UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Yolima Clairet Colmenárez Pérez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: **Análisis Funcional**
Tutor: MsC Jurancy Ereu

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2010

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"

"ESPACIOS DE HILBERT CON NÚCLEO REPRODUCTIVO"

Br. Yolima Clairet Colmenárez Pérez

Tutor: MsC Jurancy Ereu

RESUMEN

La estructura de este trabajo presenta una revisiòn detallada de los conceptos fundamentales de los Espacios de Hilbert que nos permitieron tener una base teórica la cual fue necesaria en el análisis de los aspectos fundamentales que componen la Teoría de Núcleos Reproductivos e incluye ejemplos de Espacios de Hilbert con Núcleos Reproductivos clásicos en la Teoría de Operadores

Se Desarrollaron conceptos fundamentales de los Espacios de Hilbert presentados en (1) y (4), así como el estudio de aspectos fundamentales de la Teoría de Núcleos Reproductivos que se presenta en (3)

La teoría de Núcleos Reproductivos fue originalmente y simultáneamente desarrollada por Nachman Aronszajn (1907-1980) y Stefan Bergman (1895-1987) en 1950.
En análisis funcional, un espacio de Hilbert posee Núcleos Reproductivo cuando el funcional lineal de evaluación es continuo, estos espacios son llamados Espacios de Hilbert Funcionales. Equivalentemente, estos espacios pueden ser definidos a travess de los Núcleos Reproductivos. Es notable,el hecho de que el estudio de algunas propiedades de ciertos operadores que actúan en espacios de Hilbert Funcionales Analíticos se simplifican notablemente debido, precisamente, a la presencia de estos Núcleos Reproductivos.

A Dios Todopoderoso.

Y si alguno de vosotros tiene falta de sabiduría, pidala a Dios, el cual da a todos abundantemente y sin reproche, y le será dada.

– Santiago 1:5

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a mi Señor Jesucristo por permanecer fiel a mi, a mis padres Carmen y Rafael quienes siempre han estado a mi lado confiando en mi, a Juan Manuel,Herling, Lisbeth mis hermanos, a ti Betzabeth mi razón de seguir adelante ”Te Amo hija”, a mis sobrinas, a todos mis amigos quienes siempren estubieron a mi lado apoyandome de una u otra manera, a mi tutora por su gran ayuda en todos los aspectos y a todas aquellas personas que me han ayudado para lograr alcanzar esta meta, mil gracias!!!

Índice

INTRODUCCIÓN

El concepto de espacio de Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclídeo. Esta generalización permite que nociones y técnicas algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión dos y tres se extiendan a espacios de dimensión arbitraria, incluyendo a espacios de dimensión infinita. Ejemplos de tales nociones y técnicas son la de ángulo entre vectores, ortogonalidad de vectores, el teorema de Pitágoras, proyección ortogonal, distancia entre vectores y convergencia de una sucesión. El nombre dado a estos espacios es en honor al matemático David Hilbert quien los utilizó en su estudio de las ecuaciones integrales. Más formalmente, se define como un espacio de producto interior que es completo con respecto a la norma vectorial definida por el producto interior. Los espacios de Hilbert sirven para clarificar y para generalizar el concepto de series de Fourier, ciertas transformaciones lineales tales como la transformación de Fourier, y son de importancia crucial en la formulación matemática de la mecánica cuántica, así como tambíen los espacios de Hilbert con Núcleo reproductivo esta teoría fue originalmente y simultáneamente desarrollada por Nachman Aronszajn (1907-1980) y Stefan Bergman (1895-1987) en 1950. En este trabajo se presenta espacios de Hilbert que pueden ser definidos a traves de los Núcleos Reproductivos entre los que podremos nombrar se encuentran los espacios H^2 conocido como el espacio de Hardy entre ellos tambíen se encuentran los espacios A^2 llamados espacios de Bergman. Cuando el funcional lineal de evaluación es continuo, se tiene que el espacio de Hilbert tiene núcleo reproductivo además veremos como se pueden relacionar los núcleos reproductivos con las bases ortonormales de un espacio de Hilbert funcional analítico al cual se le conoce una base ortonormal de manera que se pueda obtener el núcleo reproductivo de una forma explicita.

CAPÍTULO 1

ESPACIOS DE HILBERT

S1.1. ESPACIOS DE HILBERT. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

DEFINICIÓN 1.1.1 (Espacio Vectorial). Un **ESPACIO VECTORIAL Ó LINEAL** sobre el campo ($\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$), es una terna $(\boldsymbol{X}, +, \cdot)$ donde $\boldsymbol{X}$ es una colección de objetos, y las operaciones $+ : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$, Llamada suma de vectores (denotaremos $x + y$ en lugar de $+(x, y)$) y $\cdot : \mathbb{F} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$ llamada producto escalar (aquí usaremos $\lambda \cdot \boldsymbol{X}$ en lugar de $\cdot(\lambda, x)$),

satisfacen las siguientes propiedades.

A $_1$) $x + y = y + x$

A $_2$) $(x + y) + z = x + (y + z)$

A $_3$) Existe un elemento $o \in \boldsymbol{X}$ tal que $o + x = x + o$ (Neutro Aditivo)

A $_4$) Existe un elemento $-x \in \boldsymbol{X}$ tal que $-x + x = x + (-x) = 0$ (Inverso Aditivo)

M$_1$) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) = \mu(\lambda x)$

M$_2$) Existe $1 \in \boldsymbol{X}$ tal que $1x = x$. (Elemento Identidad)

D$_1$) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

D$_2$) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

DEFINICIÓN 1.1.2 (Subespacio Vectorial). Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio vectorial sí $Y \subseteq \boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ es un espacio vectorial sobre el mismo campo escalar y con las mismas operaciones (de suma y producto por escalares) definidas para $\boldsymbol{X}$, entonces decimos que $\boldsymbol{Y}$ es un **SUBESPACIO VECTORIAL** de $\boldsymbol{X}$.

DEFINICIÓN 1.1.3 (Producto Interior). Un **PRODUCTO INTERIOR** sobre el espacio vectorial $\boldsymbol{X}$, es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$, con las siguientes propiedades:

i) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle, \forall a, b \in \mathbb{F}$ y $x, y \in \boldsymbol{X}$ (Linealidad)

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in \boldsymbol{X}$. (Anti-Simetría)

iii) $\langle x, x \rangle \geqslant 0, \forall x \in \boldsymbol{X}$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

PROPOSICIÓN 1.1.1. *Consideremos un Espacio Vectorial $\boldsymbol{X}$ con Producto Interior definido, entonces*

i) $\langle x, ay + bz \rangle = \overline{a} \langle x, y \rangle + \overline{b} \langle x, z \rangle, \forall a, b \in \mathbb{F}, \forall x, y, z \in \boldsymbol{X}$

ii) $\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in \boldsymbol{X}$ *si y sólo si* $y = 0$

Demostración. (i) Por la definición de producto interior tenemos que

$$\langle x, ay + bz \rangle = \overline{\langle ay + bz, x \rangle} \quad = \overline{a \langle y, x \rangle + b \langle z, x \rangle} = \overline{a}\overline{\langle y, x \rangle} + \overline{b}\overline{\langle z, x \rangle} \quad = \overline{a} \langle x, y \rangle + \overline{b} \langle x, z \rangle$$

(ii): ($\Rightarrow$) Para toda $x \in \boldsymbol{X}$ se tiene que $\langle x, y \rangle = 0$ en particular $\langle y, y \rangle = 0$, entonces $y = 0$
($\Leftarrow$) Si $y = 0$, entonces $\langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = \langle x, 0 \times 0 \rangle = 0 \langle x, 0 \rangle = 0, \forall x \in \boldsymbol{X}$ □

