UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas.

Calculo de la Inversa Generalizada de una Matriz Racional y sus Aplicaciones

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Maxiel. Pérez.

Como requisito final para obtener el título de

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Matemática aplicada.

Tutor: Dr. Javier Hernández Benítez.

Barquisimeto - Venezuela

Diciembre 2009

Índice general

Dedicatoria

A mi Tía Mary Por darme todo su apoyo cuando mas lo necesitaba y por esforzarse en hacer de nosotros mejores personas.
Por siempre muchas gracias...

Agradecimientos

Son tantas las personas a las cuales debo este éxito en mi vida, el cual se los agradezco de corazon, sin ustedes no lograría alcanzar esta meta.

Pero antes de todos quiero agradecer a mi Tía Lesbia (Mari) por darme su apoyo incondicional,por darme cada día las palabras de alientos necesarias para seguir adelante.Por enseñarme que con esfuerzo y trabajo todo se puede, por creer en mi y permitirme empezar este camino que sin su ayuda no hubiese podido terminar. Gracias por este éxito que es de las dos.

A mi Padre por ser incondicional para mi,Gracias a su apoyo y a su inmenso amor he logrado este éxito en mi vida. Gracias por darme la posibilidad de seguir adelante. TQM.

A mis Hermanos y primos por siempre estar allí pendiente y haciendo lo posible para ayudarme. Los Quiero Mucho.

A mi Novio Xavier por ser un hombre maravilloso, comprensivo, cariñoso e incondicional. Gracias por darme ese apoyo que siempre necesite. Por estar allí en los momentos mas difíciles de mi vida, por creer en mi y siempre hacerme saber lo inteligente y valiosa que soy. Gracias por ese Amor tan Grande que día a día me hacen la mujer mas feliz del mundo. Te Amo Mi Oso Precioso.

A mi segunda Familia (Los Garcia-Rosendo) quienes me han brindado su comprensión, apoyo y cariño. Muchas Gracias por ser parte de este gran sueño.

A Ilianny,Jessica,Yusmari, Tony, Alexis,Luis,Andreina, Nina, Jechu,Laura,Sara, Urimare, Juancho, Luis Anibal,Leo y Jose Antonio mis grandes amigos que siempre han sido y serán un apoyo en mi vida. En Relidad Gracias por ser Mis Amigos. Los Quiero y Valoro Muuuuucho.

A Dicmar, Eliza, Yai, Yoli y Yuber por aparecer en mi vida en una de las etapas mas difíciles de la carrera. Juntos hicimos un gran equipo y espero que así sea siempre. Los Quiero.

Al Prof. Mario, por aparecer en mi camino desde el inicio de la carrera, Gracias a sus consejos y a sus palabras logro sembrar en mi el cariño y el amor necesario para seguir adelante este camino. Muchas Gracias por todo. Siempre lo recordaré como el gran Profesor y ser humano que es.

A mi tutor, Javier Hernández, por su tiempo, dedicación y paciencia. Sin su ayuda llegar a la meta seria un poco mas difícil. Muchas Gracias

Resumen

En este trabajo investigaremos la aplicación del algoritmo de Leverrier-Faddeev modificado , que es aplicable en el cálculo de la inversa de la matriz racional de Moore-Penrose y la inversa de Drazin.
Presentamos un algoritmo para el cálculo de las matrices racionales de la inversa de Drazin.
También algunos sistemas de ecuaciones se resuelve por medio de la inversa de Drazin y la inversa de las matrices racional de Moore-Penrose.

Además describiremos las aplicaciones del algoritmo en el calculo de la Inversa de Moore Penrose y la inversa de Drazin de las matrices racionales

Introducción

El cálculo de inversas generalizadas de una matriz compleja constante $A(s) \equiv A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mediante el algoritmo de Leverrier-Faddeev se ha ha investigado en muchos trabajos [1], [3], [4], [6], [10] y otros. En [14] se describe una implementación del algoritmo de Leverrier-Faddeev para calcular la inversa de Moore-Penrose de una matriz racional singular en MAPLE.

En [10] se modificó el algoritmo de Leverrier-Faddeev para calcular la inversa de Drazin de una matriz cuadrada con coeficientes constantes. S. Barnett en [1] presenta una nueva versión del algoritmo de Leverrier-Faddeev, aportando además una extensión del algoritmo para calcular la inversa de una matriz polinómica de la forma $s^2 I_n - sA_1 - A_0$ donde $A_0, A_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. En [12] presentan una versión del algoritmo en función de una familia de polinomios ortogonales clásicos y luego en [11] se presenta una extensión y generalización del algoritmo para calcular la inversa de una matriz polinómica de grado arbitrario. Un problema abierto es adaptar el algoritmo de Leverrier-Faddeev en función de familias de polinomios ortogonales para calcular inversas generalizadas.

En este trabajo estudiaremos el trabajo realizado en [17] lo cual consiste en una extension de la modificación del algoritmo de Grevile [10] y del algoritmo de Leverrier-Faddeev (ver [1], [5], [8]), al conjunto de matrices racionales no regulares. También estudiaremos las soluciones de algunos sistemas de ecuaciones matriciales, por medio de la inversa de Drazin y la inversa de las inversas de Moore-Penrose.

Por otra parte, en la literatura se conoce un gran número de aplicaciones del algoritmo de Leverrier-Faddeev y de la inversas generalizadas de matrices polinómicas (ver [7], [9], [14]).

Una de las principales desventajas de la aplicación del algoritmo, es que la manipulación por un equipo necesita mucho más tiempo y espacio en la memoria con respecto a la aplicación numérica. Además, los paquetes simbólico en general son "lentos". Y unas de las principales ventajas de la aplicación del algoritmo presentado en [17] (el cual se basa este trabajo) es significativamente aplicado a matrices racionales y a un conjunto más amplio de problemas, con respecto a los algoritmos destinados a las matrices constante. Por otra parte, los algoritmos aplicables a polinomio o matrices racionales se pueden usar en la construcción de matrices de prueba y en la verificación de algunas hipótesis. Por último, estos algoritmos pueden ser verificados directamente en la prueba de matrices

Capítulo 1

Inversa Generalizada

1.1. Inversa Generalizada de Matrices

El algebra matricial clásica sostiene que la matriz inversa de una matriz A debe cumplir varias condiciones:

- Que la matriz A sea cuadrada
- Que la matriz A sea no singular, es decir; que su determinante sea no nulo

Una matriz A tiene una inversa si es cuadrada y no singular, en otras palabras, si las filas o columnas son linealmente independiente

Para una inversa generalizada de una matriz A dada debemos tener una matriz X asociada de alguna manera con A tal que:

1. Tiene algunas propiedades de la inversa usual
2. Se reduce como la inversa usual cuando A es no singular

Así, concluimos que: Una inversa generalizada de A es cualquier matriz X que satisface $AXA = A$

Si A es no singular tenemos que $X = A^{-1}$

El concepto de la inversa generalizada fue introducida por el matemático norteamericano Eliakim Hastings Moore (1862-1932), a quien se considera como el "padre de la matemática norteamericana", en 1920, que permite obtener la inversa de cualquier matriz, sea cuadrada o no, singular o no, lo cual no es posible realizar con la inversa clásica. Una solución diferente ya había sido planteada por el Geodesta Alemán Friedrich Robert Helmert (1841-1917) en el año 1906 y en 1916. Dada la poca acogida a lo planteado por E.H.Moore, este vuelve a presentar la inversa generalizada de una manera mas amplia, pero por la escasa referencia que se encuentra en la literatura entre 1920 y 1949, se desprende que no tuvo receptividad.

Para el año 1955 Penrose dio una profundización de los primeros estudios de Moore en el año 1920, que al parecer no tenia conocimiento del trabajo de Moore y por tanto la inversa es comúnmente conocida como la Inversa de Moore - Penrose.

