

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL  
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología  
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA MEDIR  
SEMEJANZA ENTRE NÚMEROS DIFUSOS”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. REIVY J. CHIRINO M.

COMO REQUISITO FINAL  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO  
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
ÁREA DE CONOCIMIENTO: LOGICA DIFUSA.  
TUTOR: LIC. BELKIS LOPEZ

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2010





Universidad Centroccidental  
 “Lisandro Alvarado”  
 Decanato de Ciencias y Tecnología  
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA  
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA MEDIR SEMEJANZA  
 ENTRE NÚMEROS DIFUSOS”

presentado por el ciudadano BR. REIVY J. CHIRINO M. titular de la Cédula de Identidad No. 17.991.406, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

<sup>1</sup> \_\_\_\_\_

Con una calificación de \_\_\_\_\_ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los \_\_\_\_ días del mes de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
 TUTOR

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

\_\_\_\_\_  
 PRINCIPAL

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

\_\_\_\_\_  
 PRINCIPAL

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

OBSERVACIONES:

---



---



---

<sup>1</sup> Aprobado ó Reprobado



# AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme ser parte de su creación y Redención.

A mis padres Margarita Morillo, Nestor Rivas y Victor Chirino ... Sencillamente son todo en mi vida... Este y todos los triunfos que vienen serán por ustedes y para ustedes... los Amo!!

A mis hermanas y hermanos Lina, Jorge, Jhonmar, Chucho, Maria, José, July gracias por estar siempre pendiente de mí. Estaré en deuda eterna con ustedes... Gracias por existir. Los Amo!!!

A sobrino (Hijo) quien ha formado parte de mi vida y me inspira a seguir adelante.

A mis abuelos, tios, tias, primos(as) gracias a todos por confiar ciegamente en mí.

A mi tutora Belkis López por su paciencia y dedicación.

Al Prof. Carlos Lameda. Su gran colaboración fue esencial en la culminación de este trabajo... Todas tus ideas están plasmada en esta tesis.

A los profesores David Marquez, Luis Medina, Nelly Torrealba, Dennys Silva, Caterina Mendoza, Edgar Guédez, Victor Carucí, Isabel Márquez, Eibar Hernandez, por todo el conocimiento que con gran dedicación me transmitieron.

A mis amigos Alejandra, Gocha, Orangel, Esther, Maigrett, David, Liseth, Willennys, Johela, Katherina, Miki, Elena, williams, Rangely, Wiber, Vineida, Mary Inés, Dayana, Cesar, nunca olvidare tantos momentos finos que pasamos en la Universidad (mi grupo de estudio). Una eterna amistad siempre nos unirá.

A mis amigos: Flia. Antón, Elsi, Rebeca, María Burgos, Flia. Peraza, Flia. Lagunas ,Tia Fátima, Flia. Rojas (Reinaldo Rojas), Lisander, Eduardo S., Dr. Ramón G., por todos esos momentos inolvidables que me permitieron vivir a su lado. Les estaré agradecido desde lo más profundo de mi Corazón.

A mis panas de Bachillerato Karla Cano-Manuel, Keiby, Carlos, Arlenis, Ina, siempre se les recuerda.

Simplemente, Gracias a todos aquellos que de alguna u otra forma contribuyeron al desarrollo de mi carrera y crecimiento personal.



# RESUMEN

La medición de la semejanza entre números difusos es un tópico muy importante para la toma de decisiones difusas y el análisis de riesgo difuso. En los últimos años se han presentado varios métodos para calcular el grado de semejanza entre números difusos; sin embargo, algunos de ellos no pueden calcular correctamente el grado de semejanza entre dos números difusos bajo algunas situaciones.

Es por ello, que a través de este trabajo se revisan varios métodos ideados y se estudia un método propuesto por Chen y Chen en (2003) y Sridevi y Nadarajan en (2009) para medir el grado de semejanza entre números difusos trapezoidales generalizados, y se compararán los valores obtenidos cuando el método se aplica a casos particulares, especialmente a números difusos triangulares y trapezoidales generalizados. Así mismo, se presentarán pruebas de algunas propiedades de la medida de semejanza a estudiar.



# ÍNDICE

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Resumen</b>	<b>iii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Conceptos Básicos . . . . .	3
1.2. Números Difusos . . . . .	6
1.2.1. Numeros Difuso Triangular y su Representación . . . . .	7
1.2.2. Numeros Difuso Trapezoidal y su Representación . . . . .	8
1.2.3. El Principio de Extensión y la Aritmética Difusa . . . . .	9
1.3. Números difusos generalizados . . . . .	10
1.3.1. Operaciones Aritméticas . . . . .	12
<b>2. Semejanza entre Números Difusos</b>	<b>13</b>
2.1. Medidas de Similitud entre los Números Difusos . . . . .	13
2.1.1. Medida de Similitud de Chen . . . . .	13
2.1.2. Medida de Similitud de Lee . . . . .	14
2.1.3. Medida de Similitud de Hsieh y Chen . . . . .	15
2.2. Método Tradicional del Centro de Gravedad . . . . .	16
<b>3. Nuevas Medidas de Similitud entre Números Difusos Generalizados</b>	<b>19</b>
3.1. Método Simple para calcular el Centro de Gravedad . . . . .	19
3.2. COG de un Triángulo . . . . .	20
3.3. COG de un Rectángulo . . . . .	22
3.4. Medida de Similitud entre Números Difusos Generalizados Propuesta por Chen y Chen [4] . . . . .	28
3.5. Medida de Similitud propuesta por Sridevi y Nadarajan [11] . . . . .	31

---

3.6. Comparación de los métodos estudiados a conjuntos de números difusos generalizados . . . . .	31
<b>Referencias</b>	<b>45</b>

# INTRODUCCIÓN

El concepto de números difusos fue publicado por Lotfi Zadeh en 1965 [13]. A partir de este concepto se han generado importantes investigaciones y desarrollos en diferentes áreas del saber tales como matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y económicas, entre otras. El propósito inicial de Zadeh en introducir los conjuntos difusos era proveer una herramienta para ayudar al modelado de sistemas complejos, especialmente, pero no restringido a aquellos que involucraban agentes humanos.

Un tipo particular de conjunto difuso, es el denominado número difuso, cuya definición ha sido planteada por diversos autores, entre ellos Klir y Yuan [7], Pedrycz [10], Wang [12] y Zimmermann [14].

La medición de semejanza (ó similitud) entre números difusos es un tópico muy importante para la toma de decisiones [9] y análisis de riesgos difusos [4]. En los últimos años se han presentado varios métodos para calcular el grado de semejanza entre números difusos, sin embargo, algunos de ellos no pueden calcular correctamente el grado de semejanza entre dos números difusos bajo algunas situaciones. Con el presente trabajo se pretende alcanzar los objetivos siguientes:

- Revisar las definiciones de conjuntos difusos, números difusos, números difusos generalizados y sus operaciones aritméticas.
- Estudiar algunas medidas de similitud de números difusos generalizados, el método tradicional de centro de gravedad (COG), el Método Simple de Centro de Gravedad (SCGM) para calcular los puntos COG de números difusos generalizados y algunas propiedades de una medida de similitud.
- Comparar y analizar los resultados obtenidos al calcular el grado de semejanza de distintos números difusos generalizados, usando las medidas de similitud existentes.



# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos que se usarán en el desarrollo del trabajo.

### 1.1. Conceptos Básicos

**Definición 1.1.** Sea el conjunto  $X$  de elemento genérico  $x$ , el universo a considerar.

Un Conjunto difuso  $A$  de  $X$  es un par  $(A, \mu_A(x))$ , donde el valor  $\mu_A(x)$  representa el grado de pertenencia de  $x$  al subconjunto  $A$  en el intervalo  $[0, 1]$ . La función  $\mu_A$  recibe el nombre de función de pertenencia.

Cuando  $\mu_A(x)$  toma el valor de 1 se tiene una pertenencia absoluta de  $x$  en  $A$ , mientras que si  $\mu_A(x)$  toma el valor de 0 se tiene la no pertenencia absoluta de  $x$  en  $A$ . Un valor de  $\mu_A(x)$  cercano a 1 significa que el grado de pertenencia de  $x$  en  $A$  es alto, y si  $\mu_A(x)$  es cercano a 0 significa que el grado de pertenencia es bajo.

**Definición 1.2.**  $\alpha$  - Cortaduras

Dado  $\alpha$  en  $[0,1]$ . Una  $\alpha$  - cortadura de un conjunto difuso  $A$  es un conjunto nítido  $A$  constituido por los elementos del conjunto de discurso  $X$ , que tienen un grado de pertenencia mayor o igual a  $\alpha$ .

Hay dos clases importantes de  $\alpha$ -cortadura:

$$A^{\geq\alpha} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$A^{>\alpha} = \{x \in X / \mu_A(x) > \alpha\}$$

La primera es llamada  $\alpha$  - cortadura fuerte y la segunda es llamada simplemente  $\alpha$  - cortadura.

**Definición 1.3.** La altura de un conjunto difuso se define como el valor más grande de su función de pertenencia:  $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$ .

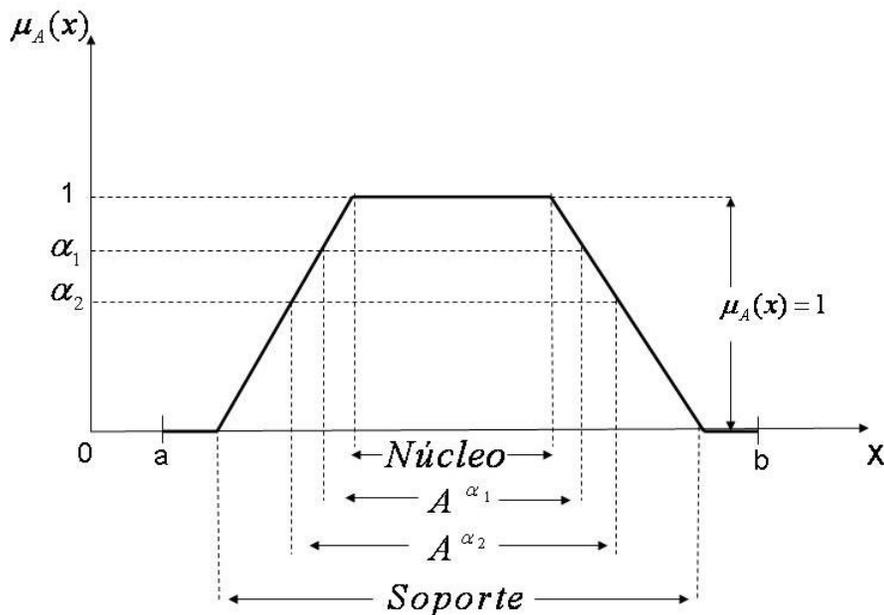
**Definición 1.4.** El soporte de un conjunto difuso  $A$  en el universo de discurso  $X$  es un conjunto que contiene todos los elementos de  $X$  que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en  $A$ , esto es,

$$\text{sop}(x) = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0\} \quad (1.1)$$

**Definición 1.5.** El núcleo de un conjunto difuso  $A$  se define como sigue:

$$\text{Núcleo de } A = \{x \in X / \mu_A(x) = 1\} \quad (1.2)$$

Cuando el núcleo de un conjunto difuso  $A$  es no vacío, entonces el conjunto es normal.