EJEMPLO 1.1.1. Consideremos $x \in \mathbb{C}^n$ (El n-Espacio Euclideano Complejo) y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Para un par de vectores $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\quad y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ y $z = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ definimos el siguiente producto interior $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{\beta_i}$

Demostración. En efecto,
Sean $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ y $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} ax + by &= a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + b(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \\ &= (a\alpha_1 + b\beta_1, a\alpha_2 + b\beta_2, \ldots, a\alpha_n + b\beta_n) \end{aligned}$$

Ahora bien, verifiquemos si se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle ax + by, z \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (a\alpha_1 + b\beta_i)\overline{\xi_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\alpha_i\overline{\xi_i} + b\beta_i\overline{\xi_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\alpha_i\overline{\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} b\beta_i\overline{\xi_i} \\ &= a\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\xi_i} \\ &= a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\beta_i} \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\beta_i} \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} \end{aligned}$$

Solo falta verificar que

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

define un Producto Interior sobre $\mathbb{C}^n$ □

EJEMPLO 1.1.2. Sea $X = \mathbb{C}([a,b], \mathbb{C})$ el campo de las funciones complejas continuas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. definimos la suma puntual de funciones como $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ y el producto puntual por escalar como $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$. Entonces el producto

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

define un producto interior sobre el espacio X

Demostración. En efecto, sean $f, g, h \in X$, $\quad c, d \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\langle cf(x) + dg(x), h(x)\rangle &= \int_a^b \left(cf(x) + dg(x)\right)\overline{h(x)}dx \\ &= \int_a^b \left(cf(x)\overline{h(x)} + dg(x)\overline{h(x)}\right)dx \\ &= \int_a^b cf(x)\overline{h(x)}dx + \int_a^b dg(x)\overline{h(x)}dx \\ &= c\int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx + d\int_a^b g(x)\overline{h(x)}dx \\ &= c\langle f(x), h(x)\rangle + d\langle g(x), h(x)\rangle \\ \langle f(x), g(x)\rangle &= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \overline{\int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx} \\ &= \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}dx} \\ &= \overline{\langle g(x), f(x)\rangle}\end{aligned}$$

Solo falta ver que

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(x)\rangle &= \int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqslant 0 \\
\langle f(x), f(x)\rangle = 0 &\Rightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \\
&\Rightarrow f = 0 \qquad\qquad (pues f es continua)
\end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 1.1.4 (Seminorma)**.** Sea $\boldsymbol{X}$ un Espacio Vectorial sobre un Campo Escalar $\mathbb{F}$. Una **SEMINORMA SOBRE $\boldsymbol{X}$** , es una función $\|\cdot\| : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^+$, tal que:

i) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ para toda $a \in \mathbb{F}$ y para toda $x \in \boldsymbol{X}$.

ii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todo par $x, y \in \boldsymbol{X}$, (Desigualdad Triangular).

DEFINICIÓN 1.1.5 (Norma)**.** Sea $\boldsymbol{X}$ un Espacio Vectorial sobre un Campo escalar $\mathbb{F}$. Una **NORMA SOBRE $\boldsymbol{X}$** , es una función $\|\cdot\| : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^+$, tal que:

i) $\|\cdot\|$ es Seminorma.

ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, ($\boldsymbol{X}$ es un **ESPACIO VECTORIAL NORMADO**).

DEFINICIÓN 1.1.6. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ de elementos de un Espacio Vectorial Normado $\boldsymbol{X}$, es una **SUCESIÓN DE CAUCHY** , si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \geqslant 1$ tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, siempre que $n, m \geqslant N$. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ **CONVERGE A x** , ($x_n \to x$), cuando $\|x_n - x\| \to 0$, siempre que $n \to \infty$, y si además $x \in \boldsymbol{X}$, entonces decimos que $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ es **CONVERGENTE EN x** .

Verifiquemos que toda sucesión convergente en $\boldsymbol{X}$ es una Sucesión de Cauchy.

Sea $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión convergente en $\boldsymbol{X}$ y sea x_0 su límite, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geqslant N$.

Ahora, para $n, m \geqslant N$, tenemos,

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - x_0 + x_0 - x_n| \\
&\leqslant |x_m - x_0| + |x_0 - x_n| \qquad \text{Por Desigualdad Triangular} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo que $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy.

Veamos ahora que el recíproco no se cumple.

Contraejemplo.

Sea $X = (0,1)$ y definamos la distancia entre dos números $x, y \in X$ como:

$$\mathrm{d}(x,y) = |x - y|.$$

La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es una sucesión de Cauchy, pues vimos que toda sucesión convergente es de Cauchy, como $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0 pero $0 \notin X$, por lo tanto no converge en X.

DEFINICIÓN 1.1.7. Decimos que un Espacio Vectorial Normado X es **COMPLETO** si toda sucesión de Cauchy converge en X.

PROPOSICIÓN 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy–Schwartz)**.** *Sea X un Espacio Vectorial con Producto Interno. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Demostración. Ver demostración en

[2] □

COROLARIO 1.1.1. *Sea X un Espacio Vectorial con un Producto Interior. entonces $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ define una norma y $\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\|$ define una Métrica sobre X, de tal manera que X es un* **ESPACIO LINEAL NORMADO** .

DEFINICIÓN 1.1.8 (Espacio de Hilbert)**.** Si un Espacio Vectorial con Producto Interior es Completo bajo la Norma Inducida por el Producto Interior, decimos entonces que es un **ESPACIO DE HILBERT** .

NOTACIÓN. H es un Espacio de Hilbert.

COROLARIO 1.1.2. *El Producto Interior es Conjuntamente Continuo sobre el Espacio de Hilbert H. Esto es, si $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ y $\{y_n\}_{n \geqslant 1}$ son sucesiones en H, tal que $x_n \to x, y_n \to y$, con $x, y \in H$ (es decir, sucesiones convergentes en H), entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$*

Demostración. Según la Desigualdad Triangular y la Desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle \, \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y\rangle \, \langle x_n, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x_n, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \, \|y\| + \|x\| \, \|y_n - y\| \end{aligned}$$

El resultado anterior es válido si solo suponemos que H es un Espacio con Producto Interior definido y manteniendo la hipótesis de convergencia en H. □

PROPOSICIÓN 1.1.3 (Ley del Paralelogramo)**.** *Sea H un Espacio de Hilbert, entonces*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{1.1.1}$$

para cualesquiera elementos x, y de H.

Demostración. Sean $x, y \in \boldsymbol{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

reemplazando y por $-y$

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle &= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.1.1. *Si $\boldsymbol{H}$ es un Espacio Vectorial Normado, entonces la norma $\|\cdot\|$ proviene de un Producto Interior si y sólo si dicha norma cumple la Ley del Paralelogramo.*

Ver (1),(9)

DEFINICIÓN 1.1.9 (Subespacio de Hilbert)**.** Sea $(\boldsymbol{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Espacio de Hilbert. Decimos que $\boldsymbol{H}_1$ es un **SUBESPACIO DE HILBERT DE $\boldsymbol{H}$** si:

i) $\boldsymbol{H}_1 \subseteq \boldsymbol{H}$

ii) $(\boldsymbol{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Espacio de Hilbert

El Producto Interior en ambos espacios es el mismo.