Además dicha clase se reduce aun solo elemento, ya que la matriz que cumple dichas condiciones es única.

La matriz inversa generalizada de una matriz A de orden $n \times m$ es una matriz $A^{(1)}$, que algunos designan como $A^{\dagger}$ o bien A_g que satisface la relación siguiente:
$AA^{(1)}A = A$
Siendo la relación inversa clásica: $AA^{(1)} = A^{(1)}A = I$ un caso particular de la inversa generalizada.

Así tenemos que Penrose mostró que para cada matriz finita A (Rectangular o Cuadrada) de elementos reales o complejos existe una única matriz X que cumple las 4 ecuaciones siguientes: (Llamadas Ecuaciones de Penrose)

$$AXA = A \tag{1.1.1}$$

$$XAX = X \tag{1.1.2}$$

$$(AX)^* = AX \tag{1.1.3}$$

$$(XA)^* = XA \tag{1.1.4}$$

Si A es no singular es claro que $X = A^{-1}$

Nota: Como la Inversa de Moore-Penrose es única se desprende que la inversa de Moore-Penrose de una matriz no singular es la misma inversa ordinaria

Sea $\mathbb{C}^{m\times n}$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$) las clases de matrices complejas (respectivamente reales) de orden $m \times n$ y $\mathbb{C}_r^{mxn} = \{X \in \mathbb{C}^{m\times n} : rank(X) = r\}$. Usualmente, $\mathbb{C}(s)$ denota las funciones racionales con coeficientes complejos indeterminados por s. Las matrices de orden $m \times n$ con elementos en $\mathbb{C}(s)$ son denotados por $\mathbb{C}(s)^{m\times n}$. Denotaremos por $\mathcal{I}_r$ y $\mathcal{I}$ la matriz identidad de orden r

Definición 1.1.1. Para cada $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, sea $A\{i, j, \ldots, k\}$ denota el conjunto de las matrices $x \in \mathbb{C}^{nxm}$ que satisfacen las ecuaciones $(i), (j), \ldots, (k)$ entre las ecuaciones (1)-(4).

Una matriz $x \in A\{i, j, \ldots, k\}$ es llamada una $\{i, j, \ldots, k\}$ inversa de A, también es denotado por $A^{(i,j,\ldots,k)}$

Por ejemplo, X es una 1,3 inversa de A si $AXA = A$ y $(AX)^* = AX$ y escribiremos $X \in A\{1, 3\}$, tener en cuenta que X puede o no puede satisfacer las otras dos condiciones de Penrose

Para hallar una inversa generalizada de una matriz A, la cual puede no ser única, se utiliza la inversa clásica si una matriz A puede ser obtenida por partición y ser invertible en forma clásica. Esto nos plantea varios casos:

Caso A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array} \right)$$

$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

$C = \mid \ A_{41} A_{42} A_{43} \ \mid$

$A^{-1} = \mid \ B^{-1} \mid \ 0 \ \mid$

Caso B:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array} \right)$$

$B = \mid \ A_{11} A_{12} A_{13} \ \mid$

$C = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \mid \ 0 \mid \ C^{-1} \ \mid$$

Caso C:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} B' \\ \hline C \\ \hline B'' \end{array}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix}$$

$C =\mid \ A_{31}A_{32}A_{33} \ \mid$

$A^{-1} =\mid \ B' \mid \ C \mid \ B'' \ \mid$

1.1.1. Existencia y Construcción de $\{1\}$ Inversa

Es fácil una construcción de la $\{1\}$ - Inversas de la matriz $R \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ dada por $R = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para cada $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$, la matriz de orden $m \times n$ $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$ Es una $\{1\}$ - Inversa de R.

La construcción de la $\{1\}$ - Inversa para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ arbitraria se simplifica transformando A en una forma normal hermitiana

Teorema 1.1.1. *: Sea* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *y sea* $E \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ *y* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que:*

$$EAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Entonces Para cada $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$*, la matriz de orden* $n \times m$

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

E *es una* $\{1\}$ *Inversa de* A

Demostración. :

Por hipótesis tenemos que

$$EAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

entonces

$$A = E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

tal que

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

E Satisface $AXA = A$

En efecto:

$$\begin{aligned} AXA &= \left[E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right] \left[P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} E \right] \left[E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right] \\ &= E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (P^{-1}P) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} (EE^{-1}) \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= E^{-1} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

Por tanto X es una $\{1\}$-Inversa de A

Observación : Dado que P y E son no singulares, el rango de X es el rango de la matriz particionada en

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} E$$

En vista de la forma de la matriz, rank(X)= r + rank(L)

El teorema muestra que cada matriz finita con elementos en el campo complejo tiene una $\{1\}$ - Inversa y sugiere que tal inversa puede construirse

1.1.2. Propiedades de $\{1\}$- Inversa

Ciertas propiedades se dan en el lema 1, para una matriz A dada, denotaremos cada $\{1\}$ - Inversa por $A^{(1)}$

Observar que en general $A^{(1)}$ no es definida únicamente por una matriz. Para cada λ definiremos:

$$\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & si\ \lambda \neq 0 \\ 0, & si\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Lema 1.1.2. *Sea* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{C}$ *entonces :*

1. $(A^{(1)})^* \in\ A^*\{1\}$

2. *Si* A *es no singular entonces* $A^{(1)} = A^{-1}$ *es única*

3. $\lambda^{+} A^{(1)} \in\ (\lambda A)\{1\}$

4. *$rank(A^{(1)}) \geq rank(A)$*

5. *Si S y T son no singulares entonces*
   $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in \ SAT$

6. *$AA^{(1)}$ y $A^{(1)}A$ son idempotentes y tienen el mismo rango*

Demostración. :

1. Sabemos que:$A\{1\} = \{X \in \mathbb{C}^{mxn} / AXA = A\}$

   Luego, $(AA^{(1)}A)^* = A^*(A^{(1)})^*A^* = A^*$
   Por tanto $(A^{(1)})^* \in \ A^*\{1\}$

2. Sea A una matriz no singular entonces

$$AA^{(1)}A = A \Rightarrow AA^{(1)} = I$$

   Así $A^{(1)} = A^{-1}$

   Por tanto $A^{-1} \in \ A^{(1)}$
   Por otro lado,

$$\begin{aligned} AA^{-1}A &= A \\ AA^{-1}AA^{-1}AA^{-1} &= A^{-1} \\ (AA^{-1})^* &= A^{-1}A \\ (A^{-1}A)^* &= AA^{-1} \end{aligned}$$

Así $A^{(1)} \in \ A^{-1}$

Por lo que $A^{(1)} = A^{-1}$

3. Sabemos que $(\lambda A^{(1)}) = \{X \in \mathbb{C}^{mxn}, \lambda^{+} \in \ \mathbb{R}/\lambda^{+}(AXA) = \lambda^{+}A\}$

   Ahora;

   $\lambda^{+}(AA^{(1)}A) = \lambda^{+}(A) \Rightarrow \lambda(AA^{(1)}A) = \lambda(A)$ con $\lambda \neq 0$

   Por tanto $\lambda^{+}A^{(1)} \in \ (\lambda A)\{1\}$

4. $$rank(A) = rank(AA^{(1)}A) \leq rank(A^{(1)}A) \leq rank(A^{(1)})$$

   Por tanto, $rank(A^{(1)}) \geq rank(A)$

5. Sabemos que $SAT\{1\} = \{X \in \mathbb{C}^{m\times n}/S(AXA)T = SAT\}$

   Luego;

   $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \quad \Rightarrow T^{-1}(AA^{(1)}A)S^{-1} = T^{-1}AS^{-1} \Rightarrow AA^{(1)}A = A \Rightarrow S(AA^{(1)}A)T = SAT$

