

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas.



*Estudio de un Método de Continuación
No-Interior para Problemas de
Complementariedad Lineal*

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Joel J. Rivero M.

Como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Matemática Aplicada.

Tutor: Dr. Alí Duin.

Barquisimeto - Venezuela

Marzo 2009



Universidad Centroccidental
 “Lisandro Alvarado”
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“ESTUDIO DE UN MÉTODO DE CONTINUACIÓN NO-INTERIOR
 PARA PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL”

presentado por el ciudadano BR. JOEL J. RIVERO M. titular de la Cédula de Identidad No. 18.194.531, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

*Para los dos seres mas importantes en
mí vida... Ana y José Rivero. Muchas
gracias por todo.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme llegar hasta aquí y por haberme ayudado en todo, reconozco que si no fuera por El nada hubiese podido hacer. Hoy puedo ver más que nunca en mi vida lo que dice Filipenses 4:13, Todo lo puedo en Cristo que me fortalece.

A mis padres Ana de Rivero y José Rivero por su gran ayuda, estímulo y oraciones que a lo largo de la vida me han dado, se quedan cortas las palabras para expresar este gran amor que siento por ustedes; no sabré como pagarles todo lo que han hecho por mi. Dios los bendiga y les multiplique cada día las bendiciones que me han dado. Los amo mucho.

A mi hermano Gabriel por ser una inspiración a seguir adelante y deseo de todo corazón verte muy pronto con un título en la mano.

A mi hermosa novia Lismary Vegas por su paciencia, oraciones y ayuda en los momentos difíciles. Mil gracias.

A todos mis familiares y a la Fraternidad El Roí por su ayuda y sus continuas oraciones.

A mi tutor Alí Duin por su paciencia y dedicación durante todo este recorrido, todas tus ideas se encuentran plasmada en esta tesis. Gracias por ser más que un profesor, eres un amigo.

Al Prof. Javier Hernández. Su gran colaboración fue esencial en la realización de este trabajo.

Al Profesor Rómulo Castillo por sus consejos y dedicación en el desarrollo de esta tesis; de igual forma al Profesor Eibar Hernández por todo el conocimiento que con gran dedicación me transmitió.

A mis amigos Maria, Luis, José, Tony y Marylin por todos esos agradables momentos dentro y fuera de la universidad, ya hayan sido estudiando hasta tarde o saliendo a distraernos. Nunca olvidaré esta linda amistad y se que durará por siempre.

Por último y no menos importante a la familia Almao por su gran ayuda, confianza y amor brindados desde el momento que empecé con esta carrera.

RESUMEN

En este trabajo se estudiará en detalle el método desarrollado por Christian Kanzow [10], el cual fue diseñado para resolver el Problema de Complementariedad Lineal. Dicho procedimiento se guía por una trayectoria. Este tipo de método tiene una estrategia similar a los métodos de punto interior, pero se diferencia de ellos en que no se mantienen en el octante positivo. La causa de tal comportamiento radica en que para resolver el Problema de Complementariedad Lineal, se resuelve una secuencia de problemas, que son una perturbación del problema original, que a su vez son reformulados como sistemas de ecuaciones equivalentes a cada problema perturbado. Al igual que los métodos de punto interior, la generación de los problemas perturbados está guiada por un parámetro $\mu > 0$.

En el capítulo 1 se comenzará con una revisión de los conceptos fundamentales de los problemas de complementariedad lineal; (ver [5]), a su vez se definen algunas herramientas importantes para encontrar la solución de este problema a través de una secuencia de problemas perturbados; también se compara el acercamiento estudiado aquí con un método reciente de Chen y Harker [2], que es muy similar a este; en realidad, se puede mostrar que su método puede ser visto como una variante escalada de uno de los métodos estudiados en Kanzow [10]. En el capítulo 2, se muestran algunos resultados que conciernen a la existencia y la unicidad de la solución z^* del $PLCP(q, M, \mu)$ (ver [4]). Algunas cotas de error globales acotados se dan en el capítulo 3. En el capítulo 4 se describe detalladamente el algoritmo puesto en práctica y presentará un resultado de convergencia global para este método. Por último en el capítulo 5 se expresan algunos resultados numéricos obtenidos a través de una programación propia del algoritmo estudiado en el capítulo 4.

INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios de los problemas de complementariedad lineal se pueden encontrar en la literatura matemática desde 1940, pero el problema recibió poca atención hasta mediados de la década de 1960 en la que se convirtió en un objeto de estudio por derecho propio.

El nombre, problema de complementariedad lineal ha sufrido varios cambios. Se ha llamado el "**Problema Compuesto**", el "**Problema Fundamental**" y el "**Problema Pivote de Complementariedad**". En 1965, el nombre actual de "**Problema de Complementariedad Lineal**" fue propuesto por **Richard W. Cottle**. Posteriormente se utiliza en un paper de **Cottle, Habetler y Lemke** (1970), (ver [17]). Probablemente la primera publicación que contenga implícitamente declarado *LCP* es uno de Du Val (1940), (ver [15]). En dicho documento, parte de la literatura de la geometría algebraica, utiliza un problema de la forma (q, M) para encontrar el elemento menor (en el sentido del vector) de la desigualdad del sistema lineal $q + Mx \geq 0, x \geq 0$. Normalmente, este tipo de problemas no tienen solución, pero cuando la matriz M tiene propiedades especiales, existe una única solución.

Los objetivos del presente trabajo son:

- Describir y detallar las condiciones matemáticas propuestas por Christian [10] para garantizar que los problemas perturbados propios del método tengan solución única.
- Estudiar cotas de error para el problema de complementariedad lineal perturbado.
- Estudiar un algoritmo que nos permita encontrar la solución del problema de complementariedad lineal.
- Dar una implementación para el algoritmo.

ÍNDICE

Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Introducción	iv
1. El Problema de Complementariedad Lineal	1
1.1. Problemas de Complementariedad Lineal.	1
1.1.1. Herramienta Principal.	2
1.1.2. Comentarios.	5
1.1.3. Definición del <i>PLCP</i> según Chen y Harker.	10
2. Metodos de Continuación	13
2.1. Operador no Lineal.	13
2.2. Condiciones KMNY.	18
3. Errores globales acotados para $PLCP(q, M, \mu)$	31
3.1. Conceptos y Lemas básicos.	31
3.2. Teorema Principal.	39
4. Implementación del algoritmo y su convergencia	43
4.1. Algoritmo Principal.	43
4.2. Convergencia del Algoritmo.	46
5. Resultados Numéricos	51
5.1. Ejemplos.	51
5.2. Tablas.	54
5.3. Notas sobre el Código.	55

A. Notas Finales

57

Referencias

59

ÍNDICE DE TABLAS

5.1. Numero de Iteraciones para el Ejemplo 1	54
5.2. Numero de Iteraciones para el Ejemplo 2	54
5.3. Numero de Iteraciones para el Ejemplo 1	54
5.4. Numero de Iteraciones para el Ejemplo 2	54

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL

Se estudiará el método presentado por Christian Kanzow presentado en [10], el cual se refiere a una metodología para resolver Problemas de Complementariedad Lineal. Estos problemas son una representación matemática que abarcan situaciones de programación cuadráticos, programación lineal entre otros.

1.1. Problemas de Complementariedad Lineal.

A continuación se presenta la definición formal del problema de complementariedad lineal.

Definición 1. El Problema de Complementariedad Lineal denotado por $LCP(q, M)$, consiste en encontrar, si existe, un vector $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, tal que:

$$x \geq 0, y \geq 0, x^T y = 0, y = Mx + q, \quad (1.1)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $q \in \mathbb{R}^n$ son dados.

Se han desarrollado varias metodologías para resolver este problema, tales como variantes del método simplex, métodos de punto interior, métodos de punto exterior. El enfoque a desarrollar en este trabajo es una estrategia de punto interior, mas específicamente de trayectoria central. Este tipo de estrategia resuelve (aproximadamente) una secuencia de problemas que son perturbaciones del problema original (1.1), con el cuidado de que cada uno tenga una única solución y además la secuencia de soluciones converge a la solución del problema (1.1). Ahora

bien, dichos problemas perturbados serán identificados mediante $PLCP(q, M, \mu)$. La definición de estos problemas perturbados depende del parámetro $\mu > 0$ y se presenta a continuación.

Definición 2. El problema perturbado asociado con (1.1) y $\mu > 0$, consiste en encontrar un vector $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$, que satisfaga las condiciones

$$x(\mu) > 0, y(\mu) > 0, x_i(\mu)y_i(\mu) = \mu, y(\mu) = Mx(\mu) + q, \quad (1.2)$$

donde $i \in \mathbb{N}$.

Nótese que no se ha escrito, encontrar un vector $z(\mu)$ si existe. La razón es que bajo ciertas condiciones el problema (1.2) tiene una única solución, para todo $\mu > 0$ y el par $(\mu, z(\mu))$ forman una trayectoria suave, usualmente llamada Camino Central (ver [8]). Al trazar esta trayectoria, cuando μ tiende a cero, se espera encontrar la solución del problema original (1.1), (ver [11][3] [7] [6]).

1.1.1. Herramienta Principal.

Los métodos de continuación no-interior a ser presentados en la sección siguiente se basan en la reformulación del $PLCP$ como sistemas de ecuaciones no lineales. Las herramientas principales usadas en esta reformulación son las funciones $\varphi_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen la propiedad:

$$\varphi_\mu(a, b) = 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0, ab = \mu, \quad (1.3)$$

donde μ es cualquier parámetro fijo positivo. En esta sección se introducirán algunas funciones φ_μ que cumplen esta propiedad.

Lema 1. La función $\varphi_\mu(a, b) = a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}$ cumple con la Propiedad (1.3).

Demostración. \Rightarrow Suponga que $\varphi_\mu(a, b) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu} &= 0 \\
 a + b &= \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu} > 0 \\
 (a + b)^2 &= (a - b)^2 + 4\mu \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + 4\mu \\
 a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 &= 4\mu \\
 4ab &= 4\mu \\
 ab &= \mu
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dado que por definición $\mu > 0$, se cumple que:

$$\text{Sign}(a) = \text{Sign}(b)$$

Ademas por (1.4), se tiene lo siguiente:

$$a > 0 \text{ y } b > 0.$$

\Leftarrow Asuma que $a > 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_\mu(a, b) &= a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4ab} \\
 &= a + b - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab} \\
 &= a + b - \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \\
 &= a + b - \sqrt{(a + b)^2} \\
 &= a + b - |(a + b)|
 \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $a > 0$ y $b > 0$ entonces $(a + b) > 0$, así: $|(a + b)| = (a + b)$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \varphi_\mu(a, b) &= (a + b) - (a + b) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Así se ha probado que φ_μ cumple con (1.3). □

Lema 2. La función $\varphi_\mu(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}$ cumple con la Propiedad (1.3).

Demostración. \Rightarrow Considerese que $\varphi_\mu(a, b) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} &= 0 \\
 a + b &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} > 0 & (1.5) \\
 (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2\mu \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + b^2 + 2\mu \\
 a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 &= 2\mu \\
 2ab &= 2\mu \\
 ab &= \mu
 \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\mu > 0$, se tiene que:

$$\text{Sign}(a) = \text{Sign}(b)$$

Considerando (1.5), se tiene lo siguiente:

$$a > 0 \text{ y } b > 0.$$

\Leftarrow Suponga que $a > 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$, se mostrará que $\varphi_\mu(a, b) = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \varphi_\mu(a, b) &= a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} \\
 &= a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} \\
 &= a + b - \sqrt{(a + b)^2} \\
 &= a + b - |(a + b)|
 \end{aligned}$$

Considerando que $a > 0$ y $b > 0$, entonces $(a + b) > 0$, así: $|(a + b)| = (a + b)$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
 \varphi_\mu(a, b) &= (a + b) - (a + b) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_μ cumple con (1.3). \square

1.1.2. Comentarios.

Comentario 1. Para el caso especial $\mu = 0$, la función introducida en el Lema 1 se reduce a la función del mínimo usada, por Pang [13], [14] para caracterizar el problema de complementariedad como un sistema de ecuaciones (no suave). Por otro lado, la función del Lema 2, para $\mu = 0$ coincide con una función recientemente introducida por Fischer [1], que ha sido como consecuencia usada por varios autores.

Comentario 2. Sea φ_μ denotando la función definida en el Lema 1 o 2; entonces φ_μ es continuamente diferenciable para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y además

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a}(a, b), \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b}(a, b) \in (0, 2).$$

Para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. En efecto se demostrará esto, para ello se considerará la función dada por el Lema 1.

