
\end{aligned}
$$

y,

$$
\begin{aligned}
x - T(x) &= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2}, x_1\beta - x_1, x_1\beta^2 - x_1\beta, x_1\beta^3 - x_1\beta^2, ...) \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2}, x_1(\beta - 1), x_1\beta(\beta - 1), x_1\beta^2(\beta - 1), ...).
\end{aligned}
$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|x - T(x)\|^2 &= \langle x - T(x), x - T(x) \rangle \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(\beta - 1)^2 + x_1^2\beta^2(\beta-1)^2 + x_1^2\beta^4(\beta-1)^2 + ... \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(\beta - 1)^2(1 + \beta^2 + \beta^4 + \beta^6 + ...) \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(\beta - 1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(\beta - 1)^2 \frac{1}{1-\beta^2} \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(-1(1-\beta))^2 \frac{1}{(1-\beta)(1+\beta)} \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + x_1^2(1-\beta)^2 \frac{1}{(1-\beta)(1+\beta)} \\
&= (x_1 - \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{1-\beta^2})^2 + \frac{x_1^2(1-\beta)}{1+\beta},
\end{aligned}$$

y a partir de que $sx = T(x) + L(x)$ tenemos que,

$$(sx_1, s\beta x_1, s\beta^2 x_1, ...) = (1/2 - \|x\|^2 + \beta x_1, x_1 + \beta^2 x_1, \beta x_1 + \beta^3 x_1, ...),$$

de aquí,

$$sx_1 = \frac{1}{2} - \|x\|^2 + \beta x_1 \implies sx_1 - \frac{1}{2} + \|x\|^2 - \beta x_1 = 0, \tag{3.2}$$

y,

$$s\beta x_1 = x_1 + \beta^2 x_1 \implies s = \frac{1}{\beta} + \beta.$$

En consecuencia,

$$s - \beta = \frac{1}{\beta}. \tag{3.3}$$

Ahora, siguiendo con (3.2) tenemos que,

$$\frac{x_1^2}{1-\beta^2} + (s-\beta)x_1 - \frac{1}{2} = 0,$$

luego, por (3.3) obtenemos

$$\frac{x_1^2}{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta}x_1 - \frac{1}{2} = 0, \tag{3.4}$$

esto implica que,

$$x_1^2 + \frac{(1-\beta^2)x_1}{\beta} - \frac{1}{2}(1-\beta^2) = 0. \tag{3.5}$$

Por otro lado, siguiendo con (3.4) tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{1-\beta^2} - \frac{1}{2} = -\frac{x_1}{\beta} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x_1^2}{1-\beta^2} - \frac{1}{2} + x_1 = x_1 - \frac{x_1}{\beta} \\
&\Longrightarrow \quad (\frac{x_1^2}{1-\beta^2} - \frac{1}{2} + x_1)^2 = x_1^2\frac{(\beta-1)^2}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|x - T(x)\|^2 &= \frac{x_1^2(1-\beta)}{1+\beta} + \frac{x_1^2(\beta-1)^2}{\beta^2} \\
&= x_1^2(1-\beta)[\frac{1}{1+\beta} + \frac{1-\beta}{\beta^2}] \\
&= x_1^2(1-\beta)[\frac{\beta^2+1-\beta^2}{\beta^2(1+\beta)}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x - T(x)\|^2 = \frac{x_1^2(1-\beta)}{\beta^2(1+\beta)}. \tag{3.6}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\beta + \frac{1}{\beta} &= \frac{s - \sqrt{s^2-4}}{2} + \frac{2}{s - \sqrt{s^2-4}} \\
&= \frac{(s - \sqrt{s^2-4})^2 + 4}{2s - 2\sqrt{s^2-4}} \\
&= \frac{s^2 - 2s\sqrt{s^2-4} + s^2 - 4 + 4}{2(s - \sqrt{s^2-4})} \\
&= \frac{2(s^2 - s\sqrt{s^2-4})}{2(s - \sqrt{s^2-4})} \\
&= \frac{s(s - \sqrt{s^2-4})}{(s - \sqrt{s^2-4})} \\
&= s.
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior y (3.6) en (3.1) tenemos,