**Figura 1.1:** Soporte, Núcleo y Altura de un conjunto difuso.

**Definición 1.6.** Dado un subconjunto  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .  $A$  es un conjunto nítido si y solo si para todo par  $(r,s)$  de  $A$  y  $\forall \alpha \in [0,1]$  entonces  $t = \alpha r + (1 - \alpha)s$  pertenece a  $A$ . También se dice que un conjunto  $A$  en  $\mathbb{R}^n$  es convexo si para cada par de puntos  $r$  y  $s$  en  $A$ , todo punto localizado en el segmento de la recta cuyos extremos son  $r$  y  $s$  están también en  $A$ .

**Definición 1.7.** Un conjunto difuso  $A$  de  $\mathbb{R}$  se dice convexo si y sólo si cada una de las  $\alpha$ -cortaduras es un conjunto convexo en el intervalo  $[0, 1]$ , para todo  $\alpha$ .

**Teorema 1.1.** *Un conjunto difuso  $A$  de  $\mathbb{R}$  es convexo si y sólo si se cumple que*

$\forall r, s \text{ en } \mathbb{R}, \alpha \in [0, 1]$  se tiene

$$\mu_A[\alpha r + (1 - \alpha)s] \geq \min [\mu_A(r), \mu_A(s)] \tag{1.3}$$

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] supongamos que  $A$  es convexo y  $\beta = \mu_A(r) \leq \mu_A(s)$ .

Ahora bien, para  $r$  y  $s$  en  $A^{\geq \beta}$ , se tiene  $[\alpha r + (1 - \alpha)s]$  pertenece a  $A$  con  $\alpha$  en  $[0, 1]$ , por definición de convexidad en  $A$ . Por lo tanto,  $\mu_A[\alpha r + (1 - \alpha)s] \geq \mu_A(r) = \min [\mu_A(r), \mu_A(s)]$ .

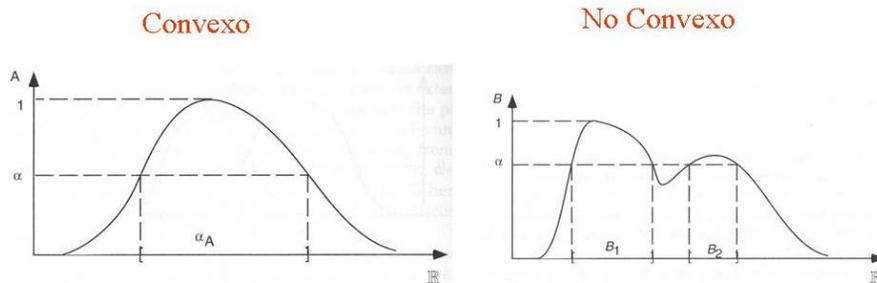
$\Leftarrow$ ] ahora supongamos que  $A$  satisface (1.3). Necesitamos probar que  $\forall \beta$  en  $(0, 1]$ , la  $\alpha$  - cortadura  $A^{\geq \beta}$  es convexa.

Así, para cualquier  $r$  y  $s$  en  $A^{\geq \beta}$  (donde  $\mu_A(r) \geq \beta, \mu_A(s) \geq \beta$ ), y para un  $\alpha$  en  $[0, 1]$  por (1.3) se cumple que:  $\mu_A[\alpha r + (1 - \alpha)s] \geq \min [\mu_A(r), \mu_A(s)] \geq \min(\beta, \beta) = \beta$  luego,  $A^{\geq \beta} \in A$ . Por lo tanto,  $A^{\geq \beta}$  es convexa, donde  $\beta \in [0, 1]$ .

En consecuencia,  $A$  es un conjunto difuso convexo.

□

En la Fig. 1.2 se presentan dos gráficas de conjuntos difusos convexos y no convexos.



**Figura 1.2:** Gráficas de un conjunto difuso convexo y uno no convexo.

Es bueno resaltar que la noción de convexidad de un conjunto difuso  $A$  no significa que su función de pertenencia  $\mu_A$  sea una función convexa, es decir, no se cumple que,  $\mu_A[\alpha r + (1 - \alpha)s] \geq \alpha\mu_A(r) + (1 - \alpha)\mu_A(s)$ .

## 1.2. Números Difusos

Los números difusos son conjuntos difusos usados en relación con aplicaciones donde una representación explícita de la ambigüedad e incertidumbre encontradas en datos numéricos es deseable. En un sentido intuitivo, ellos son conjuntos difusos que representan el significado de declaraciones tales, como próximo a 3 ó cercano a 5 y medio. En otras palabras, los números difusos toman en cuenta el aproximado, casi y no casi, cualidades de etiquetas numéricas. Las operaciones con conjuntos difusos tales como la unión y la intersección, así como también las nociones de  $\alpha$ -cortaduras, resolución y el principio de extensión son todas aplicables a los números difusos. Además, un conjunto de operaciones muy similar a la familia de operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división también pueden ser definidas para los números difusos.

Los números difusos han sido exitosamente aplicados en sistemas expertos, regresión difusa y metodología de análisis de datos difusos. Han sido también usados en relación con ecuaciones difusas y operaciones alternativas de aritmética difusa las cuales han sido introducidas con el propósito de reducir la difusidad en los cálculos sucesivos.

**Definición 1.8.** Un número difuso es un conjunto difuso convexo y normal, definido sobre la recta real.

Los números difusos también pueden ser definidos en un universo de discurso multidimensional, es decir, un producto cartesiano. Tales números difusos son usados por ejemplo, en relación con análisis de escenas y robótica para definir el sentido de una región en el espacio o un dominio en el plano  $x$ - $y$ , y también sumar, restar y multiplicar regiones.

Los números difusos pueden tener diferentes formas, tales como: triangular, trapezoidal, gaussiana, campana generalizada, entre otras; las cuales se visualizan en la Fig. 1.3 y sus correspondientes funciones de pertenencias parametrizadas en la tabla 1.1.

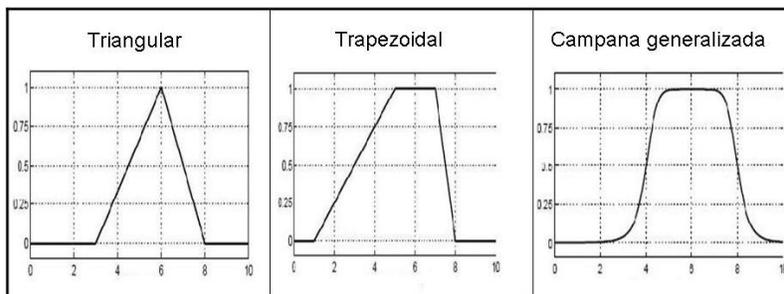


Figura 1.3: Ejemplos de números difusos triangular, trapezoidal y campana generalizada.

Tabla 1.1 ALGUNAS FUNCIONES DE PERTENENCIAS PARAMETRIZABLES

Forma de la Función	Fórmulas	Parámetros
Triangular $(x; a, b, c)$	$0$ para $x \leq a$ $(x-a)/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$ $(c-x)/(c-b)$ para $b \leq x \leq c$ $0$ para $c \leq x$	$a, b, c$
Trapezoidal $(x; a, b, c, d)$	$0$ para $x \leq a$ $(x-a)/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$ $1$ para $b \leq x \leq c$ $(d-x)/(d-c)$ para $c \leq x \leq d$ $0$ para $c \leq x$	$a, b, c, d$
Gaussiana $(x; c, \sigma)$	$\exp(-1/2((x-c)/\sigma)^2)$	$c, \sigma$
Campana generalizada $(x; a, b, c)$	$1/(1 +  (x-c)/a ^{2b})$	$a, b, c$

### 1.2.1. Números Difuso Triangular y su Representación

Un número difuso triangular puede definirse por la terna  $(a, b, c)$  con  $a < b < c$ . Otra forma de definir un número difuso triangular es mediante un intervalo de confianza de nivel, entendiendo por intervalo de confianza como el intervalo limitado entre los dos valores de  $X$  asociados al valor de la función de pertenencia. Este intervalo de confianza va a depender de su amplitud; cuanto menor sea la amplitud de intervalo mayor será la confianza de los datos; de manera análoga, cuanto mayor sea la amplitud del intervalo menor será la confianza de los datos.

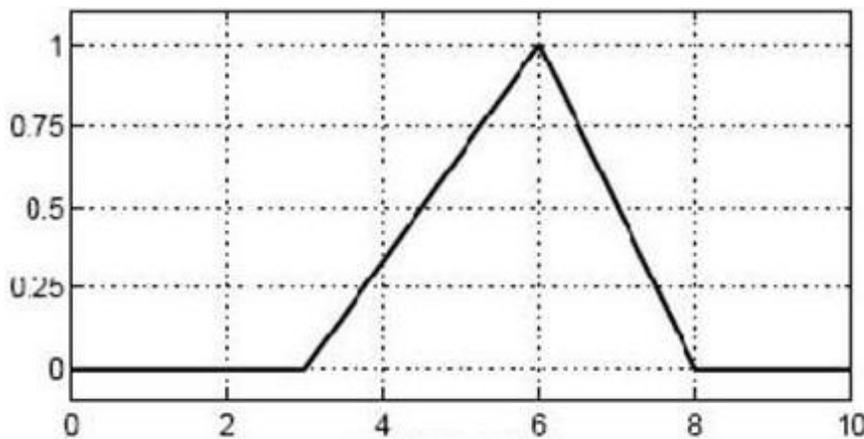
**Definición 1.9.** Un número difuso en  $\mathbb{R}$ , se llama triangular si su función de pertenencia está especificada por tres parámetros  $a, b$  y  $c$  como sigue:

$$\Delta(x; a; b; c) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } c \leq x \end{cases}$$

Otra manera de definir un conjunto difuso triangular es usando min y max:

$$\Delta(x; a; b; c) = \max(\min((x - a)/(b - a), (c - x)/(c - b), 0))$$

con  $a < b < c$ ; estos parámetros determinan las coordenadas de las tres esquinas de la función de pertenencia descrita. Una representación gráfica de un número difuso triangular se puede ver en la Fig. 1.4



**Figura 1.4:** Representación de un número difuso triangular.

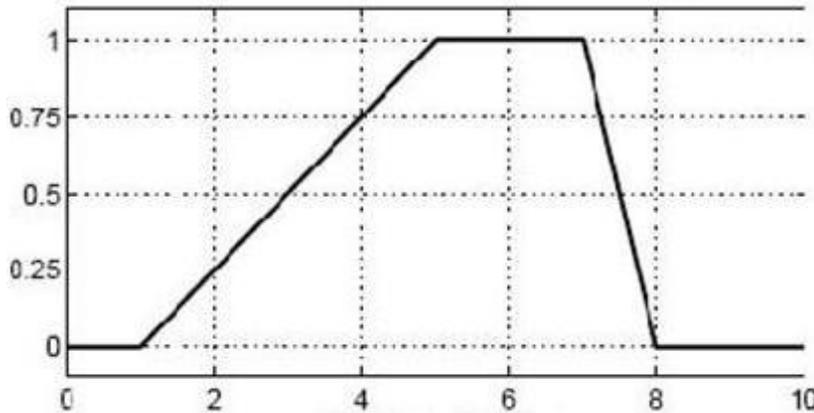
### 1.2.2. Numeros Difuso Trapezoidal y su Representación

