UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Teorema de Hille-Yosida"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Oramys Prieto

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MCs. Mireya Bracamonte.

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2010

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"TEOREMA DE HILLE-YOSIDA"

Presentado por el ciudadano BR. ORAMYS PRIETO titular de la Cédula de Identidad Nº 16.868.060. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.
Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.
En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ______________________ de ___________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A mis Padres: Pedro y Arcenia.

Agradecimientos

Gracias, al Dios Todopoderoso, **Jehová**, aquel que me ha guiado durante toda mi vida, aquel que me permite abrir los ojos y respirar día a día. Ese que me inspira, el Matemático por excelencia, sin duda, sin ti no habría llegado hasta este momento.

A mi padres, **Pedro** y **Arcenia**, quienes con su cariño y disciplina me educaron, para ser un hombre de principios, a ellos les debo lo que hoy por soy, y a ellos les dedico este logro. ¡Gracias Papá! ¡Gracias Mamá!

A mis hermanos, **Ibeth** y **Pedro Luis**, gracias por siempre estar ahí presentes, por siempre confiar en mí y nunca dudar que lo lograría.

A mis familiares, a mi abuela **Pulia**, quien de manera silenciosa siempre me ha apoyado, a mi tíos José Andueza, Junior, Enrique, Yovanny, Marina. Siempre recordaré lo que han hecho por mí.

A **Gabriela**, con quien he compartido gratos momentos, quien con sus consejos me ha ayudado en la parte final de mi carrera, es un privilegio estar a tu lado, gracias por estar conmigo y compartir mi felicidad.

A mi gran amiga **Luisa Fernanda**, que me acompañó durante casi toda mi carrera, compartiendo mis mejores momentos, y lloró conmigo en mis tragos amargos. Gracias amiga por haber estado a mi lado, eres una bendición y estoy muy orgulloso de ser tu amigo.

A mi amigo y compañero **Freddy**, por los consejos, por estar siempre ahí dispuesto para ayudar, de verdad amigo, éste logro lo comparto contigo, y ¡ánimo!, pronto serás tú quien escribirá lineas cómo estas.

A **Marielen**, gracias por siempre escucharme y soportarme. ¡Que Dios te cuide mi Oriental!

A mis **niños**, mis amores, quienes me han dado alegría y un cariño especial: Daniel Alejandro, Gabriel Alejandro, Jorge Fernando, Eber Sahe, Josehp Isaac, Joshua Samuel. ¡Los quiero mucho mis niños!

A los **profesores** que contribuyeron en mi formación profesional, enseñándome todas las cosas que necesitaba. A las Profesoras: Ligia y Luisa de bachillerato. A los Profesores: Eibar, José Luis, Mario, Gladys, Ebner, Jurancy, Miguel, Rómulo Bervins, Maria Luisa, Mireya, Luz Rodríguez, Luz Elimar. A todos, ¡Gracias por compartir sus conocimientos!

A mis **amigos** que siempre me han acompañado en mis victorias y mis fracasos: Liliana, Belkis, Sarahí, Maria F. Audo, Joel, Gunther, Carlos Daniel, Jenifer, José Ángel, Laifrank, Karla. Es un placer ser su amigo.

Y en especial les doy las gracias a dos personas que siempre me ayudaron y me apoyaron durante toda mi carrera, y podría decir que sin ellas me habría costado mucho más. ¡Gracias **Andreína**!¡Gracias **Nina**! Por todo lo que hicieron por mí, que Dios las bendiga en todas sus metas en la vida.

Y a todos los que de una manera u otra contribuyeron a este logro y ser la persona quien hoy soy, no tengo palabras para decirles lo que siento, solo les puedo decir: **¡Muchísimas Gracias!**

Resumen

En el presente trabajo se presenta la demostración del Teorema de Hille-Yosida el cual caracteriza los generadores infinitesimales de un semigrupo uniparamétrico de operadores lineales y acotados en un espacio de Banach. Este teorema tiene un gran interés

teórico, pero además, nos brinda la valiosa oportunidad de estudiar una clase tan importante de operadores como son los Semigrupos los cuales son de gran utilidad en el estudio de muchas ecuaciones diferenciales parciales.

El mismo consta de cuatro capítulos:

Capítulo I En el se presentan algunos conceptos y resultados auxiliares que permiten establecer las condiciones mínimas necesarias para una buena comprensión del trabajo.

Capítulo II Se presentan los semigrupos uniformemente continuos, sus propiedades generales y el generador de éstos.

Capítulo III Se presentan los C_0 semigrupos o semigrupos fuertemente continuos.

Capítulo IV Finaliza con la demostración del Teorema de Hille-Yosida.

Índice

INTRODUCCION

Con el interés volcado en brindar herramientas accesibles que permitan mostrar, a los estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura en ciencias matemáticas así como de maestría, temas relacionados con la teoría de operadores, el presente trabajo tiene como idea fundamental demostrar el Teorema de Hille-Yosida.

La teoría de semigrupos de operadores lineales sobre un espacio de Banach comenzó en la primera mitad de este siglo XIX, adquirió su esencia en 1948 cuando surge el teorema de Hille-Yosida, y alcanzó su cúspide con la primera edición de ”Semigroups and Functional Analysis” en 1957 de E. Hille R.S. Phillips. En los años 70 y 80 gracias a los esfuerzos de diferentes escuelas, la teoría alcanza un cierto grado de perfección. Hoy en día, la teoría se caracteriza por múltiples aplicaciones en áreas como ecuaciones diferenciales parciales o de procesos estocásticos. La teoría de Semigrupos se han convertido en una herramientas fundamental para ecuaciones diferenciales, en mecánica cuántica o en teoría de control.

En Espacios de Banach, la teoría para semigrupos fuertemente continuos, es llamada Teoría de Hille-Yosida, y todavía hoy en día se trata de generalizar esta teoría a nivel de espacios localmente convexo.

Por lo cual es una excelente oportunidad para introducir al lector interesado en esta teoría, esperando con ello proporcionar una sólida base para sus estudios posteriores.

Comenzaremos introduciendo algunos conceptos y resultados auxiliares que nos permiten establecer las condiciones mínimas necesarias para una buena comprensión del trabajo, entre lo cual consideramos indispensable un breve recuento sobre la teoría de operadores lineales acotados, sus propiedades y recordar el problema de Cauchy asoci-

ado a un operador acotado, en miras de abrir la ventana del tema a las aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales, para los interesados.
Luego, en el capitulo II, se presentan los semigrupos uniformemente continuos, sus propiedades generales y el generador de éstos. Para sentar las bases para la clase mas general de semigrupos, llamados C_0 semigrupos o semigrupos fuertemente continuos que si bien es cierto son muy útiles en el trabajo, el capitulo se hace algo menos largo porque muchas de las propiedades que satisfacen ya han sido consideradas en el capitulo anterior. Y finalmente en el último capitulo IV se dedica al resultado principal del trabajo: el Teorema de Hille-Yosida.

Aprovecho la oportunidad para dar mi agradecimiento a la Profesora Mireya Bracamonte, por ayudarme (y soportarme y tenerme paciencia) durante el último año de mi carrera, con su conocimiento y consejos, logré desarrollar este trabajo, sin usted no habría podido. Y expreso mi gratitud hacia el Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, por ser la casa de estudios que nos acogió.

Capítulo 1

Conceptos básicos en la teoría de operadores lineales acotados

§1.1. Propiedades generales

Pretender incluir en este capítulo todo lo relacionado con la teoría de operadores lineales acotados sería una verdadera fantasía, por esta razón se incluyen aquellos tópicos que nos son indispensables para el desarrollo de este trabajo y que haría llevadera una lectura a aquellas novatas en el tema y muestren interés en el mismo.

En lo sucesivo X, Y denotarán espacios de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$. Denotaremos indistintamente por $\|\cdot\|$ la norma en X y en Y cuando no genere confusión.

Definición 1.1 (Operador Lineal). *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y $T : V \to W$ una función. Diremos que T es* **un operador lineal** *si para cada par $x, y \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$*

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *2)* $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

En el caso especial en que Y sea un campo de escalares, se dice que T es un **funcional lineal**.

Definición 1.2. *Si $T : X \to Y$ y $U : Y \to Z$ son dos operadores lineales y X, Y, Z son espacios lineales sobre un mismo campo de escalares Θ, el producto UT, definido por*

$$(UT)(x) := U(T(x)),$$

es un operador lineal de X en Z.

Observación 1.1. *Si T es un operador lineal de X en X, decimos que T es un operador lineal en X.*

Diremos que un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es ***acotado*** si

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y < \infty.$$

En cuyo caso, se define la norma de T por:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y. \tag{1.1}$$

Al conjunto de operadores acotados de X en Y lo denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$.
El espacio lineal de todos los operadores continuos de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y con la norma definida en (1.1), es un espacio de Banach que usualmente es denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Y en le caso en que $X = Y$ en lugar de $\mathcal{L}(X, X)$ se escribe $\mathcal{L}(X)$.
Mientras que el conjunto de todos los funcionales lineales sobre un espacio de Banach X, denotado por X^* y llamado **espacio dual** de X.

Si denotamos por B_X la **bola unitaria** en X, definida por

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

definimos la **norma de un funcional** $x^* \in X^*$ por

$$\|x^*\| := \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}.$$

El conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ de todos los operadores lineales de un espacio normado X en un espacio normado Y es un espacio vectorial respecto a las definiciones naturales de suma y multiplicación por un escalar

$$(S + T)(x) := S(x) + T(x), \qquad (\lambda T)(x) := \lambda(T(x)).$$

Ver [3].

Proposición 1.1. *El conjunto $\mathcal{B}(X,Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración. Si definimos el operador $\mathcal{O} : X \to Y$ por $\mathcal{O}(x) = 0_Y$ para todo $x \in X$, es claro que $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(X,Y)$, dado que

$$\sup\{\|\mathcal{O}(x)\| : x \in B_X\} = \{\|0_Y\| : x \in B_X\} = 0,$$

esto es $\mathcal{B}(X,Y) \neq \emptyset$.
Además, para $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$, $x \in X$ con $\|x\| = 1$,

$$\|(A+B)(x)\| \ = \ \|A(x) + B(x)\| \leq \|A(x)\| + \|B(x)\| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$

Entonces, dado que los números que se encuentran a la derecha de esta desigualdad son finitos, podemos garantizar que

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|(A+B)(x)\| \leq \|A\| + \|B\| < \infty,$$

con lo cual se confirmar que $A + B$ es acotado y

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$

Finalmente, si A y x son como antes y α es un escalar,

$$\|(\alpha A)(x)\| = \|\alpha A(x)\| = |\alpha|\,\|A(x)\| \leq |\alpha|\,\|A\|\,.$$

Como ante se evidencia que,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|(\alpha A)(x)\| \leq |\alpha|\,\|A\| < \infty,$$

que garantiza que αA es acotado y $\|\alpha A\| \leq |\alpha|\,\|A\|$. Se concluye que $\mathcal{B}(X,Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$. $\blacksquare$

Proposición 1.2. *Para cada $x \in X$ y $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ se satisface la desigualdad*

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\,\|x\|\,.$$

Demostración. Si $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$ y se cumple la igualdad.
En caso contrario, consideramos el vector normalizado $\frac{x}{\|x\|}$, para el cual tendremos que

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\|=1}} \|A(y)\| = \|A\|\,.$$