   Por tanto $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in \ SAT$

6. Definamos $H = AA^{(1)}$ entonces

$$\begin{aligned} H^2 &= (AA^{(1)})(AA^{(1)}) \\ &= [AA^{(1)}A]A^{(1)} \\ &= AA^{(1)} \\ &= H \end{aligned}$$

Así $H = AA^{(1)}$ es idempotente

De manera análoga se prueba que $G = A^{(1)}A$ es idempotente

Luego,

$$A = HA \Rightarrow rank(A) \geq rank(AA^{(1)}) = rank(H) \geq rank(HA) = rank(A)$$
$$A = AG \Rightarrow rank(A) \geq rank(A^{(1)}A) = rank(G) \geq rank(AG) = rank(A)$$

Por tanto $rank(AA^{(1)}) = rank(A) = rank(A^{(1)}A)$

Lema 1.1.3. *: Sea $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ entonces*

1. $A^{(1)}A = I_n \Leftrightarrow r = n$

2. $AA^{(1)} = I_m \Leftrightarrow r = m$

Demostración. :

1. Supongamos que r=n entonces por lema (1.1.2) (item 6) se tiene que $A^{(1)}A$ es idempotente y no singular.

   Luego,
   $$(A^{(1)}A)^2 = A^{(1)}A$$
   Esto implica que
   $$(A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)^2 = (A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)$$
   Así, $A^{(1)}A = \mathcal{I}_n$

   Recíprocamente supongamos que $(A^{(1)}A) = I_n$
   Esto implica que $rank(A^{(1)}A) = n = rank(I_n)$
   Y por tanto $rank(A) = n$

2. La prueba se hace de manera análoga a 1.

Lema 1.1.4. *: Sean $Y, Z \in A\{1\}$ y sea $X = YAZ$ entonces $X \in A\{1,2\}$*

Demostración. :

Debo probar que $X \in A\{1,2\}$, es decir, X debe satisfacer:

1. $AXA = A$

2. $XAX = X$

En efecto;

$$\begin{aligned} AXA &= A(YAZ)A \\ &= (AYA)ZA \\ &= AZA \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= (YAZ)A(YAZ) \\ &= Y(AZ)AZ \\ &= Y(AZA)Z \\ &= YAZ \\ &= X \end{aligned}$$

Por tanto $X \in A\{1, 2\}$

Observación: Dado que las matrices A y X son simétricas en (1) y (2), $X \in A\{1, 2\}$ y $A \in X\{1, 2\}$ son equivalentes y podemos decir que A y X son $\{1, 2\}$ Inversas

Teorema 1.1.5. *Dados A y $X \in A\{1\}$, $X \in A\{1, 2\}$ si y solo si $rank(X) = rank(A)$*

Demostración. : Supongamos que $rank(X) = rank(A)$, entonces queremos probar que $X \in A\{1, 2\}$.

En efecto,

Por hipótesis tenemos que $X \in A\{1\}$, solo falta probar que $X \in A\{2\}$. Veamos Claramente $R(XA) \subset R(A)$, pero por lema1 (6) $rank(XA) = rank(A)$ y como $rank(X) = rank(A)$ tenemos que $rank(XA) = rank(A)$. Por otro lado tenemos que: $R(AB) = R(A) \Leftrightarrow rank(AB) = rank(A)$ Por tanto, $R(XA) = R(X)$.

Así, $XAY = X$ para algún Y
Ahora multiplicando a ambos lados por A tenemos que: $AX = AXAY = AY$ y por tanto $XAX = X$
Así que, $X \in A\{1, 2\}$
Recíprocamente supongamos que $X \in A\{1, 2\}$ entonces se satisface:

1. $AXA = A$
2. $XAX = X$

Luego, $rank(A) = rank(AXA) \leq rank(AX) \leq rank(A)$ y
$rank(X) = rank(XAX) \leq rank(XA) \leq rank(X)$

Así , $rank(X) \leq rank(XA) \leq rank(X)$

Por tanto $rank(X) = rank(XA) = rank(AX) = rank(A)$

Corolario 1.1.6. *: Dos de las 3 siguientes declaraciones implican la tercera:*

1. $X \in A\{1\}$
2. $X \in A\{2\}$
3. $rank(X) = rank(A)$

Demostración. : Mostremos que 1) y 2) implican 3)

En efecto;

$$\begin{aligned} X \in A\{1\} \wedge X \in A\{2\} \quad &\Rightarrow \quad X \in A\{1,2\} \\ &\Rightarrow \quad rank(X) = rank(A) \quad \text{(Por el teorema 1.1.5)} \end{aligned}$$

Mostremos que 1) y 3) implican 2)

En efecto;

$$\begin{aligned} X \in A\{1\} \wedge rank(X) = rank(A) \quad &\Rightarrow \quad X \in A\{1,2\} \\ &\Rightarrow \quad X \in A\{2\} \subset A\{1,2\} \end{aligned}$$

Mostremos que 2) y 3) implican 1)

En efecto;

$$\begin{aligned} X \in A\{2\} \wedge rank(X) = rank(A) \quad &\Rightarrow \quad X \in A\{1,2\} \\ &\Rightarrow \quad X \in A\{1\} \subset A\{1,2\} \end{aligned}$$

1.1.3. Inversa de Drazin

Tenemos que la inversa de Drazin se define solo para matrices cuadradas. Existen dos enfoques a la hora de dar una definición de La inversa de Drazin: el funcional y el algebraico,los cuales resultan ser equivalentes. El algebraico fue dada por M.P Drazin en el año 1985 y sera de nuestro interés en este trabajo.

Antes de dar la definición introduciremos la definición de índice de una matriz cuadrada

Definición 1.1.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz racional cuadrada entonces el índice de la matriz A es el menor entero positivo k que satisface: $rang(A^{k+1}) = rang(A^k)$, es decir $ind(A(s)) = min\{k : rank((A(s)^k) = rank((A(s)^{k+1})\}$.

Definición 1.1.3. La inversa de Drazin de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde ind(A)= k es una matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface:

1. $A^{k+1}A^D = A^k$
2. $A^D A A^D = A^D$
3. $AA^D = A^D A$

Donde A^D es llamada Inversa de Drazin de la matriz A

Teorema 1.1.7. *: Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde ind(A)= k y rank(A^k)=r, entonces existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que:*

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1.1.5}$$

Donde $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular y $A_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times n-r}$ es nilpotente, con índice de nilpotencia k. Y con estas condiciones

$$A^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1.1.6}$$

:

Teorema 1.1.8. *: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con ind(A)= k. Entonces, para cada entero $l \geq k$ y cualquier $\{1\}$-Inversa de $((A(s))^{2l+1})$ se tiene que:*

$$A(s)^D = A(s)^l((A(s))^{2l+1})^{(1)}A(s)^l \tag{1.1.7}$$

Demostración. :

Sea

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donde $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular y $A_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times n-r}$ es nilpotente, con índice de nilpotencia k. Entonces;

$$\begin{aligned} A^{2l+1} &= P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & A_2^{2l+1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Si

$$G = P\begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Es una $\{1\}$-inversa de A^{2l+1}, entonces

$$\begin{aligned} A^{2l+1}GA^{2l+1} &= P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\left[P\begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{pmatrix} P^{-1}\right] P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (P^{-1}P)\begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{pmatrix} (P^{-1}P)\begin{pmatrix} A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} A_1^{2l+1}G_1A_1^{2l+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A^{2l+1} \end{aligned}$$

Luego, $A^D = A^lGA^l$ Por tanto $A(s)^D = A(s)^l((A(s))^{2l+1})^{(1)}A(s)^l$

Capítulo 2

El algoritmo de Leverrier-Faddeev

Un algoritmo atribuido a Leverrier, Faddeev, y otros, permite calcular de forma simultánea, el polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y la matriz adjunta de $\lambda I_n - A$. En 1840, U. J. J. Leverrier estableció una conexión con la identidad de Newton. El algoritmo de Leverrier, según A. S. Householder [13] fue "re-descubierto y mejorado" en varias ocasiones; Horst en 1935, luego, en forma independiente, J. M. Souriau (1948) y J. S. Frame (1949), y Faddeev y Sominskii (1949). La versión de estos últimos, es presentada en la siguiente sección.