Así se tiene por un lado que:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a}(a, b) = 1 - \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + 4\mu &> (a - b)^2 \quad (\text{dado que } \mu > 0) \\ \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu} &> |a - b| \\ 1 &> \frac{|a - b|}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que,

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} < 1 \\ -1 &< -\frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} < 1 \\ 0 &< 1 - \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} < 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a}(a, b) \in (0, 2)$.

Por otro lado,

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b}(a, b) = 1 + \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}}$$

Luego de forma análoga se cumple que:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + 4\mu &> (a - b)^2 \quad (\text{dado que } \mu > 0) \\ \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu} &> |a - b| \\ 1 &> \frac{|a - b|}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} \end{aligned}$$

Así se obtiene que,

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} < 1 \\ 0 &< 1 + \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} < 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a}(a, b) \in (0, 2)$.

De forma análoga se procede para el caso cuando $\varphi_\mu(a, b)$ esté dada por el Lema 2. \square

Esta propiedad resulta ser importante para el desarrollo de los capítulo siguiente.

Comentario 3. Además de las funciones estudiadas anteriormente, se han encontrado dos funciones que tienen la Propiedad (1.3), a saber:

$$\varphi_\mu(a, b) = \frac{1}{2}(\min\{0, a + b\})^2 - ab + \mu \quad (1.6)$$

$$\varphi_\mu(a, b) = (a - b)^2 - a|a| - b|b| + 2\mu \quad (1.7)$$

Demostración. En efecto, se demostrará en primer lugar que (1.6) cumple con (1.3).

Supóngase que $a > 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$, así se cumple que:

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(a, b) &= \frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2 - ab + \mu \\ &= \frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2 - ab + ab \\ &= \frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2\end{aligned}$$

Ahora bien, el $\text{mín}\{0, a + b\} = 0$ dado que $(a + b) > 0$.

Luego,

$$\varphi_\mu(a, b) = \frac{1}{2}(0)^2$$

Por lo tanto

$$\varphi_\mu(a, b) = 0$$

Ahora se mostrará que si $\varphi_\mu(a, b) = 0$, entonces $a > 0, b > 0$ y $ab = \mu$.

Para ello resolvamos por reducción al absurdo. Supóngase que:

$$a \leq 0 \text{ ó } b \leq 0 \text{ ó } ab \neq \mu.$$

En efecto, sea $a \leq 0$ y $\varphi_\mu(a, b) = 0$, así:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2 - ab + \mu &= 0 \\ \frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2 + \mu &= ab\end{aligned}$$

Dado que el $(\text{mín}\{0, a + b\})^2 \geq 0$ y por definición $\mu > 0$, se cumple que:

$$\frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a + b\})^2 + \mu > 0$$

Así,

$$ab > 0.$$

Por lo que el $\text{Sign}(a) = \text{Sign}(b)$, luego suponga que $a < 0$ y $b < 0$, así:

$$\text{mín}\{0, a + b\} = (a + b)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b)^2 + \mu &= ab \\ \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + \mu &= ab \\ \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 + \mu &= ab \\ \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \mu &= 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \mu &= 0\end{aligned}$$

Así se debe cumplir que $\mu < 0$, lo que contradice la definición donde $\mu > 0$.

Se procede de forma similar si se supone que $b \leq 0$ y $\varphi_\mu(a, b) = 0$

Por otro lado, considérese el caso en el cual: $\mu \neq ab, a > 0, b > 0$, luego $(\text{mín}\{0, a+b\})^2 = 0$.

Dado que $\varphi_\mu(a, b) = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\text{mín}\{0, a+b\})^2 - ab + \mu &= 0 \\ -ab + \mu &= 0 \\ \mu &= ab\end{aligned}$$

Lo que contradice la suposición de que $\mu \neq ab$.

Ahora consideremos la ecuación (1.7) y se mostrará que cumple con la condición (1.3).

Se demostrará que $\varphi_\mu(a, b) = 0$, tomando en cuenta que $a > 0, b > 0$ y $ab = \mu$.

En efecto, dado que $a > 0, b > 0$ por definición de valor absoluto se cumple lo siguiente:

$$|a| = a \quad \text{y} \quad |b| = b$$

Así,

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(a, b) &= (a - b)^2 - a(a) - b(b) + 2ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora se demostrará que si $\varphi_\mu(a, b) = 0$, entonces $a > 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$.

Resolviendo por reducción al absurdo. Supóngase que $a \leq 0$ ó $b \leq 0$ ó $ab \neq \mu$. Considérese en primer lugar el caso en que $a < 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$. Por definición de valor absoluto se cumple que $|a| = -a$, además por otra parte $\varphi_\mu(a, b) = 0$, así:

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(a, b) &= (a - b)^2 - a|a| - b|b| + 2\mu \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - a(-a) - b(b) + 2(ab) \\ &= 2a^2 > 0 \text{ (dado que } a < 0\text{)}\end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $\varphi_\mu(a, b) = 0$.

Es obvio para el caso cuando $a = 0$, $b > 0$ y $ab = \mu$. De forma similar se procede si consideramos que $b \leq 0$.

Por otro lado supongamos que $ab \neq \mu$. Del hecho de que $a > 0$, $b > 0$ y $\varphi_\mu(a, b) = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 - a|a| - b|b| + 2\mu &= 0 \\ (a - b)^2 - a(a) - b(b) + 2\mu &= 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2\mu &= 0 \\ -2ab + 2\mu &= 0 \\ \mu &= ab\end{aligned}$$

Así se obtiene una contradicción con el hecho de que $ab \neq \mu$.

□

1.1.3. Definición del *PLCP* según Chen y Harker.

En primer lugar, tengase en cuenta que también es posible utilizar las herramientas anteriores para caracterizar el problema perturbado de la siguiente forma:

$$x > 0, Mx + q > 0, x_i[Mx + q]_i = \mu \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.8)$$

Lo cual es obviamente equivalente al *PLCP*(q, M, μ); es decir (1.2). Considerando las funciones de los Lemas 1 y 2, respectivamente, obtenemos las siguientes caracterizaciones de (1.8):

$$x_i + [Mx + q]_i - \sqrt{(x_i - [Mx + q]_i)^2 + 4\mu} = 0 \quad (1.9)$$

$$x_i + [Mx + q]_i - \sqrt{x_i^2 + [Mx + q]_i^2 + 2\mu} = 0 \quad (1.10)$$

Por otro lado, Chen y Harker [20] dan la siguiente reformulación de (1.8):

$$m_{ii}x_i + [Mx + q]_i - \sqrt{(m_{ii}x_i - [Mx + q]_i)^2 + 4m_{ii}\mu} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.11)$$

Esta formulación es muy similar a la caracterización (1.9), pero tiene la desventaja que todas las entradas diagonales de M deben ser positivas (por otra parte (1.11) no es equivalente a (1.8)). Si éste es el caso, sin embargo, también es posible al reformular el problema (1.8) como sigue:

$$m_{ii}x_i + [Mx + q]_i - \sqrt{(m_{ii}x_i)^2 + [Mx + q]_i^2 + 2m_{ii}\mu} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.12)$$

Esta formulación puede considerarse como la contraparte de (1.10). Note que las caracterizaciones (1.9) y (1.11) coincide si todos los elementos diagonales de M son iguales a uno. Bajo esta suposición, las reformulaciones (1.10) y (1.12) son también equivalentes.

Ahora sea $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cualquier matriz con la diagonal definida positiva, entonces

$$Sy \geq 0 \iff y \geq 0.$$

Para un vector $y \in \mathbb{R}^n$, así $LCP(q, M)$ es equivalente a:

$$x \geq 0, S(Mx + y) \geq 0, x^T(Mx + q) = 0. \quad (1.13)$$

Los métodos de punto interior para el problema (1.13) intenta resolver el correspondiente problema perturbado

$$x \geq 0, S(Mx + y) \geq 0, x_i(Mx + q)_i = \mu \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.14)$$

Si M tiene entradas diagonales positivas y si se define:

$S = \text{diag}(1/m_{11}, \dots, 1/m_{ii}, \dots, 1/m_{nn})$ entonces la matriz $M = SM$ tiene entradas de la unidad en su diagonal. Por consiguiente, la caracterización de Chen y Harker para este problema escalar es exactamente la caracterización (1.9) para este problema; es decir, el método de Chen y Harker puede considerarse como una variante escalar de uno de los métodos a ser presentados en este trabajo. Por consiguiente, es bastante natural aplicar las herramientas de la sección anterior a los problemas escalares (1.13) y (1.14).

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE CONTINUACIÓN

En este estudio la parametrización se hace sobre un operador no lineal $F_{\Psi_\mu}(z)$, al resolver el sistema $F_{\Psi_\mu}(z) = 0$ se resuelve el problema perturbado (1.2) para un μ específico. A continuación se definirá dicho operador.

2.1. Operador no Lineal.

Tómese $\mu > 0$, a lo largo de esta sección y $\varphi_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ denotando las funciones dadas en el lema 1 o 2. Se definirá el operador no lineal $F_{\Psi_\mu} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como sigue:

$$F_{\Psi_\mu}(z) = F_{\Psi_\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} Mx + q - y \\ \Psi_\mu(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Donde $z \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\Psi_\mu : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, está definida de la siguiente forma:

$$\Psi_\mu(x, y) = (\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_2, y_2), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n))^T \in \mathbb{R}^n$$

De aquí se obtiene como una consecuencia directa de los lemas 1 y 2 la siguiente caracterización del $PLCP(q, M, \mu)$.

Teorema 1. *Un vector $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$ es una solución del $PLCP(q, M, \mu)$, si y sólo si $z(\mu)$ satisface la ecuación no lineal $F_{\Psi_\mu}(z) = 0$.*

Demostración. En efecto, supóngase que $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$ es una solución del $PLCP(q, M, \mu)$.

Así, $z(\mu)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $x(\mu) > 0$

2. $y(\mu) > 0$
3. $x_i(\mu)y_i(\mu) = \mu$
4. $y(\mu) = Mx(\mu) + q$ (por (1.2))

Ahora bien, considerando las tres primeras condiciones, $x(\mu)$ y $y(\mu)$ cumple con las condiciones del recíproco de (1.3), por lo tanto:

$$\varphi_\mu(x_i(\mu), y_i(\mu)) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

mas aún,

$$\Psi_\mu(x(\mu), y(\mu)) = 0. \quad (2.2)$$

Por otro lado, de la última condición se tiene

$$Mx(\mu) + q - y(\mu) = 0. \quad (2.3)$$

Dado que

$$F_{\Psi_\mu}(z(\mu)) = \begin{pmatrix} Mx(\mu) + q - y(\mu) \\ \Psi_\mu(x(\mu), y(\mu)) \end{pmatrix},$$

sustituyendo (2.2) y (2.3) en la matriz anterior,

$$F_{\Psi_\mu}(z(\mu)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$F_{\Psi_\mu}(z(\mu)) = 0.$$

Así se ha demostrado que si $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$ es una solución del $PLCP(q, M, \mu)$, entonces $z(\mu)$ satisface la ecuación no lineal $F_{\Psi_\mu}(z) = 0$.

Suponga que $z(\mu)$ satisface la ecuación no lineal $F_{\Psi_\mu}(z) = 0$. Luego, por definición de $F_{\Psi_\mu}(z)$

$$\begin{pmatrix} Mx(\mu) + q - y(\mu) \\ \Psi_\mu(x(\mu), y(\mu)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí, por un lado $Mx(\mu) + q - y(\mu) = 0$,

$$y(\mu) = Mx(\mu) + q. \quad (2.4)$$

Por otro lado, $\Psi_\mu(x(\mu), y(\mu)) = 0$, por lo tanto $\varphi_\mu(x_i(\mu), y_i(\mu)) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir $\varphi_\mu(x(\mu), y(\mu)) = 0$ que a su vez por el directo de (1.3) se tiene que:

$$x(\mu) > 0, \quad y(\mu) > 0 \quad \text{y} \quad x_i(\mu)y_i(\mu) = \mu. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, de (2.4) y (2.5) se tiene que $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu))$ es solución del $PLCP(q, M, \mu)$. \square

Se estudiará ahora el siguiente método (teórico) de continuación, una variante que puede llevarse a cabo de este algoritmo se describirá en Capitulo 5.

Algoritmo 1.

(S.0) : Escoge $z^0 = (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$, sea $k=0$ y $\{\mu_k\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión estrictamente decreciente con el $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$.