$$\beta + \frac{1}{\beta} = s = \frac{x_1^2(1-\beta)}{\beta^2(1+\beta)} \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2-x_1^2} + 1 + 2x_1 + 2\frac{x_1^2}{1-\beta^2},$$

de lo que se obtiene,

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{x_1^2(1-\beta)(1-\beta^2)}{\beta(1+\beta)(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + 2x_1\beta - \beta^2 + \frac{2x_1^2\beta}{1-\beta^2} \\
1 &= \frac{x_1^2(1-\beta)(1-\beta)}{\beta(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + \beta(2x_1-\beta) + \frac{2x_1^2\beta}{1-\beta^2} \\
1 &= \frac{x_1^2(1-\beta)^2}{\beta(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + \beta(2x_1-\beta) + \frac{(1-\beta^2)(\beta-2x_1)\beta}{\beta(1-\beta^2)} \\
1 &= \frac{x_1^2(1-\beta)^2}{\beta(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + \beta(2x_1-\beta) + (\beta-2x_1) \\
1 &= \frac{(1-\beta^2)(\beta-2x_1)(1-\beta)^2}{2\beta\beta(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + \beta(2x_1-\beta) + (\beta-2x_1) \\
1 &= \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2(\beta-2x_1)}{2\beta^2(1-x_1^2-\beta^2)} + \beta + \beta(2x_1-\beta) + (\beta-2x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2(\beta-2x_1)}{2\beta^2(1-x_1^2-\beta^2)}+\beta+(1-\beta)(\beta-2x_1)\\
1 &= (1-\beta)(\beta-2x_1)[1+\frac{(1-\beta^2)(1-\beta)}{2\beta^2(1-x_1^2-\beta^2)}]+\beta\\
(1-\beta) &= (1-\beta)(\beta-2x_1)[1+\frac{(1-\beta^2)(1-\beta)}{2\beta^2(1-x_1^2-\beta^2)}].
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$1=(\beta-2x_1)[1+\frac{(1-\beta^2)(1-\beta)}{2\beta^2(1-x_1^2-\beta^2)}]. \tag{3.7}$$

Viendo (3.5) como una ecuación de segundo grado, consideremos dos subcasos,

Caso 1:

$$x_1=\frac{-1+\beta^2-\sqrt{1-\beta^4}}{2\beta}. \tag{3.8}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\beta x_1-\beta^2=-1-\sqrt{1-\beta^4} &\implies \beta(2x_1-\beta)=-1-\sqrt{1-\beta^4}\\
&\implies \beta-2x_1=\frac{1+\sqrt{1-\beta^4}}{\beta}.
\end{aligned}$$

Y, como $|\beta|<1$ tenemos que, $-1<\beta<1$, para el caso que $0<\beta<1$, se cumple

$$\frac{1}{\beta}>1,$$

además,

$$1+\sqrt{1-\beta^4}>1,$$

en consecuencia,

$$\frac{1+\sqrt{1-\beta^4}}{\beta} > 1+\sqrt{1-\beta^4} > 1 \implies \frac{1+\sqrt{1-\beta^4}}{\beta} > 1.$$

En el caso que $-1 < \beta < 0$, se cumple que,

$$\frac{1}{\beta} < -1,$$

de lo que se obtiene,

$$\frac{1+\sqrt{1-\beta^4}}{\beta} < (-1)(1+\sqrt{1-\beta^4}) < -1 \implies \frac{1+\sqrt{1-\beta^4}}{\beta} < -1,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \|x\| < 1 &\implies \|x\|^2 < 1 \\ &\implies \frac{x_1^2}{1-\beta^2} < 1 \\ &\implies x_1^2 < 1-\beta^2 \\ &\implies x_1^2+\beta^2 < 1. \end{aligned}$$

De esto y de (3.7) tenemos que, $0 < \beta - 2x_1 < 1$, lo cual es una contradicción.