De lo cual obtenemos la desigualdad deseada

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\,\|x\|\,.$$

■

Proposición 1.3. *Si $D \subseteq X$ es denso en X y $A \in \mathcal{B}(D,Y)$ entonces A se puede extender a X; es decir, existe $\overline{A} \in \mathcal{B}(X,Y)$ con $\overline{A}(x) = A(x)$, para todo $x \in D$ y $\|\overline{A}\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(D,Y)}$.*

Demostración. Sea $x \in X$, por la densidad de D en X, podemos elegir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tal que

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

La hipótesis de que A es acotado, nos permite fijar,para todo $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad

$$\|A(x_n)\|_Y \leq \|A\|\,\|x_n\|_X$$

entonces, cuando hacemos que $n \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|A(x_n)\|_Y \leq \lim_{n\to\infty} \|A\|\,\|x_n\|_X \leq \lim_{n\to\infty} \|A\|\,[\|x_n - x\|_X + \|x\|_X].$$

Lo cual nos garantiza que $\lim\limits_{n\to\infty} A(x_n)$ existe, dado que el de la derecha es finito.
Definamos

$$\overline{A}(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n). \tag{1.2}$$

Si $y \in X$, y supongamos que existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tales que

$$\|x_n - y\| \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0 \qquad \text{y} \qquad \|y_n - y\| \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

tendremos que

$$\begin{aligned}\|A(x_n) - A(y_n)\| &= \|A(x_n - y_n)\| \\ &\leq \|A\|\,\|x_n - y_n\| \\ &= \|A\|\,\|x_n - y + y - y_n\| \\ &\leq \|A\|\,(\|x_n - y\| + \|y - y_n\|).\end{aligned}$$

El lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$, de lo cual avala la buena definición de $\overline{A}$ dado en (1.2).

Por otra parte, si $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ elegimos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D de forma que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

y tendremos

$$\begin{aligned}\overline{A}(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} A(\alpha x_n + y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} [\alpha A(x_n) + A(y_n)] \\ &= \alpha\overline{A}(x) + \overline{A}(y).\end{aligned}$$

Lo cual garantiza que $\overline{A}$ es un operador lineal.

Además, si $x \in D$ y para cualquier sucesión que converja a x se obtiene el mismo resultado podemos elegir $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso

$$\overline{A}(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lim_{n\to\infty} A(x) = A(x),$$

asegura que $\overline{A}$ es una extensión de A.

Para demostrar que $\overline{A}$ es acotado procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\substack{x\in D\\ \|x\|=1}} \|A(x)\| \\ &= \sup_{\substack{x\in D\\ \|x\|=1}} \|\overline{A}(x)\| \\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|\overline{A}(x)\| = \|\overline{A}\| \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Por otra parte, si $\|x\| = 1$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ es una sucesión con $\|x_n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\overline{A}(x)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} A(x_n)\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|A(x_n)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|A\| \, \|x_n\| \\
&= \|A\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \\
&\leq \|A\| . \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Así, de (1.3) y (1.4) se obtiene que $\overline{A}$ es acotado y $\|\overline{A}\| = \|A\|$. ■

Proposición 1.4. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ entonces:*

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|$$

Demostración. Ver [2].

Proposición 1.5. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *A es acotado.*

(ii) *A es continuo en todo X.*

(iii) *A es continuo en algún $x_o \in X$.*

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que A es acotado y fijemos $x \in X$ y $\epsilon > 0$.

Note que para cada $y \in X$ disfrutamos de la siguiente desigualdad

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \, \|x - y\| .$$

Si definimos $\delta = \frac{\epsilon}{\|A\|}$ y suponemos que $0 < \|x - y\| < \delta$ obtendremos que

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &\leq \|A\| \, \|x - y\| \\ &< \|A\| \, \frac{\epsilon}{\|A\|} = \epsilon \end{aligned}$$

Esto significa que A es continuo en x, y dado que lo anterior es válido para cualquier $x \in X$ se tiene que A es continuo en todo el espacio X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si A es continuo en todo X, es claro que es continuo en $x_0 \in X$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que A es continuo para algún $x_0 \in X$, lo cual nos permite

elegir $\delta > 0$ de manera que para cada $y \in B(x_0, \delta)$ se tiene que

$$\|A(x_0) - A(y)\| < 1. \tag{1.5}$$

Si $x \in B(0,1)$ tendremos que

$$\|(x_0 + \delta x) - x_0\| = \|\delta x\| = \delta \|x\| \leq \delta,$$

esto significa que $(x_0 + \delta x) \in B(x_0, \delta)$
Luego, por (1.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \|A(x_0) - A(x_0 + \delta x)\| &< 1 \\ \|A(x_0) - A(x_0) - \delta A(x))\| &< 1 \\ \delta \, \|A(x)\| &< 1 \\ \|A(x)\| &< \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\|A(x)\| < \frac{1}{\delta}, \quad \text{para todo} \quad x \in B(0,1)$$

Por tanto, A es acotado y $\|A\| \leq \dfrac{1}{\delta}$. ■

Proposición 1.6. *Si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Ver [4], [5].

Definición 1.3. *Sea X un espacio topológico y $\Phi = \{\phi_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Dado un punto $x \in X$, es natural decir que la familia Φ está acotada en el punto x cuando el conjunto de números reales $\{\phi_i(x) : i \in I\}$ esté acotado, es decir,*

$$\sup\{|\phi_i(x)| : i \in I\} < \infty.$$

Si esto ocurre para cada x de un cierto conjunto $G \subseteq X$, decimos que la familia Φ está ***puntualmente acotada****.*
Naturalmente hay un máximo conjunto en el que esto ocurre, concretamente el conjunto

$$A := \{x \in X : \sup\{|\phi_i(x)| : i \in I\} < \infty\}. \tag{1.6}$$

Para cada $x \in A$ tenemos una constante $M_x > 0$ tal que $|\phi_i(x)| \leq M_x$ para todo $i \in I$, y es lógico preguntarse hasta qué punto podemos conseguir que la constante M_x que sea independiente de x en algún subconjunto (lo más grande posible) de A.
Más concretamente, decimos que la familia Φ está **uniformemente acotada** en un conjunto $G \subseteq X$ cuando el conjunto de números reales $\{\phi_i(x) : i \in I, x \in X\}$ esté acotado:

$$\sup\{|\phi_i(x)| : i \in I, x \in G\} < \infty.$$

Es obvio que $G \subseteq A$, es decir, que la acotación uniform de un conjunto implica obviamente la acotación puntual, pero nos estamos preguntado por la implicación recíproca.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto de puntos de X en los que la familia Φ está acotada para todo n, esto es:

$$F_n := \{x \in X : \sup\{|\phi_i(x)| : i \in I\} \leq n\} = \bigcap_{i\in I}\{x \in X : |\phi_i(x)| \leq n\}.$$

Obsérvese que F_n es un subconjunto cerrado de X, y es evidentemente que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Por lo tanto, si A es de segunda categoría en X, deducimos que algún F_n tiene interior no vacío, con lo que la familia Φ estará uniformemente acotada en un conjunto no vacío de X. Hemos entonces demostrado lo siguiente

Proposición 1.7. *Sean X es un espacio topológico y $\Phi = \{\phi_i : i \in I\}$ una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Si Φ está puntualmente acotada en un conjunto de segunda categoría en X, entonces Φ está uniformemente acotada en un subconjunto abierto no vacío de X.*

En general, comprobar la hipótesis del enunciado anterior, equivalentemente, comprobar que el conjunto A en (1.6) es de segunda categoría en X no es fácil, pero tendremos la ayuda del Lema de Baire.
El Teorema de Banach-Steinhaus, denominado también Principio de la acotación uniforme, nos dice que la acotación puntual de una familia de aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados es equivalente a su acotación uniforme, es decir, a su acotación en norma. Se ha de exigir que el espacio de salida sea completo. De hecho, podemos conseguir algo más, a saber, es suficiente que no sea demasiado pequeño el conjunto de puntos donde se da la acotación puntual
Presentamos ahora el Teorema de Baire, dado que al interesarnos las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados, donde la completitud de los mismos juega un papel crucial algunos de los resultados se derivan de forma más o menos directa del Teorema de Baire, el cual nos da una propiedad importante de los espacios métricos completos, en particular de los espacios de Banach, objeto de nuestro estudio.

Definición 1.4. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado:*

Raro: *o denso en ninguna parte cuando el interior de su clausura es vacía, simbólicamente, $\overline{A}^o = \emptyset$.*

De primera categoría: *cuando es unión numerable de subconjuntos raros.*

De segunda categoría: *cuando no es de primera categoría.*

Residual: *cuando $X - A$ es de primera categoría.*

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{N}$ es raro, $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, $(0,1)$ es de segunda categoría pero no residual, mientras que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es residual y de segunda categoría.

Observación 1.2. *En un espacio topológico general, todo subconjunto de un subconjunto de primera categoría es también de primera categoría, y la unión numerable de subconjuntos de primera categoría es de primera categoría.*

Teorema 1.1. *Sea X un espacio de Banach. Entonces la intersección numerable de abiertos densos es densa en X.*

Demostración. Denotemos por $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n es un subconjunto abierto y denso de X. Fijemos un subconjunto abierto G no vacío de X. Necesitamos demostrar que $A \cap G \neq \emptyset$.

Dado que A_1 es denso, se tiene que $A_1 \cap G$ es abierto y no vacío. En consecuencia, existe una bola cerrado $\overline{B}(x_1, r_1)$ de X con $r_1 < 1$ tal que

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq A_1 \cap G.$$

Ahora bien, dado que A_2 también es denso, resulta que $A_2 \cap B(x_1, r_1)$ es un abierto no vacío, y al igual que antes, existen x_2, $0 < r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subseteq A_2 \cap B(x_1, r_1).$$

Por un proceso inductivo, construimos bolas $B(x_n, r_n)$ de manera que $0 < r_n < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ que verifiquen

$$\overline{B}(x_n, r_n) \subseteq A_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq A_n \cap G, (n \geq 2).$$

Veamos que la sucesión de centros $(x_n)_n$ forman una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\epsilon > 0$, y fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > 2/\epsilon$. Si $p, q \geq n_0$ se tiene que

$$x_p, x_q \in \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}),$$

luego,

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \|x_p - x_{n_0} + x_{n_0} - x_q\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x_q\| \\ &\leq r_{n_0} + r_{n_0} < \epsilon 7 n_0 < \epsilon. \end{aligned}$$

Al ser X un espacio de Banach, es completo, entonces existe $x \in X$ de tal forma que $x_n \to x$.
Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\{x_k : k \geq n\} \subseteq \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}).$$

Pero x está en la clausura de $\{x_k : k \geq n\}$, en consecuencia $x \in \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0})$, y dado que se cumple para todo n se sigue que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}) \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap G.$$

$\blacksquare$

Corolario 1.1 (Lema de Categoría de Baire). *Si X es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto abierto no vacío de X es de segunda categoría en X. En particular X es de segunda categoría.*

Teorema 1.2 (Teorema de Banach Steinhaus). *Suponga que X e Y son espacios normados y que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Consideremos las siguientes propiedades:*

(a) La familia $\mathcal{A}$ es puntualmente acotada, es decir,

$$\sup_{\Lambda \in \mathcal{A}} \|\Lambda(x)\| < +\infty \quad \textit{para cada} \quad x \in X.$$

(b) El conjunto $B := \{x \in X : \sup_{\Lambda \in \mathcal{A}} \|\Lambda(x)\| < +\infty\}$ es de segunda categoría.