(S.1) : Detener el algoritmo si $z^k = (x^k, y^k)$ es solución del $LCP(q, M)$.

(S.2) : Encontrar una solución $z^{k+1} = z(\mu_{k+1})$ del sistema de ecuaciones no lineales

$$F_{\Psi_{\mu_{k+1}}}(z) = 0$$

(o equivalentemente del $PLCP(q, M, \mu_{k+1})$).

(S.3) : Fijo $k = k + 1$ y va a **(S.1)**.

Para que el algoritmo 1 esté bien definido, se tiene que garantizar que los problemas perturbados tengan una (única) solución z^{k+1} . Dado que desde el punto de vista del computador, al ejecutar un programa no debería llegar a un estado de indefinición esto es, en cada paso el computador debe tener definida la instrucción siguiente. Una condición muy conocida que garantiza la existencia y unicidad de la solución es que esa matriz M sea semidefinida positiva y que allí exista un

vector estrictamente factible \hat{x} (es decir, $\hat{x} > 0$ y $M\hat{x} + q > 0$). Esta condición se pueden debilitar, pero para ello se requiere de las siguientes definiciones.

Definición 3. Una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es:

- a) Una P_0 -matriz $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \neq 0$ y $x_i[Mx]_i \geq 0$;
- b) Una P -matriz $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \neq 0$ y $x_i[Mx]_i > 0$;
- c) Una R_0 -matriz $\Leftrightarrow LCP(0, M)$ tiene a $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ como única solución.

Como consecuencia de estas definiciones se pueden señalar algunos lemas que serán de gran importancia a la hora de implementar el algoritmo.

Lema 3. Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- a) Si M es una matriz definida positiva, entonces M es P -matriz.
- b) Si M es una matriz semidefinida positiva, entonces M es P_0 -matriz.

Demostración.

- a) Resolvamos por reducción al absurdo, suponga que M no es P -matriz. Así,

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}, \bar{x}_i = 0 \vee \bar{x}_i[M\bar{x}]_i < 0$$

Definamos los siguientes conjuntos:

$$I_1 = \{i \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \bar{x}_i = 0\}$$

$$I_2 = \{i \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \bar{x}_i[M\bar{x}]_i < 0\}$$

Tómese $I = I_1 \cup I_2$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$.

Ahora bien, dado que M es una matriz definida positiva, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{x} \neq 0$ se cumple:

$$\begin{aligned} 0 < \bar{x}^T M \bar{x} &= \sum_{i \in I} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i = \sum_{i \in (I_1 \cup I_2)} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i \\ &= \sum_{i \in I_1} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i + \sum_{i \in I_2} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i \\ &= 0 + \sum_{i \in I_2} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i = \sum_{i \in I_2} \bar{x}_i[M\bar{x}]_i < 0. \end{aligned}$$

De aquí obtiene una contradicción, dado que es falso que $0 < 0$.

Por lo tanto, M es una P -matriz.

b) Se resuelve de forma análoga que la parte (a).

□

De las definición anterior también se puede ver que toda P -matriz es una P_0 y R_0 -matriz.

Lema 4. *Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cualquiera. Si M es P -matriz, entonces M es una P_0 y R_0 -matriz.*

Demostración. En efecto, sea M una P -matriz, entonces por definición se cumple que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \text{ existe } i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \neq 0 \text{ y } x_i[Mx]_i > 0$$

Así,

$$x_i[Mx]_i > 0 \Rightarrow x_i[Mx]_i \geq 0$$

Por lo tanto, M es una P_0 -matriz.

Por otro lado se mostrará que M es una R_0 -matriz, para ello se resolverá por reducción al absurdo. Suponga que M no es una R_0 -matriz.

Así, existe una solución $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ del $LCP(0, M)$, tal que $(\hat{x}, \hat{y}) \neq (0, 0)$. Luego, $LCP(0, M)$ equivale al siguiente problema:

Encontrar, si existe $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tales que:

$$\hat{x} \geq 0, \hat{y} \geq 0, \hat{x}^T \hat{y} = 0 \text{ y } \hat{y} = M\hat{x} \quad (2.6)$$

Por hipótesis M es una P -matriz, así existe $i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i[M\hat{x}]_i &> 0 \\ \hat{x}_i[\hat{y}]_i &> 0 \text{ (por (2.6))} \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{x}^T \hat{y} > 0$$

Lo que contradice el hecho de que \hat{z} es solución de $LCP(0, M)$, ya que se debe cumplir que $\hat{x}^T \hat{y} = 0$.

Por lo tanto M es una R_0 -matriz. \square

2.2. Condiciones KMNY.

Anteriormente las condiciones que garantizaban la unicidad de la solución del problema (1.2) en el algoritmo 1 eran:

M debía ser una matriz semidefinida positiva y que allí debía de existir un vector estrictamente factible. Estas condiciones fueron debilitadas por Kojima, Meggido y Noma [3]. Considerando esto las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de la solución del problema (1.2) son las siguientes:

Condición 1. (KMNY (Kojima, Meggido, Noma y Yoshise.))

- a) M es una P_0 -matriz.
- b) Existe un vector estrictamente factible para (1.1).
- c) Los conjuntos de nivel

$$L_t(q, M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \geq 0, y \geq 0, y = Mx + q, x^T y \leq t\}$$

son acotados para todo $t \geq 0$.

Ahora se analizará la convergencia del algoritmo 1, considérese el conjunto de caminos:

$$P(\bar{\mu}) = \{(\mu, z(\mu)) / 0 < \mu \leq \bar{\mu}, z(\mu) \text{ es solución de (1.2)}\},$$

donde $\bar{\mu} > 0$.

Teorema 2. Si la matriz Jacobiana $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ es no singular para todo $z(\mu)$, $0 < \mu \leq \bar{\mu}$ ($\bar{\mu} > 0$), entonces $P(\bar{\mu})$ consiste solamente de caminos continuamente diferenciables. Si adicionalmente, $P(\bar{\mu})$ es acotado, entonces todo punto límite de $z(\mu)$ cuando μ se aproxima a cero es solución de $LCP(q, M)$ (es decir, (1.1)).

Demostración. La primera parte del teorema se demuestra utilizando una aplicación directa del teorema de W. I. Zangwill y C. B. Garcia [16] p.20. La prueba de la segunda parte del teorema es similar a la de Chen y Harker en [21] (teorema 5). \square

Lema 5. Sea $\varphi_\mu(x, y)$ dada por el lema 1 o lema 2,

$$D_x = D_x(z) = \text{diag}\left(\frac{\partial\varphi_\mu(x_1, y_1)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_\mu(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial\varphi_\mu(x_n, y_n)}{\partial x_n}\right),$$

$$D_y = D_y(z) = \text{diag}\left(\frac{\partial\varphi_\mu(x_1, y_1)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_\mu(x_i, y_i)}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial\varphi_\mu(x_n, y_n)}{\partial y_n}\right).$$

entonces:

- a) D_x es definida positiva;
- b) D_y es definida positiva;
- c) $(D_y)^{-1}D_x$ es definida positiva.

Demostración.

- a) En efecto, dado que $D_x = D_x(z) = \text{diag}\left(\frac{\partial\varphi_\mu(x_1, y_1)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_\mu(x_n, y_n)}{\partial x_n}\right)$.

Sea, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $\hat{x} \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \hat{x}^T D_x \hat{x} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \cdots & \hat{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_1}(x_1, y_1) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}(x_n, y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_1}(x_1, y_1) & \cdots & \hat{x}_n \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}(x_n, y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}_1^2 \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_1}(x_1, y_1) + \cdots + \hat{x}_n^2 \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Luego, dado que por Comentario (2), $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}(x_i, y_i) > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y por otro lado $\hat{x}_i^2 > 0$ para al menos un $i \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\hat{x}_i^2 \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}(x_i, y_i) > 0 \quad \text{para ese } i \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}(x_i, y_i) > 0.$$

Por lo tanto, $\hat{x}^T D_x \hat{x} > 0$; es decir D_x es definida positiva.

b) Se demuestra de forma análoga a la parte a.

c) Considerando que $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}(x_i, y_i), \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_i}(x_i, y_i) \in (0, 2)$, llámense $\gamma_{ii} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}(x_i, y_i)$ y $\omega_{ii} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_i}(x_i, y_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por lo que $\gamma_{ii} > 0$ y $\omega_{ii} > 0$.

Ahora bien,

$$D_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_1}(x_1, y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_2}(x_2, y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_n}(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

De forma similar,

$$D_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}(x_1, y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_2}(x_2, y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 D_y^{-1}D_x &= \begin{bmatrix} \omega_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \omega_{11}^{-1}\gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22}^{-1}\gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn}^{-1}\gamma_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde $\omega_{ii}^{-1}\gamma_{ii} > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Luego para $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\hat{x} \neq 0$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}^T D_y^{-1}D_x \hat{x} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \cdots & \hat{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11}^{-1}\gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22}^{-1}\gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn}^{-1}\gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \\
 &= \hat{x}_1^2 \omega_{11}^{-1}\gamma_{11} + \hat{x}_2^2 \omega_{22}^{-1}\gamma_{22} + \cdots + \hat{x}_n^2 \omega_{nn}^{-1}\gamma_{nn} \\
 &= \sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 \omega_{ii}^{-1}\gamma_{ii}
 \end{aligned}$$

Ahora bien dado que: $\hat{x}_i^2 > 0$ para al menos un $i \in \mathbb{N}$ y $\omega_{ii}^{-1}\gamma_{ii} > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\hat{x}_i^2 \omega_{ii}^{-1}\gamma_{ii} > 0$, para ese $i \in \mathbb{N}$. Más aún:

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 \omega_{ii}^{-1}\gamma_{ii} > 0$$

Por lo tanto;

$$\hat{x}^T D_y^{-1}D_x \hat{x} > 0, \text{ para todo } \hat{x} \neq 0.$$

Así $D_y^{-1}D_x$ es definida positiva.

□

A continuación se citará un resultado necesario en la demostración del teorema siguiente.

Lema 6. *Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una P -matriz, entonces M es no singular.*

Demostración. Ver Abraham Berman Y Robert J. [25] (pág. 134). \square

El siguiente teorema juega un papel importante en la afirmación de que los problemas perturbados tengan solución única.

Teorema 3. *Asuma que $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es P_0 -matriz, entonces la matriz Jacobiana $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ es no singular para todo $z(\mu) \in \mathbb{R}^{2n}$ y todo $\mu > 0$.*

Demostración. La prueba seguirá la siguiente estrategia: tomará las columnas de $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ e igualará al vector nulo una combinación lineal de dichas columnas (con constantes aun no conocidas) y se llegará a que tales columnas deben ser iguales a cero, esto probará que el conjunto de vectores columnas que forma $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ son linealmente independientes. Por lo anterior se concluirá que $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ es no singular.

En efecto, sea $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\mu > 0$, consideremos la siguiente notación:

$$D_x = D_x(z) = \text{diag}\left(\frac{\partial \varphi_\mu(x_1, y_1)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_\mu(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_\mu(x_n, y_n)}{\partial x_n}\right),$$

$$D_y = D_y(z) = \text{diag}\left(\frac{\partial \varphi_\mu(x_1, y_1)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_\mu(x_i, y_i)}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_\mu(x_n, y_n)}{\partial y_n}\right).$$

Ahora bien, tomando en cuenta que:

$$F_{\Psi_\mu}(z) = F_{\Psi_\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} Mx + q - y \\ \Psi_\mu(x, y) \end{pmatrix}$$

Se cumple que la matriz Jacobiana de $F_{\Psi_\mu}(z)$ está dada por:

$$\nabla F_{\Psi_\mu}(x, y) = \begin{bmatrix} M & -I \\ D_x & D_y \end{bmatrix}$$

Sea $\nabla F_{\Psi_\mu}(x, y)P = 0$, donde $P = (p^1, p^2)$ con $p^i \in \mathbb{R}^n$, para $i = 1, 2$. Lo que implica que:

$$\begin{bmatrix} M & -I \\ D_x & D_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$Mp^1 - Ip^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$D_x p^1 + D_y p^2 = 0 \quad (2.8)$$

Usando el hecho de que D_x es definida positiva por lema 5, se tiene en (2.8) que:

$$\begin{aligned} D_x p^1 &= -D_y p^2, \\ p^2 &= -(D_y)^{-1} D_x p^1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.7),

$$\begin{aligned} Mp^1 - (-(D_y)^{-1} D_x p^1) &= 0 \\ Mp^1 + (D_y)^{-1} D_x p^1 &= 0 \\ (M + (D_y)^{-1} D_x) p^1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora bién, por hipótesis M es P_0 -matriz, es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \text{ existe } i \in \mathbb{N}, x_i \neq 0 \text{ y } x_i [Mx]_i \geq 0 \quad (2.11)$$

Por otro lado, $(D_y)^{-1} D_x$ es una matriz definida positiva (por lema 5), por lo tanto:

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \hat{x} \neq 0, \text{ se cumple que } \hat{x}^T ((D_y)^{-1} D_x) \hat{x} > 0 \quad (2.12)$$

Luego, considérese $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\hat{x} \neq 0$, arbitrario fijo, por lo que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{x}_i \neq 0$.