**Definición 1.10.** Un número difuso es Trapezoidal cuando su función de pertenencia está especificada por cuatro parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  como sigue:

$$\Pi(x; a; b; c; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-b} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{si } d \leq x \end{cases}$$

También puede definirse usando max y min de la siguiente manera:

$\Pi(x; a; b; c; d) = \max(\min((x-a)/(b-a), 1, (d-x)/(d-c)), 0)$  con  $a < b \leq c < d$ ; estos parámetros determinan las cuatro esquinas de la función de pertenencia descrita. Una representación gráfica de un número difuso trapezoidal se puede ver en la Fig. 1.5



**Figura 1.5:** Representación de un número difuso trapezoidal.

### 1.2.3. El Principio de Extensión y la Aritmética Difusa

Sea una aplicación  $f$  definida de un universo de discurso  $X$  en otro universo  $Y$ . Dado un subconjunto borroso  $B$  en  $Y$  con función de pertenencia  $\mu_B(y)$ . La imagen recíproca  $f^{-1}$  induce un conjunto difuso  $A(f^{-1}(B) = A)$  en  $X$  cuya función de pertenencia está definida por:

$$\mu_A(x) = \mu_B(y), \quad y \in Y$$

para todos los  $x$  de  $X$  tales que  $f(x) = y$ . El grado de pertenencia de los  $x$   $f^{-1}(y) \neq \emptyset$  es constante e igual al de  $y$  en  $B$ .

Ahora se considerará el problema inverso. Dado un conjunto difuso  $A$  de  $X$ , la aplicación  $f$  induce un conjunto difuso  $B(f(A) = B)$  en  $Y$ . Nos planteamos la pregunta: ¿Cuál es la función de pertenencia para el subconjunto difuso  $B$  inducido por la aplicación  $f$ ?

Si  $f$  es una aplicación biyectiva, basta considerar

$$\mu_B(y) = \mu_A(x), \quad x \in A, \quad f(x) = y$$

El problema aparece cuando  $f$  no es biyectiva. Suponiendo que existen dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  distintos en  $X$ , con grados de pertenencia diferentes en  $A$  y con imágenes directas iguales a  $y$ . Nos preguntamos: ¿Qué grado de pertenencia debemos asignar a  $y$ ?

Se considerará el valor mayor entre esos dos valores. En general la función de pertenencia de  $B$  se define por:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y$$

donde  $f^{-1}(y)$  es el conjunto de puntos  $x$  de  $X$  que tienen por imagen directa a  $y$  para  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , y en caso de ser  $f^{-1}(y) = \emptyset$  se define  $\mu_B(y) = 0$

De esta manera se ha inducido una aplicación  $f$  definida de  $P(X)$  en  $P(Y)$  tal que para todo subconjunto borroso  $A = (A, \mu_A)$  se le asocia el subconjunto difuso  $f(A) = (f(A), \mu_{f(A)})$ , cuya función de pertenencia, para todo  $y$  en  $Y$  es:

$$\mu_{f(A)} = \begin{cases} \sup \mu_A(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

esta forma de obtener  $f$  se conoce con el nombre de principio de extensión.

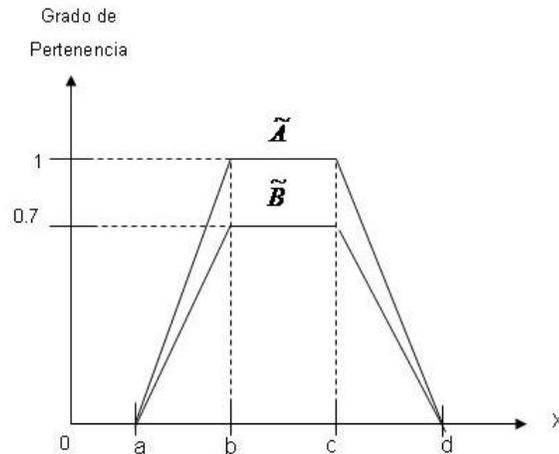
### 1.3. Números difusos generalizados

En [1] y [2] Chen extendió los números difusos tradicionales a números difusos generalizados.

**Definición 1.11.** Un número difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A}$  es  $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ , donde  $0 < w \leq 1$ , y  $a, b, c$  y  $d$  son números reales. El número difuso generalizado  $\tilde{A}$  es un subconjunto difuso de la recta real  $\mathbb{R}$ , cuya función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}$  cumple las siguientes condiciones:

- 1]  $\mu_{\tilde{A}(x)}$  es un mapeo continuo de  $\mathbb{R}$  hacia el intervalo cerrado  $[0,1]$
- 2]  $\mu_{\tilde{A}(x)} = 0$ , en  $-\infty < x \leq a$
- 3]  $\mu_{\tilde{A}(x)}$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$
- 4]  $\mu_{\tilde{A}(x)} = w$ , en  $b \leq x \leq c$
- 5]  $\mu_{\tilde{A}(x)}$  es estrictamente decreciente en  $[c, d]$
- 6]  $\mu_{\tilde{A}(x)} = 0$ , en  $d \leq x < \infty$

Si  $w = 1$ , entonces el número difuso generalizado  $\tilde{A}$  es llamado número trapezoidal difuso normal, denotado como  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ . Si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces se llama un intervalo nítido. Si  $b = c$ , entonces  $\tilde{A}$  se llama un número difuso triangular generalizado. Si  $a = b = c = d$  y  $w = 1$ , entonces  $\tilde{A}$  se llama un número real.



**Figura 1.6:** Dos números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$

La Fig. 1.6 muestra dos números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_1)$  y  $\tilde{B} = (a, b, c, d; w_2)$  que denotan dos diferentes decisiones u opiniones. Los valores  $w_1$  y  $w_2$  representan los diferentes grados de confianza de las opiniones de los que toman las decisiones de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, donde  $w_1 = 0.7$  y  $w_2 = 1.0$ .

### 1.3.1. Operaciones Aritméticas

Supongamos que hay dos números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}_1$  y  $\tilde{A}_2$ , donde  $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$  y  $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ . Las operaciones aritméticas entre números difusos trapezoidales son definidas como sigue:

(i) **la adición de números difusos  $\oplus$ :**

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 &= (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; \min(w_1, w_2))\end{aligned}\quad (1.4)$$

donde  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$  son números reales cualesquiera.

(ii) **sustracción de números difusos  $\ominus$ :**

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 &= (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) \ominus (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) \\ &= (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2; \min(w_1, w_2))\end{aligned}\quad (1.5)$$

donde  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$  son números reales cualesquiera.

(iii) **Multiplicación de números difusos  $\otimes$ :**

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 &= (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) \otimes (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) \\ &= (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2, d_1 * d_2; \min(w_1, w_2))\end{aligned}\quad (1.6)$$

(iv) **División de números difusos  $\oslash$ :**

La inversa del número difuso  $\tilde{A}_2$  es  $\frac{1}{\tilde{A}_2} = (\frac{1}{d_2}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2}; w_2)$  donde  $a_2, b_2, c_2$  y  $d_2$  son todos números reales positivos distintos de cero o todos números reales negativos distintos de cero.

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \oslash \tilde{A}_2 &= (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1) \oslash (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2) \\ &= (\frac{a_1}{d_2}, \frac{b_1}{c_2}, \frac{c_1}{b_2}, \frac{d_1}{a_2}; \min(w_1, w_2))\end{aligned}\quad (1.7)$$

La diferencia entre las operaciones aritméticas con números difusos generalizados y las operaciones aritméticas tradicionales con números difusos es que en el primer caso se puede tratar tanto con números difusos no normalizados como con normalizado, pero en el segundo solamente se puede tratar con números difusos normalizados.

# CAPÍTULO 2

## SEMEJANZA ENTRE NÚMEROS DIFUSOS

La tarea de medir el grado de similitud entre números difusos juega un rol importante en la toma de decisiones difusas, información difusa y análisis de riesgo difuso. Varios hechos pueden afectar el resultado de una medida de similitud, tales como, la forma de los números difusos, el área de los números difusos, entre otros. En años recientes, algunas medidas de similitud entre números difusos han sido presentadas por varios estudiosos. En [3], Chen presentó una medida de similitud entre números difusos. En [8], Hsieh y Chen presentaron una medida de similitud para números difusos usando la distancia de la representación de la integración media ponderada. En [9], Lee presentó una medida de similitud para números difusos trapezoidales. En [4], Chen y Chen combinaron el concepto de la distancia geométrica y la distancia del centro de gravedad (COG) para proponer una medida de similitud entre números difusos trapezoidales. Sin embargo, las medidas de similitud anteriores tienen el inconveniente de acarrear resultados incorrectos en algunas situaciones tales como las que describiremos posteriormente en el capítulo 3.

### 2.1. Medidas de Similitud entre los Números Difusos

#### 2.1.1. Medida de Similitud de Chen

En [3], Chen presentó una medida de similitud entre números difusos trapezoidales basada en la distancia geométrica. Supongamos que hay dos números difusos trapezoidales, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ , entonces el grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  entre los números difusos trapezoidales  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  puede ser calculado como sigue:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \tag{2.1}$$

donde  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ .

Si  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son números difusos triangulares, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ , entonces el grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  entre  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  puede ser calculada como sigue:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_i - b_i|}{3} \quad (2.2)$$

Cuanto mayor sea el valor de  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ , mayor es la similitud entre los números difusos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ .

### 2.1.2. Medida de Similitud de Lee

En [9], Lee propuso una medida de similitud para los números difusos trapezoidales y usó la medida de similitud para hacer frente a las opiniones difusas para la toma de decisiones de grupos, donde el grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  entre los números difusos trapezoidales  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  puede ser calculado como sigue:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{l_p}}{\|U\|} \times 4^{\frac{-1}{p}} \quad (2.3)$$

donde la métrica  $l_p$  es definida como sigue:

$$\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{l_p} = \left( \sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4)$$

y  $U$  es el universo de discurso

$$\|U\| = \max(U) - \min(U) \quad (2.5)$$

$p$  es un parámetro en los enteros positivos y  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ . Cuanto mayor sea el valor de  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$ , mayor la similitud entre los números difusos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ .

### Ejemplo

Sean los números difusos generalizados  $\tilde{A}=(0.5, 0.6, 0.9, 1.0; 1.0)$  y  $\tilde{B}=(0.6, 0.7, 0.8, 0.9; 0.9)$  y  $p = 1$ , entonces basados en (2.3) podemos obtener:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 1 - \frac{\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{l_p}}{\|U\|} \times 4^{-\frac{1}{p}} \\ &= 1 - \frac{|0,5 - 0,6| + |0,6 - 0,7| + |0,9 - 0,8| + |1,0 - 0,9|}{1,0 - 0,5} \times 4^{-1} \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

### 2.1.3. Medida de Similitud de Hsieh y Chen

En [8], Hsieh y otros propusieron una medida de similitud utilizando la distancia de la representación de la integración media ponderada, donde el grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  entre los números difusos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  puede ser calculado como sigue:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{1 + d(\tilde{A}, \tilde{B})} \quad (2.6)$$

donde  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |P(\tilde{A}) - P(\tilde{B})|$ .  $P(\tilde{A})$  y  $P(\tilde{B})$  significa la representación de la integración media ponderada de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  respectivamente.