S1.2. ORTOGONALIDAD Y ORTONORMALIDAD

DEFINICIÓN 1.2.1 (Ortogonalidad y Ortonormalidad)**.** - Sea $\boldsymbol{H}$ un Espacio de Hilbert
Sía para dos elementos x, y de $\boldsymbol{H}$ se tiene que $\langle x,y\rangle = 0$, decimos entonces que x es **ORTOGONAL** a y.
Notación: $x \perp y$.

- Si $S \subseteq \boldsymbol{H}$ es tal que $\langle x,y\rangle = 0$ (i.e. $x \perp y$) para todo $x, y \in S$, entonces decimos que S es un **SUBCONJUNTO ORTOGOMAL** .

- El caso cuando $\|x\| = 1$, para $x \in S$, entonces S se llama **SUBCONJUNTO ORTOGOMAL** .

- Si $S_1 \subseteq \boldsymbol{H}$ y $S_2 \subseteq \boldsymbol{H}$ son subconjuntos tales que $x \perp y$ para todo $x \in S_1$ y para todo $y \in S_2$, entonces S_1 es **ORTOGONAL** a S_2 ($S \perp S_2$).

PROPOSICIÓN 1.2.1. *Sean p y q un par de números reales mayores que 1 y tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces para todo $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad ab\leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.*

Demostración. Ver (1),(11),(2),(9) □

PROPOSICIÓN 1.2.2 (Desigualdad De Hölder)**.** *Sean p,q un par de números reales mayores que 1, tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Entonces, para un par de familias finitas de números complejos $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ se tiene que:*

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración. Veamos que si, $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1$ y $\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant 1$$

En efecto por la proposición anterior $a=|x_i|$, $b=|y_i|$. luego, $|x_iy_i|\leqslant\dfrac{|x_i|^p}{p}+\dfrac{|y_i|^q}{q}$
Así, es que
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}{p}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (Por hipótesis)

En el caso general,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\alpha\neq 0 \text{ y } \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\beta\neq 0$$

Sean $x_i'=\dfrac{x_i}{\alpha}$, $y_i'=\dfrac{y_i}{\beta}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i'|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|}{\alpha}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\alpha} = 1\\
\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i'|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_i|}{\beta}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\beta} = 1
\end{aligned}
$$

Luego por lo probado anteriormente,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|x_i'y_i'| \leqslant 1 &\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\alpha\beta} \leqslant 1\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \alpha\beta\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

□

TEOREMA 1.2.1 (Desigualdad de Minkowsky)**.** *Sea p un número real mayor que 1. Entonces para cualesquiera números complejos x_i, y_i con $(i = 1, \cdots, n)$, se cumple:*

$$
\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Demostración. Ver (2) □

Este resultado, igual que el anterior, admite importantes generalizaciones a las sumas infinitas y a las integrales. En cada caso, basta con imponer las condiciones que aseguren que las cantidades que intervienen (sumas infinitas, integrales) tienen sentido. En particular, para las integrales se tiene

$$
\left(\int_E |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\right)^{1/p}.
$$

TEOREMA 1.2.2 (Desigualdad De Bessel). *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto ortonormal de vectores en $\boldsymbol{H}$. Entonces:*

i) Para todos los $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, $\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2 \leqslant \|y\|^2$

ii) El conjunto $E = \{x \in A / \langle y, x\rangle \neq 0\}$ es numerable

iii) Sí $z \in \boldsymbol{H}$, entonces $\sum_{x\in A} |\langle y, x\rangle \overline{\langle z, x\rangle}| \leqslant \|y\|\|z\|$

Demostración. (i): Sea $y \in H$ y $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset A$ una familia finita. Escojamos n escalares en $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ digamos $\alpha_i = \langle y, x_i\rangle$, ahora bien;

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \|y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|^2 \\
&= \left\langle y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\rangle \\
&= \|y\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha_j} \langle y, x_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha_j} \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \|y\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha_j} \langle y, x_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y\rangle + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \langle x_i, x_i\rangle + \sum_{j\neq i}^{n} \alpha_i \bar{\alpha_i} \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \|y\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(-\bar{x_i} \langle y, x_i\rangle - \alpha_i \langle x_i, y\rangle + |\alpha_i|^2\right) \\
&= \|y\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(-|\langle y, x_i\rangle|^2 + |\alpha_j - \langle y, x_i\rangle|^2\right) \\
0 &\leqslant \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_j - \langle y, x_i\rangle|^2 \\
0 &\leqslant \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2 \leqslant \|y\|^2$

Más aún, supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A$, si definimos $t_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_k\rangle|^2$, entonces $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión real creciente, y por la parte anterior se tiene que $t_n \leqslant \|y\|^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, la sucesión es creciente y acotada, por lo tanto $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Además $\lim_{n} \to \infty t_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2 \leqslant \|y\|^2$

(ii): Sea $y \in \boldsymbol{H}$, consideremos la familia de subconjuntos de la forma $E_n = \left\{x \in A / \langle y, x\rangle \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ con $n \in \mathbb{N}$, ahora bien, si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que E_k es infinito, entonces existe al menos una familia numerable $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de E_k

Así, para la sucesión $t_n = \sum_{j=1}^{n} | \left\langle y, x_j \right\rangle |^2$ se tiene que $n\dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} | \left\langle y, x_j \right\rangle |^2 = t_n$, (Por (i) y la definición de E_n).
Pues $\dfrac{1}{k} \leqslant | \left\langle y, x_j \right\rangle | \forall j = 1, \cdots, n$. Por lo que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión divergente.
Pero esto contradice la parte (i). De acá se sigue que E_n es infinito $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues el conjunto $E = \{x \in A / \langle y, x \rangle \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, es una unión de conjuntos finitos, por lo que es numerable.

(iii): Sean y, z un par de elementos cualesquiera en $\boldsymbol{H}$, consideremos los subconjuntos E_y, E_z. Tomando $x \in \boldsymbol{A}$ tal que $\langle y, x \rangle = 0$ y $\langle z, x \rangle = 0$, entonces $| \langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle} | = 0$.
Así

$$\bar{E} = \left\{ x \in \boldsymbol{A} / | \langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle} | \neq 0 \right\} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pero por (ii) $E_y \cup E_z$ es a lo sumo numerable. Ahora empleando las desigualdades de Holder y la parte (i), vemos que, para cualquier n con $\bar{E} = x_1, x_2, \cdots$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} | \langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle} | &\leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} | \langle y, x_i \rangle |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} | \langle z, x_i \rangle |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|y\| \|z\| \end{aligned}$$

De acá, tenemos que la siguiente serie converge absolutamente.

$$\sum_{x \in A} | \langle y, x_i \rangle \overline{\langle z, x_i \rangle} | = \sum_{i=1}^{\infty} | \langle y, x_i \rangle \overline{\langle z, x_i \rangle} |$$

Por tanto converge incondicionalmente, lo que, para series de números complejos implica su convergencia conmutativamente es equivalente a la convergencia absoluta. □

PROPOSICIÓN 1.2.3 (Colección De Vectores). *sea $\cup$ una colección de vectores en el espacio vectorial $\boldsymbol{H}$. Entonces existe un único subespacio B tal que.*

i) $\cup \subseteq B$

ii) *Sí existe $B' \subseteq B$ subespacio tal que $\cup \subseteq B'$ entonces: $B \subseteq B'$*