(c) La familia $\mathcal{A}$ está uniformemente acotada, esto es,

$$\sup_{\Lambda \in \mathcal{A}} \|\Lambda\| < +\infty.$$

Entonces (b) implica (c), (c) implica (a). Si además, X es un espacio de Banach, entonces las tres propiedades son equivalentes.

Demostración. De la definición de norma de un elemento de $L(X, Y)$ se deduce la implicación (c)$\Longrightarrow$(a). Demostraremos que (b) implica (c).
Por reducción al absurdo, supongamos que B es la segunda categoría pero

$$\sup_{\Lambda \in \mathcal{A}} \|\Lambda\| < +\infty.$$

Consideramos los subconjuntos de X definidos por

$$F(\Lambda, n) := \{x \in X : |\Lambda(x)| \leq n\} \qquad (\Lambda \in \mathcal{A},\, n \in \mathbb{N}).$$

Note que $F(\Lambda, n)$ es la preimagen por Λ del intervalo $[-n, n]$, luego cada $F(\Lambda, n)$ es cerrado y así, cada conjunto

$$F_n := \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{A}} F(\Lambda, n)$$

es cerrado en X.

Ahora bien, se observa sin dificultad que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Por lo tanto, como B es de primera categoría, existe N tal que el interior de F_N es no vacío. En consecuencia, existe alguna bola cerrada $\overline{B}(z, \rho) \subseteq F_N$. De esto se deduce que

$$\|\Lambda(z + x)\| \leq N \quad \text{si} \quad \|x\| \leq \rho$$

para todo $\Lambda \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto

$$\|\Lambda(x)\| = \|\Lambda(z + x) - \Lambda(z)\| \leq 2N \quad \text{para todo} \quad x \in B(0, \rho)$$

y todo $\Lambda \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto $\|\Lambda\| \leq 2N/\rho$ para todo $\Lambda \in \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción.

Para terminar, si X es un espacio de Banach, entonces el lema (1.1) nos garantiza que X es de segunda categoría. Esto demuestra que (a)$\Longrightarrow$(b). Por tanto (a), (b) y (c) son equivalentes en este caso. ■

Una útil consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus es que, cuando las aplicaciones son lineales, la simple convergencia puntual implica la continuidad de la función límite. Establecemos este hecho en el siguiente corolario.

Corolario 1.2. *Supongamos que X es un espacio de Banach, que Y es un espacio normado y que $\Lambda_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de aplicaciones lineales y continuas. Si para cada $x \in X$ la sucesión $\{\Lambda_n(x)\}_{n \geq 1}$ es convergente, digamos a $\Lambda(x) \in Y$, entonces la aplicación $\Lambda : X \to Y$ es lineal y continua.*

Demostración. Debido a la convergencia de $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 1}$ en cada $x \in X$, se tiene que la sucesión $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 1}$ es acotada. Por el Teorema (1.2) existe una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que $\|\Lambda_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De otra forma, $\|\Lambda_n(x)\| \leq M$ para todo x con $\|x\| = 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo que $n \to \infty$, obtenemos $\|\Lambda_n(x)\| \leq M$ para todo x con $\|x\| = 1$, así que Λ es continua. La linealidad de Λ resulta de la convergencia puntual. ■

Proposición 1.8. *Si $A \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $B \in \mathcal{B}(X, Y)$ entonces $AB \in \mathcal{B}(X, Z)$ y $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.*

Demostración.
La demostración se sigue de inmediato de la composición usual de funciones, y las propiedades de la norma que hemos definido, se deja al lector. Ver [4]. ■

§1.2. Convergencias en $\mathcal{B}(X)$.

A continuación, veremos las nociones de convergencia en $\mathcal{B}(X)$, que son la convergencia uniforme y la convergencia fuerte, además, veremos la relación entre ellas.

Definición 1.5. *Diremos que $(A_n) \subseteq \mathcal{B}(X)$ **converge uniformemente** o **converge en norma** a $A \in \mathcal{B}(X)$ si y sólo si $\|A_n - A\| \to 0, n \to \infty$. Esto lo denotamos por $A_n \to A$.*

Definición 1.6. *Diremos que $(A_n) \subseteq \mathcal{B}(X)$ **converge fuertemente** a $A \in \mathcal{B}(X)$ si y sólo si $\|A_n x - Ax\| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X$. Esta convergencia lo denotaremos por $A_n \xrightarrow{s} A$.*

Proposición 1.9. *La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.*

Demostración. Sean $(A_n), A \subseteq \mathcal{B}(X)$ $0 \neq x \in X$ y supongamos que $A_n \to A$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\|A_n - A\| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq N.$$

Luego,

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| < \frac{\epsilon}{\|x\|} = \epsilon.$$

Con lo cual queda demostrado que $\|A_n x - Ax\| \to 0$ para x, y como el x elegido es arbitrario, se tiene que $A_n \overset{s}{\longrightarrow} A$, dado que el resultado es trivial en el caso en que $x = 0$. ∎

El recíproco, en general, no es cierto. Para ello, veamos el siguiente ejemplo.

Sea

$$X = \ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} / \sum_{n \geq 0} |f(n)| < \infty \right\}$$

dotado de la norma $\|f\| = \sum_{n \geq 0} |f(n)|$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el operador $A_n : \ell^1 \to \ell^1$ dado por

$$A_n f(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}$$

Comencemos por ver que $A_n \in \mathcal{B}(X)$, para lo cual fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideramos $f, g \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $j \in \mathbb{N}$.

$$A_n((\alpha f + g)(j)) = \begin{cases} (\alpha f + g)(j) & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}.$$

Caso 1 Supongamos que $j = n$, así

$$A_n((\alpha f + g)(j)) = (\alpha f + g)(j) = (\alpha f)(j) + g(j) = \alpha f(j) + g(j) = \alpha A_n(f(j)) + A_n(g(j)).$$

Caso 2 Supongamos que $j \neq n$

$$A_n((\alpha f + g)(j)) = 0 = 0 + 0 = \alpha 0 + 0 = \alpha A_n(f(j)) + A_n(g(j)).$$

De los casos 1 y 2, tenemos que:

$$A_n(\alpha f + g) = \alpha A_n(f) + A_n(g)$$

Esto es, $A_n \in \mathcal{L}(X)$

Además,

$$\|A_n f\| = \sum_{k\geq 0} |A_n f(k)| = |f(n)| < \infty.$$

Por lo que para $f \in X$ con $\|f\| = 1$, tenemos que $\|A_n\| < \infty$.
Esto significa que $A_n \in \mathcal{B}(X)$.
Además, $A_n \xrightarrow{s} 0$ para todo $f \in X$,

$$\|A_n f - \mathbf{0} f\| = \|A_n f\| = |f(n)|,$$

y dado que $f \in \ell^1(\mathbb{N})$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| = 0.$$

Así,

$$\|A_n f - \mathbf{0} f\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \forall f \in X.$$

Esto es, $A_n \overset{s}{\to} 0$.
Veamos que la convergencia no es uniforme, para lo cual definamos

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Es claro que $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, además,

$$\sum_{k\geq 0} |\delta_n(k)| = |1| = 1 < \infty$$

De donde concluimos que $\delta_n \in \ell^1(\mathbb{N})$ y $\|\delta_n(k)\| = 1$.
De esta manera, tenemos que:

$$\|A_n\| \geq \|A_n\delta_n\| = \sum_{k\geq 0}|A_n\delta_n(k)| = |\delta_n(n)| = 1$$

Esto es,

$$\|A_n - \mathbf{0}\| \geq 1.$$

En consecuencia,

$$\|A_n - \mathbf{0}\| \not\to 0, n \to \infty.$$

§1.3. Series de potencias

En lo sucesivo X es un espacio de Banach complejo. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en un entorno del origen con radio R para su representación holomorfa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1.7}$$

Sea B la bola abierta en $\mathcal{B}(X)$ centrada en el origen y de radio R ($B = \mathcal{B}(X)$ si $R = \infty$). Para $A \in B$ definimos

$$f_n(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.3. *Sea la serie de potencia*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

en la variable compleja z tiene radio de convergencia $R > 0$ ($R = \infty$). Sea X un espacio de Banach complejo y sea $L \in \mathcal{B}(X)$ con $\|L\| < R$. Entonces la serie de potencia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L^n$ converge a $f(L) \in \mathcal{B}(X)$ con respecto a la norma del operador.

Demostración. Para $N = 0, 1, 2, \cdots$ sea $L_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k L^k$ ($\in \mathcal{B}(X)$) y

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|\|L\|^k.$$

Por definición del radio de convergencia $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k||z|^k$ converge si $|z| < R$. En particular para $\|L\| < R$, la sucesión $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ de sumas parciales es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_n - S_m| < \epsilon \quad \text{para} \quad n, m \geq N$$

$$\begin{aligned}
\|L_n - L_m\| &= \|\sum_{k=0}^{n} a_k L^k - \sum_{k=0}^{m} a_k L^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|L^k\| = S_n - S_m < \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto significa que $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y este operador es denotado por $f(L)$. ■

Ejemplo 1.1. *Como ejemplos podemos definir*

- $e^{wA} = exp(wA) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n A^n$ con $A \in \mathcal{B}(X)$ y $w \in \mathbb{C}$

- $Log(I + A) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} A^n$, con $\|A\| < 1$

- $\frac{I}{\lambda I - A} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$, con $\|A\| < \|\lambda\|$

Lema 1.1. *Para todo operador lineal acotado a se cumple que*

$$\|A^n\| \, \|A\|^n \, .$$

Demostración. Sea $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A^n(x) = \underbrace{(A\cdot \ldots \cdot A)}_{n-\text{veces}}(x) \Rightarrow \|A^n(x)\| &= \left\| \underbrace{(A\cdot \ldots \cdot A)}_{n-\text{veces}}(x) \right\| \\
&= \left\| A\,\underbrace{(A\cdot \ldots \cdot A)}_{(n-1)-\text{veces}}(x) \right\| \\
&\leq \|A\| \left\| \underbrace{(A\cdot \ldots \cdot A)}_{(n-1)-\text{veces}}(x) \right\| \\
\vdots\ & \vdots \qquad \text{(n-1)-veces} \\
&\leq \|A\| \underbrace{\|A\| \ldots \|A\|}_{n-1\text{veces}} \\
&= \|A\|^n .
\end{aligned}
$$

Dado que esto se cumple para todo x de norma uno, significa que,

$$
\|A^n(x)\| \leq \|A\|^n \Rightarrow \|A^n\| \leq \|A\|^n . \tag{1.8}
$$

■

Proposición 1.10. *Si, para todo n, se tiene que $a_n \geq 0$ entonces para f definida en (1.7) se cumple*

$$
\|f(A)\| \leq f(\|A\|).
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\|f(A)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n A^n\| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \|A^n\| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \|A^n\|.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Así, del lema (1.1) y (1.8) se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|A\|^n = f(\|A\|).$$

Por tanto, $\|f(A)\| \leq f(\|A\|)$. ■

Proposición 1.11. *Para $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $AB = BA$ entonces $e^A e^B = e^{A+B}$*

Demostración.

Supongamos que $AB = BA$.

Así,

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} A^k B^{n-k}}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\ &= e^{A+B}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.2. *Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Veamos que

i. $exp(tA) = e^{ta} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(bt) \\ \sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}$

ii. $exp(itA) = e^{ta} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & i\sinh(bt) \\ i\sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}$

Demostración.