Si  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son números difusos triangulares, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$

entonces las representaciones de la integración media ponderada  $P(\tilde{A})$  y  $P(\tilde{B})$  de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, son definidas como sigue:

$$P(\tilde{A}) = \frac{a_1 + 4a_2 + a_3}{6} \quad (2.7)$$

$$P(\tilde{B}) = \frac{b_1 + 4b_2 + b_3}{6} \quad (2.8)$$

Si  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son numeros difusos trapezoidales, entonces las representaciones de la integración media ponderada  $P(\tilde{A})$  y  $P(\tilde{B})$  de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, son definidas como sigue:

$$P(\tilde{A}) = \frac{a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4}{6} \quad (2.9)$$

$$P(\tilde{B}) = \frac{b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4}{6} \quad (2.10)$$

Cuanto mayor sea el valor de  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  mayor es la similitud entre los números difusos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ .

## 2.2. Método Tradicional del Centro de Gravedad

El método tradicional COG es muy útil para tratar problemas de desdifusificación y problemas de jerarquización difusa. La fórmula para calcular el centro de gravedad de un número difuso  $\tilde{A}$  es:

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{\int x \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int \mu_{\tilde{A}}(x) dx} \quad (2.11)$$

donde  $\mu_{\tilde{A}}$  es la función de pertenencia del número difuso  $\tilde{A}$ ,  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  indica el valor de pertenencia del elemento  $x$  en  $\tilde{A}$  y  $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$ .

En [2], Chen transforma (2.11) en otra forma revisada como sigue. Asumamos que hay un número difuso trapezoidal  $\tilde{A}$ , donde  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  y la función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}$  del número difuso trapezoidal  $\tilde{A}$  es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}^L(x) & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x < c \\ \mu_{\tilde{A}}^R(x) & \text{si } c \leq x < d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\mu_{\tilde{A}}^L(x) : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  es continua y estrictamente creciente y  $\mu_{\tilde{A}}^R(x) : [c, d] \rightarrow [0, 1]$  es continua y estrictamente decreciente, las cuales están definidas por:

$$\mu_{\tilde{A}}^L(x) = \frac{x - a}{b - a} \tag{2.12}$$

y

$$\mu_{\tilde{A}}^R(x) = \frac{x - d}{c - d} \tag{2.13}$$

entonces la fórmula transformada de (2.11) puede expresarse como sigue:

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{\int (x\mu_{\tilde{A}}^L(x))dx + \int xdx + \int (x\mu_{\tilde{A}}^R(x))dx}{\int (\mu_{\tilde{A}}^L(x))dx + \int 1dx + \int (\mu_{\tilde{A}}^R(x))dx} \tag{2.14}$$

El método tradicional de COG puede utilizarse para hacer frente a problemas de

desdifusificación y problemas de jerarquización difusa [1], [2] mediante el punto COG,  $(x^*, y^*)$ . Sin embargo, hay algunos inconvenientes en el método tradicional COG. Según (2.14), podemos ver que este no puede calcular directamente el COG de un intervalo nítido o un número real por el hecho de que los denominadores de (2.12), y (2.13), se convertirán en cero. Además, consume mucho tiempo para calcular el punto COG de un número difuso triangular o trapezoidal. Por lo tanto, se hace necesario desarrollar un nuevo método COG para superar los inconvenientes del método tradicional COG.

# CAPÍTULO 3

## NUEVAS MEDIDAS DE SIMILITUD ENTRE NÚMEROS DIFUSOS GENERALIZADOS

En este capítulo describiremos un método propuesto por Shi-Jay Chen y Shyi Ming Chen en 2003 [4], que se apoya en un método simplificado para calcular el punto de centro de gravedad. Además, presentaremos un método propuesto por B. Sridevi y R. Nadarajan en (2009) [11], que subsana ciertos problemas encontrados en [4] y otros métodos previamente estudiados.

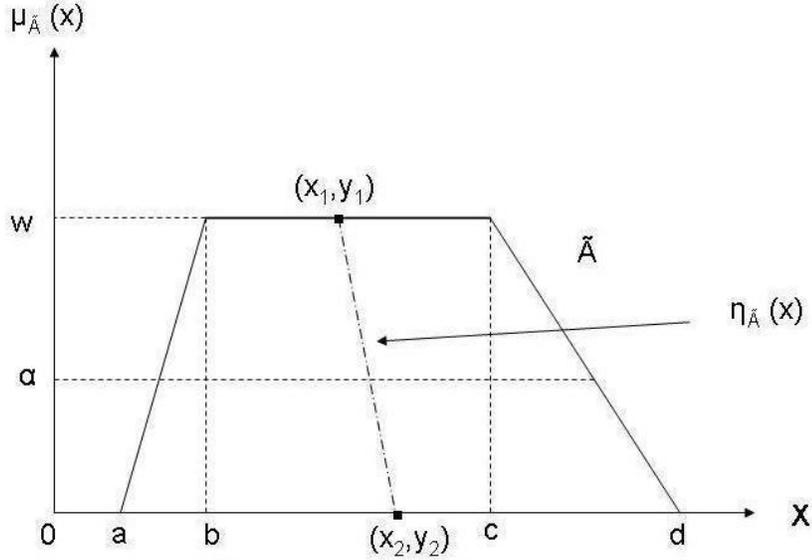
### 3.1. Método Simple para calcular el Centro de Gravedad

En esta sección, presentamos un nuevo método llamado Método Simple del Centro de Gravedad denotado por SCGM para calcular el punto de centro de gravedad (COG) de un número difuso generalizado. El método propuesto se basa en el concepto de la curva media. Asumamos que hay un número difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ , la definición de la curva media es definida como sigue:

**Definición 3.1.** Una curva media de un número difuso  $\tilde{A}$  es una función  $\eta_{\tilde{A}}(x)$  dada por :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = med(\tilde{A}_\alpha) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $\alpha \in (0, w]$ ,  $\tilde{A}_\alpha$  es llamada la  $\alpha$  - cortadura del número difuso  $\tilde{A}$  y es definida como  $\tilde{A}_\alpha = \{x : \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ .  $\inf(\tilde{A}_\alpha)$  denota la cota inferior de  $\tilde{A}_\alpha$ ,  $\sup(\tilde{A}_\alpha)$  denota la cota superior de  $\tilde{A}_\alpha$ ,  $med(\tilde{A}_\alpha) = [\inf(\tilde{A}_\alpha) + \sup(\tilde{A}_\alpha)]/2$  denota el punto medio de la  $\alpha$  - cortadura  $\tilde{A}_\alpha$  del número difuso  $\tilde{A}$ .



**Figura 3.1:** Curva media del numero difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A}$ .

Por ejemplo, en la Fig. 3.1, el número difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A}$  con la función  $\eta_{\tilde{A}}(x)$  de la curva media y 2 puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  definidos como sigue:

$$x_1 = \frac{c+b}{2}, \quad y_1 = w; \quad 0 < w \leq 1 \quad (3.2)$$

$$x_2 = \frac{d+a}{2}; \quad y_2 = 0 \quad (3.3)$$

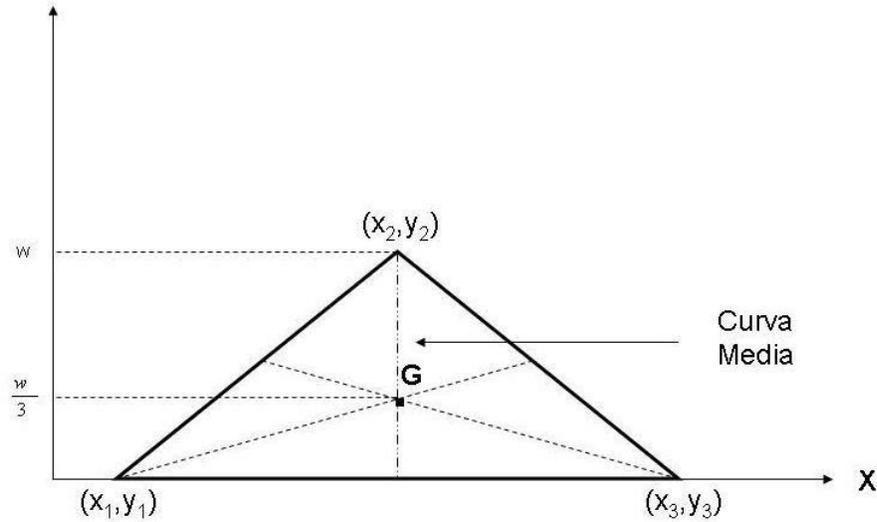
podemos ver que la fórmula para la curva media está definida como sigue:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (3.4)$$

donde la ecuación lineal mostrada anteriormente es la curva media del número difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A}$ .

### 3.2. COG de un Triángulo

En la Fig. 3.2, vemos que el centro de gravedad  $G = (x^*, y^*)$  del triángulo es una curva media denotada por una línea punteada, donde



**Figura 3.2:** Punto centro de gravedad G de un triángulo

$$x^* = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (3.5)$$

$$y^* = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (3.6)$$

dato que  $y_1 = y_3 = 0$  y  $y_2 = w$  vemos que

$$y^* = \frac{w}{3} \quad (3.7)$$

donde  $0 < w \leq 1$ .

Consideremos un triángulo asimétrico como se muestra en la Fig 3.3, Podemos ver que el centro de gravedad de dicho triángulo es  $(x^*, y^*)$  donde  $x^*$  y  $y^*$  son mostrados como en (3.5) y (3.6) respectivamente.