El método de Leverrier-Faddeev no es práctico para propósitos computacionales ya que no es numéricamente estable y es muy costoso en cuanto a aritmética punto flotante. Sin embargo tiene gran atractivo teórico y podemos encontrar aplicaciones en Teoría de Control Lineal (ver [15]), en forma mas precisa, si tenemos un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, x es el vector de estado de dimensión n, u el control de dimensión m, y el vector de las salidas de dimensión r, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$. La función $H(s) := C(sI_n - A)^{-1}B$ es llamada función de transferencia del sistema lineal (2.0.1).

El algoritmo genera el polinomio característico y la matriz adjunta en función de la base canónica $\{s^k\}_{k=0}^n$ en el espacio de los polinomios de grado n con coeficientes complejos. En 1996, S. Barnett [2] consiguió una implementación del algoritmo para expresar el polinomio característico y la matriz adjunta en función de unas familias de polinomios ortogonales muy particulares (Hermite, Laguerre, Chebyshev y Legendre). Una contribución de [12] fue presentar un método general para las familias de los polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel) teniendo en cuenta una caracterización de tales familias obtenida en [16]; la expresión que relaciona una familia de polinomios ortogonales clásicos $\{P_k\}_{k=0}^n$ con sus derivadas. De esa forma presentamos una implementación muy simple del algoritmo de Leverrier-Faddeev, donde la relación de recurrencia a tres-términos juega un papel clave.

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ teniendo como polinomio característico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

donde I_n denota la matriz identidad de orden $n \times n$. y consideremos

$$(\lambda I_n - A)^{-1} = \frac{1}{p_A(\lambda)} \left(\lambda^{n-1} I_n + \lambda^{n-2} B_1 + \cdots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}\right). \qquad (2.0.3)$$

Notemos que

$$B(\lambda) := Adj\ (\lambda I_n - A) = \lambda^{n-1} I_n + \lambda^{n-2} B_1 + \cdots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}. \qquad (2.0.4)$$

El método de Leverrier-Faddeev consiste en calcular, en forma simultanea, los coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{B_k\}_{k=1}^{n-1}$. Se pueden deducir unas expresiones para dichos coeficientes, de la siguiente forma:

De (2.0.2) y (2.0.3) se obtiene la identidad

$$(\lambda I_n - A)\left(\lambda^{n-1} I_n + \lambda^{n-2} B_1 + \cdots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}\right) = p_A(\lambda) I_n. \qquad (2.0.5)$$

Si identificamos los coeficientes en cada uno de los miembros de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 &= a_1 I_n + A, \\ B_2 &= a_2 I_n + A B_1, \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= a_{n-1} I_n + A B_{n-2}, \\ A B_{n-1} &= -a_n I_n. \end{aligned} \qquad (2.0.6)$$

Ahora, consideremos la identidad

$$\frac{d}{d\lambda}p_A(\lambda) = tr\,(B(\lambda)) \tag{2.0.7}$$

donde $tr\,(B(\lambda))$ denota la traza de la matriz $B(\lambda)$. Sustituyendo (2.0.4) en (2.0.7)

$$\begin{aligned} tr\,B(\lambda) &= n\lambda^{n-1} + tr\,B_1\lambda^{n-2} + \cdots + tr\,B_{n-2}\lambda + tr\,B_{n-1} \\ &= \frac{d}{d\lambda}p_A(\lambda) \\ &= n\lambda^{n-1} + (n-1)a_1\lambda^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}\lambda + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, y usando las igualdades dadas en (2.0.6), obtenemos una expresión para los a_k:

$$a_k = -\frac{1}{k}tr\,(AB_{k-1}), \quad , k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.0.8}$$

De esta manera, el algoritmo de Leverrier-Faddeev queda de la siguiente forma:

Datos de entrada: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Condición inicial: $a_0 = 1, \quad B_0 = I_n$

FOR $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$a_k = -\frac{1}{k} tr\,(AB_{k-1})$$

$$B_k = a_k I_n + AB_{k-1}$$

END (FOR)

$$a_n = -\frac{1}{n} tr\,(AB_{n-1}).$$

2.1. Ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

Si aplicamos el algoritmo anterior tenemos que:

$$a_1 = -tr\ (AB_0) = -tr\ A = -5, \quad B_1 = a_1 I + A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$a_2 = -tr\ (AB_1) = 9, \quad B_2 = a_2 + AB_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 & 5 \\ -9 & -10 & -33 & 3 \\ 5 & 9 & 26 & -3 \\ 7 & 7 & 22 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$a_3 = -tr\ (AB_2) = -7, \quad B_3 = a_3 + AB_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & -4 \\ 1 & 8 & 22 & -5 \\ 0 & -6 & -16 & 4 \\ -1 & -6 & -16 & 3 \end{bmatrix}.$$

$a_4 = -tr\ (AB_3) = 2.$

Así, el polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$$

y la matriz adjunta de $\lambda I_4 - A$ es

$$Adj\ (\lambda I_4 - A) = \lambda^3 I_4 + \lambda^2 B_1 + \lambda B_2 + B_3.$$

Ejemplo 2: En este ejemplo vamos a observar que el algoritmo de Leverrier-Faddeev no es un buen algoritmo para propósitos computacionales.

Sean $S \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ inversible y $D = diag(1, 2, 3, \ldots, 20)$. Si $A = S^{-1}DS$, es claro que el espectro de A es $\sigma(A) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

Al aplicar el algoritmo de Leverrier-Faddeev a la matriz A, el polinomio resultante tiene las siguientes raíces

```
   20.0001
   19.0002
   17.9952
   17.0279
   15.8827
   15.2272
   13.5622 + 0.3888i
   13.5622 - 0.3888i
   11.5080 + 0.5583i
   11.5080 - 0.5583i
    9.4466 + 0.4548i
    9.4466 - 0.4548i
    7.6579
    7.2213
    5.9367
    5.0213
    3.9952
    3.0008
    1.9999
    1.0000
```

Pero el espectro de A no tiene elementos complejos!

Capítulo 3

Algoritmo para Matrices Racionales

Consideraremos las matrices complejas racionales $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$, donde la variable s es indeterminada.

Teorema 3.0.1. *: Consideremos una matriz racional de una variable $A(s)$ y supongamos que:*

$$\begin{aligned} a(z,s) &= \det(zI_n - A(s)) && (3.0.1)\\ &= a_0(s)z^n + a_1(s)z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(s)z + a_n(s) && (3.0.2) \end{aligned}$$

$a_0(s) \equiv 1$*,* $z \in \mathbb{C}$ *es el polinomio característico de* $A(s)$*.*

Así mismo consideremos la siguiente sucesión de matrices racionales de orden

$n \times n$

$$B_j(s) = a_0(s)A(s)^j + a_1A(s)^{j-1} + \cdots + a_{j-1}A(s) + a_j(s)I_n \tag{3.0.3}$$

$a_0(s) = 1,\ j = 0, 1, \cdots, n.$
Sea $a_n(s) \equiv 0, \cdots, a_{t+1}(s) \equiv 0$ y $a_t(s) \neq 0.$
Ahora definamos el siguiente conjunto:

$$\Lambda = \{s_i \in \mathbb{C} : a_t(s_i) = 0\}.$$

Además , supongamos que $B_n(s) \equiv 0, \cdots, B_r(s) \equiv 0,$
$B_{r-1}(s) \neq 0$ y $k = r - t.$

En el caso $s \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y $k > 0$, la inversa Drazin $A(s)$ esta dada por:

$$\begin{aligned} A(s)^D &= a_t(s)^{-k-1}A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1} && (3.0.4) \\ &= a_t(s)^{-k-1}A(s)^k[a_0(s)A(s)^{t-1} + \cdots + && (3.0.5) \\ &\quad +a_{t-2}(s)A(s) + a_{t-1}(s)I_n]^{k+1} \end{aligned}$$

En el caso $s \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y $k = 0$, se tiene que $A(s)^D = 0$.