Estudiemos la matriz A.

Aplicando las herramientas del álgebra de matrices, tenemos que tiene dos valores propios, $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = a-b$, los cuales tienen multiplicidad algebraica igual a 1. Además, es fácil demostrar que ambos valores propios tienen multiplicidad geométrica igual a 1. Por lo que concluimos que la matriz A es diagonalizable.

Luego, podemos asociar a A, una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A, esto es:

$D = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

Hallemos las bases de los subespacios propios generados por los valores propios, considerando $b \neq 0$.

Para ello, busquemos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que:

$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Para $\lambda = \lambda_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo que $V(\lambda_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -x+y=0, x-y=0\} = \langle (1,1) \rangle$

Así, $V_{\lambda_1} = \{(1,1)\}$ es una base para $V(\lambda_1)$.

Siguiendo un razonamiento análogo, conseguimos que $V_{\lambda_2} = \{(-1,1)\}$ es una base para $V(\lambda_2)$.

Luego, la matriz de cambio de base, asociada a las bases, cuando $b \neq 0$ viene dada por:

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

La cual es invertible y tiene como inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Por lo que cuando $b \neq 0$, podemos escribir $A = PDP^{-1}$ y se cumple además que $A^m = PD^mP^{-1}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Teniendo presente lo anterior,

i. Consideremos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow a + b = a - b \Rightarrow b = 0$.

Así,

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

es una matriz diagonal, y $A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & a^m \end{pmatrix}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} t^k a^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} t^k a^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ta)^k & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ta)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{ta} \end{pmatrix} \\ &= e^{ta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cosh(0) & \sinh(0) \\ \sinh(0) & \cosh(0) \end{pmatrix} \\ &= e^{ta} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(bt) \\ \sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow b \neq 0$. Así se cumple que: $A = PDP^{-1}$ por la parte previa.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (PDP^{-1})^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k PD^kP^{-1} \\
&= P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k D^k P^{-1} \\
&= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!}(t(a+b))^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!}(t(a-b))^k \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t(a+b))^k & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t(a-b))^k \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{t(a+b)} & 0 \\ 0 & e^{t(a-b)} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{ta}e^{tb} & 0 \\ 0 & e^{ta}e^{-tb} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= e^{ta} \left[P \begin{pmatrix} e^{tb} & 0 \\ 0 & e^{-tb} \end{pmatrix} P^{-1} \right] \\
&= e^{ta} \left[\begin{pmatrix} e^{tb} & -e^{-tb} \\ e^{tb} & e^{-tb} \end{pmatrix} P^{-1} \right] \\
&= e^{ta} \begin{pmatrix} \frac{e^{tb}+e^{-tb}}{2} & \frac{e^{tb}-e^{-tb}}{2} \\ \frac{e^{tb}-e^{-tb}}{2} & \frac{e^{tb}+e^{-tb}}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^{ta} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(bt) \\ \sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

■

ii. Se procede de forma análoga a la parte i.

Ejemplo 1.3. *Para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, se tiene que $\|\exp(A)\| \leq e^{\|A\|}$.*

Demostración.
Dado que que $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ considerando $f(A) := \exp(A)$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|f(A)\| \leq f(\|A\|) \quad &\Rightarrow \quad \|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|) \\
&\Rightarrow \quad \|\exp(A)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n \\
&\Rightarrow \quad \|\exp(A)\| \leq e^{\|A\|}.
\end{aligned}
$$

■

§1.4. Operador acotado invertible

Definición 1.7. *Sean X, Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Se dice que A es* ***invertible*** *si existe $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $BAx = x$ y todo $y \in Y$ se cumple $ABy = y$. En ese caso, se dice que B es el* ***operador inverso*** *de A y se denota por $B = A^{-1}$.*

Afirmacion 1.1. *Si A es invertible y $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.*

Demostración.
Dado que A es invertible, tenemos que existe $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ tal que $A^{-1}Ax = x$, para todo $x \in X$ y $AA^{-1}y = y$ para cada $y \in Y$.
Por otro lado, para $\alpha \neq 0$, tenemos para todo $x \in X$

$$
\begin{aligned}
A^{-1}Ax = x \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}A\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) = x, \\
&\Rightarrow \quad A^{-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha} Ax\right) = x, \forall x \in X \\
&\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\alpha} A^{-1}\right)(\alpha A x) = x.
\end{aligned}
$$

Además, para cada $y \in Y$

$$\begin{aligned} AA^{-1}y = y, \quad &\Rightarrow \quad AA^{-1}\left(\frac{\alpha y}{\alpha}\right) = y, \\ &\Rightarrow \quad A\left(\frac{\alpha}{\alpha}A^{-1}y\right) = y, \forall y \in Y \\ &\Rightarrow \quad (\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}y\right) = y, \end{aligned}$$

Así, tenemos que αA es invertible y además, $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

■

Para finalizar esta breve sección presentamos, sin demostración, la siguiente proposición.

Proposición 1.12. *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $L \in \mathcal{B}(X)$ con $\|L\| < 1$. Entonces $(I - L)$ es invertible.*

§1.5. Problema de Cauchy asociado a un operador acotado

La situación natural en la cual aparecen los semigrupos de operadores es llamado el problema abstracto de Cauchy.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0, \\ \quad u(0) = x \end{cases}$$

donde A es un operador lineal sobre un espacio de Banach X. El problema consiste en hallar una función diferenciable u sobre $\mathbb{R}^+$ tal que el problema se satisfaga.
Si para el valor inicial $x \in X$ existe una solución única $u(\cdot, x)$, entonces se define el operador

$$T(t)(x) := u(t, x), \quad t \geq 0 \quad , x \in X,$$

que en el próximo capitulo veremos que forman un semigrupo de operadores.
Dado un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, definimos

$$\mathcal{D}(I, X) = \left\{ f : I \to X : \text{para todo } t \in I, \text{ existe} \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\}.$$

Y para $f \in \mathcal{D}(I, X)$, ponemos $\frac{d}{dt}f(t) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$. Para un intervalo I que es cerrado en alguno de sus extremos, entonces la definición es la misma si t es un punto

interior de I, mientras que si t es un punto extremo entonces consideramos sólo los límites por la izquierda o por la derecha según corresponda.
Parece natural preguntarse si $e^{tA}f_0$, será solución de:

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{d}{dt}f(t) = Af(t) \\ f \in \mathcal{D}([0,\infty), X) \\ f(0) = f_0 \end{array}\right.$$

para $A \in \mathcal{B}(X)$.
Para ello debemos demostrar que:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{e^{(t+h)A}f_0 - e^{tA}}{h} - Ae^{tA}f_0\right\| = 0.$$

Es claro que $(tA)(hA) = (hA)(tA)$, veamos que $Ae^{tA} = e^{tA}A$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{e^{(t+h)A}f_0 - e^{tA}f_0}{h} - Ae^{tA}f_0\right\| &= \left\|\frac{e^{tA+hA}f_0 - e^{tA}f_0 - hAe^{tA}f_0}{h}\right\| \\
&= \frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}e^{hA}f_0 - e^{tA}f_0 - hAe^{tA}f_0\right\| \\
&= \frac{1}{|h|}\left\|(e^{tA}e^{hA} - e^{tA} - hAe^{tA})f_0\right\| \\
&= \frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}(e^{hA} - I - hA)f_0\right\| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\left\|(e^{hA} - I - hA)f_0\right\| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\left\|(e^{hA} - I - hA)\right\|\left\|f_0\right\| \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Además,

$$e^{hA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}h^nA^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^nA^n + I + hA + \frac{h^2A^2}{2} \qquad (1.11)$$

Así, sustituyendo (1.11) en (1.10), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\left\|(e^{hA}-I-hA)\right\|\|f_0\| &= \frac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n+\frac{h^2A^2}{2}\right\| \\
&= \frac{|h|^2}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n+\frac{A^2}{2}\right\| \\
&= |h|\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n+\frac{A^2}{2}\right\| \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Teniendo presente que:

$$\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n\right\| \le \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n}A^n\right\| = \left\|e^{hA}\right\| \le e^{\|hA\|} = e^{|h|\|A\|}, \qquad (1.13)$$

podemos concluir de (4.4) y (1.13) que:

$$\begin{aligned}
|h|\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n+\frac{A^2}{2}\right\| &\le |h|\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left(\left\|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-2}A^n\right\|+\left\|\frac{A^2}{2}\right\|\right) \\
&\le |h|\left\|e^{tA}\right\|\|f_0\|\left(e^{|h|\|A\|}+\left\|\frac{A^2}{2}\right\|\right).
\end{aligned}$$

Este límite de la derecha tiende a cero cuando $h \to 0$.

Lo anterior es válido para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo cual se garantiza que $\overline{f}(t) = e^{tA}f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$ y $\overline{f}(t)$ es solución de (P, f_0).

Capítulo 2

Semigrupos uniformemente continuos

El concepto de semigrupo de operadores lineales acotados tiene sus raíces en la simple la observación de que la ecuación de Cauchy funcional $f(t+s) = f(t)f(s)$ tiene como solución no trivial continua sólo funciones de la forma e^{ta}, con $a \in \mathbb{R}$, combinada con la idea fundamental de Peano para definir la función exponencial de una matriz A por $E^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, a fin de resolver de manera explícita la ecuación vectorial diferencial lineal de primer orden $u' = Au + f$ por medio de variación de constantes de la fórmula

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

En términos generales, el concepto de semigrupo de operadores lineales acotados es una extensión muy natural de la exponencial de una matriz a la exponencial de un operador lineal acotado.
Aprovechando el análisis funcional la teoría de Semigroups lineales acotados ha surgido formidablemente entre 1930 - 1960 a través de las principales contribuciones de Stone, Hille, Yosida, Feller, Lumer, Miyadera, Phillips.
El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de semigrupo uniformemente continuos de operadores lineal acotados en un espacio de Banach y presentar algunas de sus notables propiedades.

§2.1. Semigrupo y generador infinitesimal

Definición 2.1. *Una familia* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *es un* **semigrupo uniparamétrico de operadores acotados** *o simplemente* ***semigrupo*** *si:*

i. $T(0) = I$

ii. Para todo $s, y \geq 0$ *se tiene que*

$$T(s+t) = T(s)T(t).$$

Si un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *satisface además*

iii.

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \tag{2.1}$$

diremos que es un **semigrupo uniformemente continuo**, *o SUC para abreviar.*

Observación 2.1. *Note que la parte (ii) de la definición nos asegura que la familia* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es cerrada con respecto a la composición de operadores y además forma un semigrupo el cual es conmutativo, dado que* $t \in \mathbb{R}$ *donde la suma es conmutativa; mientras que la primera parte (i) nos garantiza que dicho semigrupo tiene unidad* $T(0)$.

Proposición 2.1. *Si* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo uniformemente continuo entonces para todo* $t \geq 0$ *se cumple que*

$$\lim_{h\downarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0. \tag{2.2}$$

Esto significa que la función $t \longmapsto T(t)$ *es una función continua de* $[0, +\infty)$ *en* $\mathcal{L}(X)$.