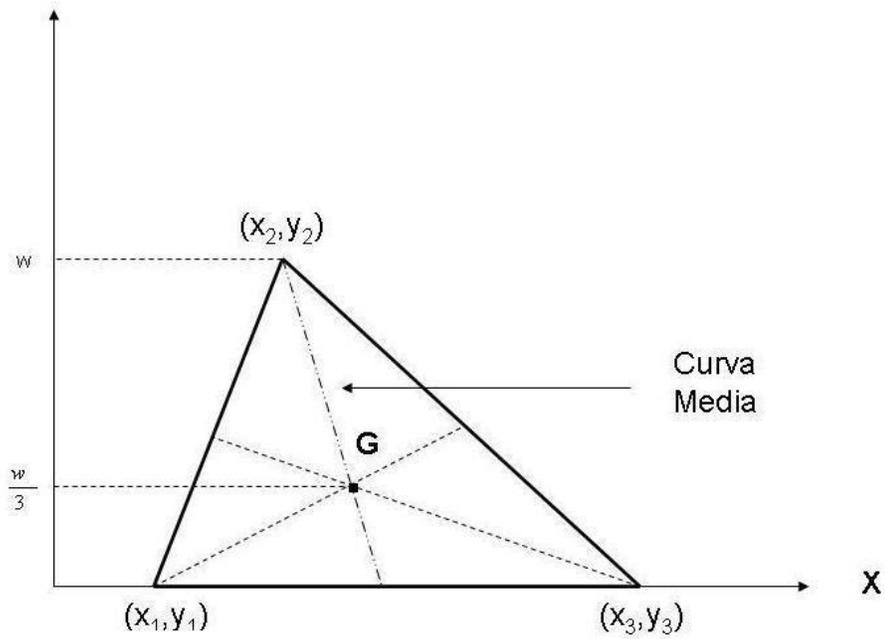


Figura 3.3: Punto centro de gravedad G de un triángulo asimétrico

### 3.3. COG de un Rectángulo

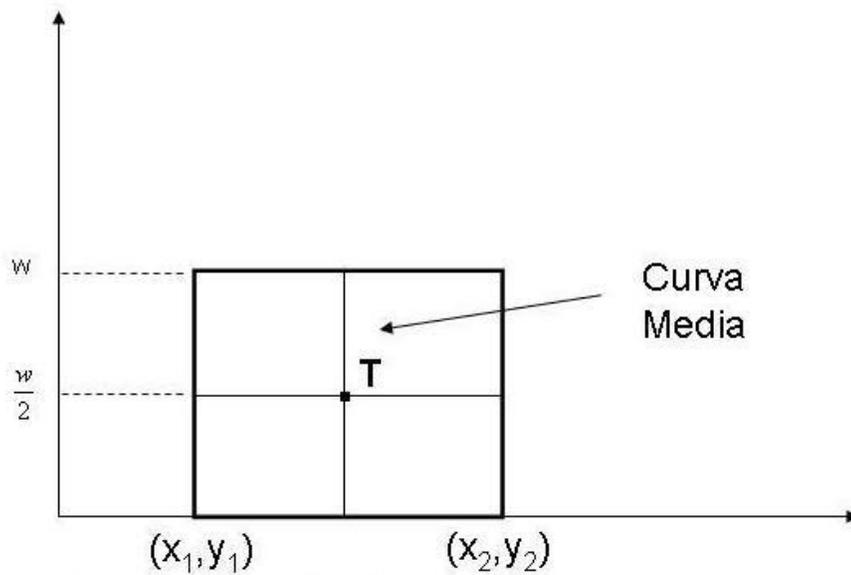


Figura 3.4: Punto centro de gravedad T de un Rectángulo

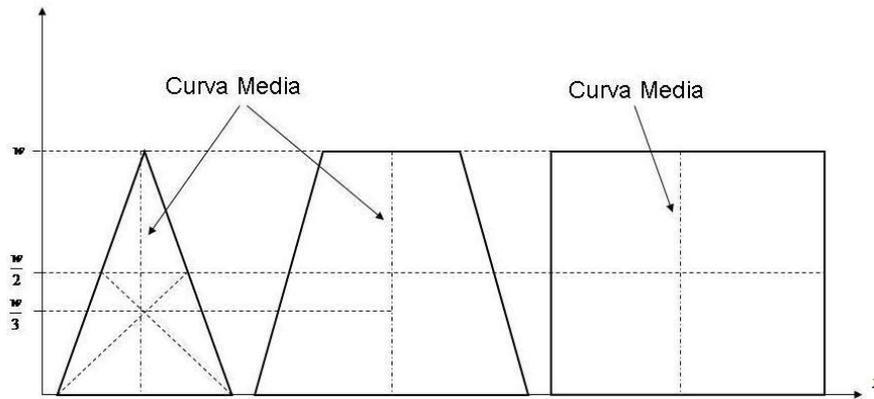
En la Fig. 3.4, vemos que el centro de gravedad  $T = (x^*, y^*)$  del rectángulo es la curva media, donde:

$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3.8)$$

$$y^* = \frac{w}{2} \quad (3.9)$$

donde  $0 < w \leq 1$

El centro de gravedad de un trapezoide está entre los centros de gravedad de un triángulo y de un rectángulo como se muestra en la Fig. 3.5.



**Figura 3.5:** El centro de gravedad de un trapezoide está entre el centro de gravedad de un triángulo y el centro de gravedad de un rectángulo

En la Fig. 3.5, podemos ver que el valor  $y^*$  punto COG del trapezoide está localizado entre el valor  $y^*$  del punto COG triangular (es decir,  $y^* = \frac{w}{3}$ ) y el valor  $y^*$  del punto COG rectangular (es decir,  $y = \frac{w}{2}$ ). Por tanto, el rango del valor  $y^*$  de un punto COG trapezoidal es como sigue:

$$\frac{w}{3} < y^* < \frac{w}{2}$$

donde  $0 < w \leq 1$ .

En las Fig. 3.2, 3.4 y 3.5, cuando asumimos que un triángulo es un número difuso triangular, un rectángulo es un intervalo nítido y un trapezoide es un número difuso

trapezoidal, podemos ver que el punto COG de un número difuso generalizado  $\tilde{A}$  está sobre la línea media.

Si usamos el valor  $y^*$  de un punto COG y la curva media, podemos obtener el valor  $x^*$  del punto COG.

Basados en las discusiones anteriores, podemos proponer un nuevo método de COG llamado el Método de Centro de Gravedad Simple SCGM descrito como sigue. Si  $\tilde{A}$  es un número difuso trapezoidal generalizado, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  entonces podemos decir que el valor  $y_{\tilde{A}}^*$  del punto COG de  $\tilde{A}$  es definido como sigue:

$$y_{\tilde{A}}^* = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}} * (\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} + 2)}{6} & \text{si } a_1 \neq a_4 \text{ y } 0 < w_{\tilde{A}} \leq 1 \\ \frac{w_{\tilde{A}}}{2} & \text{si } a_1 = a_4 \text{ y } 0 < w_{\tilde{A}} \leq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Si  $\tilde{A}$  es un número difuso triangular generalizado, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  podemos decir que el valor  $y_{\tilde{A}}^*$  del punto COG de  $\tilde{A}$  es definido como sigue:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}} * (\frac{a_2 - a_2}{a_3 - a_1} + 2)}{6} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}} * (0 + 2)}{6} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}}}{3} \end{aligned}$$

Si  $\tilde{A}$  es un intervalo nítido, donde  $\tilde{A} = (a_1, a_1, a_4, a_4; w_{\tilde{A}})$ , entonces podemos decir que el valor  $y_{\tilde{A}}^*$  del punto COG de  $\tilde{A}$  es definido como sigue:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}} * (\frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_1} + 2)}{6} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}} * (1 + 2)}{6} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}}}{2} \end{aligned}$$

Basados en (3.2), (3.3) y (3.4) podemos obtener el valor de  $x_{\tilde{A}}^*$  del punto del centro de gravedad de  $\tilde{A}$  como sigue:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_{\tilde{A}}^* - y_1}{x_{\tilde{A}}^* - x_1} \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow x_{\tilde{A}}^* = \frac{y_{\tilde{A}}^* (x_2 - x_1) - x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_2 - y_1} \quad (3.12)$$

donde  $x_1 = (a_3 + a_2)/2$ ,  $x_2 = (a_4 + a_1)/2$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_1 = w_{\tilde{A}}$  y  $0 \leq w_{\tilde{A}} \leq 1$ . Por tanto, (3.12) puede ser reescrito como :

$$x_{\tilde{A}}^* = \frac{y_{\tilde{A}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{A}} - y_{\tilde{A}}^*)}{2w_{\tilde{A}}} \quad (3.13)$$

Basados en (3.10) y (3.13), podemos obtener el punto  $\text{COG}(\tilde{A})$  de un número difuso trapezoidal generalizado  $\tilde{A}$ , donde  $\text{COG}(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*)$ .

### Ejemplo 3.1

A continuación, usaremos un ejemplo para ilustrar como usar el método propuesto para calcular el punto COG de un número difuso generalizado. Supongamos que hay 3 números difusos triangulares generalizados,  $\tilde{u}_1=(0.2, 0.3, 0.3, 0.5; 1)$ ,  $\tilde{u}_2=(0.17, 0.32, 0.32, 0.58; 1)$  y  $\tilde{u}_3=(0.25, 0.4, 0.4, 0.7; 1)$  como se muestran en la Fig. 3.6. De acuerdo con (3.10), podemos calcular el valor  $y_{\tilde{u}_1}^*$  del punto  $\text{COG}(\tilde{u}_1)$  del número difuso triangular generalizado  $\tilde{u}_1$ ,  $\text{COG}(\tilde{u}_1) = (x_{\tilde{u}_1}^*, y_{\tilde{u}_1}^*)$ , como sigue:

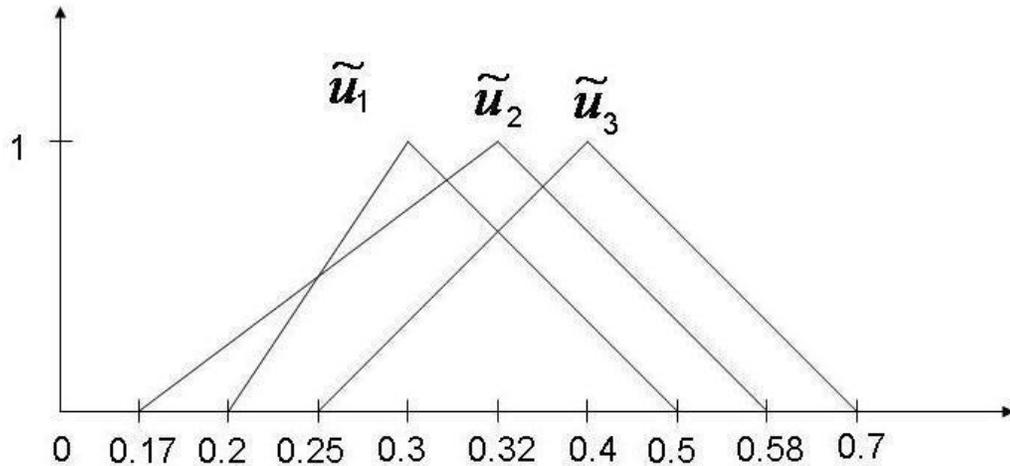


Figura 3.6: Tres números difusos generalizados.