Así,

$$\begin{aligned} \hat{x}_i [(M + D_y^{-1} D_x) \hat{x}]_i &= \hat{x}_i [(M \hat{x} + D_y^{-1} D_x \hat{x})]_i \\ &= \hat{x}_i [(M \hat{x})_i + (D_y^{-1} D_x \hat{x})_i] \\ &= \hat{x}_i [M \hat{x}]_i + \hat{x}_i [D_y^{-1} D_x \hat{x}]_i \\ &> 0 \quad (\text{por (2.11) y (2.12)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(M + D_y^{-1}D_x)$ es P -matriz.

Ahora bien, por lema 6 $(M + D_y^{-1}D_x)$ es no-singular. En consecuencia, se tiene en (2.10) que:

$$p^1 = 0.$$

De este hecho,

$$p^2 = 0 \quad (\text{por (2.8)})$$

Por lo tanto, $\nabla F_{\Psi_\mu}(z(\mu))$ es no singular. \square

Ahora se mostrará que el algoritmo 1 está bien definido, si M es una P_0 y R_0 -matriz (al final de esta sección se mostrará como esta suposición se relaciona con las condiciones de **KMNY**).

Teorema 4. *Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una P_0 -matriz, $z^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y asuma que los conjuntos de niveles*

$$L(\mu) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} / \|F_{\Psi_\mu}(z)\| \leq \|F_{\Psi_\mu}(z^0)\|\} \quad (2.13)$$

son uniformemente acotados para todo $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$, para algún $\bar{\mu} > 0$. Entonces el PLCP(q, M, μ) tiene una única solución $z(\mu)$ para todo $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$.

Demostración. Para demostrar este teorema se procede de forma similar al teorema 3.7 de Chen y Harker que se encuentra en [20]. \square

Lo siguiente es una condición necesaria y suficiente para que los conjuntos de niveles anteriores (2.13), sean acotados.

Teorema 5. *Asuma que $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una R_0 -matriz, $z^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\bar{\mu} > 0$, entonces los conjuntos de niveles $L(\mu)$ definido en (2.13) son uniformemente acotados para todo $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$.*

Demostración. Se resolverá por reducción al absurdo, asúmase que existe una sucesión no acotada $\{z^k\} = \{(x^k, y^k)\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, tal que $\{z^k\} \in L(\mu_k)$ donde $\{\mu_k\}$ es una sucesión con $0 < \mu_k \leq \bar{\mu}$ para todo k y $\bar{\mu} > 0$, donde a su vez el mapeo de $\mu \rightarrow F_{\Psi_\mu}(z^0)$ es continuo y $[0, \bar{\mu}]$ es un intervalo compacto, así existe:

$$\alpha = \max_{\mu \in [0, \bar{\mu}]} \|F_{\Psi_\mu}(z^0)\| \quad (2.14)$$

Por consiguiente se obtiene:

$$\begin{aligned} \|Mx^k + q - y^k\| &\leq \|F_{\Psi_\mu}(z^k)\| \\ &\leq \|F_{\Psi_\mu}(z^0)\| \quad (\text{por (2.13)}) \\ &\leq \alpha \quad (\text{por (2.14)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|Mx^k + q - y^k\| \leq \alpha. \quad (2.15)$$

Sea $z^* = (x^*, y^*)$ un punto de acumulación de la sucesión acotada,

$$\left\{ \frac{(x^k, y^k)}{\|(x^k, y^k)\|} \right\}_{k \geq 0}, \quad (2.16)$$

entonces se obtiene,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|Mx^k - y^k + q\|}{\|z^k\|} \\ &\leq \frac{\alpha}{\|z^k\|} \rightarrow 0 \quad (\text{por (2.15)}) \end{aligned}$$

Además, utilizando (2.16) tenemos:

$$\frac{\|Mx^k - y^k\| + \|q\|}{\|z^k\|} = \frac{\left\| [M - I] \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} \right\|}{\|(x^k, y^k)\|} + \frac{\|q\|}{\|(x^k, y^k)\|} \rightarrow \left\| [M - I] \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \right\|$$

De lo anterior se tiene que $z^* = (x^*, y^*)$ satisface la ecuación $Mx^* - y^* = 0$, es decir:

$$Mx^* = y^*. \quad (2.17)$$

Similarmente, si φ_μ denota una de las funciones definidas en el lema 1 ó lema 2, se obtiene de la definición de estas funciones y la acotación de la sucesión $\{\mu_k\}$ que:

$$\varphi_{\mu_k} \frac{(x_i^k, y_i^k)}{\|(x^k, y^k)\|} \rightarrow \varphi_0(x_i^*, y_i^*). \quad (2.18)$$

En efecto se demostrará lo anterior, para ello se considerará la función del lema 2.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu_k} \frac{(x_i^k, y_i^k)}{\|(x^k, y^k)\|} &= \frac{x_i^k + y_i^k - \sqrt{(x_i^k)^2 + (y_i^k)^2 + 2\mu_k}}{\|(x^k, y^k)\|} \\
&= \frac{x_i^k}{\|(x^k, y^k)\|} + \frac{y_i^k}{\|(x^k, y^k)\|} - \\
&\quad \sqrt{\left(\frac{x_i^k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2 + \left(\frac{y_i^k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2 + \left(\frac{2\mu_k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2}
\end{aligned}$$

Ahora bien aplicando límite a ambos lados obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\mu_k} \frac{(x_i^k, y_i^k)}{\|(x^k, y^k)\|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{x_i^k}{\|(x^k, y^k)\|} + \frac{y_i^k}{\|(x^k, y^k)\|} \right] - \\
&\quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\left(\frac{x_i^k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2 + \left(\frac{y_i^k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2 + \left(\frac{2\mu_k}{\|(x^k, y^k)\|}\right)^2} \right] \\
&= x_i^* + y_i^* - \sqrt{(x_i^*)^2 + (y_i^*)^2} \\
&= \varphi_0(x_i^*, y_i^*) \quad \forall i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

De forma análoga se procede para el lema 1. Por otro lado,

$$\frac{|\varphi_{\mu_k}(x_i^k, y_i^k)|}{\|(x^k, y^k)\|} \leq \frac{\|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)\|}{\|z^k\|} \leq \frac{\|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^0)\|}{\|z^k\|} \leq \frac{\alpha}{\|z^k\|}.$$

Así,

$$\frac{|\varphi_{\mu_k}(x_i^*, y_i^*)|}{\|(x^k, y^k)\|} \leq \frac{\alpha}{\|z^k\|} \rightarrow 0 \tag{2.19}$$

De (2.18) y (2.19) se tiene que, $\varphi_0(x_i^*, y_i^*) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, a su vez esto es equivalente a que:

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0 \quad \text{y} \quad (x^*)^T y^* = 0$$

En vista de lo anterior y de (2.17), se tiene que z^* es solución de $LCP(0, M)$. Sin embargo, dado que $\|z^*\| = 1$ entonces $z^* \neq 0$, de aquí se obtiene una contradicción con el hecho de que M es una R_0 -matriz.

Por lo tanto los conjuntos de niveles $L(\mu)$ definidos en (2.13) son uniformemente acotados para todo $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$. \square

Se pueden resumir los resultados anteriores como sigue:

Si $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una P_0 y R_0 -matriz, entonces todo $PLCP(q, M, \mu)$ tiene única solución; la sucesión $\{z^k\}$ generada por el algoritmo 1 es acotada y cada límite puntual de esta sucesión es una solución de $LCP(q, M)$. En particular, se obtuvo de ese acercamiento constructivo el resultado de Aganagic y Cottle [23] (ver pág. 374 – 377), en el cual el problema LCP tiene un conjunto de soluciones no vacío, si M es una P_0 y R_0 -matriz.

Se procederá ahora a describir las condición de $KMNY$ (1). Es claro que, la suposición de M ser una P_0 y R_0 -matriz no se relaciona directamente con la condición $KMNY$, ya que el anterior es independiente del vector específico q , mientras que el último es dependiente de este vector. Sin embargo, basado en los resultados anteriores, se podrá demostrar el siguiente teorema.

Teorema 6. $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una P_0 y R_0 -matriz, si y sólo si la condición $KMNY$ es satisfecha para todo $q \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Suponga que M es una P_0 y R_0 -matriz, entonces las condiciones de $KMNY$ se deducen así:

Parte a) Evidentemente es satisfecha dado que por hipótesis M es una P_0 -matriz.

Parte b) Se debe probar que existe un vector factible estricto para $LCP(q, M)$.

En efecto, sea $\mu > 0$, considerando que M es una R_0 -matriz entonces por el teorema 5, $L(\mu)$ es uniformemente acotado.

Ahora bien, considerando que M es P_0 -matriz y $L(\mu)$ es uniformemente acotado, entonces el $PLCP(q, M, \mu)$ tiene única solución $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Como $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu))$ es solución del $PLCP(q, M, \mu)$, se cumple que:

$$x(\mu) > 0, \quad y(\mu) > 0, \quad x_i(\mu)y_i(\mu) = \mu, \quad \text{y} \quad y(\mu) = Mx(\mu) + q.$$

Por lo tanto $x(\mu)$ es un vector factible estricto.

Parte c) Se puede verificar que los conjuntos de niveles

$$L_t(q, M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \geq 0, y \geq 0, y = Mx + q, x^T y \leq t\}$$

son acotados para todo $t \geq 0$.

Para ello se razonará por reducción al absurdo, supóngase que el conjunto $L_t(q, M)$ es no acotado para algún $q \in \mathbb{R}^n$ y algún $t < 0 \in \mathbb{R}$.

Sea $\{(x^k, y^k)\}$ una sucesión no acotada de vectores en $L_t(q, M)$, considere $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ un punto de acumulación de la sucesión normalizada $\left\{ \frac{(x^k, y^k)}{\|(x^k, y^k)\|} \right\}_{k \geq 0}$ (acotada). Ahora bien, dado que $(x^k, y^k) \in L_t(q, M)$ se cumple que:

- 1) $x^k \geq 0$,
- 2) $y^k \geq 0$,
- 3) $y^k = Mx^k + q$,
- 4) $(x^k)^T y^k \leq t$.

Luego dividiendo lo anterior entre $\|(x^k, y^k)\|$ y haciendo tender k a infinito, se obtiene que:

1.
$$\frac{x^k}{\|(x^k, y^k)\|} \geq 0, \text{ de aquí } x^* \geq 0 \text{ más aun } (x^*)^T \geq 0. \quad (2.20)$$

2.
$$\frac{y^k}{\|(x^k, y^k)\|} \geq 0, \text{ de aquí } y^* \geq 0. \quad (2.21)$$

Por lo tanto de (2.20) y (2.21) se cumple que $(x^*)^T y^* \geq 0$.

3.
$$\frac{y^k}{\|(x^k, y^k)\|} = \frac{Mx^k}{\|(x^k, y^k)\|} + \frac{q}{\|(x^k, y^k)\|}, \text{ de aquí } y^* = Mx^*.$$

4.

$$\frac{x^k}{\|(x^k, y^k)\|} \times \frac{y^k}{\|(x^k, y^k)\|} \leq \frac{t}{\|(x^k, y^k)\|^2}, \text{ aplicando límite se obtiene que:}$$

$$(x^*)^T y^* \leq 0 \quad (2.22)$$

Por lo tanto de (2.21) y (2.22) se cumple que:

$$(x^*)^T y^* = 0.$$

Así (x^*, y^*) es solución de $LCP(0, M)$, lo que contradice el hecho de que M es R_0 -matriz, dado que $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ por ser un punto de acumulación de $\left\{ \frac{(x^k, y^k)}{\|(x^k, y^k)\|} \right\}_{k \geq 0}$.

Recíprocamente supóngase que la condición $KMNY$ es satisfecha para todo q , se probará que M es una P_0 y R_0 -matriz.

- a) En efecto por hipótesis se cumple que M es una P_0 -matriz.
- b) Demostremos que M es una R_0 -matriz. Razonando por reducción al absurdo, suponga que M no es una R_0 -matriz.