Demostración.
Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ un SUC. Fijemos $t, h \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|T(t+h) - T(t)\| &= \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &= \|T(t)(T(h) - I)\| \\ &\leq \|T(t)\| \, \|T(h) - I\| \, . \end{aligned}$$

Si hacemos que $h \downarrow 0$, el límite de la derecha tiende a cero, dado que $\|T(t)\|$ es una constante y $\|T(h) - I\|$ tiende a cero por (2.1).
Consideremos ahora, $h < 0$, con h lo suficientemente pequeño de tal manera que $t+h > 0$ así,

$$\begin{aligned} \|T(t+h) - T(t)\| &= \|T(t+h)) - T(t+h-h)\| \\ &= \|T(t+h)) - T(t+h)T(-h)\| \\ &= \|T((t+h))(I - T(-h))\| \\ &\leq \|T(t+h))\| \, \|(I - T(-h))\| \, . \end{aligned}$$

En este caso, si $h \uparrow 0$ entonces $\| \, \|(I - T(-h))\|$ tiende a cero por (2.1) y $\|T(t+h))\|$ tiende a $\|T(t))\|$ dado que cada operador es acotado.
Por tanto, se obtiene (2.2). ■

Ejemplo 2.1. *Un primer ejemplo significativo es el ejemplo del semigrupo dado por* $t \longmapsto e^{tA}$*, donde* e^{tA} *es la matriz exponencial de* tA*. Esto es, si* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*,* $S(t) := e^{tA}$ *para cada* $t \geq 0$*, donde*

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

La matriz A puede sustituirse por un operador $A \in \mathcal{L}(X)$.
En el primer capítulo se demostró que $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, así que sólo basta demostrar las tres condiciones de SUC.

(i) Supongamos que $t = 0$, entonces

$e^{0A} = e^{(0)} = I.$

(ii) Si $s, t \geq 0$, entonces,

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA}e^{tA}.$$

(iii) Estudiemos $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{tA}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} e^{tA} &= \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lim_{t\to 0^+} t)^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n A^n \\
&= e^{0A} \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\left\| e^{tA} - I \right\| \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

De (i), (ii), (iii), $\left\{ e^{tA} \right\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ es un SUC.

Definición 2.2. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ un SUC. El* **generador infinitesimal** *de $T(t)$ es el operador $\Lambda : D(\Lambda) \to X$, definido por:*

$$
D(\Lambda) = \left\{ x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{exista} \right\},
$$

$$
\Lambda x = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} =: \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}
$$

para $x \in D(A_T)$.

Observación 2.2. *En realidad es un abuso decir que A_T es un operador pues para asegurarlo deberíamos verificar que $D(A_T)$ sea denso en X. Sin embargo, más tarde demostraremos que si $(T(t))_{t\geq 0}$ es un SUC entonces $D(A_T) = X$ y $A_T \in \mathcal{B}(X)$.*

§2.2. Integral de Riemann de un SUC

El problema de la elaboración de de un teoría abstracta en integración ha atraído a muchos autores. La integral de Riemann fue extendida por L.M. Graves en 1927; la integral de Lebesgue por T.H. Hildebrandt en el mismo año, S. Bochner en 1933, G.

Birkhoff en 1935 y 1937, Dunford en 1935 y en 1938, I. Gelfand en 1938, B.J. Pettis en 1938 y Phillips en 1940.
La integral de Riemann-Stieltjes puede extenderse a funciones vectoriales en de dos formas: cuando el integrando o cuando el integrador tienen valores vectoriales.
Sea f una función de valores vectoriales definida de $[a, b]$ en X y g una función de valores numéricos sobre el mismo intervalo.
Consideremos $0 \leq a < b < \infty$ y denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Si $P \in \mathcal{P}$ y $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, escribimos $|P_n| = \max\limits_{k=1,...,n}\{t_k - t_{k-1}\}$.

Definición 2.3. *Sea*

$$S_P(f, g) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]. \tag{2.3}$$

Entonces, si $\lim\limits_{|P| \to 0} S_P$ *existe en la topología dada, se define este límite como la integral*

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi) \tag{2.4}$$

relativa a esta topología.

Si $\{T(t); t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales entonces la aplicación $t \longmapsto T(t)$ es una función continua de $[0, +\infty)$ en $L(X)$, como lo garantiza la proposición 2.1. Entonces tiene sentido hablar de la integral entre $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$. Consideremos $0 \leq a < b < \infty$ y denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Si $P \in \mathcal{P}$ y $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, escribimos $|P_n| = \max\limits_{k=1,...,n}\{t_k - t_{k-1}\}$.
Dado un SUC $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ definimos las sumas de Riemann

$$R_{P_n}(T) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) T(t_{k-1}).$$

Y seguidamente la integral de Riemann de $T(t)$, como

$$\int_a^b T(t) dt = \lim_{|P_n| \to 0} R_{P_n}(T).$$

donde el límite se toma sobre todas las $P_n \in \mathcal{P}$. Consideremos una partición P_n como antes; obsérvese que $R_{P_n}(T)$ es un operador, en ese caso, si consideramos una sucesión de refinamientos $P_1 \subseteq P_2 \subseteq ....$, de tal forma que $|P_n| \to 0$, y obtenemos para $n > m$

$$\begin{aligned} \|R_{P_n}(T) - R_{P_m}(T)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})T(t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})T(t_{k-1}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} (t_k - t_{k-1})T(t_{k-1}) \right\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que cada $T(t)$ es un operador acotado y X es un espacio de Banach el Teorema de Banach Steinhaus (1.2) nos garantiza que $\mathcal{K} := \sup_{t \geq 0} \|T(t)\| < +\infty$, en consecuencia

$$\|R_{P_n}(T) - R_{P_m}(T)\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} (t_k - t_{k-1})T(t_{k-1}) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} (t_k - t_{k-1})K.$$

Note que, si $|P_n| \to 0$ es equivalente a que la sucesión formada por los $t_0, t_1, ..., t_n, ...$ elementos de las particiones P_n forman una sucesión de Cauchy, por lo tanto se garantiza que $(R_{P_n}(T))_n$ también forman una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X)$, y por ser un espacio de Banach se garantiza dicha sucesión converge a un operador en $\mathcal{L}(X)$.

§2.3. Propiedades de un SUC

Teorema 2.1.

(a) $\displaystyle\int_a^b T(t)(\cdot)dt \in \mathcal{B}(X)$.

(b) Si U y T son Semigrupos Uniformemente Continuos y A es acotado, entonces

$$\int_a^b [AT(t) + U(t)]dt = A\int_a^b T(t)dt + \int_a^b U(t)dt.$$

(c) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)(x)ds = x.$$

Demostración.

(a) Sean $y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b T(t)(\alpha y + z)dt &= \lim_{|P|\to 0} R_P(T)(\alpha y + z) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})T(x_{k-1})(\alpha y + z) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[\alpha T(x_{k-1})(y) + T(x_{k-1})(z)] \\
&= \alpha \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})T(x_{k-1})(y) + \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})T(x_{k-1})(z) \\
&= \alpha \lim_{|P|\to 0} R_P(T)(y) + \lim_{|P|\to 0} R_P(T)(z) \\
&= \alpha \int_a^b T(t)ydt + \int_a^b T(t)zdt.
\end{aligned}$$

Esto es $\int_a^b T(t)(x)dt \in \mathcal{L}(X)$.

Para verificar que es acotado consideremos $y \in X$ de manera que $\|y\| = 1$; entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b T(t)(y)dt \right\| &= \left\| \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})T(x_{k-1})(y) \right\| \\
&\leq \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \|(x_k - x_{k-1})T(x_{k-1})(y)\| \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| \, \|T(x_{k-1})(y)\| \\
&\leq \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| \, \|T(x_{k-1})\| \, \|y\| \\
&\leq \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} |b - a| b \, \|T\| \, \|y\| \\
&= [b - a] b \, \|T\| < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto , $\int_a^b T(t)(\cdot)dt$ es acotado y

$$\left\| \int_a^b T(t)(\cdot)dt \right\| \leq [b-a]b\,\|T\|\,.$$

(b) Sea $y \in X$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b [AT(t)+U(t)](y)dt &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[A(T(x_{k-1})) + U(x_{k-1})](y) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[A(T(x_{k-1}))(y) + U(x_{k-1})(y)] \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})A(T(x_{k-1}))(y) \\
&+ \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})U(x_{k-1})(y) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})A(T(x_{k-1}(y))) \\
&+ \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})U(x_{k-1})(y) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A((x_k - x_{k-1})T(x_{k-1}(y))) \\
&+ \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})U(x_{k-1})(y) \\
&= A \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} ((x_k - x_{k-1})T(x_{k-1}(y))) \\
&+ \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})U(x_{k-1})(y) \\
&= A \int_a^b T(t)(y)dt + \int_a^b U(t)(y)dt.
\end{aligned}$$

(c) Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$.

Dado que $\lim_{h\to 0} \|T(s) - I\| = 0$ tendremos que

$$\lim_{h\to 0} T(s)x = x,$$

entonces podemos elegir $\delta > 0$ de manera que

$$0 \leq t < \delta \quad \text{implica que} \quad \|T(t)x - x\| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Luego, si $0 < t < \delta$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x d\tau - x\right\| &= \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x d\tau - \frac{1}{t}\int_0^t x d\tau\right\| \\
&= \frac{1}{t}\left\|\int_0^t \left[T(\tau)x - x\right] d\tau\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(\tau)x - x\| \, d\tau \\
&< \frac{1}{t}\int_0^t \epsilon d\tau = \epsilon.
\end{aligned}$$

Completando la demostración de lo deseado. ■

Corolario 2.1. *Para todo $t \geq 0$ y todo $x \in X$ se tiene que*

$$\lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} T(s)(x) ds = T(t)x.$$

Demostración. Se obtiene inmediatamente de (iii) del teorema anterior. ■

§2.4. Acotamiento del generador infinitesimal de un SUC

Proposición 2.2. *Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un SUC con generador infinitesimal Λ, entonces $\mathcal{D}(\Lambda) = X$ y $\Lambda \in \mathcal{B}(X)$.*

Demostración.
Por la parte (c) del teorema (2.1) podemos elegir $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño de manera que

$$\left\|I - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds\right\| < 1.$$

Además, la parte (a) del mismo teorema nos garantiza que $I - \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^\delta T(s)ds$ es un operador acotado; y en consecuencia, se sigue de la proposición (1.12) que

$$I - \left[I - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds \right] = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds$$

es invertible y $\delta \dfrac{1}{\delta} \displaystyle\int_0^\delta T(s)ds = \int_0^\delta T(s)ds$.
Consideremos $h \in (0, \delta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[T(h) - I] \int_0^\delta T(s)ds &= \frac{1}{h} \left[T(h) \int_0^\delta T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^\delta T(h)T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^\delta T(h+s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^\delta T(s)ds + \int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds - \int_h^\delta T(s)ds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right]
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{h}[T(h) - I] \int_0^\delta T(s)ds = \frac{1}{h} \left[\int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right].$$

Luego,

$$\frac{1}{h}[T(h) - I] = \frac{1}{h} \left[\int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right] \left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1} \tag{2.6}$$

Ahora bien, sabemos que

$$\frac{1}{h} \int_\delta^{h+\delta} T(s)ds \underset{h \to 0}{\longrightarrow} T(\delta) \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds \underset{h \to 0}{\longrightarrow} T(0) = I \tag{2.8}$$

De (2.6),(2.7) y (2.8) tenemos que:

$$\frac{1}{h}[T(h)-I] \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{[T(\delta)-I]}{\left(\int_0^\delta T(s)ds\right)}.$$

Esto nos garantiza que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[T(h)x-x] = \frac{[T(\delta)x-x]}{\left(\int_0^\delta T(s)xds\right)}$$

existe para cada $x\in X$; así $X = D(\Lambda_T)$.
Y finalmente, note que $A_T = [T(\delta)-I]\left(\int_0^\delta T(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. ■

§2.5. Correspóndencia entre un SUC y su generador

Como acabamos de demostrar en la sección anterior, para cada SUC existe generador inifinitesimal, el cual es un operador acotado. Además, éste es único, como podemos ver a continuación.
Consideremos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un SUC, y A_T y B_T dos generadores infinitesimales de este semigrupo.
Por resultado de la proposición 2.2, tenemos que $D(A_T) = X = D(B_T)$.
Además, para cada $x\in X$ se tiene que los límites

$$A_Tx = \lim_{t\downarrow 0^+}\frac{T(t)x-x}{t} \quad \text{y} \quad B_Tx = \lim_{t\downarrow 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}$$

existen.
En consecuencia, $A_Tx = B_Tx$, para todo $x\in X$ con lo cual queda demostrado que $A_T = B_T$.
En seguida demostraremos que cada operador acotado genera un único SUC.