Para $s_i \in \Lambda$ denotaremos por t_i el mayor entero que satisface $a_{t_i}(s_i) \neq 0$ y por r_i el menor entero positivo que satisface
$B_{r_i}(s_i) \equiv 0.$

Entonces la inversa Drazin $A(s_i)$ esta dada por:

$$
\begin{aligned}
A(s_i)^D &= a_{t_i}(s_i)^{-k_i-1}A(s_i)^{k_i}B_{t_i-1}(s_i)^{k_i+1} \\
&= a_{t_i}(s_i)^{-k_i-1}A(s_i)^{k_i}[a_0(s_i)A(s_i)^{t_i-1}+\cdots+ \qquad (3.0.6)\\
&\quad a_{t_i-2}(s_i)A(s_i)+a_{t_i-1}(s_i)I_n]^{k_i+1} \qquad (3.0.7)
\end{aligned}
$$

Donde $k_i = r_i - t_i$.

De los resultados del teorema se presenta el siguiente algoritmo para calculo de la inversa Drazin

3.1. Algoritmo:

Supongamos que $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$ es una matriz racional dada.

- Paso 1: Construyamos la sucesión de números $\{a_0(s), a_1(s), \cdots, a_n(s)\}$ y la sucesión de matrices racionales $\{B_0(s), B_1(s), \cdots, B_n(s)\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
A_0(s) &= 0\\
a_0(s) &= 1\\
B_0(s) &= I_n
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
A_1(s) &= A(s)B_0(s) \\
a_1(s) &= -\frac{Tr(A_1(s))}{1} \\
B_1(s) &= A_1(s) + a_1(s)I_n \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
A_n(s) &= A(s)B_{n-1}(s), \\
a_n(s) &= -\frac{Tr(A_n(s))}{n}, \\
B_n(s) &= A_n(s) + a_n(s)I_n.
\end{aligned}$$

- Paso 2: Sea $t = \text{máx}\{l : a_l(s) \neq 0\}$, $r = min\{l : B_l(s) = 0\}$, $k = r - t$.

  Para $s \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ la inversa Drazin $A(s)^D$ esta dada por:

$$A(s)^D = a_t(s)^{-k-1}A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$$

Para aquellos $s_i \in \Lambda$ denotemos por t_i el mayor entero que satisfaga $a_{t_i}(s_i) \neq 0$, y por r_i el menor entero positivo que satisface $B_{r_i}(s_i) \equiv 0$.
Para el entero $k_i = r_i - t_i$, la inversa de Drazin es igual a

$$A(s_i)^D = a_{t_i}(s_i)^{-k_i-1}A(s_i)^{k_i}B_{t_i-1}(s_i)^{k_i+1}$$

3.2. Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2s & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$ Cálcular A^D haciendo uso del algoritmo

Solución:

- Inicio: Consideremos $A_0(s) = 0,\ a_0(s) = 1,\ B_0(s) = \mathcal{I}_3$

- Paso 1: Construyamos la sucesión de números $\{a_0(s), a_1(s), a_2(s), a_3(s)\}$ y la sucesión de matrices racionales $\{B_0(s), B_1(s), B_2(s), B_3(s)\}$ de la siguiente manera:

- $A_n(s) = A(s)B_{n-1}(s),$
  $a_n(s) = -\dfrac{Tr(A_n(s))}{n},$
  $B_n(s) = A_n(s) + a_n(s)\mathcal{I}_n.$

Así;

- $A_1(s) = A(s)B_0(s) = A(s)$
  Es decir,

$$A_1(s) = \begin{pmatrix} 2s & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

$$a_1(s) = -\frac{2s - s}{1} = -s$$

$$B_1(s) = A_1(s) + a_1(s)\mathcal{I}_3$$

$$\begin{aligned} B_1(s) &= \begin{pmatrix} 2s & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & 2 & 0 \\ -1 & -s & 1 \\ 0 & -1 & -2s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $A_2(s) = A(s)B_1(s) = \begin{pmatrix} 2(s^2-1) & 2s & 2 \\ -s & -3 & -2s \\ 1 & 2s & 2s^2-1 \end{pmatrix}$

Así,
$a_2(s) = -\dfrac{2s^2 - 2 - 3 + 2s^2 - 1}{2} = 3 - 2s^2$
$B_2(s) = A_2(s) + a_2(s)\mathcal{I}_3.$

$$B_2(s) = \begin{pmatrix} 2(s^2-1) & 2s & 2 \\ -s & -3 & -2s \\ 1 & 2s & 2s^2-1 \end{pmatrix} + (3-2s^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2s & 2 \\ -s & -s^2 & -2s \\ 1 & 2s & 2 \end{pmatrix}$$

- $A_3(s) = A(s)B_2(s)$

Luego,

$$A_3(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$a_3(s) = -\frac{0}{3} = 0$$

$B_3(s) = A_2(s) + a_2(s)\mathcal{I}_3$.

Así, $B_3(s) = 0$

- Paso 2: Sea $t = max\{l : a_l(s) \neq 0\} = 2$ y $r = min\{l : B_l(s) = 0\} = 3$

Entonces, $k = r - t = 3 - 2 = 1$

Así, $k = 1$

Por otro lado, definamos el conjunto

$$\Lambda = \{s_i \in \mathbb{C} : a_t(s_i) = 0\}.$$

Y busquemos los valores de s.

$$\begin{aligned} a_2(s) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 - 2s^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad s = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto, $s_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $s_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Luego,
$a_2(s_i) = 0$ y $a_1(s_i) \neq 0$ entonces $t_1 = 1$ y $t_2 = 1$
Así,

$$\Lambda = \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}.$$

En el caso $s_i \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ se tiene que:

$$\mathcal{A}(s)^D = a_t(s)^{-k-1}\mathcal{A}(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$$

Entonces;

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(s)^D &= a_2(s)^{-2}\mathcal{A}(s)^1 B_1(s)^2 \\
&= \frac{1}{3-2s^2}\begin{pmatrix} 2s & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 2 & 0 \\ -1 & -s & 1 \\ 0 & -1 & -2s \end{pmatrix}^2 \\
&= \frac{1}{3-2s^2}\begin{pmatrix} 2(s^3-2s^2) & 2(s^2-3) & -2s \\ 3-s^2 & 3s & 4s+1 \\ -s & 3-4s^2 & 4(s-s^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora, $B_3(s) = 0$ y $B_2(s) \neq 0$

Así $r_1 = 3$ y $r_2 = 3$

Luego; $k_1 = r_1 - t_1 = 2$ y $k_2 = r_2 - t_2 = 2$

En el caso $s_i \in \Lambda$ se tiene que:

$$
\mathcal{A}(s_i)^D = a_1(s_i)^{-k_1-1}\mathcal{A}(s_i)^{k_1} B_{t_1-1}(s_i)^{k_1+1}
$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(s_i)^D &= a_1(s_i)^{-3}\mathcal{A}(s_i)^2 B_0(s_i)^3 \\
&= \frac{-1}{s_i^3}\begin{pmatrix} 2(s_i^2-1) & 4s_i+1 & 2 \\ -2s_i & -3 & -s_i \\ 1 & s_i & s_i^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{s_i^3}\begin{pmatrix} 2(s_i^2-1) & 4s_i+1 & 2 \\ -2s_i & -3 & -s_i \\ 1 & s_i & s_i^2+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para $s_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ tenemos que:

$$\mathcal{A}(-\sqrt{\frac{3}{2}})^D = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Para $s_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ tenemos que:

$$\mathcal{A}(\sqrt{\frac{3}{2}})^D = \begin{pmatrix} -4 & \frac{-3}{2} & \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capitulo resolveremos algunos sistemas de ecuaciones matriciales, usando la inversa de Moore - Penrose y la inversa de Drazin de una matriz racional.