Así, existe $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$, tal que $\bar{z} \neq 0$, donde \bar{z} es solución de $LCP(0, M)$, por lo que se cumple que:

$$\bar{x} \geq 0, \quad \bar{y} \geq 0, \quad (\bar{x})^T \bar{y} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{y} = M\bar{x}.$$

Ahora bien, sea $\lambda \geq 0$, mas aún, $(\lambda)^2 \geq 0$, entonces: $\bar{x}(\lambda)^2 \geq 0$ y $\bar{y}(\lambda)^2 \geq 0$.

Luego: si $0 = (\bar{x})^T \bar{y}$, entonces $0 = (\lambda)^2 (\bar{x})^T \bar{y} = (\lambda \bar{x})^T \lambda \bar{y}$.

Por lo tanto,

$$(\lambda \bar{x})^T \lambda \bar{y} = 0$$

A su vez se tiene que si $\bar{y} = M\bar{x}$, entonces $\lambda\bar{y} = M\lambda\bar{x}$.

Por lo que $\lambda\bar{z}$ es solución de $LCP(0, M)$, para todo $\lambda \geq 0$.

Por otro lado, considerando que:

$$L_t(0, M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \geq 0, y \geq 0, y = Mx, x^T y \leq t\}$$

Así $\lambda\bar{z} \in L_t(0, M)$, de aquí obtenemos que $L_t(0, M)$ no esta acotado para todo $t \geq 0$ y esto contradice la condición $KMNY(c)$ (ver (1)).

(Dado que $\|(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{y})\| \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$). Por lo tanto, M es una R_0 -matriz.

□

Nótese que que los principales resultados de esta sección son una simple consecuencia del teorema 3.8 y teorema 4.4 de M. Kojima, S. Mizuno y W. Noma [4]. Sin embargo, la prueba del teorema 6 (es decir existencia de un vector estricto factible), se basa en los resultados anteriores de esta sección la cual también desempeñará un papel central en las siguientes secciones.

Por otro lado Kojima, S. Mizuno y W. Noma en [4], fueron capaces de demostrar, en virtud de la condición de $KMNY$, que toda sucesión completa $\{z(\mu)\}$ converge a una solución de $LCP(q, M)$ cuando μ se aproxima a cero. De lo anterior se obtiene el siguiente corolario del teorema 6, que mejora el ámbito del teorema 2.

Corolario 1. *Si M es una P_0 y R_0 -matriz, entonces el $PLCP(q, M, \mu)$ tiene una única solución $z(\mu)$ para todo $\mu > 0$, y la sucesión completa converge a la solución de $LCP(q, M)$ cuando μ tiende a cero.*

CAPÍTULO 3

ERRORES GLOBALES ACOTADOS PARA $PLCP(q, M, \mu)$

En este capítulo se considerará el $LCP(q, M)$ en la formulación siguiente: encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga las condiciones:

$$x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0, \quad x^T(Mx + q) = 0.$$

El problema perturbado es exactamente el problema (1.8). Obviamente, estos problemas son equivalentes a $LCP(q, M)$ y $PLCP(q, M, \mu)$, respectivamente, como se definió en (1.1) y (1.2) al tomar $y = Mx + q$, donde se denotó también estos problemas por $LCP(q, M)$ y $PLCP(q, M, \mu)$, a su vez el conjunto de soluciones del $PLCP(q, M, \mu)$ se denotará por $S(\mu)$.

Aunque existen varias cotas de errores para los resultados del $LCP(q, M)$ (véase, por ejemplo, [22] y [18]), a conocimiento de Christian Kanzow, no hay errores acotados para el resultado del $PLCP(q, M, \mu)$. Este resultado, sin embargo, desempeña un papel importante en el Algoritmo que se describe en la siguiente sección, es decir, en la terminación de la norma interna de iteración. En primer lugar, se darán las definiciones pertinentes.

3.1. Conceptos y Lemas básicos.

Definición 4. Sea $\mu > 0$, $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y asuma que el $PLCP(q, M, \mu)$ posee un conjunto de soluciones no vacío $S(\mu)$.

- a) La función continua γ es llamada un residual de $PLCP(q, M, \mu)$ si $\gamma(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\gamma(x) = 0$, si y solo si x resuelve $PLCP(q, M, \mu)$.

- b) Un residual γ es una cota de error local inferior para $PLCP(q, M, \mu)$, si existen constantes $\tau_1 > 0$ y $C_1 > 0$ tal que:

$$\tau_1 \gamma(x) \leq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\gamma(x) \leq C_1$.

- c) Un residual γ es una cota de error global inferior para $PLCP(q, M, \mu)$, si existe una constante $\tau_1 > 0$ tal que:

$$\tau_1 \gamma(x) \leq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- d) Un residual γ es una cota de error local superior para $PLCP(q, M, \mu)$, si existen constantes $\tau_2 > 0$ y $C_2 > 0$ tal que:

$$\tau_2 \gamma(x) \geq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\gamma(x) \leq C_2$.

- e) Un residual γ es una cota de error global superior para $PLCP(q, M, \mu)$, si existe una constante $\tau_2 > 0$ tal que:

$$\tau_2 \gamma(x) \geq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, considérese el operador no lineal F_{Ψ_μ} definido en (2.1) y sea $\Psi_\mu(x, y) = (\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_1, y_1), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n)) \in \mathbb{R}^n$, donde φ_μ es considerada como una de las funciones definidas en el lema 1 o lema 2. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = Mx + q$ defínase:

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x) = \|\Psi_\mu(x, y)\| = \|F_{\Psi_\mu}(x, y)\|,$$

Tomando en cuenta las definiciones anteriores se puede ver que γ_{Ψ_μ} es una función residual y que además bajo ciertas condiciones esta proporciona cotas de error para el $PLCP(q, M, \mu)$. A continuación se mostrará esto.

Lema 7. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, defínase $y = Mx + q$. Si φ_μ es dada por el lema 1 o 2, entonces γ_{Ψ_μ} es una función residual para $PLCP(q, M, \mu)$.*

Demostración. En efecto, considérese $y = Mx + q$ y φ_μ dada por el lema 1, así:

$$\varphi_\mu(x_i, y_i) = x_i + y_i - \sqrt{(x_i - y_i)^2 + 4\mu} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Se probará que $\gamma_{\Psi_\mu}(x)$ es una función residual. Ahora bien, dado que $(x_i - y_i)^2 + 4\mu > 0$ se cumple que $\varphi_\mu(x_i, y_i)$ es continua para todo $i \in \mathbb{N}$.

A su vez dado que:

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi_\mu}(x) &= \|\Psi_\mu(x, y)\| \\ &= \|(\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_2, y_2), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n))\| \\ &= \sqrt{(\varphi_\mu(x_1, y_1))^2 + (\varphi_\mu(x_2, y_2))^2 + \dots + (\varphi_\mu(x_n, y_n))^2} \end{aligned}$$

Así por lo anterior,

$$\gamma_{\Psi_\mu} \text{ es continua.} \tag{3.1}$$

Por otro lado, $(\varphi_\mu(x_i, y_i))^2 \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, mas aún:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\varphi_\mu(x_1, y_1))^2 + (\varphi_\mu(x_2, y_2))^2 + \dots + (\varphi_\mu(x_n, y_n))^2 \\ 0 &\leq \sqrt{(\varphi_\mu(x_1, y_1))^2 + (\varphi_\mu(x_2, y_2))^2 + \dots + (\varphi_\mu(x_n, y_n))^2}. \\ 0 &\leq \|\Psi(x, y)\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma_{\Psi_\mu}(x) \geq 0$.

Ahora bien, se probará que $\gamma_{\Psi_\mu}(x) = 0$, si y solo si x es solución del $PLCP(q, M, \mu)$. En efecto, supóngase que $\gamma_{\Psi_\mu}(x) = 0$, así:

$$\|(\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_2, y_2), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n))\| = 0,$$

lo que implica que $\varphi_\mu(x_i, y_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ahora considerando el propiedad (1.3): $x > 0$, $y > 0$ y $x_i y_i = \mu$, además por hipótesis se tiene que $y = Mx + q$.

Por lo tanto $x \in S(\mu)$.

Por otro lado se mostrará que si $x \in S(\mu)$, entonces $\gamma_{\Psi_\mu}(x) = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in S(\mu) &\Rightarrow x > 0, y > 0, x_i y_i = \mu \text{ y } y = Mx + q \\ &\Rightarrow \varphi_\mu(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (\text{Por lema 1}) \end{aligned}$$

Luego, $\|\Psi(x, y)\| = \|(\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_2, y_2), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n))\| = 0$.

Por lo tanto, $\gamma_{\Psi_\mu}(x) = 0$.

Así se cumple que $\gamma_{\Psi_\mu}(x) = 0$, si y solo si x es solución del $PLCP(q, M, \mu)$.

Por lo tanto de (3.1) y lo anterior, se cumple que γ_{Ψ_μ} es función residual para $PLCP(q, M, \mu)$.

De forma análoga se procede para el caso cuando φ_μ este dada por el lema 2. □

En esta sección se demostrará que estas dos funciones proporcionan una cota de error global superior e inferior para $PLCP(q, M, \mu)$, si la matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cumple con ciertas condiciones.

Se mostrará en primer lugar que γ_{Ψ_μ} proporciona una cota de error global inferior para $PLCP(q, M, \mu)$. Note que estos resultados se cumplen para una matriz arbitraria $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Lema 8. *Sea $\mu > 0$ y asuma que $PLCP(q, M, \mu)$ tiene un conjunto no vacío de soluciones $S(\mu)$, entonces existe una constante $\tau_1 > 0$ tal que:*

$$\tau_1 \gamma_{\Psi_\mu}(x) \leq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Primero se probará que $\|\nabla\gamma_{\Psi_\mu}\|$ está acotada para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $\varphi_\mu(x_s, (Mx+q)_s) \forall s \in \mathbb{N}$ es dada por el lema 1 (de forma similar se procede para cuando $\varphi_\mu(x_s, (Mx+q)_s)$ esta dada por el lema 2) .

Así,

$$\varphi_\mu(x_s, (Mx+q)_s) = x_s + (Mx+q)_s - \sqrt{(x_s - (Mx+q)_s)^2 + 4\mu}.$$

Luego,

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_s}(x_s, (Mx+q)_s) = 1 + m_{ss} - \frac{[x_s - (Mx+q)_s](1 - m_{ss})}{\sqrt{[x_s - (Mx+q)_s]^2 + 4\mu}},$$

donde por el comentario 2

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_s}(x_s, (Mx+q)_s) < 2 \quad \forall s \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Ahora bien,

$$\gamma_{\Psi_\mu} = \|\Psi_\mu(x, y)\|, \text{ donde } \Psi_\mu(x, y) = (\varphi_\mu(x_1, y_1), \varphi_\mu(x_2, y_2), \dots, \varphi_\mu(x_n, y_n)).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}}{\partial x_s}(x) &= \frac{1}{\|\Psi_\mu(x)\|} \left[x_s + (Mx+q)_s - \sqrt{(x_s - (Mx+q)_s)^2 + 4\mu} \right] \\ &\quad \left[1 + m_{ss} - \frac{[x_s - (Mx+q)_s](1 - m_{ss})}{\sqrt{[x_s - (Mx+q)_s]^2 + 4\mu}} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\|\Psi_\mu(x)\|} \left[x_s + (Mx+q)_s - \sqrt{[x_s - (Mx+q)_s]^2 + 4\mu} \right] \leq 1 \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta lo anterior se tendrá que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}}{\partial x_s}(x) &= \left[\frac{x_s + (Mx+q)_s - \sqrt{(x_s - (Mx+q)_s)^2 + 4\mu}}{\|\Psi_\mu(x)\|} \right] \\ &\quad \left[1 + m_{ss} - \frac{[x_s - (Mx+q)_s](1 - m_{ss})}{\sqrt{[x_s - (Mx+q)_s]^2 + 4\mu}} \right] \\ &\leq 1 \times 2 \quad (\text{Por (3.2) y (3.4)}) \\ &= 2 \quad \forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto por definición se cumple que:

$$\begin{aligned} \|\nabla\gamma_{\Psi_\mu}(x)\| &= \max \left\{ \left| \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}(x)}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}(x)}{\partial x_2} \right|, \dots, \left| \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}(x)}{\partial x_s} \right|, \dots, \left| \frac{\partial\gamma_{\Psi_\mu}(x)}{\partial x_n} \right| \right\} \\ &\leq k_1 = 2. \end{aligned}$$

Así

$$\|\nabla\gamma_{\Psi_\mu}(x)\| \leq k_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Ahora bien, sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y considerando $x(\mu)$ la solución mas cercana del $PLCP(q, M, \mu)$ a x , entonces se cumple que:

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x(\mu)) = 0.$$

Así,

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x) = \gamma_{\Psi_\mu}(x) - \gamma_{\Psi_\mu}(x(\mu))$$

Por otro lado, utilizando el teorema de valor intermedio, se tendrá que:

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x) - \gamma_{\Psi_\mu}(x(\mu)) = \nabla\gamma_{\Psi_\mu}(c)[x - x(\mu)]$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$.