Proposición 2.3. *Sean $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ dos semigrupos uniformemente continuos. Supongamos que $\lim_{t\downarrow 0}\frac{S_1(t)-I}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S_2(t)-I}{t}$. Entonces, $S_1(t) = S_2(t)$, para todo $t\geq 0$.*

Demostración. La tesis se cumple de forma trivial para $t = 0$, dado que $S_1(0) = I = S_2(0)$. Para el caso en que $t > 0$ definamos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} f : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R} & \text{y} & g : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(h) = \|S_1(h)\| & & g(h) = \|S_2(h)\| \end{array}$$

Por la continuidad uniforme de los semigrupos y la continuidad de la norma, se tiene la continuidad de f y g.
Luego, por Teorema de Weiestrass, tenemos que como f y g son continuas en todo $(0,t)$, entonces existen $C_1, C_2 > 0$ tales que $f(h) \leq C_1$ y $g(h) \leq C_2$, para todo $h \in [0,t]$.
Haciendo uso de la hipótesis

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S_1(t) - I}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_2(t) - I}{t} = \Lambda_S \in \mathcal{B}(X),$$

dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ y $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$, tal que

$$0 < h < \delta_1 \Rightarrow \left\| \frac{1}{h}(S_1(h) - I) - \Lambda_S \right\| < \frac{\epsilon}{2tC_1C_2}; \qquad 0 < h < \delta_2 \Rightarrow \left\| \frac{1}{h}(S_2(h) - I) - \Lambda_S \right\| < \frac{\epsilon}{2tC_1C_2}.$$

Si hacemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}S_1(h) - \frac{1}{h}S_2(h) \right\| &= \left\| \frac{1}{h}S_1(h) - \frac{I}{h} - \Lambda_S + \Lambda_S + \frac{I}{h} - \frac{1}{h}S_2(h) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h}(S_1(h) - I) - \Lambda_S + \Lambda_S - \frac{1}{h}(S_2(h) - I) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{h}(S_1(h) - I) - \Lambda_S \right\| + \left\| \Lambda_S - \frac{1}{h}(S_2(h) - I) \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2tC_1C_2} + \frac{\varepsilon}{2tC_1C_2} = \frac{\varepsilon}{tC_1C_2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Además, dado que $t > 0$ y $\delta > 0$ podemos hacer uso de la propiedad Arquímedeana para elegir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n\delta > t$, entonces, $\dfrac{t}{n} < \delta$.
Luego,

$$\begin{aligned}
S_1(t) - S_2(t) &= S_1\left(\frac{n}{n}t\right) - S_2\left(\frac{n}{n}t\right) \\
&= S_1\left(\frac{(n-0)}{n}t\right) S_2\left(\frac{0}{n}t\right) - S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \\
&+ S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) - S_2\left(\frac{n}{n}t\right) \\
&= S_1\left(\frac{(n-0)}{n}t\right) S_2\left(\frac{0}{n}t\right) - S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \\
&+ S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) - S_1\left(\frac{(n-2)}{n}t\right) S_2\left(\frac{2}{n}t\right) \\
&+ S_1\left(\frac{(n-2)}{n}t\right) S_2\left(\frac{2}{n}t\right) - S_2\left(\frac{n}{n}t\right) \\
&\vdots \\
&= S_1\left(\frac{(n-0)}{n}t\right) S_2\left(\frac{0}{n}t\right) - S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \\
&+ S_1\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) - S_1\left(\frac{(n-2)}{n}t\right) S_2\left(\frac{2}{n}t\right) \\
&+ S_1\left(\frac{(n-2)}{n}t\right) S_2\left(\frac{2}{n}t\right) - \ldots + S_1\left(\frac{2}{n}t\right) S_2\left(\frac{(n-2)}{n}t\right) \\
&- S_1\left(\frac{1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) + S_1\left(\frac{1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(n-1)}{n}t\right) \\
&- S_1\left(\frac{0}{n}t\right) S_2\left(\frac{(n-1+1)}{n}t\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[S_1\left(\frac{(n-k)}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) - S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(k+1)}{n}t\right)\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\|S_1(t) - S_2(t)\| \\
= \;& \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[S_1\left(\frac{(n-k)}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) - S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(k+1)}{n}t\right) \right] \right\| \\
\leq \;& \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{(n-k)}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) - S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(k+1)}{n}t\right) \right\| \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{(n-k-1+1)}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) - S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{(k+1)}{n}t\right) \right\| \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{(n-k-1)}{n}t\right) S_1\left(\frac{1}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) - S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \right\| \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{(n-k-1)}{n}t\right) \left(S_1\left(\frac{1}{n}t\right) - S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \right) S_2\left(\frac{k}{n}t\right) \right\| \\
\leq \;& \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{(n-k-1)}{n}t\right) \right\| \left\| S_1\left(\frac{1}{n}t\right) - S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \right\| \left\| S_2\left(\frac{k}{n}t\right) \right\| \\
\leq \;& \sum_{k=0}^{n-1} C_1 \left\| S_1\left(\frac{1}{n}t\right) - S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \right\| C_2. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Por (2.9), y (2.10) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} C_1 \left\| S_1\left(\frac{1}{n}t\right) - S_2\left(\frac{1}{n}t\right) \right\| C_2 \;&<\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_1 \epsilon t C_2}{ntC_1C_2} \\
&=\; \frac{nC_1\epsilon tC_2}{ntC_1C_2} \\
&=\; \epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $S_1(t) = S_2(t)$ para todo $t \geq 0$. ∎

Capítulo 3

Semigrupos fuertemente continuos

En este capitulo estudiaremos semigrupos de operadores acotados que satisfacen una condición más débil que la continuidad uniforme, y en consecuencia será una clase muy útil especialmente en el estudio de muchas ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 3.1. *Se dice que un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores acotados es* ***fuertemente continuo*** *si para todo $x \in X$ se tiene que $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$. También se dice que $T(t)$ es de* ***clase*** *C_0 o que es un C_0**-semigrupo.***

Observemos que todo SUC es también un C_0-semigrupo. Sin embargo el recíproco no necesariamente se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Sea $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$ el espacio de todas las funciones uniformemente continua y acotadas de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo, y consideremos el semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se define por*

$$[S(t)f](s) := f(t+s)$$

para cada $f \in X$ y cada $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Proposición 3.1. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Entonces existen $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que para todo $t \geq 0$, $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$.*

Demostración.
En primer lugar, vamos a demostrar que existen $\delta > 0$ y $M \geq 1$ tales que

$$\|T(t)\| \leq M, \tag{3.1}$$

para todo $t \in [0, \delta]$. Supongamos, por la contradicción, que este no es el caso, entonces para cada $\delta > 0$ existe $t_{\delta,n} \in [0, \delta]$ tal que $\|T(t)\| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
En particular, si consideramos $\delta = \dfrac{1}{n}$, y denotamos $t_{\delta,n} = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, se obtiene que

$$\|T(t_n)\| > n, \tag{3.2}$$

donde $t_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Recordando que, para cada $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x = x$, obtenemos que la familia $\{T(t_n); n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ de operadores lineales acotados está acotado puntualmente, es decir, para cada $x \in X$, el conjunto $\{T(t_n)x; n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ es acotado.
Por el Principio de acotación uniforme se desprende que esta familia está acotada uniformemente lo cual se contradice con (3.2). Queda así demostrada que se cumple (3.1).
Note que $T(0) = I$, en cuyo caso se tiene que

$$\|T(0)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(0)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1,$$

lo cual verifica que $M \leq 1$.
Para continuar con la demostración, supongamos que $t \geq 0$ en virtud del Lema de Euclides, existen $m \in \mathbb{N}$ y $\eta \in [0, \delta)$ tales que $t = \delta m + \eta$.
Así,

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(\delta m + \eta)\| \\
&= \|T(\delta + \delta + \ldots + \delta + \eta)\| \\
&= \|T(\delta)T(\delta)\ldots T(\delta)T(\eta)\| \\
&= \|T(\delta)^m T(\eta)\| \\
&\leq M^m M \\
&\leq M^{\frac{t}{\delta}} M = M^{\frac{t}{\delta}+1}.
\end{aligned}$$

Dado que $M \geq 1$ podemos considerar $w := \dfrac{1}{\delta} log M \geq 0$.
Entonces, $e^w = M^{\frac{1}{\delta}}$ y de esta manera, $e^{tw} = M^{\frac{t}{\delta}}$ para todo $t \geq 0$. Y con esto,

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Con lo cual queda completada la demostración. ∎

Observación 3.1. *Si* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es un semigrupo uniformemente continuo cuyo generador es* Λ*, entonces (3.1) se cumple para* $M = 1$ *y* $\omega = \|\Lambda\|$*.*

Un C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ es llamado un C_0-semigrupo de **contracciones**, u operadores no expansivos, si $M = 1$ y $\omega = 0$ en (3.1).

Proposición 3.2. *Si* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0*-Semigrupo, entonces para cada* $x \in X$ *la función* $\phi_x : [0, \infty) \to X$ *definida por* $\phi_x(t) = T(t)x$ *es continua.*

Demostración.
Sean $t \geq 0$ y $h \in [0, t]$. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\
&= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\
&\leq \|T(t)\| \, \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| .
\end{aligned}
$$

El lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $h \downarrow 0$. De manera similar, tendremos que

$$
\begin{aligned}
\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\
&= \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x)\| \\
&\leq \|T(t-h)\| \, \|x - T(h)x\| \\
&\leq Me^{w(t-h)} \|x - T(h)x\| \\
&\leq Me^{w(t-h)} \|T(h)x - x\| .
\end{aligned}
$$

Y este último límite tiende a cero cuando $h \downarrow 0$. De esta manera, podemos concluir que $\phi_x(t) = T(t)x$ es continua. ■

Corolario 3.1. *Si* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es un* C_0*-semigrupo, entonces la aplicación* $(t, x) \longmapsto T(t)x$ *es continua desde* $[0, +\infty) \times X$ *a* X*.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $t \geq 0$ y $h \in \mathbb{R}_+$ con $t+h \geq 0$. Necesitamos distinguir dos casos: $h > 0$ y $h < 0$.