Lema 4.0.1. *: La ecuación Matricial*

$$A(s)X(s)B(s) = C(s) \tag{4.0.1}$$

en la variable $X(s)$ donde $A(s) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B(s) \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C(s) \in \mathbb{C}^{m\times q}$, tiene una solución si y solo si

$$A(s)A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}B(s) = C(s) \tag{4.0.2}$$

en este caso, todas las soluciones están dadas por la formula:

$$X(s) = A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} + Y(s) - A(s)^{\dagger}A(s)B(s)B(s)^{\dagger} \tag{4.0.3}$$

Donde $Y(s)$ es arbitrario y tiene las dimensiones de $X(s)$

Demostración. :

Supongamos que $X(s)$ es solución de (4.0.1) entonces

$$\begin{aligned} C(s) &= A(s)X(s)B(s) \\ &= [A(s)A(s)^{\dagger}A(s)]X(s)[B(s)B(s)^{\dagger}B(s)] \\ &= A(s)A(s)^{\dagger}[A(s)X(s)B(s)]B(s)^{\dagger}B(s) \\ &= A(s)A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}B(s) \end{aligned}$$

Por tanto $C(s) = A(s)A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}B(s)$

Recíprocamente supongamos que $C(s) = A(s)A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}B(s)$ entonces $X(s) = A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}$ es una solución de la ecuación (4.0.1)

Además de (4.0.2) y de la definición de $A^{(1)}$ y $B^{(1)}$ se deduce que cada matriz X de la forma (4.0.3) satisface (4.0.1)

En efecto;

$$\begin{aligned}
X(s) &= A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} + Y(s) - A(s)^{\dagger}A(s)B(s)B(s)^{\dagger} \\
A(s)X(s)B(s) &= A(s)A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger}B(s) + \\
&\quad + A(s)Y(s)B(s) - A(s)^{\dagger}A(s)B(s)B(s)^{\dagger}B(s) \\
&= C(s) + A(s)Y(s)B(s) - A(s)Y(s)B(s) \\
&= C(s)
\end{aligned}$$

Por tanto $C(s) = A(s)X(s)B(s)$ satisface (4.0.1)

Por otro lado, Cualquier solución $X(s)$ de (4.0.1) esta dada por:
$X(s) = A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} + Y(s) - A(s)^{\dagger}A(s)Y(s)B(s)B(s)^{\dagger}$,
ya que

$$\begin{aligned}
A(s)X(s)B(s) &= C(s) \\
A(s)^{\dagger}A(s)X(s)B(s)B(s)^{\dagger} &= A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} \\
A(s)^{\dagger}A(s)X(s)B(s)B(s)^{\dagger} + X(s) &= A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} + X(s) \\
X(s) &= A(s)^{\dagger}C(s)B(s)^{\dagger} + X(s) - \\
&\quad - A(s)^{\dagger}A(s)X(s)B(s)B(s)^{\dagger}
\end{aligned}$$

■

Lema 4.0.2. *: Los Sistema de ecuaciones Matriciales racionales*

$$A(s)X(s) = B(s) \tag{4.0.4}$$

$$X(s)D(s) = E(s) \tag{4.0.5}$$

tiene una solución común si y solo si cada una de estas ecuaciones tiene una solución y

$$A(s)E(s) = B(s)D(s) \tag{4.0.6}$$

Demostración. : Supongamos que (4.0.4) y (4.0.5) tienen una solución en común, entonces obviamente las ecuaciones tienen solución
Ahora, De (4.0.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} X(s)D(s) &= E(s) \\ A(s)X(s)D(s) &= A(s)E(s) \\ B(s)D(s) &= A(s)E(s) \end{aligned}$$

Por tanto,$B(s)D(s) = A(s)E(s)$
Recíprocamente supongamos que $A(s)X(s) = B(s)$ y $X(s)D(s) = E(s)$ tienen una solución por separado y que $A(s)E(s) = B(s)D(s)$.
Entonces queremos probar que (4.0.1) y (4.0.2) tienen una solución en común.
En efecto;
Tenemos que para cada $A(s)^{(1)}$ y $D(s)^{(1)}$

$$X(s) = A(s)^{(1)}B(s) + E(s)D(s)^{(1)} - A(s)^{(1)}A(s)E(s)D(s)^{(1)}$$

es una solución común de ambas ecuaciones.
En efecto;

$$
\begin{aligned}
A(s)X(s) &= A(s)[A(s)^{(1)}B(s) + E(s)D(s)^{(1)} - \\
&\quad A(s)^{(1)}A(s)E(s)D(s)^{(1)}] \\
&= A(s)A(s)^{(1)}B(s) + A(s)E(s)D(s)^{(1)} - \\
&\quad -A(s)A(s)^{(1)}A(s)E(s)D(s)^{(1)} \\
&= A(s)A(s)^{(1)}B(s) + A(s)E(s)D(s)^{(1)} - \\
&\quad -A(s)E(s)D(s)^{(1)} \\
&= A(s)A(s)^{(1)}B(s) \\
&= B(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(s)D(s) &= [A(s)^{(1)}B(s) + E(s)D(s)^{(1)} - \\
&\quad -A(s)^{(1)}A(s)E(s)D(s)^{(1)}]D(s) \\
&= A(s)^{(1)}B(s)D(s) + E(s)D(s)^{(1)}D(s) - \\
&\quad -A(s)^{(1)}A(s)E(s)D(s)^{(1)}D(s) \\
&= A(s)^{(1)}B(s)D(s) + E(s)D(s)^{(1)}D(s) - \\
&\quad -A(s)^{(1)}B(s)D(s)D(s)^{(1)}D(s) \\
&= A(s)^{(1)}B(s)D(s) + E(s)D(s)^{(1)}D(s) - \\
&\quad -A(s)^{(1)}B(s)D(s) \\
&= E(s)D(s)^{(1)}D(s) \\
&= E(s)
\end{aligned}
$$

■

En los siguientes lemas generalizaremos representationes conocidas de la inversa de Drazin

Lema 4.0.3. *: Consideremos una matriz racional cuadrada $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$ satisfaciendo la condición ind(A(s))=k. Sea la matriz racional $A_c(s)$ una solución del sistema de ecuaciones matricial:*

$$A(s)^l = X(s)A(s)^{l+1} \tag{4.0.7}$$

$$A(s)X(s) = X(s)A(s) \tag{4.0.8}$$

Donde $l \geq k$ es un entero arbitrario. Entonces $A_c(s)$ satisface las siguientes igualdades:

$$A(s)^l(A_c(s))^l = (A_c(s))^l A(s)^l \tag{4.0.9}$$

$$A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^l \tag{4.0.10}$$

Demostración. Supongamos que $A_c(s)$ es una solución del sistema de ecuaciones matricial (4.0.9) y (4.0.10), entonces tenemos que:

$$A(s)^l = A_c(s)A(s)^{l+1}$$

$$A(s)A_c(s) = A_c(s)A(s)$$

Así: $A(s)^l(A_c(s))^l = (A_c(s))^l A(s)^l$ lo cual queda probado (4.0.9)

Ahora probemos (4.0.10)

Por (4.0.7),(4.0.8)y (4.0.9) tenemos que

$A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^{2l}(A_c(s))^l$

Así, $A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^{l-1}(A_c(s))^{l-1}A_c(s)A(s)^{l+1}$

Luego, $A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^{2l-1}(A_c(s))^{l-1}$

Continuando el desarrollo obtenemos

$A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^l A(s)A_c(s)$

Por tanto,

$A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^{l+1}(A_c(s)) = A(s)^l$ ■

Lema 4.0.4. *: Sea $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$, ind(A(s))=k y $l \geq k$. Sea $A_c(s)$una solución de la ecuación matricial (4.0.9) y(4.0.10). Entonces*

$$A(s)^D = A(s)^l(A_c(s))^{l+1} = (A_c(s))^{l+1}A(s)^l \tag{4.0.11}$$

Demostración. Supongamos que $A_c(s)$ es una solución del sistema de ecuaciones matricial (4.0.9) y(4.0.10), entonces tenemos que:

$$A(s)^l = A_c(s)A(s)^{l+1}$$

$$A(s)A_c(s) = A_c(s)A(s)$$

Ahora por (4.0.10), tenemos que: $A(s)^l = A(s)^l A_c(s)^l A(s)^l$

esto implica que $(A_c(s))^l \in A(s)^l - \{1\}$.