Demostración. Sea $\cup$ un subconjunto del espacio vectorial $\boldsymbol{H}$. Veamos que existe el subespacio.
Sea $\mathbb{D} = \{D \subseteq \boldsymbol{H} / D$ es subespacio vectorial y $\cup \subseteq D\}$. Ahora bien, consideremos el subconjunto $B = \cap_{D \in \mathbb{D}} D$.
De acá tenemos que B es un subespacio vectorial y claramente $\cup \subseteq B$, pues $\cup \subseteq D$, así, tenemos que se cumple (i), por otra parte.
Supongamos que B' es un subconjunto tal que, $\cup \subseteq B'$, entonces $\cup \subseteq \mathbb{D}$. Por lo que $\cap_{D \in \mathbb{D}} D \subseteq B'$, es decir $B \subseteq B'$
Sólo falta ver la unicidad.
Supongamos que existe un subespacio $\mathbb{C}$, tal que se cumplan las dos propiedades dadas, entonces como B también cumple las propiedades se tiene lo siguiente: $\mathbb{C} \subseteq B \subseteq \mathbb{C}$. Así $B = \mathbb{C}$ □

De esta proposición se desprende la definición de Espacio Generado por $\cup$ y lo denotamos por $S[\cup]$.

$$\boldsymbol{S}[\cup] = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, u_i \in \cup, i \in I, I \text{ subconjuntos de indices} \right\}$$

De acá podemos decir que para un espacio de Hilbert (en general para cualquier espacio vectorial), con una base B de vectores se tendrá que $\boldsymbol{S}[B] = H$. Es fácil deducir también que todo subconjunto ortonormal de vectores diferentes de cero dentro de un espacio de Hilbert, es también un subconjunto linealmente independiente.

El teorema siguiente nos ayudará a encontrar una base ortonormal para los espacios de Hilbert de dimensión finita.

TEOREMA 1.2.3 (Proceso De Gram-Schmidt)**.** *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert y sea $Y = \{y_k / n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de vectores linealmente independiente. Consideremos además las subfamilias $Y_n = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto finito ortonormal de vectores $Z_n = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ tal que $\boldsymbol{S}[Y_n] = \boldsymbol{S}[Z_n]$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n.

Sea $n = 1$, entonces $Y_1 = \{y_1\}$ es un vector distinto de cero, pues está contenido en un subconjunto linealmente independiente, es posible definir un nuevo vector $Z_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$ y considerar a $Z_1 = \{z_1\}$ como una familia ortonormal.

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$, de acá se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha y_1 =& \alpha \|y_1\| \frac{y_1}{\|y_1\|} \\ &= \alpha \|y_1\| Z_1 \\ &= \beta Z_1, \text{ donde } \beta = \alpha \|y_1\| \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

Por tanto $\boldsymbol{S}[y_1] = \boldsymbol{S}[Z_1]$

Para $1 < n$. para la familia $Y_{n-1} = \{y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}\}$ supongamos que existe un subconjunto ortonormal de vectores $Z_{n-1} = \{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\}$ tal que $\boldsymbol{S}[Y_{n-1}] = \boldsymbol{S}[Z_{n-1}]$, consideremos la familia $Y_n = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = Y_{n-1} \cup \{Y_n\}$ y el vector $Z'_n = Y_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle Z_i$, entonces para cada $z_j \in Z_{n-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle Z'_n, Z_j \rangle &= \langle y_n, z_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle \langle z_i, z_j \rangle \\ &= \langle y_n, z_j \rangle - \langle y_n, z_j \rangle \|z_j\|^2 \\ &= \langle y_n, z_j \rangle - \langle y_n, z_j \rangle \text{ pues } z \text{ es ortonormal} \\ &= 0 \end{aligned}$$

así, Z_n' es ortogonal a la familia Z_{n-1}.
Por otra parte, sí $'_n\| = 0$, entonces $Y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle Z_i$, por tanto; $Y_n \in S[Z_{n-1}]$.
Por hipótesis inductiva $Y_n \in S[Z_{n-1}]$, luego; Y_n puede expresarse como combinación lineal de $y_1, y_2, \cdots, y_n$, lo que genera una contradicción a la hipótesis de independencia.
Se tiene $\|Z_n'\| > 0$. Sea $Z_n = \dfrac{Z_n'}{\|Z_n'\|}$. Entonces $Z_n = Z_{n-1} \cup \{Z_n\}$ es un subconjunto ortonormal de vectores.
Por otro lado, si $\alpha_i \in \mathbb{F}, \forall i, i = 1, \cdots n$, entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i + \alpha_n Y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle Z_i + \|Z_n' Z_n \right)\end{aligned}$$

Luego tenemos que por hipótesis existe $\{\beta_1^{prime}, \beta_2^{prime}, \cdots, \beta_{n-1}^{prime}\} \subseteq \mathbb{F}$ tal que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i' Z_i$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i' Z_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle Z_i + \|Z_i' Z_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\beta_i' + \langle y_n, z_i \rangle \right) Z_i + \|Z_n'\| Z_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j, \text{ con } \beta_j = \beta_j' + \langle y_n, z_i \rangle \, \forall j = 1, \cdots n-1 \text{ y } \beta_n = \|Z_n\|\end{aligned}$$

Así, $\boldsymbol{S}[Y_n] = \boldsymbol{S}[Z_n]$ □

DEFINICIÓN 1.2.2 (Suma Directa)**.** Un espacio vectorial $\boldsymbol{X}$ se dice que es la suma directa de dos subespacios Y y Z de $\boldsymbol{X}$, se escribe: $\boldsymbol{X} = Y \oplus Z$, si cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ tiene una única representación $x = y + z, y \in Y, z \in Z$. Entonces Z es llamado el complemento algebraico de $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{x}$ y viceversa, Y y Z son llamados un par complementario de de subespacio en $\boldsymbol{X}$.

DEFINICIÓN 1.2.3 (Complemento Ortogonal)**.** Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert y $\boldsymbol{S}$ un subconjunto de $\boldsymbol{H}$. La colección de vectores $\boldsymbol{S}^{\perp} = \{y \in \boldsymbol{H}/y \perp \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}\}$ se denomina complemento ortogonal del subconjunto $\boldsymbol{S}$. Evidentemente $\boldsymbol{S} \perp \boldsymbol{S}^{\perp}$

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{H}$, entonces $\boldsymbol{S}^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\boldsymbol{H}$*

Con la definición anterior resulta sencillo probar esta proposición.

DEFINICIÓN 1.2.4 (Descomposición Interna)**.** Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces:

i) Una colección finita $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ de subespacios vectoriales de $\boldsymbol{H}$ es linealmente independiente si para todo $i = 1, \cdots, n$ se verifica $\mu_i \bigcap (\mu_1 + \mu_2, + \cdots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} \cdots + \mu_n) = \{0\}$, donde

$\mu_1 + \mu_2, + \cdots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} \cdots + \mu_n$ denota el subconjunto cuyos elementos tienen la forma $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, + \cdots + \boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{x}_{i+1} \cdots + \boldsymbol{x}_n$ con $\boldsymbol{x}_j \in \mu_j$ para toda $j = \{1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots n\}$

ii) Sí $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de subespacios vectoriales de $\boldsymbol{H}$ linealmente independiente, tal que $\boldsymbol{H} = \mu_1 + \mu_2, + \cdots + \mu_n$, entonces decimos que dicha familia forma una descomposición interna en suma directa para $\boldsymbol{H}$.