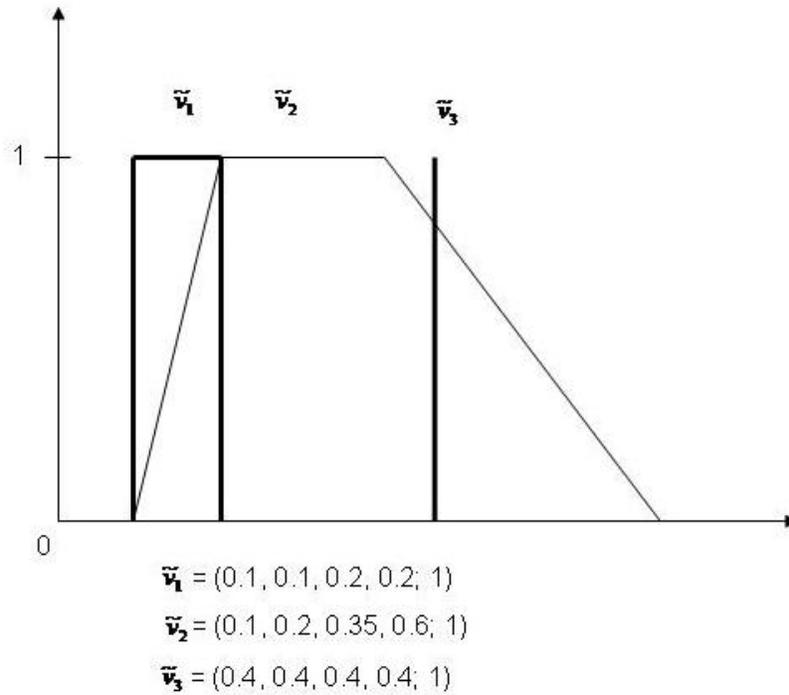
$$\begin{aligned} y_{\tilde{u}_1}^* &= \frac{1 \times \left(\frac{0.3-0.3}{0.5-0.2}\right) + 2}{6} \\ &= \frac{1 \times (0 + 2)}{6} \\ &= \frac{1}{3} \\ &= 0,333 \end{aligned}$$

entonces podemos usar el valor de  $y_{\tilde{u}_1}^*$  y (3.13) para calcular el valor de  $x_{\tilde{u}_1}^*$  del punto de COG( $\tilde{u}_1$ ) del número difuso triangular trapezoidal  $\tilde{u}_1$ , mostrado como sigue:

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}_1}^* &= \frac{\frac{1}{3}(0,3 + 0,3) + (0,5 + 0,2)(1 - \frac{1}{3})}{2 \times 1} \\ &= \frac{1}{3} \\ &= 0,333 \end{aligned}$$

Por tanto, el punto COG del número difuso triangular generalizado  $\tilde{u}_1$  es  $\text{COG}(\tilde{u}_1) = (x_{\tilde{u}_1}^*, y_{\tilde{u}_1}^*) = (0,333, 0,333)$ . De la misma manera, podemos obtener los puntos  $\text{COG}(\tilde{u}_2)$  y  $\text{COG}(\tilde{u}_3)$  de los números difusos triangulares generalizados  $\tilde{u}_2$  y  $\tilde{u}_3$ . Por lo que, el punto  $\text{COG}(\tilde{u}_2) = (0,357, 0,333)$  y el punto  $\text{COG}(\tilde{u}_3) = (0,450, 0,333)$ . Si usamos el método tradicional COG, podemos también obtener los mismos resultados. Sin embargo, el método propuesto puede superar los inconvenientes del método tradicional COG, es decir, el método tradicional COG no puede calcular directamente el centro de gravedad de un intervalo nítido o un número real, además muchas veces tarda para calcular el punto COG.

Por ejemplo, asumamos que hay 3 tipos diferentes de números difusos generalizados  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{v}_2$  y  $\tilde{v}_3$  como se muestran en la Fig. 3.7, donde el número difuso  $\tilde{v}_1$  es un intervalo nítido, el número difuso generalizado  $\tilde{v}_2$  es un número difuso trapezoidal y el número difuso generalizado  $\tilde{v}_3$  es un número real.



**Figura 3.7:** Tres tipos diferentes de números difusos.

De acuerdo a las ecuaciones (3.10) y (3.13) podemos obtener los 3 puntos COG. calculemos el punto  $\text{COG}(\tilde{v}_1)$ :

$$\begin{aligned}
 y_{\tilde{v}_1}^* &= 1 \cdot \frac{(0,2-0,1) + 2}{0,2-0,1} \\
 &= 1 \cdot \frac{1+2}{6} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 &= 0,5
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{v}_1}^* &= \frac{\frac{1}{2}(0,2 + 0,1) + (0,2 + 0,1)(1 - \frac{1}{2})}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{0,3}{2} \\
 &= 0,15
 \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos calcular los puntos  $\text{COG}(\tilde{v}_2)$  y  $\text{COG}(\tilde{v}_3)$  de los números difusos triangulares generalizados  $\tilde{v}_2$  y  $\tilde{v}_3$ .

Siendo el punto  $\text{COG}(\tilde{v}_1) = (0.15, 0.5)$ ,  $\text{COG}(\tilde{v}_2) = (0.32, 0.38)$  y  $\text{COG}(\tilde{v}_3) = (0.4, 0.5)$ .

### 3.4. Medida de Similitud entre Números Difusos Generalizados Propuesta por Chen y Chen [4]

En este párrafo se presentará un nuevo método para calcular el grado de similitud entre números difusos generalizados y se probarán algunas propiedades de la medida de similitud propuesta.

Asumamos que hay 2 números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , donde  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$ ,  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_{\tilde{B}})$ ,  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$  y  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4 \leq 1$ .

Primero, usemos las ecuaciones (3.10) y (3.13) para obtener los punto  $\text{COG}(\tilde{A})$  y  $\text{COG}(\tilde{B})$  de los números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, donde  $\text{COG}(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*)$  y  $\text{COG}(\tilde{B}) = (x_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{B}}^*)$ . Entonces el grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  entre los números difusos generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  puede ser calculado como sigue:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \quad (3.14)$$

donde  $y_{\tilde{A}}^*$  y  $y_{\tilde{B}}^*$  son calculados por la ecuación (3.10) y  $x_{\tilde{A}}^*$  y  $x_{\tilde{B}}^*$  son calculados por la ecuación (3.13),  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ , y  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})$  es definido como sigue:

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} > 0 \\ 0 & \text{si } S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

donde  $S_{\tilde{A}}$  y  $S_{\tilde{B}}$  son las longitudes de las bases de los números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, definidos como siguen:

$$S_{\tilde{A}} = a_4 - a_1 \quad (3.16)$$

$$S_{\tilde{B}} = b_4 - b_1 \quad (3.17)$$

Vemos que la medida de similitud propuesta  $S(\tilde{A}, \tilde{B})$  integra los conceptos de la distancia geométrica, es decir,  $\left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right]$  y la distancia de centro de gravedad,

es decir,  $(1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})}$ . El valor  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})$  es usado para determinar si consideramos la distancia COG o no. Si los números difusos generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son números reales (es decir,  $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0$ ), entonces no consideramos la distancia del centro de gravedad, (es decir,  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0$ ). Si bien  $\tilde{A}$  o  $\tilde{B}$  es un número difuso generalizado o  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son números difusos generalizados (es decir,  $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} \neq 0$ ) entonces debemos considerar la distancia de COG (es decir,  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1$ )

Probemos algunas propiedades que se cumplen en esta nueva medida de similitud. Sea  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_{\tilde{B}})$ , dos números difusos trapezoidales generalizados.

**Teorema 3.1.** *Dos números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son idénticos si y sólo si  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$*

*Demostración.*  $\implies$ ]

supongamos que  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son idénticos, esto es,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $a_3 = b_3$ ,  $a_4 = b_4$ , y  $w_{\tilde{A}} = w_{\tilde{B}}$ . tenemos que el grado de similitud entre  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  puede ser calculado como sigue:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\ &= [1 - 0] \times (1 - 0)^1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\impliedby$ ]

Supongamos que  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ , entonces,

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

esto implica que  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $a_3 = b_3$ ,  $a_4 = b_4$ ,  $y_{\tilde{A}}^* = y_{\tilde{B}}^*$  y  $x_{\tilde{A}}^* = x_{\tilde{B}}^*$ . De (3.10) y (3.13)  $\min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}) = \max(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}})$  y el  $\min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}) \neq 0$  así  $w_{\tilde{A}} = w_{\tilde{B}}$ . Por tanto, los números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son idénticos.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Para todo par de números difusos trapezoidales generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  se cumple que  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$*

*Demostración.* Dado que

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

y

$$S(\tilde{B}, \tilde{A}) = \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |b_i - a_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{B}}^* - x_{\tilde{A}}^*|)^{B(S_{\tilde{B}}, S_{\tilde{A}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}{\max(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 |a_i - b_i| &= \sum_{i=1}^4 |b_i - a_i| |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*| \\ &= |x_{\tilde{B}}^* - x_{\tilde{A}}^*| B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) \\ &= B(S_{\tilde{B}}, S_{\tilde{A}}) \end{aligned}$$

y

$$\frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} = \frac{\min(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}{\max(y_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{A}}^*)}$$

Por tanto, podemos ver que  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$

□

**Teorema 3.3.** Si  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 1)$  y  $\tilde{B} = (b, b, b, b; 1)$  dos números reales entonces  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - |a - b|$

*Demostración.* De (3.16) y (3.17) vemos que  $S_{\tilde{A}} = 0$  y  $S_{\tilde{B}} = 0$ . De (3.15) tenemos que  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0$ . De (3.10) tenemos que  $y_{\tilde{A}}^* = y_{\tilde{B}}^* = \frac{1}{2}$ . basados en (3.14) podemos obtener:

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a - b|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^0 \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\ &= 1 - \frac{4|a - b|}{4} \times 1 \times 1 \\ &= 1 - |a - b| \end{aligned}$$

□

### 3.5. Medida de Similitud propuesta por Sridevi y Nadarajan [11]

Este método se basa en la diferencia difusa de distancia entre puntos de números difusos, en lugar de distancias geométricas usadas en los métodos previamente estudiados.

La función de pertenencia para medir la diferencia en distancia de puntos de dos números difusos generalizados se ha definido cómo:

$$\mu_d(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{d} & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $0 < d \leq 1$  y  $x = |a_i - b_i|$ . El grado de similitud de dos números difusos generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  está definido como:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu_d(x) \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \quad (3.18)$$

$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})$  es 1 ó 0 de acuerdo como es considerado el punto COG y  $x_{\tilde{A}}^*$ ,  $x_{\tilde{B}}^*$ ,  $y_{\tilde{A}}^*$ ,  $y_{\tilde{B}}^*$  son dados como en las ecuaciones (3.10), (3.13), (3.15), (3.16) y (3.17).

### 3.6. Comparación de los métodos estudiados a conjuntos de números difusos generalizados

En lo que sigue usaremos 12 conjuntos de números difusos generalizados para comparar las medidas de similitud propuestas explicadas previamente, es decir, la medida de similitud propuesta por Chen [3], la medida de similitud propuesta por Lee [9] y la medida de similitud propuesta por Hsieh y Chen [8], donde los 12 conjuntos de números difusos generalizados se muestran en la figura 3.8 y la comparación de los resultados calculados de la medida de similitud propuesta con los métodos indicados se muestran en la tabla 3.2.

Sólo se expondrán un par de conjuntos realizando los respectivos cálculos de la medida de similitud propuesta y las otras 3 medidas de similitud existente. Para los demás datos reflejados en la tabla, los cálculos se realizaron de manera análoga y se llegarán a algunas conclusiones resaltantes.