Afirmacion: $(A_c(s))^{2l+1} \in A(s)^{2l+1}\{1\}$

En efecto;

Tenemos que $A(s)^{2l+1}A_c(s)^{2l+1}A(s)^{2l+1} = A(s)^l A(s)^l A_c(s)^{2l} A(s)^{2l+1}$

De acá, $A(s)^{2l+1}A_c(s)^{2l+1}A(s)^{2l+1} = A(s)^l A(s)^{l+1}$

Así, $A(s)^{2l+1}A_c(s)^{2l+1}A(s)^{2l+1} = A(s)^{2l+1}$

Por tanto; $(A_c(s))^{2l+1} \in A(s)^{2l+1} - \{1\}$

además por (1.1.7) tenemos que:

$$A(s)^D = A(s)^l((A(s))^{2l+1})^{(1)}A(s)^l$$

Por otro lado,

$$A(s)^l(A_c(s))^l = (A_c(s))^l A(s)^l$$

y

$$A(s)^l(A_c(s))^l A(s)^l = A(s)^l$$

Así, $A(s)^D = A(s)^l((A(s)_c)^{2l+1})^{(1)}A(s)^l$,

esto implica que $A(s)^D = A(s)^l((A(s)_c)^{2l+1})A(s)^l$

De acá, $A(s)^D = A(s)^l((A(s)_c)^{l+1})$

Y por tanto, $A(s)^D = A(s)^l(A_c(s))^{l+1} = (A_c(s))^{l+1}A(s)^l$ ∎

Teorema 4.0.5. *: Sea $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$ y ind(A(s))=k. Para enteros Arbitrarios $l \geq k$ y $m \geq k$ cada una de las siguiente ecuaciones matriciales*

$$A(s)^l = X(s)A(s)^{l+1} \tag{4.0.12}$$

$$A(s)^m = A(s)^{m+1}X(s) \tag{4.0.13}$$

Tienen solución general, representado por las expresiones siguientes:

$$X(s) = A(s)^D + Y(s)(I - A(s)A(s)^D) \tag{4.0.14}$$

$$X(s) = A(s)^D + (I - A(s)A(s)^D)W(s) \tag{4.0.15}$$

Donde Y(s)y W(s) son matrices racionales apropiadas de orden $n \times n$.
Así los sistema de ecuaciones matricial (4.0.12) y (4.0.13) tiene la siguiente solución general:

$$X(s) = A(s)^D + (I - A(s)A(s)^D)Z(s)(I - A(s)A(s)^D) \tag{4.0.16}$$

Donde Z(s) es una matriz racional de orden $n \times n$

Demostración. : Supongamos que

$$A(s)^l = X(s)A(s)^{l+1}$$

$$A(s)^m = A(s)^{m+1}X(s)$$

tienen solución.
Ahora multiplicando ambos lados de (4.0.12) por $(A_c(s)^{l+1})A(s)^{l+1}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
A(s)^l[(A_c(s)^{l+1})A(s)^{l+1}] &= X(s)A_c^{l+1}[(A_c(s)^{l+1})A(s)^{l+1}] \\
A(s)^D A(s)^{l+1} &= X(s)[A(s)^{l+1}(A(s)_c^{l+1})A(s)^{l+1}] \\
A(s)^D A(s)^{l+1} &= X(s)A(s)^{l+1} \\
A(s)^D A(s)^{l+1} &= A(s)^l
\end{aligned}$$

Luego,

$$X(s) = A(s)^D + Y(s)(I - A(s)(A(s)^D))$$

es solución de (4.0.12) ya que,

$$\begin{aligned}
X(s)A(s)^{l+1} &= [A_c(s)^{l+1}(A(s)^l) + Y(s)(I - A_c(s)^{l+1}(A(s)^{l+1}))]A(s)^{l+1} \\
&= A_c(s)^{l+1}(A(s)^l)A(s)^{l+1} + \\
&\quad +Y(s)A(s)^{l+1} - Y(s)A(s)^{l+1}(A_c(s)^{l+1})A(s)^{l+1} \\
&= A_c(s)^{l+1}(A(s)^l)A(s)^{l+1} + \\
&\quad +Y(s)A(s)^{l+1} - Y(s)A(s)^{l+1} \\
&= A(s)^D A(s)^{l+1} \\
&= A(s)^l
\end{aligned}$$

Por tanto La solución de (4.0.14) es $X(s) = A(s)^D + Y(s)(I - A(s)(A(s)^D))$
Para el caso de la ecuación matricial (4.0.15) se procede de manera análoga
Ahora veamos que los sistema de ecuaciones matricial (4.0.14) y (4.0.15) tiene la siguiente solución general:

$$X(s) = A(s)^D + (I - A(s)A(s)^D)Z(s)(I - A(s)A(s)^D)$$

Donde Z(s) es una matriz racional de orden $n \times n$

Tomemos

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= Z(s) - A_c(s)^{m+1}(A(s)^m A(s)) \times \\
&\quad \times Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))(I - A(s)(A(s)^D))^{(1)} \\
&= Z(s) - A_c(s)^{m+1}(A(s)^m A(s)) \times Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))(I - A(s)(A(s)^D)) \\
&\quad [(I - A(s)(A(s)^D))]^{(1)}(I - A(s)(A(s)^D)) \\
&= Z(s) - A_c(s)^{m+1}(A(s)^m A(s)) \times Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))^{(2)}
\end{aligned}
$$

Donde Z(s) es una matriz racional de orden $n \times n$ arbitraria

<u>Afirmacion</u>: $(I - A(s)(A(s)^D))$ es idempotente

En efecto,

$$
\begin{aligned}
(I - A(s)(A(s)^D))(I - A(s)(A(s)^D)) &= I - A(s)(A(s)^D - A(s)(A(s)^D + \\
&\quad + A(s)(A(s)^D A(s)(A(s)^D))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= I - A(s)(A(s)^D - A(s)A(s)^D + \\
&\quad +A(s)(A(s)^D \\
&= I - A(s)(A(s)^D \\
&= I - A(s)(A(s)^D - A(s)(A(s)^D + \\
&\quad +A(s)(A(s)^D A(s)(A(s)^D)) \\
&= I - A(s)(A(s)^D - A(s)A(s)^D + \\
&\quad +A(s)(A(s)^D \\
&= I - A(s)(A(s)^D
\end{aligned}$$

Por tanto $(I - A(s)(A(s)^D))^2 = (I - A(s)(A(s)^D))$
Así, $(I - A(s)(A(s)^D))$ es idempotente
Luego,

$$Y(s) = Z(s) - A_c(s)^{m+1}(A(s)^m A(s)) \times Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))$$