Ahora como una aplicación del proceso de Gram-Schmidt se presenta el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.4. *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert y μ un subespacio de $\boldsymbol{H}$ de dimensión finita. Entonces $\{\mu, \mu^{\perp}\}$ forma una descomposición interna en suma directa para $\boldsymbol{H}$, esto es, $\boldsymbol{H} = \mu \oplus \mu^{\perp}$*

Demostración. Debemos probar en primer lugar que $\mu \bigcap \mu^{\perp} = \{0\}$
En efecto,
Sea $\boldsymbol{x} \in \mu \bigcap \mu^{\perp}$, entonces $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ y por propiedad de producto interno $\boldsymbol{x} = 0$.
Como la dimensión de μ es finita, digamos n, se puede construir una base finita, digamos $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ de vectores ortonormales para μ, con lo que $w = \sum_{i=1}^{n} \langle Z, \boldsymbol{x}_i \rangle \boldsymbol{X}_i \in \mu$ para cualquier vector $\mathbb{Z} \in \boldsymbol{H}$ por (1.2.3). Entonces, si consideramos el vector $y = z - w = \mathbb{Z} - \sum_{i=1}^{n} \langle z, \boldsymbol{x}_i \rangle \boldsymbol{X}_i$, se tiene que para cada $\boldsymbol{X}_j \in \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$

$$
\begin{aligned}
\langle y, \boldsymbol{X}_j \rangle &= \langle z, \boldsymbol{x}_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle z, \boldsymbol{x}_i \rangle \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle \\
&= \langle z, \boldsymbol{x}_j \rangle - \langle z, \boldsymbol{x}_j \rangle \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j \rangle \\
&= \langle z, \boldsymbol{x}_j \rangle - \langle z, \boldsymbol{x}_j \rangle = 0
\end{aligned}
$$

Esto es que y es ortogonal a la base de μ entonces $y \perp \mu$.
Así, $y \in \mu^{\perp}$, luego, z tiene la representación $z = w + y$ con $w \in \mu$ y $y \in \mu^{\perp}$.
Por la parte anterior tenemos que $\boldsymbol{H} \subseteq \mu \oplus \mu^{\perp}$, pero la otra contención es inmediata; así, $\boldsymbol{H} = \mu \oplus \mu^{\perp}$ □

S1.3. PROYECCIONES

TEOREMA 1.3.1 (Proyecciones). *Sea $\boldsymbol{S}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$ para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$, existe un único elemento $y_0 \in \boldsymbol{S}$ tal que $\|\boldsymbol{x} - y_0\| = \inf\{\|\boldsymbol{x} - y\| : y \in \boldsymbol{S}\}$ el vector $y_0 \in \boldsymbol{S}$ se conoce como la proyección de $\boldsymbol{X}0$ sobre el subespacio $\boldsymbol{S}$.*

Demostración. Existencia:
Sea $\delta = \inf\{\|\boldsymbol{x} - y\| : y \in \boldsymbol{S}\}$ por definición de ínfimo es posible encontrar una sucesión $\{y_n\}_{n \geqslant 1}$ en $\boldsymbol{S}$ tal que $\delta_n \to \delta$, cuando $\delta_n = \|\boldsymbol{x} - y_n\|$, mostremos que es una sucesión de Cauchy, para ello escribiremos $y_n - \boldsymbol{x} = V_n$, tenemos $\|V_n\| = \delta_n$ y $\|V_n - V_m\| = \|y_n + y_m - 2\boldsymbol{x}\| = 2\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - \boldsymbol{x}\| \geqslant$

2δ. Así que $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \boldsymbol{S}$, además tenemos $y_n - y_m = V_n - V_m$. De aquí por la ley del paralelogramo (1.1.1), $\|Y_n - Y_m\|^2 = \|V_n - V_m\|^2 = \|V_n - V_m\|^2 + 2\left(\|V_n\|^2 + \|V_m\|^2\right) \leqslant -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)$ y $\delta_n \to \delta$ cuando $\delta_n = \|\boldsymbol{x} - y_n\|$ implica que $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy. Puesto que $\boldsymbol{H}$ es completo $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ converge, sea $y = \lim y_n$ se dice $y_n \to y \in \boldsymbol{H}$. Puesto que $y_0 \in \boldsymbol{S}$, tenemos que $\|\boldsymbol{x} - y\| \geqslant \delta$, también por $\delta_n \to \delta, \delta_n = \|\boldsymbol{x} - y\|$. Luego

$$\|\boldsymbol{x} - y\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - y_n\| + \|\boldsymbol{y}_n + y\| = \delta_n + \|\boldsymbol{y}_n - y\| \to \delta$$

. Esto demuestra que $\|\boldsymbol{x} - y\| = \delta$

Unicidad:

Asumamos que $y \in \boldsymbol{S}$ y que $y_0 \in \mu$ ambos satisfacen $\|\boldsymbol{x} - y\| = \delta$ y $\|\boldsymbol{x} - y_0\| = \delta$, y mostrando entonces que $y_0 = y$. Por la ley del paralelogramo nuevamente se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y - y_0\|^2 =& \|(y - \boldsymbol{x}) - (y_0 - \boldsymbol{x})\|^2 \\
=& 2\|y - \boldsymbol{x}\|^2 + 2\|y_0 - \boldsymbol{x}\|^2 - \|(y - \boldsymbol{x}) + (y_0 - \boldsymbol{x})\|^2 \\
=& 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y_0) - \boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}$$

A la derecha, $\frac{1}{2}(y + y_0) \in \boldsymbol{S}$. Así que; $\|\frac{1}{2}(y + y_0) - \boldsymbol{x}\| \geqslant \delta$, esto implica el lado de la mano derecha es menor ó igual que $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$. De aquí tenemos que la desigualdad $\|y - y_0\| \leqslant 0$. Claramente $\|y - y_0\| \geqslant 0$, así tenemos la igualdad y $y_0 = y$. □

Sobre un espacio $\boldsymbol{S}$ podemos denotar como $\boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})$ la proyección de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{S}$ para cada $\boldsymbol{x}$ en el espacio $\boldsymbol{H}$. Definiendo entonces el operador proyección $\boldsymbol{P}_s : \boldsymbol{H} \in \boldsymbol{S}$ tal que $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})$.

LEMA 1.3.1. *Sea $\boldsymbol{S}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$. Sea $y \in \boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$, entonces $y = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})$ si y sólo si $(\boldsymbol{x} - y) \perp \boldsymbol{S}$.*

Demostración. supongamos que $y = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})$, entonces $\|\boldsymbol{x} - y\| = \inf\{\|\boldsymbol{x} - z\| : z \in \boldsymbol{S}\}$ por el teorema anterior, sea además $z \in \boldsymbol{S}$ y $c \in \mathbb{C}$. Entonces $y + cz \in \boldsymbol{S} \Rightarrow \|\boldsymbol{x} - y\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x} - y + cz\|^2$, pero $\|\boldsymbol{x} - y + cz\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x} - y\|^2 + |c|^2\|z\|^2 - 2\boldsymbol{Re}\langle x - y, cz\rangle$

Luego, $|c|^2\|z\|^2 - 2\boldsymbol{Re}\langle x - y, cz\rangle \geqslant 0$. En particular si $c = b\langle y - \boldsymbol{x}, z\rangle, \quad b \in \mathbb{R}$, entonces $|c|^2 = b^2|\langle \boldsymbol{x} - y, z\rangle|^2$, además

$$\begin{aligned}
\langle y - \boldsymbol{x}, cz\rangle =& \overline{\langle cz, x - y\rangle} \\
=& c\overline{\langle z, x - y\rangle} \\
=& b\overline{\langle x - y, z\rangle \, \langle z, x - y\rangle} \\
=& b\overline{\langle x - y, z\rangle} \, \langle x - y, z\rangle \\
=& b|\langle x - y, z\rangle|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $2\boldsymbol{Re}\langle x - y, cz\rangle = 2b|\langle x - y, z\rangle|^2$, de tal forma que $b|\langle x - y, z\rangle|^2 \left(b^2\|z\|^2 - 2b\right) \geqslant 0, \forall b \in \mathbb{R}$