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi_\mu}(x) &= |\gamma_{\Psi_\mu}(x)| \quad (\text{dado que } \gamma_{\Psi_\mu}(x) \geq 0) \\ &= |\gamma_{\Psi_\mu}(x) - \gamma_{\Psi_\mu}(x(\mu))| \\ &\leq \|\nabla\gamma_{\Psi_\mu}(c)\| \|x - x(\mu)\| \\ &\leq k_1 \|x - x(\mu)\| \quad (\text{Por (3.5)}) \\ &= k_1 \text{dist}(x, S(\mu)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tau_1 \gamma_{\Psi_\mu}(x) \leq \text{dist}(x, S(\mu)),$$

donde $\tau_1 = \frac{1}{k_1}$.

□

De esta manera queda demostrado que γ_{Ψ_μ} proporciona una cota de error global inferior para el $PLCP(q, M, \mu)$.

A continuación se enuncia un resultado necesario para probar que γ_{Ψ_μ} proporciona una cota de error local superior.

Lema 9. *Sea $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ continuamente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D , $D \subset \mathbb{R}^{2n}$, sea J (jacobiano de F) continuamente Lipschitz, $x \in D$, suponga que $J^{-1}(x)$ existe, entonces existen constante $\varepsilon_2 > 0$ y $0 < k_2 < \beta$ ($\beta > 0$), tal que:*

$$k_2 \|v - u\| \leq \|F(v) - F(u)\| \leq \beta \|v - u\|$$

para todo $v, u \in D$, para lo cual $\max\{\|v - x\|, \|u - x\|\} \leq \varepsilon_2$.

Demostración. Ver J. E. Dennis, Jr y Robert B. Schanable en [24], pág(77) (lema 4.1.16). \square

Tomando en cuenta el lema anterior se está en la posición de demostrar que γ_{Ψ_μ} proporciona una cota de error local superior.

Lema 10. *Sea $\mu > 0$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una P_0 -matriz y $S(\mu)$ no vacío, entonces existen constantes $\tau_2 > 0$ y $C_2 > 0$ tal que:*

$$\text{dist}(x, S(\mu)) \leq \tau_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, con $\gamma_{\Psi_\mu}(x) \leq C_2$.

Demostración. Considerando que por hipótesis M es una P_0 -matriz, por teorema 3, el jacobiano $\nabla F_{\Psi_\mu}(z)$ es no singular para todo $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $y = Mx + q$. En particular para $z(\mu) = (x(\mu), y(\mu)) \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $x(\mu) \in S(\mu)$, tal que $x(\mu)$ es la solución más cercana del $PLCP(q, M, \mu)$ a x y $y(\mu) = Mx(\mu) + q$.

De aquí se obtiene que existe $\nabla F_{\Psi_\mu}^{-1}(z(\mu))$; es decir, existe $J^{-1}(z(\mu))$.

Tomando en cuenta que $F_{\Psi_\mu} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^{2n} y dado que \mathbb{R}^{2n} es un conjunto abierto y convexo; y que a su vez ∇F_{Ψ_μ} es

continuamente Lipschitz (ver [10]), por lema 9 para todo $z, z(\mu) \in \mathbb{R}^{2n}$, existen constantes $\varepsilon_2 > 0$ y $0 < k_2 < \beta$ ($\beta > 0$), tal que:

$$k_2 \|z - z(\mu)\| \leq \|F_{\Psi_\mu}(z) - F_{\Psi_\mu}(z(\mu))\| \leq \beta \|z - z(\mu)\|. \quad (3.6)$$

Para lo cual,

$$\|z - z(\mu)\| = \max\{\|z - z(\mu)\|, \|z(\mu) - z(\mu)\|\} \leq \varepsilon_2. \quad (3.7)$$

Así por un lado,

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi_\mu}(x) &= \|F_{\Psi_\mu}(z)\| \\ &= \|F_{\Psi_\mu}(z) - F_{\Psi_\mu}(z(\mu))\| \\ &\geq k_2 \|z - z(\mu)\| \quad (\text{por (3.6)}) \\ &\geq k_2 \|x - x(\mu)\| \\ &= k_2 \text{dist}(x, S(\mu)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{dist}(x, S(\mu)) \leq \tau_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x)$$

donde $\tau_2 = \frac{1}{k_2}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi_\mu}(x) &= \|F_{\Psi_\mu}(z)\| \\ &= \|F_{\Psi_\mu}(z) - F_{\Psi_\mu}(z(\mu))\| \\ &\leq \beta \|z - z(\mu)\| \quad (\text{por (3.6)}) \\ &\leq \beta \varepsilon_2 \quad (\text{por (3.7)}) \\ &= C_2, \end{aligned}$$

donde $C_2 = \beta \varepsilon_2$.

Por lo tanto:

$$\text{dist}(x, S(\mu)) \leq \tau_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n, \text{ con } \gamma_{\Psi_\mu}(x) \leq C_2. \quad \square$$

3.2. Teorema Principal.

Considerando los lemas anteriores, estamos en la posición de demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 7. *Sea $\mu > 0$ y $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una P_0 y R_0 -matriz, entonces existe una constante $\tau_2 > 0$ tal que $\text{dist}(x, S(\mu)) \leq \tau_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; es decir $\gamma_{\Psi_\mu}(x)$ proporciona una cota de error global superior para PLCP(q, M, μ).*

Demostración. Basados en el lema 10, dado que M es una P_0 y R_0 -matriz, el PLCP(q, M, μ) tiene una única solución por lo que, $S(\mu) = \{x(\mu)\} \neq \emptyset$, así existe constantes α_2 y C_2 tal que:

$$\text{dist}(x, S(\mu)) = \|x - x(\mu)\| \leq \alpha_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.8)$$

con $\gamma_{\Psi_\mu}(x) \leq C_2$.

Ahora bien, por simplicidad se asumirá que φ_μ está dada por la función del lema 2, la prueba es análoga para la función del lema 1.

Para la prueba de este teorema se razonará por reducción al absurdo. Supóngase que existe $x^k \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\text{dist}(x^k, S(\mu)) = \|x^k - x(\mu)\| > k \gamma_{\Psi_\mu}(x^k) \text{ para todo } k. \quad (3.9)$$

Es decir,

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x^k) < \frac{1}{k} \|x^k - x(\mu)\|$$

Donde γ_{Ψ_μ} es una cota de error local superior (por (3.8)).

Por otro lado se puede demostrar que existe un $k_0 > 0$ y $\epsilon > 0$, tal que $\gamma_{\Psi_\mu}(x^k) > \epsilon$, $\forall k \geq k_0$.

En efecto se probará esto, para ello razonará por reducción al absurdo. Supóngase que para todo $k_0 > 0$, $\epsilon > 0$ existe $k \geq k_0$ tal que: $\gamma_{\Psi_\mu}(x^k) \leq \epsilon$.

Así de (3.8) y (3.9) obtenemos que:

$$\|x^k - x(\mu)\| \leq \alpha_2 \gamma_{\Psi_\mu}(x^k) < \frac{\alpha_2}{k} \|x^k - x(\mu)\|,$$

esto lleva a una contradicción ya que para que la desigualdad anterior se satisfaga $\frac{\alpha_2}{k} > 1$ cuando $k \rightarrow \infty$ y esto no ocurre ya que cuando $k \rightarrow \infty$, $\frac{\alpha_2}{k}$ tiende a cero; y en consecuencia

$$\gamma_{\Psi_\mu}(x^k) > \epsilon.$$

Ahora bien, de esto y de (3.9) se consigue obtener que:

$$\|x^k\| + \|-x(\mu)\| \geq \|x^k - x(\mu)\| > k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k) > k\epsilon,$$

pero como $k\epsilon \rightarrow \infty$ a medida que k tiende a infinito y además $\|-x(\mu)\|$ es independiente de k (es decir; $\|-x(\mu)\|$ es constante), entonces:

$$\|x^k\| \rightarrow \infty.$$

Sea x^* un punto de acumulación de la sucesión acotada $\left\{ \frac{x^k}{\|x^k\|} \right\}_k \geq 0$, note que $\|x^*\| = 1$ y por lo tanto $x^* \neq 0$, considerando esto se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\|-x(\mu)\|}{\|x^k\|} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\|x^k\| + \|-x(\mu)\|}{\|x^k\|} \right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\|x^k - x(\mu)\|}{\|x^k\|} \right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k)}{\|x^k\|} \right) \quad (\text{por (3.9)}). \end{aligned}$$

Es decir;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k)}{\|x^k\|} \right) \leq 1 \tag{3.10}$$

Por la definición de φ_μ , la no acotación de la sucesión $\{x^k\}$ y el hecho de que $\frac{x^k}{\|x^k\|} \rightarrow x^*$, se tiene que:

$$\varphi_\mu \frac{(x_i^k, y_i^k)}{\|x^k\|} \rightarrow x_i^* + [Mx^*]_i - \sqrt{(x_i^*)^2 + [(Mx^*)_i]^2}.$$

Por otro lado, supóngase por reducción al absurdo que:

$$0 < w \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k)}{\|x^k\|} \right).$$

Por propiedad arquimediana se tiene que para todo $k \geq \widehat{k}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k)}{\|x^k\|} \right) &\geq w \\ \left(\frac{k\gamma_{\Psi_\mu}(x^k)}{\|x^k\|} \right) &\geq kw. \end{aligned}$$

Luego, $kw \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, lo que genera una contradicción con (3.10).

Por lo que, $x_i^* + [Mx^*]_i - \sqrt{(x_i^*)^2 + [(Mx^*)_i]^2} = 0$. Esto, significa que:

$$\varphi_0(x_i^*, [Mx^*]_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

Es decir, x^* es solución de $LCP(0, M)$ donde $x^* \neq 0$; esto contradice la suposición de que M es una R_0 -matriz. \square

Nótese que las constantes τ_1 y τ_2 en el lema 8, lema 10 y en el teorema 7, dependen de la matriz M y el valor del parámetro de perturbación $\mu > 0$, pero no en la opción particular del vector q .

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO Y SU CONVERGENCIA

El siguiente algoritmo es una versión aplicable del algoritmo 1. En lugar de resolver los sistemas no lineales $F_{\Psi_{\mu}}(z) = 0$ del paso **S.2** exactamente, se trata de resolverlos inexactamente utilizando sólo un paso del método de Newton para un valor fijo μ . Si este paso tiene éxito (en cierto sentido, tal como se define más adelante), en dicho algoritmo se reducirá la perturbación del parámetro μ ; de lo contrario, se realizará otro paso del método de Newton para el mismo valor μ . Hay que tener en cuenta que el método de Newton está globalizado por una línea de búsqueda para la función de mérito $\frac{1}{2}\|F_{\Psi_{\mu}}\|^2$.

4.1. Algoritmo Principal.

A continuación se presenta el algoritmo principal de este trabajo.

Algoritmo 2.

(S.0) : (Datos Iniciales)

Sea $\varphi_{\mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cualquiera de las funciones definidas en los lemas 1 ó 2. Escoger $x^0 \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $y^0 = Mx^0 + q$, $z^0 = (x^0, y^0)$, sea $\mu_0 > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$, $\epsilon \geq 0$, $r > 0$, $\eta \in (0, 1)$ y $k = 0$.

(S.1) : (Criterio de parada o terminación)

Si $err(z^k) = \|\min\{x^k, y^k\}\| \leq \epsilon$,

Pare: z^k es una solución (aproximada) del $LCP(q, M)$.

(S.2) : (Cálculo de una dirección de búsqueda) Calcule $\Delta z^k \in \mathbb{R}^{2n}$ como solución del sistema lineal

$$\nabla F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k) \Delta z = -F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k).$$

(S.3) : (Cálculo de la longitud de paso)

Sea $t^k = \beta^{m_k}$, donde m_k es el entero no negativo mas pequeño satisfaciendo la condiciones de Armijo

$$\|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k + \beta^m \Delta z^k)\|^2 \leq (1 - \sigma \beta^m) \|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)\|^2.$$

(S.4) : (Nuevo iterado)

Sea $z^{k+1} = z^k + t^k \Delta z^k$.