Mas aún;

$$Y(s) = (I - A(s)(A(s)^D))Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))$$

Ahora sustituyendo Y(s) en (4.0.14) tenemos que:

$$\begin{aligned}
X(s) &= A(s)^D + [(I - A(s)(A(s)^D))Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))](I - A(s)A(s)^D) \\
&= A(s)^D + (I - A(s)(A(s)^D))Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))^2 \\
&= A(s)^D + (I - A(s)(A(s)^D))Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))
\end{aligned}$$

Por tanto, $X(s) = A(s)^D + (I - A(s)(A(s)^D))Z(s)(I - A(s)(A(s)^D))$

$\blacksquare$

Teorema 4.0.6. *: Sea $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$, satisfaciendo $ind(A(s)) = k$. Para enteros Arbitrarios $l \geq k$ los siguientes sistemas de ecuaciones matriciales*

$$A(s)X(s)A(s) = A(s) \tag{4.0.17}$$

$$A(s)^l = X(s)A(s)^{l+1} \tag{4.0.18}$$

Tienen la solución general

$$\begin{aligned} X(s) &= A(s)^D + Z(s)(I - A(s)A(s)^D) + \qquad (4.0.19) \\ &\quad + A(s)^{\dagger}(I - A(s)Z(s))(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^{\dagger}(I - A(s)A(s)^D) \end{aligned}$$

Donde $Z(s)$ es una matriz racional apropiada de orden $n \times n$.

Demostración. : Tenemos que:

1. $I \in [(I - A(s)A(s)^D)A(s)] - \{1\}$
2. $A(s)^{\dagger} \in [(I - A(s)A(s)^D)A(s)] - \{1\}$

En efecto;

$$\begin{aligned} [(I - A(s)A(s)^D)A(s)]I[(I - A(s)A(s)^D)A(s)] &= [(I - A(s)A(s)^D)A(s)]^2 \\ &= [(I - A(s)A(s)^D)A(s)] \end{aligned}$$

Por tanto, $I \in [(I - A(s)A(s)^D)A(s)] - \{1\}$

Por otro lado,

$$[(I - A(s)A(s)^D)A(s)]A(s)^\dagger[(I - A(s)A(s)^D)A(s)] =$$
$$= A(s)A(s)^\dagger - A(s)A(s)^D - A(s)A(s)^D A(s)A(s)^\dagger + A(s)(A(s)^D A(s)A(s)^D)A(s)$$
$$= (A(s)A(s)^\dagger - A(s)A(s)^D)A(s)$$
$$= A(s)A(s)^\dagger A(s) - A(s)^D A(s)A(s)$$
$$= (I - A(s)^D A(s))A(s)$$

Por tanto, $A(s)^\dagger \in [(I - A(s)A(s)^D)A(s)] - \{1\}$

Ahora, tomando

$$\begin{aligned} Y(s) &= A(s)^\dagger(I - A(s)A(s)^D)A(s)[(I - A(s)A(s)^D)A(s)]^1 + Z(s) - \\ &\quad -A(s)^\dagger A(s)Z(s)(I - A(s)A(s)^D)A(s)[(I - A(s)A(s)^D)A(s)]^1 \end{aligned}$$

Donde $Z(s)$ es una matriz racional apropiada de orden $n \times n$. y por (1) y (2) tenemos que:

$$\begin{aligned} Y(s) &= A(s)^\dagger[(I - A(s)A(s)^D)A(s)]A(s)^\dagger + Z(s) - \\ &\quad -A(s)^\dagger A(s)Z(s)(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger \\ &= A(s)^\dagger + Z(s) - A(s)^\dagger A(s)Z(s)(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger \\ &= Z(s) + A(s)^\dagger[I - A(s)Z(s)(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger \\ &= Z(s) + A(s)^\dagger[(I - A(s)Z(s))(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger] \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo Y(s) en (4.0.14)tenemos que:

$$\begin{aligned} X(s) &= A(s)^D + Z(s) + A(s)^\dagger[(I - A(s)Z(s))(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger] \\ &\quad (I - A(s)A(s)^D) \\ &= A(s)^D + Z(s)(I - A(s)A(s)^D) + \\ &\quad +A(s)^\dagger(I - A(s)Z(s))(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger(I - A(s)A(s)^D) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X(s) &= A(s)^D + Z(s)(I - A(s)A(s)^D) + \\ &\quad +A(s)^\dagger(I - A(s)Z(s))(I - A(s)A(s)^D)A(s)A(s)^\dagger(I - A(s)A(s)^D) \end{aligned}$$

■

Teorema 4.0.7. *: Sea $A(s) \in \mathbb{C}(s)^{n\times n}$, ind(A(s))=k. Para enteros Arbitrarios $l \geq k$ el siguiente sistema de ecuación matricial*

$$A(s)X(s)A(s) = A(s) \tag{4.0.20}$$

$$A(s)^m = A(s)^{m+1}X(s) \tag{4.0.21}$$

Tiene la siguiente solución general

$$\begin{aligned} X(s) &= A(s)^D + (I - A(s)A(s)^D)Z(s) + && (4.0.22) \\ &\quad (I - A(s)A(s)^D)A(s)^\dagger A(s)A(s)(I - A(s)A(s)^D)(I - Z(s)A(s))A(s)^\dagger && (4.0.23) \end{aligned}$$

Donde $Z(s)$ es una matriz racional arbitraria de orden $n \times n$.

Demostración. : La prueba se hace de manera análoga a la prueba del teorema anterior. ∎

Bibliografía

[1] S. Barnett. Leverrier's algorithm: a new proof and extension. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 10:551–556, 1989.

[2] S. Barnett. Leverrier's algorithm for orthogonal polynomial bases. *Linear Alg. and Appl.*, 236:245–263, 1996.

[3] H. P. Decell. An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion. *SIAM review*, 7(4):526–528, 1965.

[4] J. S. Frame. A simple recursion formula for inverting a matrix. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:19–45, 1949.

[5] J. S. Frame. Matrix functions and applications IV: Matrix functions and constituent matrices. *IEEE Spectrum*, 1:123–131, 1964.

[6] C. R. Givens. On the modified leverrier-faddeev algorithm. *Linear Algebra Appl.*, 44:161–167, 1982.

[7] G. M. L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibrations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

[8] J. C. Gower. A modified Leverrier-Faddeev algorithm for matrices with multiple eigenvalues. *Linear Alg. and Appl.*, 31:61–70, 1980.

[9] J. C. Gower. An application of the modified Leverrier-Faddeev algorithm to the spectral decomposition of symmetric block-circulant matrices. *Comp. Statist. and Data Anal.*, 50:89–106, 2006.

[10] T. N. E. Greville. The souriau-frame and the drazin pseudoinverse. *Linear Algebra Appl.*, 6:205–208, 1973.

[11] J. Hernández and F. Marcellán. An extension of Leverrier-Faddeev algorithm using basis of classical orthogonal polynomials. *Facta Universitatis*, 19:73–92, 2004.

[12] J. Hernández, F. Marcellán, and C. Rodríguez. Leverrier-Faddeev algorithm and classical orthogonal polynomials. *Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 28(106):39–47, 2004.

[13] A. S. Householder. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover Publications, New York, 1975.

[14] J. Jones, N. P. Karampetakis, and A. C. Pugh. The computation and application of the generalized inverses via Maple. *J. Symbolic Computation*, 25:99–124, 1998.

[15] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.

[16] F. Marcellán, A. Branquinho, and J. C. Petronilho. Classical orthogonal polynomials: A functional approach. *Acta Appl. Math.*, 34:283–303, 1994.

[17] P. S. Stanimirović, N. P. Karampetakis, and M. B. Tasić. Computing generalizad inverses of a rational matrix and applicatons. *J. Appl. Math. and Comp.*, 24(1–2):81–94, 2007.