De acá se desprenden dos caso.
caso 1:$\|z\| > 0$. Sea $b > 0$ tal que $0 < b\,\|z\| < 2$, se tiene que:

$$b^2\,\|z\| - 2b < 0$$
$$|\langle x-y,z\rangle|^2\,(b^2\,\|z\|^2 - 2b) < 0$$

pero tenemos que $b|\,\langle x-y,z\rangle\,|^2\,\left(b^2\|z\|^2 - 2b\right) \geqslant 0$
Así es que $b|\,\langle x-y,z\rangle\,|^2\,\left(b^2\|z\|^2 - 2b\right) = 0$, luego $|\langle x-y,z\rangle| = 0$.
Entonces $\langle x-y,z\rangle = 0$, es decir $(x-y) \perp z$
Caso 2:$\|z\| = 0$, de manera inmediata se tiene que $(x-y) \perp z$. Así, de estos dos casos se tiene $(x-y) \perp z$ para toda $z \in \boldsymbol{S}$. Entonces $(x-y) \perp S$
en sentido inverso supongamos que $(x-y) \perp \boldsymbol{S}$. Sea $z \in \boldsymbol{S}$ se tiene por hipótesis que $\langle x-y,z\rangle = 0$, por lo tanto $\boldsymbol{Re}\,\langle x-y,z\rangle = 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &\leqslant \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\boldsymbol{Re}\,\langle x-y,z\rangle \\
&= \|x-y-(z-y)\|^2 \\
&= \|x-z\|^2
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|x-y\|^2 \leqslant \|x-z\|^2$$

, entonces

$$\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$$

. Esto implica $\|x-y\| \leqslant \inf\{\|x-z\| : z \in \boldsymbol{S}\}$. Pero $y \in \boldsymbol{S}$ entonces se tiene lo buscado □

LEMA 1.3.2. *Si S es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$ entonces $(x - \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})) \perp S$ para toda $x \in \boldsymbol{H}$*

TEOREMA 1.3.2. *Si $\boldsymbol{S}$ es es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$, entonces para toda $x \in \boldsymbol{H}$, existe una única representación $x = y + z$, donde $y \in \boldsymbol{S}$ y $z \in \boldsymbol{S}^{\perp}$. Esta representación única está dada por $y = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{x})$ y $z = x - y$. Es decir, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{S} \bigoplus \boldsymbol{S}^{\perp}$*

COROLARIO 1.3.1. *Si $\boldsymbol{S}$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$, entonces $(\boldsymbol{S}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{S}^{\perp\perp} = \boldsymbol{S}$.*

Demostración. Es facil ver que $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{S}^{\perp\perp}$.
Ahora si $x \in \boldsymbol{S}^{\perp\perp}$, entonces según el teorema anterior,existe $y \in \boldsymbol{S}^{\perp}(y = P_S(z))$ y existe $z \in \boldsymbol{S}^{\perp}$ tal que $z = x - y$. Entonces notamos que $z \in \boldsymbol{S}^{\perp\perp}$ pues $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{S}^{\perp\perp}$ y $\boldsymbol{S}^{\perp\perp}$ es un subespacio de H. De modo que $z = 0$ (dado que $z \in \boldsymbol{S}^{\perp} \bigcap \boldsymbol{S}^{\perp\perp} = \{0\}$), por tanto $x = y \in \boldsymbol{S}$.Luego $\boldsymbol{S}^{\perp\perp} \subseteq \boldsymbol{S}^{\perp}$

□

S1.4. TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ

En esta sección son fundametales los conceptos de ortogonalidad y ortonormalidad, una teorema importante será introducida en esta sección nos referimos al Teorema de representación de Riesz,este resultado nos será de mucha importancia en el siguiente capítulo.

DEFINICIÓN 1.4.1. Si $\boldsymbol{H}$ es un espacio de Hilbert sobre un campo escalar $\mathbb{F}$ (real o complejo), entoces a la aplicación $f : \boldsymbol{H} \to \mathbb{F}$ lo denominamos FUNCIONAL .
diremos que un funcional es lineal si para toda $x, y \in \boldsymbol{H}$ y $\alpha \in \mathbb{F}$

i) $F(x + y) = F(x) + F(y)$

ii) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

Además diremos que el funcional lineal es continuo en x si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_x(\epsilon)$ tal que $\|x - x'\| < \delta_x(\epsilon)$ entonces $|F(x) - F(x')| < \epsilon$ Diremos que F es continuo si el funcional es continuo en todo los puntos $x \in \boldsymbol{H}$

DEFINICIÓN 1.4.2. Un funcional F sobre $\boldsymbol{H}$ se dice que es acotado si existe $M > 0$ tal que $|F(x)| \leqslant M \|x\|$ para toda $x \in \boldsymbol{H}$

TEOREMA 1.4.1. *Sea M un subconjunto de un espacio metrico (x, d) y $\overline{M}$ la clausura*

i) $x \in \overline{M}$ si y solo si, existe una sucesión $(x_n) \in M$ tal que $x_n \to x$

ii) M es cerrado si y solo si $x_n \in M, x_n \to x$ implica que $x \in M$

Demostración. Ver (11) □

COROLARIO 1.4.1. *Sea F un funcional lineal acotado entonces*

i) $x_n \to x$ implica $Fx_n \to Fx$

ii) El espacio nulo $N(F)$ es cerrado.

Demostración. (ii) Para toda $x \in \overline{N}(F)$, existe una sucesión $(x_n) \in N(F)$ tal que $x_n \to x$ por el teorema 1.4.1 parte (i), por lo tanto $Fx_n \to Fx$ por la parte (i). Tambíen $Fx = 0$ pues $Fx_n = 0$ asi es que $x \in N(F)$ púes $x \in \overline{N}(F)$ fué arbitrario por lo tanto, $N(F)$ es cerrado □

COROLARIO 1.4.2. *$N(F)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Sea F un funcional lineal, tomemos $x_1, x_2 \in N(F)$. Entonces $F(x_1) = F(x_2) = 0$ pues F es lineal para algunos escalares α, β, tenemos $F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2) = 0$, esto muestra que $\alpha F(x_1) + \beta F(x_2) \in N(F)$. Por lo tanto $N(F)$ es un espacio vectorial □

TEOREMA 1.4.2 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de hilbert y Fun funcional lineal continuo sobre $\boldsymbol{H}$. E ntonces existe un único vector $y \in \boldsymbol{H}$ tal que $F(x)$ para tode $x \in \boldsymbol{H}$*

Demostración. Veamos que F es ua representación de

$$F(x) = \langle x, y \rangle \text{ para toda } x \in \boldsymbol{H}$$

observemos lo siguiente, si $F = 0$ entonces $F(x) = \langle x, y \rangle$ para toda $x \in \boldsymbol{H}$.
Tomemos $y = 0$, sea $F \neq 0$.
Para motivar la idea de la prueba, nos podriamos preguntar cual propiedad tiene que tener y y si existe una representación $F(x) = \langle x, y \rangle$
Primero: Sea $F \neq 0$, Para toda $y \neq 0$ púes en caso contrario tendríamos que $F(x) = 0$ que no es más que el caso anterior