Caso 2:

$$x_1 = \frac{-1+\beta^2+\sqrt{1-\beta^4}}{2\beta}. \tag{3.9}$$

Notando que,

$$1-x_1^2-\beta^2 = \frac{1}{2\beta}(1-\beta^2)(\beta+2x_1).$$

Se sigue de (3.7) que,

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^4})\frac{2\beta^2-\beta+\sqrt{1-\beta^4}}{2\beta^2-1+\sqrt{1-\beta^4}} \\
\beta(2\beta^2-1+\sqrt{1-\beta^4}) &= (1-\sqrt{1-\beta^4})(2\beta^2-\beta+\sqrt{1-\beta^4}) \\
2\beta^3 &= (1-\sqrt{1-\beta^4})(2\beta^2+\sqrt{1-\beta^4}) \\
2(1+\sqrt{1-\beta^4}) &= \beta(2\beta^2+\sqrt{1-\beta^4}) \\
2(1-\beta^3) &= (\beta-2)\sqrt{1-\beta^4}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es una contradicción.
De los tres casos anteriores obtenemos que la ecuación $f'(x)=0$ no tiene solución en U, en consecuencia aunque, se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle, éste no se cumple. ■

§3.2. Teorema de valor medio.

Contrario a lo que podríamos pensar el teorema del valor medio se satisface para espacios de dimensión infinita, sin embargo, no podemos garantizar la igualdad en dicho teorema, pero podemos dar una generalización de éste en forma de desigualdad.

Teorema 3.1. *(Desigualdad del valor Medio) Sean E, F espacios normados, $X \subset E$, un subconjunto abierto, $f : X \to F$ una aplicación diferenciable en X y $x, y \in X$ tales que $[x, y] \subset X$. Entonces,*

$$\|f(y)-f(x)\| \leq \underset{z\in[x,y]}{sup} \|Df(z)\| \cdot \|y-x\|$$

Demostración: Tomemos una aplicación arbitraria φ en el espacio dual de F y consideremos la aplicación

$$g(t) = \varphi(f((1-t)x+ty))$$

definida para $0 \leq t \leq 1$. Como φ es una aplicación lineal continua tenemos que es diferenciable y $D\varphi(b) = \varphi$ para $b \in F$. Además tenemos que $f((1-t)x+ty)$ es diferencaible en t por ser compuesta de dos funciones diferenciables, así mismo g es diferenciable y

$$Dg(t) = \varphi(Df((1-t)x + ty)(y-x)). \tag{3.10}$$

Luego, aplicando el teorema del Valor Medio para una función real de variable real a g en $[0,1]$ tenemos que

$$g(1) - g(0) = Dg(\theta),$$

donde $0 < \theta < 1$ (θ depende de φ). Entonces, de esta última igualdad y de (3.10)

$$\varphi(f(y) - f(x)) = \varphi(Df((1-\theta)x + \theta y)(y-x)), \tag{3.11}$$

y esto vale para cualquier φ en el espacio dual de F. Deducimos de (3.11) que

$$\begin{aligned} |\varphi(f(y) - f(x))| &\leq \|\varphi\| \cdot \|Df((1-\theta)x + \theta y)\| \cdot \|y-x\| \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|Df((1-\theta)x + \theta y)\| \cdot \|y-x\|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, podemos garantizar la existencia de un funcional ϕ en el dual de F con $\|\phi\| \neq 0$, tal que $\phi(w) = \|\phi\| \cdot \|w\|$ para $w \in F$. Particularizando (3.12) al funcional ϕ y sabiendo que

$$\phi(f(y) - f(x)) = \|\phi\| \cdot \|f(y) - f(x)\|,$$

tenemos,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{z\in[x,y]} \|Df(z)\| \cdot \|y-x\|.$$

■

Referencias

[1] Conway J.B, *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] Crowell, Williamson y Trotter, *Cálculo de funciones vectoriales*, Editorial Prentice/Hall Internacional, Bogotá, 1975.

[3] Ferrer J, *Rolle's Theorem fails in* l_2, Am. Math. Monthly, 102 (1996), 161-165.

[4] Furi Massimo and Mario Martelli, *A Multidimensional Version of Rolle's Theorem*, Am. Math. Monthly, 102 (1995), 243-249.

[5] Rudin, W, *Functional Analysis*, Mac. Graw-Hill, 1973.

[6] Sanderson D. E, *A versatile Vector Mean Value Theorem*, Am. Math. Monthly, 79 (1972), 381-383.

[7] Spivak, Michael, *Calculus*, cálculo infinitesiaml, Editorial Reverté, S.A., 2005.