Tabla 3.2 Comparación de resultados

	Método de Lee	Método de Hsieh y Chen	Método de Chen y Lin	Método de Chen y Chen	Método de Sridevi y Nadarajan
Conjunto 1	0.9167	1	0.975	0.8357	0.8143
Conjunto 2	1	1	1	1	1
Conjunto 3	0.5	0.7692	0.7	0.42	0.24
Conjunto 4	0.5	0.7692	0.7	0.49	0.28
Conjunto 5	1	1	1	0.8	0.8
Conjunto 6	*	1	1	1	1
Conjunto 7	0	0.909	0.9	0.9	0.8
Conjunto 8	0.5	0.909	0.9	0.54	0.48
Conjunto 9	0.6667	0.909	0.9	0.81	0.72
Conjunto 10	0.8333	1	0.9	0.9	0.8
Conjunto 11	0.75	1	0.9	0.72	0.64
Conjunto 12	0.8	0.9375	0.9	0.78	0.69

NOTA: “\*” significa que la medida de similitud no puede calcular el grado de similitud entre dos números difusos generalizados

■ Significa resultados incorrectos

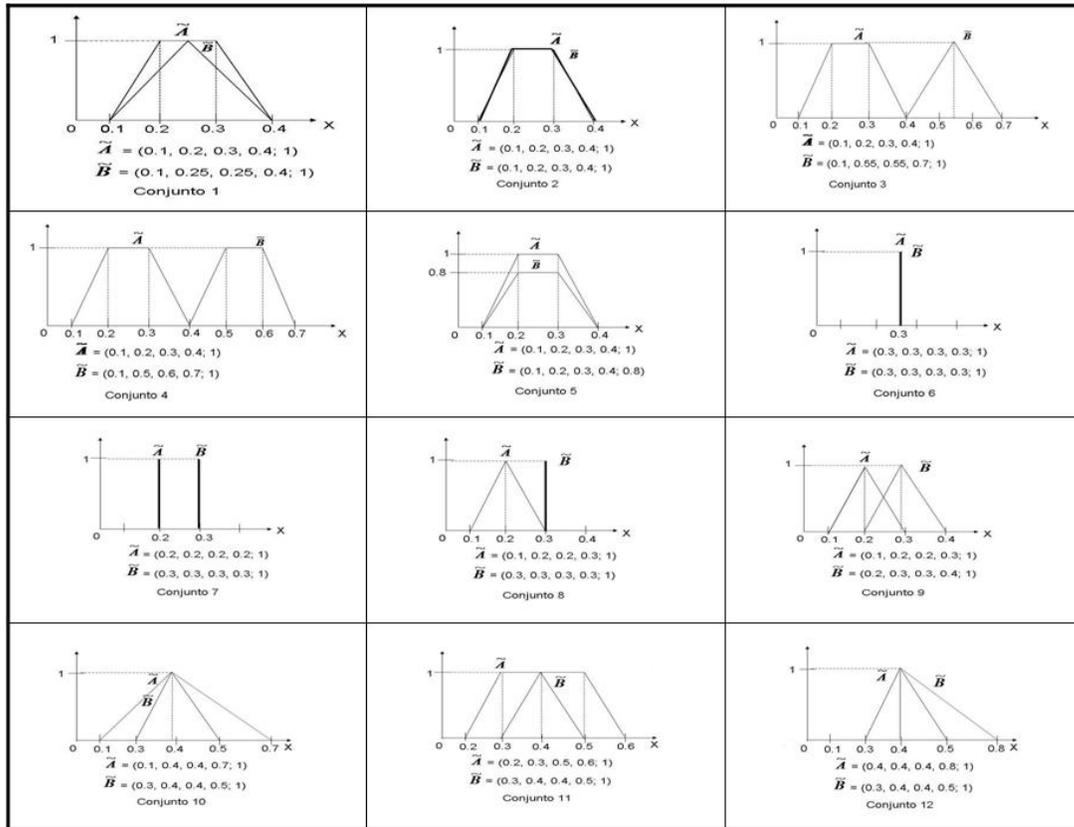


Figura 3.8: 12 conjuntos de números difusos generalizados.

De la tabla 3.2 y las Fig. 3.8, podemos ver los inconvenientes de las medidas de similitud existentes [3], [8] y [9], descritos como sigue:

1. En el conjunto 1 de la Fig. 3.8, podemos ver que  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son diferentes números difusos generalizados. Sin embargo, de la tabla 3.2, podemos ver que al aplicar la medida de similitud existente [8], éste tiene el mismo grado de similitud, es decir 1.
2. De la Fig. 3.8, podemos ver que el conjunto 3 y el conjunto 4 son conjuntos diferentes de números difusos. Apliquemos los métodos existentes, el método de Chen y Chen y el método de Sridevi y Nadarajan.

**Según Chen [3]:**

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 1 - \frac{|0,1 - 0,4| + |0,2 - 0,55| + |0,3 - 0,55| + |0,4 - 0,7|}{4} \\
 &= 1 - \frac{0,30 + 0,35 + 0,25 + 0,30}{4} \\
 &= 1 - \frac{1,20}{4} \\
 &= 1 - 0,30 \\
 &= 0,70
 \end{aligned}$$

**Según Lee [9]**

Como en este método se hace uso de la métrica  $l_p$ , entonces trabajamos con  $p=1$ , así:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 1 - \frac{\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{l_p}}{\|U\|} \times 4^{\frac{-1}{p}} \\
 &= 1 - \frac{(|0,1 - 0,4|^1 + |0,2 - 0,55|^1 + |0,3 - 0,55|^1 + |0,4 - 0,7|^1)^{\frac{1}{1}}}{0,7 - 0,1} \times 4^{\frac{-1}{1}} \\
 &= 1 - \frac{0,30 + 0,35 + 0,25 + 0,30}{0,7 - 0,1} \times 4^{-1} \\
 &= 1 - \frac{1,20}{0,6} \times 4^{-1} \\
 &= 1 - 2 \times 4^{-1} \\
 &= 0,5
 \end{aligned}$$

**Según Hsieh y Chen [8]**

Tenemos que la medida de similitud propuesta por Hsieh y Chen viene dada por:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{1 + d(\tilde{A}, \tilde{B})}$$

para ello es necesario antes calcular  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |P(\tilde{A}) - P(\tilde{B})|$ . donde

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}) &= \frac{0,1 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 0,4}{6} \\ &= \frac{1,50}{6} \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(\tilde{B}) &= \frac{0,4 + 2 * 0,55 + 2 * 0,55 + 0,7}{6} \\ &= \frac{3,30}{6} \\ &= 0,55 \end{aligned}$$

Así;  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |P(\tilde{A}) - P(\tilde{B})| = |0,25 - 0,55| = 0,30$  Ahora bien,

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{1 + 0,30} \\ &= \frac{1}{1,30} \\ &= 0,77 \end{aligned}$$

**El Método de Chen y Chen [4]**

primero calculemos los puntos  $\text{COG}(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*)$  y  $\text{COG}(\tilde{B}) = (x_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{B}}^*)$ .

así, que haciendo uso de las ecuaciones (3.10) y (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}} \times \left( \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} + 2 \right)}{6} \\ &= \frac{1 \cdot \left( \frac{0,3 - 0,2}{0,4 - 0,1} + 2 \right)}{6} \\ &= 1 \cdot \frac{1 \cdot 2,33}{6} \\ &= 0,39 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{A}}^* &= \frac{y_{\tilde{A}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{A}} - y_{\tilde{A}}^*)}{2w_{\tilde{A}}} \\
 &= \frac{0,39 \cdot (0,3 + 0,2) + (0,1 + 0,1)(1 - 0,39)}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{0,20 + 0,31}{2} \\
 &= 0,26
 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{A}) = (0,26, 0,39)$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
 y_{\tilde{B}}^* &= \frac{1 \cdot \left(\frac{0,55-0,55}{0,7-0,4} + 2\right)}{6} \\
 &= \frac{1 \cdot \left(\frac{0}{0,30} + 2\right)}{6} \\
 &= \frac{2}{6} \\
 &= 0,33
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{B}}^* &= \frac{0,33 \cdot (0,55 + 0,55) + (0,7 + 0,4) \cdot (1 - 0,33)}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{0,33 \cdot 1,10 + 1,10 \cdot 0,67}{2} \\
 &= \frac{0,36 + 0,74}{2} \\
 &= \frac{1,10}{2} \\
 &= 0,55
 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{B}) = (0,55, 0,33)$

ahora bien,  $S_{\tilde{A}} = 0,4 - 0,1 = 0,30$  y  $S_{\tilde{B}} = 0,7 - 0,4 = 0,3$ .

Luego  $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0,30 + 0,30 = 0,60 > 0$  lo que implica que  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1$  así,

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 0,70 \cdot (1 - |0,26 - 0,55|)^1 \cdot \frac{\min(0,39, 0,33)}{\max(0,39, 0,33)} \\
 &= 0,70 \cdot (1 - 0,29)^1 \cdot \frac{0,33}{0,39} \\
 &= 0,70 \cdot (0,71)^1 \cdot 0,85 \\
 &= 0,42
 \end{aligned}$$

### Método de Sridevi y Nadarajan [11]

Tenemos que la ecuación para calcular el grado de similitud de dos números difusos generalizados  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  esta dada por:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu_d(x) \times (1 - |x_A^* - x_B^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}$$

donde, la función de pertenencia para medir la diferencia en distancia de puntos de dos números difusos generalizados está definida cómo:

$$\mu_d(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{d} & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $0 < d \leq 1$  y  $x = |a_i - b_i|$ .

Ahora bien,

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu_d(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[ \left(1 - \frac{0,3}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0,35}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0,25}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0,3}{0,5}\right) \right] = \frac{1}{4} \cdot (0,4 + 0,3 + 0,5 + 0,4) = \frac{1}{4} \cdot (1,6) = 0,4$$

por otro lado, tomando los valores previamente calculados en el método de Chen y Chen, tenemos:

$$1 - |x_A^* - x_B^*| = 1 - |0,26 - 0,55| = 1 - 0,29 = 0,71$$

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 1$$

$$\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*) = 0,33$$

$$\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*) = 0,39$$

ahora sustituyendo los valores en la ecuación (3.18) tenemos:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 0,70 \cdot (1 - |0,26 - 0,55|)^1 \cdot \frac{\min(0,39,0,33)}{\max(0,39,0,33)} \\
 &= 0,4 \cdot (1 - 0,29)^1 \cdot \frac{0,33}{0,39} \\
 &= 0,4 \cdot (0,71)^1 \cdot 0,85 \\
 &= 0,24
 \end{aligned}$$

En resumen, de la tabla 3.2, podemos ver que si aplicamos los métodos presentados en [3], [8] y [9], el conjunto 3 y el conjunto 4 tienen el mismo grado de similitud, respectivamente.

3. Del conjunto 5 de la Fig. 3.8, podemos ver que  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son números difusos generalizados diferentes. Sin embargo, de la tabla 3.2, podemos ver si aplicamos la medida de similitud existente en [3], [8] y [9], ellos tienen el mismo grado de similitud, es decir, 1.
4. Al conjunto 6 de la Fig. 3.8, apliquemos los métodos [3], [8], [9], el método Chen y Chen [4] y el método de Sridevi y Nadarajan [11].