Segundo: Como $F(x) = \langle x, y \rangle$ para toda $x \in H$, $\langle x, y \rangle = 0$ para toda $x \in H$ por lo que $F(x) = 0$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$ como $x \perp y$ y $x \in N(F)$ (espacio nulo de F) por tanto $y \perp N(F)$.
Esto sugiere que debemos considerar $N(F)$ y su complemento ortogonal $N(F)^{\perp}$.
El $N(F)$ es un subespacio vectorial y además cerrado, $F \neq 0$ implica $N(F) \neq \boldsymbol{H}$ púes $N(F)^{\perp} \neq 0$ por la proyeccion del teorema (1.2.3).
Por tanto $N(F)^{\perp}$ contiene a $y_0 \neq 0$

Así es que $v = F(x)y_0 - F(y_0)x$ cuando $x \in \boldsymbol{H}$ es arbitrario.
Luego aplicando F,obtenemos lo siguiente

$$F(v) = F(x)F(y_0) - F(y_0)F(x) = 0$$

esto prueba que $v \in N(F)$.
Por tanto $y_0 \perp N(F)$.
Ahora bien tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, y_0 \rangle &= \langle F(x)y_0 - F(y_0)x, y_0 \rangle \\ &= \langle F(x)y_0, y_0 \rangle - \langle F(y_0)x, y_0 \rangle \\ &= F(x) \langle y_0, y_0 \rangle - F(y_0) \langle x, y_0 \rangle \end{aligned}$$

Noté que $\|y_0\|^2 = \langle y_0, y_0 \rangle \neq 0$ ahora veamos que $F(x) \langle y_0, y_0 \rangle - F(y_0) \langle x, y_0 \rangle = 0$
De acá se tiene que $F(y_0) \langle x, y \rangle = F(x) \langle y_0, y_0 \rangle$.
Implica que

$$F(x) = \frac{F(y_0) \langle x, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle}$$

esto lo podemos escribir como $F(x) = \langle x, y \rangle$ cuando

$$y = \frac{\overline{F(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0$$

pues $x \in \boldsymbol{H}$ es arbitrario.

Ahora probemos que y es único en $F(x) = \langle x, y \rangle$. Supongamos que para $x \in \boldsymbol{H}$

$$F(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle \text{ entonces } \langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \text{ para toda } x \in \boldsymbol{H}$$

Escogiendo en particular $x = y_1 - y_2$ se tiene que $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = \|y_1 - y_2\|^2 = 0$ Por lo tanto $y_1 - y_2 = 0$ así es que $y_1 = y_2$ es único □

TEOREMA 1.4.3. *Un funcional lineal es continuo sobre $\boldsymbol{H}$ si y solo si es acotado*

***Demostración*.** □

TEOREMA 1.4.4. *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \boldsymbol{H} \to \mathbb{F}$ un funcional lineal. Entonces F es continua si y solo si existe $y \in \boldsymbol{H}$ único tal que $F(x) = \langle x, y \rangle$ para toda $x \in \boldsymbol{H}$*

***Demostración*.** Veamos el directo, su demostración no es más que el teorema de representación de Riez.

Reciprocamente Si para el funcional lineal F se tiene que $F(x) = \langle x, y \rangle$ para alguna $y \in \boldsymbol{H}$ entonces $|F(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (por Cauchy Shawrtz) por tanto F es acotada y con ella continua □

CAPÍTULO 2

ESPACIOS DE HILBERT CON NÚCLEO REPRODUCTIVO

S2.1. NÚCLEO REPRODUCTIVO

En este capítulo, a menos que se especifique lo contrario, E denota siempre un conjunto y H un espacio de Hilbert de funciones $f :\longrightarrow \mathbb{F}$ sobre el campo $\mathbb{F}$ (Complejo o Real)

DEFINICIÓN 2.1.1 (Nucleo reproductivo)**.** La funcion $K : E \times E \to \mathbb{F}$ es llamada **NUCLEO REPRODUCTIVO** $(n.r)$,de H si satisface las condiciones siguientes

i) para toda $y \in E$ la funcion $K(\cdot, y) : E \to \mathbb{F}$, pertenece a H

ii) **PROPIEDAD REPRODUCTIVA** Para toda $y \in E$ y toda funcion $f \in H$,

$$f(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle$$

tambíen denotaremos a los núcleos reproductivos mediante $K(\cdot, y) = K_y(\cdot) = K_y$ con $y \in E$

OBSERVACIÓN. i) $K(x, y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x \rangle$

ii) si el nùcleo reproductivo K es real (esto es $K(x, y) \in \mathbb{R}$ para todo $x, y \in E$) entonces $K(x, y) = K(y, x)$ luego $K(y, \cdot) \in H$, para toda $y \in E$

EJEMPLO 2.1.1. Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ para un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos definir una funcion $X : I_n \to \mathbb{R}$ tal que $x(i) = x_i$, para toda $i \in I_n$; consideremos H_n^2 como el espacio de todas estas funciones (observamos que el rango de toda función en H_n^2 està contenido en $\mathbb{R}^n$). Entonces en H_n^2 introducimos el producto interno en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x(i) = x_i$ y $y(i) = x_i$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

El espacio H_n^2 es un espacio de Hilbert. Ahora bien, si $K_n : I_n \times I_n \to \mathbb{R}$. tiene la regla $K_n(i, j) = \delta_{ij}$, entonces K_n es el nùcleo reproductivo para $\mathbb{R}^n$ verifiquemos este hecho

i) sea $j \in I_n$ veamos que $K(\cdot, j) \in H_n^2$.
En efecto,
$i \in I_n$, $K(i, j) = \delta_{ij}$, $K(\cdot, j) : I_n \to \mathbb{R}$ por lo que $K(\cdot, j) \in H_n^2$

ii) $j \in I_n,\ x \in H_n^2$ por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x(\cdot), K(\cdot, j)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i K(i,j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij}\\ &= x_j\end{aligned}$$

por otro lado se tiene que $x(j) = x_j$, así es que $x(j) = \langle x(i), K(i,j)\rangle$

EJEMPLO 2.1.2. Sea t un número real positivo. Se define la clase H_t de trayectorias continuas $q : [0,t] \to \mathbb{R}$, tal que $q(t) = 0$ y $q'(s)$ existe casi en todas partes y es cuadrado integrable (en el sentido de Riemann) Entonces la expresion

$$\langle q_1, q_2\rangle = \int_0^t q'(s) q_2'(s) ds$$

para cualquiera $q_1, q_2 \in H_t$ define un producto interno, en efecto;
comprobemos la linealidad: Sean $q_1, q_2, q_3 \in H_t, a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle aq_1 + bq_2, q_3\rangle &= \int_0^t (aq_1' + bq_2')(s) q_3'(s) ds\\ &= \int_0^t (aq_1'(s) + bq_2'(s)) q_3'(s) ds\\ &= \int_0^t (aq_1'(s) q_3'(s) + bq_2'(s) q_3'(s)) ds\\ &= \int_0^t (aq_1'(s) q_3'(s)) ds + \int_0^t (bq_2'(s) q_3'(s)) ds\\ &= a\int_0^t (q_1'(s) q_3'(s)) ds + b\int_0^t (q_2'(s) q_3'(s)) ds\\ &= a\langle q_1, q_3\rangle + b\langle q_2, q_3\rangle\end{aligned}$$

Veamos ahora la antisimetría
por un lado tenemos que

$$\langle q_1, q_2\rangle = \int_0^t (q_1' q_2')(s) ds$$

por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}\langle q_2, q_1\rangle &= \int_0^t (q_2' q_1')(s) ds\\ &= \int_0^t (q_1' q_2') ds\\ &= \int_0^t \overline{q_1' q_2'}(s) ds\\ &= \overline{\langle q_1, q_2\rangle}\end{aligned}$$

Solo falta verificar que $\langle q_1, q_2\rangle \geqslant 0$
Si $q = 0$ (es claro que $q = 0 \in H_t$) entonces $\langle q, q\rangle = 0$