En el primer caso, en que $h > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)y - T(t)x\| &= \|T(t+h)y - T(t+h)x + T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t+h)y - T(t+h)x\| + \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t+h)\|\|y-x\| + \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega}\|y-x\| + \|T(t)\|\|T(h)x - x\|, \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\lim_{(\tau,y)\to(t^+,x)} T(\tau)y = T(t)x.$$

En el caso en que $h < 0$, y considerando h lo suficientemente pequeño, tal que $t+h > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)y - T(t)x\| &= \|T(t+h)y - T(t+h-h)x\| = \|T(t+h)y - T(t+h)T(-h)x\| \\ &\leq \|T(t+h)\|\|y - T(-h)x\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega}(\|y-x\| + \|y - T(-h)x\|), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{(\tau,y)\to(t^-,x)} T(\tau)y = T(t)x.$$

Completándose a sí la demostración. ■

Como consecuencia los resultados anteriores, podemos definir la integral de Riemann $\displaystyle\int_a^b T(s)xds$ para todo $x \in X$.

La definición de generador infinitesimal para un C_0-semigrupo es la misma que para un SUC:

$$\Lambda_T : D(A_T) \subseteq X \to X$$

$$D(\Lambda_T) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$\Lambda_T x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt}T(t)x$$

para cada $x \in D(A_T)$.
Veremos que en este caso, aunque es posible que $D(A_T) \nsubseteq X$, se verifica que $\overline{D(A_T)} = X$. Más aún, dado que la continuidad fuerte es una condición más débil que la continuidad uniforme, esperamos que Λ_T también tenga una propiedad un poco más débil que el ser acotado. El siguiente resultado será útil para confirmar esos dos hechos.

Teorema 3.1. *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo y Λ_T su generador infinitesimal. Entonces:*

a. *Para todo $x \in X$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$;*

b. *Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(\Lambda_T)$; y*

$$\Lambda_T \left[\int_0^t T(s)xds\right] = T(t)x - x$$

c. *Para todo $x \in D(\Lambda_T)$, $T(t)x \in D(\Lambda_T)$; y*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \Lambda_T T(t)x = T(t)\Lambda_T x$$

d. *Para todo $x \in D(\Lambda_T)$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\eta)\Lambda_T x d\eta = \int_s^t \Lambda_T T(\eta)xd\eta$$

Demostración.

a. Note que

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - T(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t)xd\tau\right\| \quad (3.3)$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(\tau)x - T(t)x\|\, d\tau. \quad (3.4)$$

Por la proposición 3.2 para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que

$$|\tau - t| < \delta, \quad \text{implica que} \quad \|T(\tau)x - T(t)x\| < \epsilon. \quad (3.5)$$

Entonces, de (3.3) y (3.5) se obtiene que para $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - T(t)x \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(\tau)x - T(t)x\| \, d\tau \\
&< \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon d\tau \\
&= \frac{h}{h} \epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Quedando demostrado (a).

b. Sean $x \in X$ y $h > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h} \left[T(h) \int_0^t T(s)xds - I \int_0^t T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^t T(h)T(s)xds - \int_0^t T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^t T(h+s)xds - \int_0^t T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^t T(s)xds - \int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds - \int_h^t T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds \right] \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds.
\end{aligned}$$

Tomando límite, con $h \to 0$, nos queda que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds \right]$$

Lo anterior debido a que la parte (a) nos asegura la existencia de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds = x.$$

De manera que

$$\int_0^t T(s)xds \in D(\Lambda_T)$$

Y por ser $x \in X$ arbitrario, la propiedad se cumple para todo $x \in X$.

Además,

$$\begin{aligned}\Lambda_T\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds\\ &= T(x)x - x.\end{aligned}$$

c. Sean $x \in D(\Lambda_T)$ y $h > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]T(t)x &= \left[\frac{T(h)T(t)-IT(t)}{h}\right]x\\ &= \left[\frac{T(h+t)-T(t)}{h}\right]x\\ &= \left[\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\right]x\\ &= \left[\frac{T(t)T(h)-T(t)}{h}\right]x\\ &= T(t)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]x\\ &= T(t)\left[\frac{T(h)x-x}{h}\right].\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \downarrow 0$, nos queda

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]T(t)x\right) = \lim_{h\downarrow 0}\left(T(t)\left[\frac{T(h)x-x}{h}\right]\right) = T(t)\lim_{h\downarrow 0}\left(\left[\frac{T(h)x-x}{h}\right]\right),$$

dado que la hipótesis nos garantiza que $\lim_{h\downarrow 0}\left(\left[\frac{T(h)x-x}{h}\right]\right)$ del lado derecho de la igualdad anterior existe, entonces el del lado derecho también existe y

$$\Lambda_T T(t)x = T(t)\Lambda_T x.$$

De donde se tiene que $\Lambda_T T(t)x = \dfrac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)\Lambda_T x$

Por otra parte, para ver que existe $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\Lambda_T x\right) \\
= & \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\Lambda_T x\right) \\
= & \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\Lambda_T x\right) \\
= & \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)\Lambda_T x + T(t-h)\Lambda_T x - T(t)\Lambda_T x\right) \\
= & \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t-h)(T(h)x - x)}{h} - T(t-h)\Lambda_T x + T(t-h)\Lambda_T x - T(t)\Lambda_T x\right) \\
= & \lim_{h\downarrow 0}\left(T(t-h)\left[\frac{(T(h)x - x)}{h} - \Lambda_T x\right] + [T(t-h)\Lambda_T x - T(t)\Lambda_T x]\right).
\end{aligned}$$

Sabemos que $T(t-h)$ está acotado para todos los $h \in [0,t]$ y $x \in D(\Lambda_T)$, de esta manera $T(t-h)\left[\dfrac{(T(h)x-x)}{h} - \Lambda_T x\right] \to 0$ cuando $h \to 0$.

Además, la proposición 3.2 nos garantiza que

$$T(t-h)\Lambda_T x - T(t)\Lambda_T x = [T(t-h) - T(t)]\Lambda_T x \to 0,$$

cuando $h \downarrow 0$.

De esta manera, se concluye que

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\Lambda_T x\right) = 0.$$

Es decir, $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)\Lambda_T x$. Aún más,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)\Lambda_T x = \Lambda_T T(t)x.$$

d. Sea $x \in D(\Lambda_T)$ Sabemos que $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)\Lambda_T x = \Lambda_T T(t)x$. Entonces,

$$\int_s^t \frac{d}{d\eta}T(\eta)x d\eta = \int_s^t T(\eta)\Lambda_T x d\eta = \int_s^t \Lambda_T T(\eta)x d\eta$$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\eta)\Lambda_T x d\eta = \int_s^t \Lambda_T T(\eta) x d\eta.$$

■

§3.1. El generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

En esta sección se demostrará dos propiedades básicas del generador infinitesimal de un C_0-semigrupo: La densidad del dominio y la cerradura del gráfico.
Comenzamos recordando las siguientes definiciones:

Definición 3.2. *Un operador $\Lambda : D(\Lambda) \subseteq X \to X$ se dice cerrado, si su gráfico es cerrado en $X \times X$.*

Definición 3.3. *Sean X, Y espacios de Banach y $\Lambda : D(\Lambda) \subseteq X \to Y$ un operador. Se dice que Λ es **cerrado** si dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Lambda)$ que satisface $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in X$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \Lambda x_n = y \in Y$ se tiene que $x \in D(\Lambda)$ y $\Lambda x = y$.*

Un resultado que será posteriormente de utilidad en este trabajo es el siguiente teorema, sin embargo, su demostración escapa del objetivo, por lo tanto sólo se enuncia:

Teorema 3.2 (Hille)**.** *Sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado y $x : \Omega \to D(A)$. Entonces*

$$\int_\Omega Ax(\tau) d\tau = A \int_\Omega x(\tau) d\tau,$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3. *Si Λ_T es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces $\overline{D(\Lambda_T)} = X$ y Λ es un operador cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X$. En virtud del teorema 3.1 se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds \in D(\Lambda_T) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds = x,$$

con lo cual queda demostrado que $D(\Lambda_T)$ es denso en X.
A continuación, consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D(\Lambda)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n = y.$$

Por el teorema 3.1, se sigue que

$$T(h)x_n - x_n \quad = \quad \int_0^h T(\tau)\Lambda x_n d\tau$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $h > 0$. Pasando al límite en esta igualdad, obtenemos

$$T(h)x - x \quad = \quad \int_0^h T(\tau) y d\tau.$$

Nuevamente, en virtud del teorema 3.1, se tiene que que existe el límite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(\tau) y d\tau = y.$$

De esta relación, y el anterior, se deduce que $x \in D(\Lambda)$ y $\Lambda x = y$. Con lo cual se completa la demostración.

■

Al igual que en el caso uniformemente continuo, el generador infinitesimal caracteriza al semigrupo.

Proposición 3.3. *Sean $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dos C_0-semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Entonces $A = B$ si, y sólo si $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. De la definición de generador infinitesimal se tiene inmediatamente que si $T(t) = S(t)$, para cada $t \geq 0$ entonces $A = B$.
Recíprocamente, supongamos que $A = B$. Sean $x \in X$ y $t \geq 0$. Definimos la función $\phi_t : [0, t] \to X$ dada por $\phi_t(s) = T(t-s)S(s)x$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\phi_t(s) &= \left[\frac{d}{ds}T(t-s)\right] S(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s) \\ &= -AT(t-s)S(s) + T(t-s)BS(s) \\ &= -T(t-s)AS(s) + T(t-s)BS(s) \\ &= -T(t-s)AS(s) + T(t-s)AS(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De donde se concluye que ϕ_t es constante en $[0, t]$. En particular, $\phi_t(0) = \phi_t(t)$. Es decir, $T(t)x = S(t)x$, para todo $t \geq 0$, y todo $x \in X$. ■

Capítulo 4

Teorema de Hille-Yosida.

Este capítulo se dedica a la presentación del resultado fundamental dentro de de la teoría de la C_0-semigroups como es el teorema de Hille-Yosida.
Este teorema caracteriza un operador lineal cerrado y el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en un espacio de Banach, con importantes implicaciones en la teoría de ecuaciones diferenciales en los problemas de evolución.
Esto le da una delimitación muy precisa de la clase de operadores lineales A, que actúan en un espacio de Banach X, que generan un C_0-semigrupo de operadores lineales acotados cuyas normas no superan la unidad.

Del capitulo anterior tenemos que todo C_0-semigrupo satisface $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para cada $t \geq 0$ para ciertas constantes $M \geq 1$ y $w \geq 0$. Si $w = 0$, $T(t)$ se dice **uniformemente acotado** y si además $M = 1$, se llama C_0 **semigrupo de contracciones**.

Supongamos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo de contracciones, entonces, para cada $t \geq 0$, $x, y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t)y\| &= \|T(t)(x-y)\| \\ &\leq \|T(t)\| \, \|x-y\| \\ &= \|x-y\| \,. \end{aligned}$$

Esta clase particular de semigrupos es muy interesante por su rol en diversas aplicaciones. En lo que sigue queremos caracterizar los generadores infinitesimales de C_0-semigrupos de contracciones.

Definición 4.1. *Si A es un operador lineal, no necesariamente acotado, en X, el* ***conjunto resolvente*** *$\rho(A)$ de A se define mediante*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ es invertible y } R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X\}.$$

En este caso a los λ se les llaman ***valores regulares****.*
La familia formada por los operadores lineales acotados $R(\lambda; A)$, con $\lambda \in \rho(A)$ se llama la resolvente de A.