(S.5) : (Actualización de la regla para μ_k)

Defina el vector

$$\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1}) = (\varphi_{\mu_k}(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}), \varphi_{\mu_k}(x_2^{k+1}, y_2^{k+1}), \dots, \varphi_{\mu_k}(x_n^{k+1}, y_n^{k+1}))^T \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \leq r\mu_k$, entonces $\mu_{k+1} = \eta\mu_k$, sino $\mu_{k+1} = \mu_k$.

(S.6) : (Vuelta)

Sea $k = k + 1$ y va a (S.1).

Comentario 4. De la opción específica del vector de arranque $z^0 = (x^0, y^0)$ y un simple argumento de la inducción, se sigue que la relación $y^k = Mx^k + q$ vale para todas las iteraciones k . Tenga en cuenta que esa relación utilizando el método punto-interior comúnmente no se sostiene (es inviable). Por otra parte, esta terminación motiva el criterio en el paso (S.1) y, de los resultados del error acotado obtenidos en el capítulo anterior se obtiene la actualización de la regla para μ_k en el paso (S.5).

Comentario 5. En la actualidad existe una fuerte base teórica para el criterio de terminación usada en el paso (S.1) del Algoritmo (2). Desde el error acotado los resultados de Mangasarian y Ren [18], Luo y Tseng [22] se desprende que $err(z)$ es una cota de error global de $LCP(q, M)$ para todo $q \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una R_0 -matriz.

Comentario 6. El sistema lineal en el paso (S.2) del Algoritmo (2) se ha resuelto como sigue:

Demostración. Sea;

$$\Psi_{\mu_k}(x^k, y^k) = (\varphi_{\mu_k}(x_1^k, y_1^k), \varphi_{\mu_k}(x_2^k, y_2^k), \dots, \varphi_{\mu_k}(x_i^k, y_i^k), \dots, \varphi_{\mu_k}(x_n^k, y_n^k))^T \in \mathbb{R}^n$$

y sea D_x^k, D_y^k denotando la diagonal de la matriz

$$\text{diag}\left(\frac{\partial \varphi_{\mu}(x_1, y_1)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\mu}(x_n, y_n)}{\partial x_n}\right), \text{diag}\left(\frac{\partial \varphi_{\mu}(x_1, y_1)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\mu}(x_n, y_n)}{\partial y_n}\right).$$

Entonces, calculemos Δx^k y Δy^k de el sistema $n \times n$.

$$\nabla F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k) \Delta z^k = -F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k).$$

Considerando $\Delta z^k = \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{pmatrix}$ se cumple que :

$$\begin{pmatrix} M & -I \\ D_x^k(x^k, y^k) & D_y^k(x^k, y^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Mx^k + q - y^k \\ \Psi_{\mu_k}(x^k, y^k) \end{pmatrix}$$

De aquí,

$$M\Delta x^k - \Delta y^k = -Mx^k - q + y^k; \quad (4.1)$$

$$D_x^k(x^k, y^k)\Delta x^k + D_y^k(x^k, y^k)\Delta y^k = -\Psi_{\mu_k}(x^k, y^k). \quad (4.2)$$

Así de (4.1) tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta y^k &= M\Delta x^k + Mx^k + q - y^k \\ &= M(\Delta x^k + x^k) + q - y^k. \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando lo anterior y sustituyéndolo en (4.2) se cumple que:

$$\begin{aligned} -\Psi_{\mu_k}(x^k, y^k) &= D_x^k(x^k, y^k)\Delta x^k + D_y^k(x^k, y^k)[M(x^k + \Delta x^k) + q - y^k] \\ &= D_x^k(x^k, y^k)\Delta x^k + D_y^k(x^k, y^k)Mx^k + D_y^k(x^k, y^k)M\Delta x^k + \\ &\quad + D_y^k(x^k, y^k)q - D_y^k(x^k, y^k)y^k \\ &= (D_x^k(x^k, y^k) + D_y^k(x^k, y^k)M)\Delta x^k + D_y^k(x^k, y^k)(Mx^k + q - y^k). \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(D_x^k(x^k, y^k) + D_y^k(x^k, y^k)M)\Delta x^k = -\Psi_{\mu_k}(x^k, y^k) - D_y^k(x^k, y^k)(Mx^k + q - y^k)$$

□

4.2. Convergencia del Algoritmo.

Ahora se mostrará usando la teoría desarrollada en el capítulo 2 para el algoritmo 1, que el algoritmo 2 también es globalmente convergente bajo las mismas condiciones.

Teorema 8. *Sea $\varphi_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ denotando una de las funciones definidas en el lema 1 ó 2. Asuma que $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una P_0 y R_0 -matriz y sea $\epsilon = 0$ (siendo ϵ la constante del criterio de terminación), $\{z^k\}$ cualquier sucesión infinita generada por el algoritmo 2, entonces se cumple que:*

- a) *La sucesión $\{z^k\}$ está bien definida;*
- b) *La sucesión $\{z^k\}$ tiene por lo menos un punto de acumulación;*
- c) *Cualquier punto de acumulación de $\{z^k\}$ es una solución del LCP(q, M).*

Demostración. a) Dado que M es una P_0 -matriz, por teorema 3, los sistemas lineales del paso (S.2), es decir;

$$\nabla F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)\Delta z = -F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k) \quad (4.3)$$

tienen solución para todo k , dado que $\nabla F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)$ es no singular.

Por otro lado, la dirección de búsqueda $\Delta z^k \in \mathbb{R}^{2n}$ obtenida en este paso siempre es una dirección de descenso para la función de mérito $\frac{1}{2}\|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)\|^2$.

En efecto probemos lo anterior, para ello llámese $g(z) = \frac{1}{2}\|F_{\Psi_{\mu}}(z)\|^2$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \nabla g(z) &= \|F_{\Psi_\mu}(z)\| \nabla(\|F_{\Psi_\mu}(z)\|) \\
 &= \|F_{\Psi_\mu}(z)\| \frac{F_{\Psi_\mu}(z)}{\|F_{\Psi_\mu}(z)\|} \nabla F_{\Psi_\mu}(z) \\
 &= F_{\Psi_\mu}(z) \nabla F_{\Psi_\mu}(z).
 \end{aligned}$$

Considerando lo anterior, debemos ver que $\nabla g(z) \Delta z < 0$.

En efecto;

$$\begin{aligned}
 \nabla g(z) \Delta z &= (F_{\Psi_\mu}(z) \nabla F_{\Psi_\mu}(z)) \Delta z \\
 &= F_{\Psi_\mu}(z) (\nabla F_{\Psi_\mu}(z) \Delta z) \\
 &= -F_{\Psi_\mu}(z) (F_{\Psi_\mu}(z))^T \quad (\text{por (4.3)}) \\
 &= -\|F_{\Psi_\mu}(z)\|^2 < 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por teorema Δz es una dirección de descenso.

Por lo que la longitud de paso $t^k > 0$ siempre puede ser calculada en el paso **(S.3)**.

Por lo tanto, la sucesión $\{z^k\}$ está bien definida.

- b) Sea $\mu_0 > 0$, consideremos $\mu_k \in [0, \mu_0]$ para todo k , dado que el algoritmo 2 es un método de descenso para cualquier arreglo μ_k , la sucesión $\{z^k\}$ permanece acotada en vista del teorema 5 y la propiedad de R_0 -matriz supuesta de M .
- c) Primero se mostrará que la sucesión $\{\mu_k\}$ generada por el algoritmo 2 converge a cero. Asuma lo contrario; es decir, asúmase que existe una iteración de índice \hat{k} tal que $\mu_{\hat{k}} = \mu_{\hat{k}+j}$ para todo $j = 1, 2, 3, 4, \dots$. Esto quiere decir que el algoritmo 2 tarde o temprano se reducirá a un método de Newton amortiguado para el (único) sistema de ecuaciones no lineales $F_{\Psi_{\mu_{\hat{k}}}}(z) = 0$. En vista de los teoremas 3-5, sin embargo, es conocido que este método converge a la única de solución $z_{\mu_{\hat{k}}}$ de este sistema. En particular, la condición

en paso **(S.5)**, es decir:

$$\|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| = \|\Psi_{\mu_{\hat{k}}}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \leq r\mu_k = r\mu_{\hat{k}},$$

es satisfecha para un valor finito $k \geq \hat{k}$, de modo que el parámetro $\mu_{\hat{k}}$ se reducirá en este paso. Por lo tanto, converge a cero.

Ahora bien, sea $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ un punto de acumulación de $\{z^k\}$ (por parte (b) existe dicho punto de acumulación), así existe una subsucesión $\{z^{k+1}\}_{k+1 \in K}$ tal que $\{z^{k+1}\} \rightarrow \bar{z}$, para todo $k \in K$ suficientemente grande.

Sea $l(k)$ denotando el índice mas grande para el cual se cumple con la condición:

$$\|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \leq r\mu_{l(k)}, \text{ es decir;}$$

$$l(k) = \text{máx}\{j \in \{1, 2, \dots, k\} \mid \|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \leq r\mu_j\}.$$

Nótese que $l(k)$ está bien definido para todo k suficientemente grande y que a su vez $\lim_{k \in K} \mu_{l(k)} = 0$, ya que los μ_k se reducen un numero infinito de veces por la primera parte de esta prueba (note que los indices $l(k)$ no son necesariamente el conjunto de indices K).

Tomando en cuenta la definición de $l(k)$, a su vez la continuidad de las dos posibles funciones que definen a φ_μ nosotros tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\Psi_0(\bar{x}, \bar{y})\| &= \lim_{k \in K} \|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \\ &\leq \lim_{k \in K} r\mu_{l(k)} \\ &= r \lim_{k \in K} \mu_{l(k)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $\Psi_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Por lo tanto, $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$ y $\bar{x}_i \bar{y}_i = 0$, a su vez se cumple que $\bar{y} = M\bar{x} + q$. (Por comentario (4))

Por lo que $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $LCP(q, M)$.

□

La aplicación del algoritmo 2 difiere en dos puntos a partir de la descripción anterior, específicamente, en los pasos **(S.3)** y **(S.5)**. En lugar de paso **(S.3)**, se emplea la siguiente regla no monótona de Armijo (véase Grippo, Lampariello y Lucidi [2]):

(S.3') Definir $p_k = \min(k, p)$ y sea $t^k = \beta^{m_k}$, donde m_k es el entero mas pequeño no negativo, m satisface la condición no monótona de Armijo

$$\|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k + \beta^m \Delta z^k)\|^2 \leq \max_{j=k-p_k+1, \dots, k} \|F_{\Psi_{\mu_{k_j}}}(z^j)\|^2 - \sigma \beta^m \|F_{\Psi_{\mu_k}}(z^k)\|^2.$$

En este sentido, p es cualquier entero no negativo fijo. Numéricamente en los experimentos, esta línea de búsqueda no monótona da mejores resultados que la regla estándar (monótona) de Armijo. Esto, se piensa, es un aspecto interesante ya que usualmente la línea de búsqueda no monótona solo prefieren funciones objetivos altamente no lineales, mientras que la función de mérito que se está usando para este algoritmo no es demasiado no lineal.

La segunda modificación es en la actualización de la regla para la perturbación del parámetro μ_k . La actualización de la regla utilizada es la siguiente:

Es muy similar a la presentada por Chen y Harker [20] y funciona muy bien en los experimentos numéricos.

ACTUALIZACIÓN DE LA REGLA PARA μ_k :

a) Sea $\mu_{k+1} = \text{err}(z^{k+1})^2/n = (\|\min\{x^{k+1}, y^{k+1}\}\|)^2/n$. Si $\mu_{k+1} \geq 1$, entonces

$$\mu_{k+1} = \sqrt{\mu_{k+1}}, \text{ sino } \mu_{k+1} = \mu_{k+1}.$$

b) Si $\mu_{k+1} > \mu_k$, entonces $\mu_{k+1} = \mu_k$.

c) Si $\|\Psi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| < 10^{-4}$, entonces $\mu_{k+1} = 10^{-1} \mu_{k+1}$.

d) Si $\mu_{k+1} < 10^{-16}$, entonces $\mu_{k+1} = 10^{-16}$.