### Según Chen [3]

Tenemos que la medida de similitud está dado por:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \\
 &= 1 - \frac{|0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3|}{4} \\
 &= 1 - \frac{0 + 0 + 0 + 0}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

### Según Lee [9]

Como en este método se hace uso de la métrica  $l_p$ , entonces trabajamos con  $p=1$ , así:

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= 1 - \frac{\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_{l_p}}{\|U\|} \times 4^{\frac{-1}{p}} \\
 &= 1 - \frac{(|0,3 - 0,3|^1 + |0,3 - 0,3|^1 + |0,3 - 0,3|^1 + |0,3 - 0,3|^1)^{\frac{1}{4}}}{0,3 - 0,3} \times 4^{\frac{-1}{4}} \\
 &= 1 - \frac{0 + 0 + 0 + 0}{0,3 - 0,3} \times 4^{-1} \\
 &= 1 - \frac{0}{0} \times 4^{-1}
 \end{aligned}$$

**Según Hsieh y Chen [8]**

Tenemos que la medida de similitud propuesta por Hsieh y Chen viene dada por:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{1 + d(\tilde{A}, \tilde{B})}$$

para ello es necesario antes calcular  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |P(\tilde{A}) - P(\tilde{B})|$ . donde

$$\begin{aligned}
 P(\tilde{A}) &= \frac{0,3 + 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 0,3}{6} \\
 &= \frac{1,8}{6} \\
 &= 0,3
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 P(\tilde{B}) &= \frac{0,3 + 2 * 0,3 + 2 * 0,3 + 0,3}{6} \\
 &= \frac{0,3}{6} \\
 &= 0,3
 \end{aligned}$$

Así;  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |P(\tilde{A}) - P(\tilde{B})| = |0,3 - 0,3| = 0$  Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{1 + 0} \\
 &= \frac{1}{1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

**El Método Chen y Chen [4]**

primero calculemos los puntos  $\text{COG}(\tilde{A}) = (x_A^*, y_A^*)$  y  $\text{COG}(\tilde{B}) = (x_B^*, y_B^*)$ .

así, que haciendo uso de las ecuaciones (3.10) y (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}}}{2} && \text{ya que } a_1 = a_4 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_{\tilde{A}}^* &= \frac{y_{\tilde{A}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{A}} - y_{\tilde{A}}^*)}{2w_{\tilde{A}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,3 + 0,3) + (0,3 + 0,3)(1 - \frac{1}{2})}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{0,3 + 0,3}{2} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{A}) = (0,3, \frac{1}{2})$

por otro lado,

$$\begin{aligned} y_{\tilde{B}}^* &= \frac{w_{\tilde{B}}}{2} && \text{ya que } b_1 = b_4 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_{\tilde{B}}^* &= \frac{y_{\tilde{B}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{B}} - y_{\tilde{B}}^*)}{2w_{\tilde{B}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,3 + 0,3) + (0,3 + 0,3)(1 - \frac{1}{2})}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{0,3 + 0,3}{2} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{B}) = (0,3, \frac{1}{2})$

Ahora bien,  $S_{\tilde{A}} = 0,3 - 0,3 = 0$  y  $S_{\tilde{B}} = 0,3 - 0,3 = 0$ .

Luego,  $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0 + 0 = 0$  lo que implica que  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0$

Así,

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \left[1 - \frac{(\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|)}{4}\right] \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\
 &= \left(1 - \frac{|0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3| + |0,3 - 0,3|}{4}\right) \cdot \\
 &\quad (1 - |0,3 - 0,3|)^0 \cdot \frac{\min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \\
 &= 1 \cdot (1 - 0)^1 \cdot \frac{1/2}{1/2} \\
 &= 1 \cdot 1^0 \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

### Método de Sridevi y Nadarajan [11]

Tomando los valores de los puntos  $\text{COG}(\tilde{A}) = (x_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{A}}^*)$  y  $\text{COG}(\tilde{B}) = (x_{\tilde{B}}^*, y_{\tilde{B}}^*)$  en el método de Chen y Chen y haciendo uso de las ecuaciones (3.10) y (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 y_{\tilde{A}}^* &= \frac{w_{\tilde{A}}}{2} && \text{ya que } a_1 = a_4 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{A}}^* &= \frac{y_{\tilde{A}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{A}} - y_{\tilde{A}}^*)}{2w_{\tilde{A}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,3 + 0,3) + (0,3 + 0,3)(1 - \frac{1}{2})}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{0,3 + 0,3}{2} \\
 &= 0,3
 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{A}) = (0,3, \frac{1}{2})$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
 y_{\tilde{B}}^* &= \frac{w_{\tilde{B}}}{2} && \text{ya que } b_1 = b_4 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_{\tilde{B}}^* &= \frac{y_{\tilde{B}}^*(a_3 + a_2) + (a_4 + a_1)(w_{\tilde{B}} - y_{\tilde{B}}^*)}{2w_{\tilde{B}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,3 + 0,3) + (0,3 + 0,3)(1 - \frac{1}{2})}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{0,3 + 0,3}{2} \\
 &= 0,3
 \end{aligned}$$

por lo que el punto  $\text{COG}(\tilde{B}) = (0,3, \frac{1}{2})$

Ahora bien,  $S_{\tilde{A}} = 0,3 - 0,3 = 0$  y  $S_{\tilde{B}} = 0,3 - 0,3 = 0$ .

Luego,  $S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} = 0 + 0 = 0$  lo que implica que  $B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = 0$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu_d(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[ \left(1 - \frac{0}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0}{0,5}\right) + \left(1 - \frac{0}{0,5}\right) \right] = \frac{1}{4} \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{4} \cdot (4) = 1 \text{ así,}$$

$$\begin{aligned}
 S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu_d(x) \times (1 - |x_{\tilde{A}}^* - x_{\tilde{B}}^*|)^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \frac{\min(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)}{\max(y_{\tilde{A}}^*, y_{\tilde{B}}^*)} \\
 &= 1 \cdot (1 - 0)^0 \cdot \frac{1/2}{1/2} \\
 &= 1 \cdot 1^0 \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Podemos ver que el conjunto 6 de la Fig. 3.8 y la tabla 3.2 que cuando se aplicó el método según Lee [9] no pudimos calcular el grado de similitud entre dos valores reales idénticos debido al hecho de que en el denominador  $\|U\|$  llega a ser cero, dando así la medida de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \infty$  y esto es un resultado erróneo.

5. Por otro lado, del conjunto 7 de la Fig. 3.8, también podemos ver que cuando se aplicó el método de Lee [9] este no puede calcular correctamente el grado de similitud entre dos valores reales idénticos debido al hecho de que el grado de similitud de los valores reales 0.2 y 0.3 del conjunto 7 de la Fig. 3.8 llegan a ser cero y esto es un resultado incorrecto.
6. De la Fig. 3.8, se puede observar que los conjuntos 8 y 9 son conjuntos de números difusos generalizados diferentes. Sin embargo, de la tabla 3.2, vemos

que cuando se aplicó los métodos de Chen [3] y Hsieh [8] , los conjuntos 8 y 9 obtienen el mismo grado de similitud, respectivamente.

7. De la Fig. 3.8, vemos que los conjunto 10 , 11 y 12 son conjuntos difusos generalizados diferentes. Asi, que en la tabla 3.2, se puede ver que al haber aplicado el método de Lee [9] se obtiene el mismo grado de similitud, y además con el método de Hsieh [8] también se obtiene el mismo grado de similitud en el conjunto 10 y el conjunto 11.
8. Se puede ver en el conjunto 10 de la Fig. 3.8, que aunque las formas de los números difusos generalizados son las mismas, los valores de sus bases son diferentes. El conjunto 1 de la Fig. 3.8, es mas similar que el conjunto 10, pero el método de Chen y Chen [4], da una medida de similitud superior para el conjunto 10 que para el conjunto 1, lo cual no sucede con el método de Sridevi y Nadarajan [11].
9. En el conjunto 5 los dos números difusos generalizados son iguales excepto por el valor de  $w$  que es diferente. En cambio, en el conjunto 7 de la Fig. 3.8, son dos valores reales diferentes, pero el método de Chen y Chen [4] da un mayor valor de similitud al conjunto 7 que al conjunto 5, mientras que el método de Sridevi y Nadarajan [11] le asigna un mismo valor de 0.8.

Por tanto, de la tabla 3.2 y fig. 3.8, podemos ver que la medida de similitud [11] puede superar los inconvenientes de los métodos existentes.

# Conclusiones

A través del presente trabajo se han estudiado varios métodos para realizar medidas de semejanzas entre números difusos generalizados, entre ellos los de Chen [3], Chen y Chen [4], Hsie y Chen [8], Lee [9] y Shridevi y Nadarajan [11]. Además se estudió comparativamente los resultados obtenidos al calcular el grado de semejanza de varios conjuntos difusos generalizados, usando estos métodos.

Los métodos presentados en [3], [4], [8] y [9] producen algunos resultados incorrectos al realizarse los cálculos. Pudo observarse que el método de Sridevi y Nadarajan [11] supera inconvenientes presentados en los otros métodos.

Como ampliación del trabajo, se recomienda probar el comportamiento de las nuevas medidas estudiadas utilizando una base de datos conformada por una cantidad más grande y diversa de números difusos generalizados. Así mismo, se recomienda analizar aplicaciones de las medidas de similitud de números difusos generalizados en diversas áreas, entre ellas en el análisis difuso de riesgos y en problemas de reconocimiento de patrones.



# REFERENCIAS

- [1] **Chen, S. H.**, *Operations on fuzzy numbers with function principal*, Tamkang J. Manag. Sci. vol 6. pp. 13-25, 1985.
- [2] **Chen, S. H.**, *Ranking generalized fuzzy number with graded mean integration*, in Proc. 8th Int. Fuzzy Sist. Taiwan, Republic of China, 1999, pp.899-902.
- [3] **Chen, S. M.**, *New methods for subjective mental workload assessment and fuzzy risk analysis*, Cybern Sist. vol 27, n°. 25 pp. 449-472 (1996).
- [4] **Chen, Shi Jay and Chen, Shyi**, *Fuzzy Risk Analysis based on Similarity Measures of Generalized Fuzzy Numbers*, IEEE Trans. Fuzzy Systems 11, pp.45-56, 2003.
- [5] **Dubois, D. and Prade, H.** , *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science, volume 9, pp 613-626, June 1978.
- [6] **Kaufmann, A. and Gupta, M. M** , *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, New York, 1998.
- [7] **Klir, George J. And Bo Yuan**, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic theory and Applications*, Prentice Hall. 1.995.
- [8] **Hsieh, C.H. and Chen, S.H.**, *Similarity of generalized fuzzy numbers with graded mean integration representation*, Fuzzy Sist. Association World Congr., Taiwan, Republic of China, 1999.
- [9] **Lee, H. S.**, *An Optimal aggregation method for fuzzy opinions of group decision*, Proc. 1999 IEEE Int. Conf. Systems, Man, Cybernetics, vol 3,

1999.

[10] **Pedrickz, W.**, *Fuzzy control and Fuzzy Systems*, Wiley and Sons, 1999.

[11] **Sridevi, B. and Nadarajan, R.**, *Fuzzy Similarity Measure for Generalized Fuzzy Numbers*, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 2, No. 2, June 2009.

[12] **Wang, L.**, *A course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall, 1997.

[13] **Zadeh, L.**, *Fuzzy Sets* . Information and Control, pp. 338-353, 1965.

[14] **Zimmermann, H.J.**, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. third Edition. Klumer Academic Publishers, 1996.