Teorema 4.1 (Hille-Yosida)**.** *Un operador lineal $A : D(A) \to X$, es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones si y sólo si*

(i) A es cerrado y densamente definido, esto es, $\overline{D(A)} = X$.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}_+$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demostración. Comenzamos con la condición necesaria. Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.
Entonces, el teorema 3.3 nos garantiza que es cerrado y $\overline{D(A)} = X$, por lo tanto se cumple (i).
A fin de demostrar (ii), sean $\lambda > 0$, $x \in X$ postulamos como candidato a la inversa de $\lambda I - A$ al operador definido por:

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Con el fin de demostrar que la integral en el lado derecho de la igualdad anterior es convergente recordemos que $t \to T(t)x$ es continuo y uniformemente acotado; la integral impropia existe en el sentido de Riemann y define un operador lineal acotado que satisface

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right\| \\
&\leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\|T(t)x\right\| dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\|x\right\| dt \\
&= \|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\|x\right\| dt \\
&= \frac{\|x\|}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Así, vemos que $R(\lambda)$ está bien definido, claramente es lineal y acotado con

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Con lo que, bastaría demostrar que $R(\lambda)$ es efectivamente la inversa de $\lambda I - A$.
En efecto, dado $h > 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x \\
= & \frac{T(h)-I}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
= & \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(h)T(t)x - T(t)x]dt \\
= & \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(h+t)x - T(t)x]dt \\
= & \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
= & \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
= & \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt + e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
= & \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
= & \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \downarrow 0$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)-I}{h} R(\lambda)x \\ = & \lim_{h\downarrow 0} \left[\frac{e^{\lambda h}-1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)xdt \right] \\ = & \lim_{h\downarrow 0} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt - \lim_{h\downarrow 0} \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)xdt \\ = & \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt - x \\ = & \lambda R(\lambda)x - x. \end{aligned}$$

Esto significa que, para cada $x \in X$ y cada $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ y

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Luego,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = \lambda I R(\lambda) - AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - (\lambda R(\lambda) - I) = I.$$

Ahora, para $x \in D(A)$ y usando el teorema 3.3, que nos garantiza que A es un operador cerrado tenemos que

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)xdt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt\right) \\ &= A(R(\lambda))x. \end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces que $R(\lambda)$ y A conmutan sobre $D(A)$; en consecuencia para cada $x \in D(A)$

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda)Ix - R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)Ix - AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - (\lambda R(\lambda)x - x) = x.$$

Así, $\lambda I - A$ es invertible para todo $\lambda > 0$, con inversa $R(\lambda)$, para cada $\lambda > 0$. De donde tenemos que $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Se completa la demostración de la condición necesaria.

§4.0.1. Regularizada de Yosida

Antes de demostrar la suficiencia de las condiciones (i) y (ii), necesitamos algunos resultados preliminares:

Lema 4.1. *Sea A un operador que satisface (i) y (ii) del Teorema de Hille-Yosida. Si $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ entonces $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$ para cada $x \in X$.*

Demostración.
Sean $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x &= x \\
R(\lambda; A)(\lambda I - A)x &= x \\
\lambda R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)Ax &= x \\
\lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax & \\
\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\|
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

El lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $\lambda \to \infty$; así,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x.$$

Cumpliéndose así la tesis para cada $x \in D(A)$.
Consideremos ahora, $x \in X$, entonces, haciendo uso de (i) que garantiza que A está densamente definido, podemos elegir una sucesión $\{x_n\} \subseteq D(A)$ con $x_n \to x$.

$$
\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda; A)(x - x_n + x_n) - x_n + x_n - x\| \\
&= \|\lambda R(\lambda; A)(x - x_n) + \lambda R(\lambda; A)x_n - x_n + x_n - x\| \\
&\leq \|\lambda R(\lambda; A)(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \lambda \|R(\lambda; A)\| \|(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \lambda \frac{1}{\lambda} \|(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&= 2\|(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\|
\end{aligned}
$$

Luego, como cada $x_n \in D(A)$ utilizamos la parte anterior obteniendo

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq 2\|(x-x_n)\| + \limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x_n - x_n\| = 2\|(x-x_n)\|.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| &\leq \lim_{n\to\infty} 2\|(x-x_n)\| \\ \limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| &\leq 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, si recordamos que

$$0 \leq \liminf_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq \limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq 0$$

obtenemos

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = \liminf_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda;A)x - x\| = 0,$$

o equivalentemente,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda;A)x = x.$$

Quedando demostrado el lema. ■

Ahora definimos, para cada $\lambda > 0$, la **aproximación o regulada de Yosida** de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda;A) = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I. \tag{4.1}$$

A_λ es una aproximación de A en el siguiente sentido:

Lema 4.2. *Sea A un operador que satisface (i) y (ii) del teorema (4.1) de Hille-Yosida. Si A_λ es la regulada de Yosida de A, entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \quad \textit{para cada} \quad x \in D(A). \tag{4.2}$$

Demostración. Para cada $x \in D(A)$ tenemos que $Ax \in D(A)$ y por el lema 4.1

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda;A)Ax = Ax.$$

Además, por la definición de A_λ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda A R(\lambda; A)x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax \\ &= Ax.\end{aligned}$$

■

Lema 4.3. *Sea A un operador que satisface (i) y (ii) del teorema (4.1) de Hille-Yosida. Si A_λ es la regularizada de Yosida de A, entonces A_λ es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo de contracciones e^{tA_λ}. Además, por cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{4.3}$$

Demostración. De (4.1) es claro que A_λ es un operador lineal acotado y por lo tanto el generador infinitesimal del semigrupo uniformemente continuo e^{tA_λ} de operadores lineales acotados. Además,

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda;A)-\lambda I)}\| \\ &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)-\lambda t)}\| \\ &= e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)}\| \\ &\leq e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2\|R(\lambda;A)\|} \\ &\leq e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2 1/\lambda} \\ &\leq 1,\end{aligned}$$

entonces e^{tA_λ} es un semigrupo de contracciones.
Se desprende de las definiciones que $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda$ y A_μ conmutan una con otra. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\right\| \\
&= \left\|\int_0^1 (tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\right\| \\
&= \left\|\int_0^1 (te^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}A_\lambda x - te^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}A_\mu x)ds\right\| \\
&= \left\|\int_0^1 te^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)ds\right\| \\
&\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}\right\|\left\|e^{t(1-s)A_\mu}\right\|\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| ds \\
&= t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|.
\end{aligned}
$$

Como se esperaba demostrar. ■

§4.0.2. Demostración de la suficiencia del Teorema de Hille-Yosida

Sea $x \in D(A)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &\leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \\
&= t\left\|A_\lambda x - Ax + Ax - A_\mu x\right\| \\
&\leq t\left\|A_\lambda x - Ax\right\| + t\left\|Ax - A_\mu x\right\|. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Por (4.4) y el lema 4.1 se sigue que para cada $x \in D(A)$, $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto es convergente. Aún más, la convergencia es uniforme sobre los intervalos acotados $[0,\tau]$.

Por otro lado, para $x \in X$, dado que $D(A)$ es denso en X, podemos elegir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ de manera que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|e^{tA_\lambda}(x - x_n + x_n) - e^{tA_\mu}(x - x_n + x_n)\right\| \\
&= \left\|e^{tA_\lambda}(x - x_n) + e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}(x - x_n) - e^{tA_\mu}x_n\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}(x - x_n) - e^{tA_\mu}(x - x_n)\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}(x - x_n)\right\| + \left\|e^{tA_\mu}(x - x_n)\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \|(x - x_n)\| + \left\|e^{tA_\mu}\right\| \|(x - x_n)\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| \\
&\leq 2\|(x - x_n)\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| \\
&\leq 2\|(x - x_n)\| + t\|A_\lambda x_n - Ax_n\| + t\|Ax_n - A_\mu x_n\|.
\end{aligned}$$

Si hacemos que $n \to \infty$

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\right\| + \lim_{n\to\infty} t\|Ax_n - A_\mu x_n\|.$$

Y cuando $\lambda, \mu \to \infty$

$$\lim_{\lambda,\mu\to\infty} \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| = 0.$$

Por lo tanto

De donde, concluimos que $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy para todo $x \in X$, y por tanto convergente uniformemente sobre intervalos acotado.

Para cada $x \in X$, definamos

$$T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{4.5}$$

El límite de (4.5) es de nuevo uniforme en intervalos acotados.

Veamos que el límite $T(t)$ en (4.5) satisface las propiedades de semigrupo:

$$T(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{0A_\lambda}x = Ix.$$

Para $s, t > 0$

$$\begin{aligned} T(s+t)x &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{(s+t)A_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda+tA_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \\ &= T(s)T(t). \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\|T(t)\| = \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1.$$

Por otra parte, la función $t \to T(t)x$ es continua en $[0,\tau]$ para cada $\tau > 0$, por tratarse de límite uniforme de funciones continuas: $t \to e^{sA_\lambda}x$. En conclusión, concluimos que $T(t)$ es un C_0-semigrupo.

Para concluir la demostración, basta verificar que A es el generador infinitesimal de $T(t)$.

Sea $x \in D(A)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - e^{0A_\lambda}x) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \frac{d}{ds} e^{sA_\lambda}xds \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda xds \\ &= \int_0^t T(s)Axds, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple, debido a que $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniformemente a $T(s)Ax$ en el intervalo $[0,\tau]$.

Luego, si B es el generador infinitesimal de $T(t)$, se deduce que $D(A) \subseteq D(B)$.

Veamos que además, $Bx = Ax$, para cada $x \in D(A)$. En efecto, sea $x \in D(A), t > 0$

$$
\begin{aligned}
T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds \quad &\Rightarrow \quad \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = T(0)Ax = Ax.
\end{aligned}
$$

Como el límite existe para los $x \in D(A)$ entonces $x \in D(B)$, y como es arbitrario pero fijo, tenemos que $D(A) \subseteq D(B)$. Y además, $Bx = Ax$, para cada $x \in D(A)$.
Por hipótesis (ii) conocemos que $1 \in \rho(A)$, y por el directo, $1 \in \rho(B)$. En particular $(I - B)D(B) = X$, pero como $D(B) \supseteq D(A$ se obtiene:

$$X = (I - B)D(B) \supseteq (I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X.$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
D(B) &= (I - B)^{-1}X \\
&= (I - B)^{-1}(I - A)D(A) \\
&= (I - A)^{-1}(I - A)D(A) \\
&= D(A).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $B = A$ en $D(A)$. ■

Referencias

[1] F. Alvarez y J. Peypuquet. *Introducci´on a la Teoría de Semigrupos.* Apuntes para la III Escuela de Verano DIM-MECESUP-CMM. facultad de ciencas fisicas y matematicas UNIVERSIDAD DE CHILE. 2003

[2] G. Bachman y Narici L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[3] J.B. Conway , *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] Dunford N., *Linear Operators, spectral theory.* Interscience publishers., New York 1957.

[5] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators part I: General theory*, Wiley Classics library edition, Wiley Interscience, 1988.

[6] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31, Providence R. I., 1957.

[7] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Spivak, Michael, *Calculus*, cálculo infinitesiaml, Editorial Reverté, S.A., 2005.

[9] I. I. Vrabie, C_0-semigroups and applications, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 2003.