La parte principal (heurística) de esta actualización de la regla es la parte **(a)**. La parte **(b)** garantiza que la sucesión $\{\mu_k\}$ sea no creciente; la parte **(c)** significa

que el parámetro μ_k se reducirá muy rápido, si ya estamos cerca de una solución del $LCP(q, M)$. La parte **(d)**, es solo una salvaguardia.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta capítulo, se presentan los resultados numéricos de los siguientes métodos:

- 1) El algoritmo 2 descrito en la sección anterior, con φ_μ siendo la función definida en lema 1.
- 2) Este es el algoritmo 2 considerando que φ_μ está dada por el lema 2.

Se mostraran los resultados obtenidos por Christian Kanzow en [10] y los resultados obtenidos para el mismo algoritmo pero con una programación propia. Cabe destacar que Kanzow aplicó el programa en el ambiente de programación de MATLAB y fue probado en un Tipo de equipo Pc-486, por otro lado el mismo algoritmo pero con programación propia se desarrollo en el ambiente de MATLAB versión 7.4.0.287 (R2007a) de un equipo portátil Intel(R) Core(TM)Duo CPU T5750 @ 2.00 Ghz, 2.00 Ghz.

Los parámetros utilizados en ambos casos son los siguientes:

$$\beta = 0.5, \sigma = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-6}, p = 10$$

El parámetro de perturbación inicial está dado por: $\mu_0 = \frac{\|g\|}{n}$.

5.1. Ejemplos.

A continuación se presentan algunos ejemplos en los cuales se aplica el algoritmo principal de esta tesis.

Ejemplo 1. Sea M y q definidas de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad q = (-1, -1, \dots, -1)^T.$$

Este ejemplo de un LCP es un problema estándar de prueba para el cual tanto el algoritmo de pivote complementario de Lemke como Cottle y el método principal de pivotes de Danzig, se saben corren en el tiempo exponencial; mirar Murty [12] (capítulo 6). Su solución es $x^* = (0, \dots, 0, 1)^T$, $y^* = (1, \dots, 1, 0)^T$. Obviamente, la matriz M en este ejemplo es una P -matriz y por lo tanto una P_0 y R_0 -matriz. Por consiguiente, los métodos 1 y 2 satisfacen las suposiciones de la convergencia global teorema 8. El vector inicial escogido es $x = (1, \dots, 1)^T$. El número de iteraciones necesarias para el algoritmo programado por Christian Kanzow es indicado en la Tabla (5.1), para varios valores n de la dimensión, a su vez en la Tabla (5.3) se resumen los resultados obtenidos con una programación propia. Los métodos para cuando φ_μ este dada por (1.11) y cuando φ_μ este dada por (1.12) necesitan el mismo número de iteraciones que los métodos 1 y 2, respectivamente, ya que las entradas diagonales de M son todo iguales a uno, de modo que las caracterizaciones correspondientes del problema de complementariedad coinciden.

Ejemplo 2. Sea M y q definidas de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 5 & 6 & \cdots & 6 \\ 2 & 6 & 9 & \cdots & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 6 & 10 & \cdots & 4(n-1)+1 \end{pmatrix}, \quad q = (-1, -1, \dots, -1)^T.$$

Este $LCP(q, M)$ es también un problema estándar de prueba. Otra vez, el algoritmo de pivote complementario y el método principal pivote son conocidos que corren en tiempo exponencial. Además, también se sabe que algunos algoritmos

tipo Newton tienen algunas dificultades con este ejemplo; ver, Harker y Pang [19], Kanzow [9]. Su solución es $x^* = (1, \dots, 1, 0)^T$, $y^* = (0, \dots, 0, 1)^T$. La matriz M de este ejemplo es positiva definida y por lo tanto una P -matriz. Los resultados numéricos obtenidos con los métodos 1 y 2 por Christian Kanzow, son resumidos en la Tabla (5.2), mientras que en la Tabla (5.4) se presentan los resultados obtenidos con una programación propia. El vector inicial escogido es el mismo utilizado en el Ejemplo anterior.

5.2. Tablas.

A continuación se presentarán los resultados obtenidos por Christian Kanzow para los Ejemplos (1) y (2).

Christian Kanzow					
Método	n=8	n=16	n=32	n=64	n=128
1	7	7	7	5	5
2	7	7	7	6	5

TABLA 5.1: NUMERO DE ITERACIONES PARA EL EJEMPLO 1

Christian Kanzow					
Método	n=8	n=16	n=32	n=64	n=128
1	8	8	8	8	8
2	8	8	9	9	9

TABLA 5.2: NUMERO DE ITERACIONES PARA EL EJEMPLO 2

Ahora se presentaran las tablas correspondiente al numero de iteraciones de los Ejemplos (1) y (2) pero con una programación propia.

Programación Propia					
Método	n=8	n=16	n=32	n=64	n=128
1	4	4	4	4	3
2	4	4	4	4	4

TABLA 5.3: NUMERO DE ITERACIONES PARA EL EJEMPLO 1

Programación Propia					
Método	n=8	n=16	n=32	n=64	n=128
1	6	5	6	6	7
2	7	7	10	11	12

TABLA 5.4: NUMERO DE ITERACIONES PARA EL EJEMPLO 2

5.3. Notas sobre el Código.

A continuación se presentará la ventana principal desde donde se ejecuta el algoritmo programado:

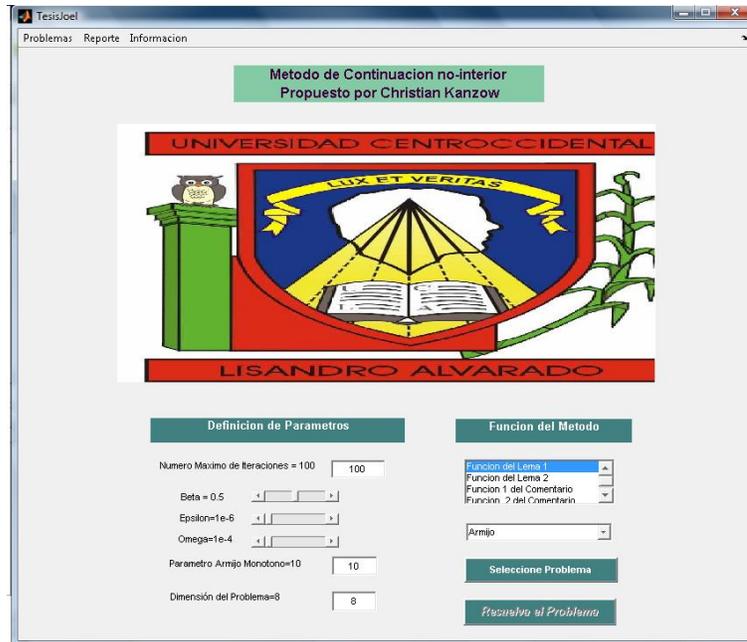


Figura 5.1: Programa

Inicialmente se presentan una serie de datos ya prefijados aunque existe la posibilidad de variar dichos parámetros. El primer parámetro es el utilizado para indicar el máximo de iteraciones permitidas para encontrar la solución de un problema. Se puede señalar que puede existir la posibilidad que el programa no encuentre la solución en un numero pequeño de iteraciones por lo que se trata de salvaguardar estos casos con un criterio de parada para un número máximo de iteraciones. Por otro lado Beta, Omega y Épsilon son parámetros positivos, utilizados en el criterio de parada y en la regla de Armijo monótona. A su vez la opción de parámetro Armijo monótono es un valor estrictamente positivo en el cual se está seleccionando el valor de (p) .

Por otro lado existe la posibilidad de cambiar la dimensión (n) del problema,

es decir la dimensión de la matriz M , el vector q y el vector de inicio o arranque x_0 , esto se hace en la opción dimensión del problema. Las funciones a las cuales se le va a aplicar el algoritmo son seleccionadas en la opción siguiente y el problema a resolver se selecciona en la opción Seleccione Problema. Además existe la posibilidad de cambiar la opción para calcular la longitud de paso, ya sea utilizando Armijo o Armijo Monótono. Finalmente el botón Resuelva Problema se habilita y permite encontrar la solución de los problemas con los datos introducidos.

Cabe destacar que se intentó realizar un programa con apariencias a aplicaciones de Windows.

APÉNDICE A

NOTAS FINALES

A continuación se darán algunas notas importantes que hacen referencia al trabajo estudiado.

1. El algoritmo presentado por Christian Kanzow [10], en verdad resuelve el problema de complementariedad lineal, en la práctica; este algoritmo a su vez converge a una única solución.
2. El algoritmo es eficiente para problemas de dimensión grande ó dimension mediana.
3. El problema de complementariedad lineal perturbado tiene cotas de errores locales y globales.

Por otro lado se recomienda estudiar la posibilidad de relajar las hipótesis para las cuales está garantizada la convergencia del método, mediante la determinación de un conjunto mayor que contenga las P_0 y R_0 -matrices y que asegure dicha convergencia.

REFERENCIAS

- [1] A. Fischer. *A special Newton-type optimization method*. Optimization, 24 (1992), pp. 269-284.
- [2] L. Grippo, F. Lampariello y S. Lucidi. *A nonrnonotone line search technique for Newton's method*. SIAM J. Numer. Anal., 23 (1986), pp. 707-716.
- [3] N. Meggido, T. Noma y M. Kojima. *Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems*. Math. Oper., 16 (1991), pp. 754-774.
- [4] N. Meggido A. Yoshise, T. Noma y M. Kojima. *A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*. Lecture Notes in Computer Science 538, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [5] R. W. Cottle, J. S. Pang y R. E. Stone. *The Linear Complementrity Problems*. Acadmic Press, New York 1992.
- [6] S. Mizuno, T. Noma y M. Kojima. *Limiting behaviour of trajectories generated by a continuation method for monotone complementarity problems*. Math. Oper. Res., 15 (1990), pp. 662-675.
- [7] S. Mizuno, T. Noma y M. Kojima. *A new continuation method for complementarity problems with uniform P-functions*. Math. Programming, 43 (1989), pp. 107-113.
- [8] J. Nocedal y S. J Wright. *Numerical Optimization*. 2^{da} Edición, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [9] Christian Kanzow. *Global convergence prooporties of some iterative methods for Linear Complementarity problems*. SIAM J. Optim., 6 (1996), pp. 326-341.

-
- [10] Christian Kanzow. *Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems*. Siam J. Matrix Anal. Appl., Vol. 17, No. 4, pp. 851-868, Octubre 1996.
- [11] N. Meggido. *Pathways to the optimal set in linear programming, in Progress in Mathematical Programming*. Interior Point and Related Methods, N. Meggido, ed., Springer-Verlag, New York, 1988.
- [12] K. G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Sigma Series in Applied Mathematics 3, Heldermann-Verlag, Berlin, 1988.
- [13] J.-S. Pang. *Newton's method for B-differentiable equations*. Math. Oper. Res., 15 (1990), pp.311-341.
- [14] J.-S. Pang. *A B-differentiable equation-based, globally and locally quadratically convergent algorithm for nonlinear programs, complementarity and variational inequality problems*. Math. Programming, 51 (1991), pp. 101-131.
- [15] P. Du Val. *The unloading problem for plane curves*. Amer. J. Math., 62 (1940), pp. 307-311.
- [16] W. I. Zangwill y C. B. Garcia. *Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- [17] Habetler G. J. Lemke C. E y Cottle, R. W. *On classes of copositive matrices*. Linear Algebra and Its Applications, 3 (1970), pp. 295-310.
- [18] O. L. Mangasarian y J. Ren. *New improved error bounds for the linear complementarity problem*. Math. Programming, 66 (1994), pp. 241-255.
- [19] P. T. Harker y J.-S. Pang. *A damped Newton method for the linear complementarity problem, in Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations, Lectures in Applied Mathematics*. Vol. 26, E. L. Allgower and K. Georg, eds., American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, pp. 265-284.

-
- [20] B. Chen y P. T. Harker. *A non-interior-point continuation method for linear complementarity problems*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14 (1993), pp. 1168-1190.
- [21] B. Chen y P. T. Harker. *A Non-Interior-Point Continuation Method for Monotone Variational Inequalities*. Working Paper 90–10–02, Decision Sciences Department, Wharton School, University of Pennsylvania; Math Programming, to appear., Philadelphia, PA, 1990, pp. 1168-1190.
- [22] X.-D. Luo y P. Tseng. *Conditions for a projection-type error bound for the linear complementarity problem to be global*. Linear Algebra Appl., to appear.
- [23] M. Aganagic y R. W. Cottle. *A note on Q -matrices*. Math. Programming, 16 (1979), pp.374-377.
- [24] J. E. Dennis Jr y Robert B. Schnable. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nolinear Equation*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [25] Abram Berman y Robert J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.