Por otra parte,
si $\langle q, q\rangle = 0$ esto es $\int_0^t q'(s)q'(s)ds = \int_0^t [q(s)']^2 ds = 0$ Asi se sigue que q' es cero casi en todas partes, luego q es constante en [0,t] esto es por continuidad, pero $q(t) = 0$, entonces $q(s) = 0$ para todo $s \in [0, t]$ Ahora, bien tenemos que el espacio H_t posee núcleo reproductivo
En efecto; Sea $K : [0, t] \times [0, t] \to \mathbb{R}$ la funcion dada por

$$K(s_1, s_2) = t - \text{máx}\{s_1, s_2\}$$

Define el núcleo reproductivo para el espacio H_t Para $s_2 \in [0, t]$ es claro que $K(\cdot, s_2) \in H_t$ pues $K(\cdot, s_2) = 1 - \text{máx}\{s, s_2\} = K(\cdot, s_2) = 0$ Ahora , sea $s_2 \in [0, t]$ y $K(s, s_2) = t - \text{máx}\{s, s_2\}$ Si $s < s_2$ entonces $\frac{d}{ds}K(s, s_2) = \frac{d}{ds}(t - \text{máx}\{s, s_2\}) = \frac{d}{ds}K(s, s_2) = 0$ y si $s_2 < s$ se tiene que $K(s, s_2) = t - s$ y $\frac{d}{ds}K(s, s_2) = -1$ de tal manera que para $q \in H_t$ se obtiene que

$$\langle q(\cdot), K(\cdot, s_2)\rangle = \int_0^t q'(s)\frac{d}{ds}K(s, s_2)ds = -\int_0^t q'(s)ds = q(s_2)$$

S2.2. Propiedades básicas del núcleo reproductivo

Consideremos un espacio de Hilbert H de funciones definidas sobre E, con norma $\|\cdot\|$ y el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. En esta sección enunciaremos algunas propiedades básicas de un núcleo reproductivo K definido sobre el espacio de Hilbert H .

Proposición 2.2.1 (Unicidad). *Si un núcleo reproductivo existe entonces es único.*

Demostración. Sea K el núcleo reproductivo para el espacio de Hilbert H . Supongamos que existe K' otro núcleo reproductivo para el espacio de Hilbert H
Sea $y \in E$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|K_y - K'_y\right\|^2 &= \left\langle K_y - K'_y, K_y - K'_y\right\rangle \\
&= \left\langle K_y - K'_y, K_y\right\rangle - \left\langle K_y - K'_y, K'_y\right\rangle \\
&= \left\langle K_y, K_y\right\rangle - \left\langle K'_y, K_y\right\rangle - (\left\langle K_y, K'_y\right\rangle - \left\langle K'_y, K'_y\right\rangle) \\
&= K(y, y) - K'(y, y) - K(y, y) + K'(y, y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como H es un espacio de Hilbert, es decir; es normado se tiene que $K(\cdot, y) = K'(\cdot, y)$ para todo $y \in E$. □

Para $y \in E$ definimos la funcional $G_y : H \to \mathbb{F}$, con la regla $f \longmapsto G_y(f) = f(y)$ para toda $y \in H$. El siguiente teorema es de mucha importancia pues en el se muestra una condición necesaria y suficiente para la existencia del núcleo reproductivo.

Teorema 2.2.1 (Existencia). *El espacio de Hilbert H posee núcleo reproductivo K, si y soso si, para toda $y \in E$, La funcional de evaluación G_y es continua sobre todo el espacio de Hilbert.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que K es un núcleo reproductivo de H.
Sea $y \in E$ y consideremos la funcional de evaluacion $G_y(f) = f(y)$. Debemos probar que la funcional G_y es continua, como $G_y(f) = f(y)$ tenemos que para toda $f \in H$

$$\begin{aligned}\left|G_y(f)\right| &= |f(y)| \\ &= |\langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle| \\ &\leqslant \|f\| \, \|K(\cdot, y)\|\end{aligned}$$

ahora por otra parte al hacer uso de la propiedad reproductiva nos queda que $\|K(\cdot, y)\| = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, y)\rangle^{\frac{1}{2}} = K(y, y)^{\frac{1}{2}}$. de tal forma que $\left|G_y(f)\right| \leqslant \|f\| \, K(y, y)^{\frac{1}{2}}$ de lo que se concluye que G_y es acotado y por tanto continua
($\Longleftarrow$) Sea $y \in E$, supongamos que G_y es la funcional lineal continiua, entonces por el Teorema de Representación de Riez, existe una única funciòn $g_y \in H$ tal que

$$f(y) = \left\langle f(\cdot), g_y(\cdot)\right\rangle = \left\langle f, g_y\right\rangle$$

De manera natural se toma a $K(\cdot, y) = g_y(\cdot)$ como el núcleo reproductivo de H

DEFINICIÓN 2.2.1. Una función es derivable en un punto $z_o \in \Omega$ (Ω es un conjunto en el plano complejo) si existe

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

DEFINICIÓN 2.2.2. Una función f es **holomorfa ó analítica** si es derivable en cada punto de su dominio.

$\square$

Consideremos el espacio de Hilbert L_2

EJEMPLO 2.2.1. Los espacios $L_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ no tienen núcleo reproductivo. Consideremos el intervalo $[0, 1]$ y la medida de Lebesgue en este intervalo sobre la σ-álgebra de Borel.

Consideremos la función $\delta_0(x) = \delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$, entonces $\|\delta_0\| = 0$.

Como el espacio es L_2 la norma está dada por

$$\|\delta_0\| = \left(\int_{[0,1]} |\delta_0|^2 \, d\mu\right)^{1/2}.$$

Por otra parte, $|\delta_0(0)| = 1 \geqslant 0$, pero $|\delta_0(0)| \geqslant M \|\delta_0\|$ para toda $M > 0$, por definición de acotación. Pero $1 = |\delta_0(0)| \geqslant M \|\delta_0\| = 0$, es decir que este funcional no es acotado y por tanto no es continuo. Así, por el teorema de existencia se tiene que $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ no posee núcleo reproductivo.

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea H un espacio de funciones con producto interno definido. Si H posee núcleo reproductivo entonces cualquier subespacio cerrado H_1 de H también posee núcleo reproductivo. Más aún, si K es n.r de H y K_1, es el de H_1, entonces $K_1(\cdot, y) = P_{H_1}(K(\cdot, y))$, para toda $y \in E$*

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert y K su núcleo reproductivo, consideremos un subespacio cerrado H_1 de F. Sea E el conjunto donde están definidas las funciones de F. Si $y \in E$, entonces la correspondencia lineal$f \longmapsto f(y)$ es acotada para toda $f \in H$, particularmente para $f \in H_1$. Entonces por el teorema de existencia, se tiene que existe K_1 núcleo reproductivo correspondiente a la clase H_1 □

EJEMPLO 2.2.2. Sea D la bola abierta unitaria sobre $\mathbb{C}$. Definamos la clase H de funciones complejas f sobre D analíticas tales que

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta$$

existe y es finito. Entonces la expresión

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt$$

define un producto interior en F. En efecto, Sean $f, g, h \in F$ y $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\langle af + bg, h \rangle &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (af + bg)(re^{it})\overline{h}(re^{it})dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (af(re^{it}) + bg(re^{it}))\overline{h}(re^{it})dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (af(re^{it}))\overline{h}(re^{it}) + (bg(re^{it}))\overline{h}(re^{it})dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} af(re^{it})\overline{h}(re^{it})dt + \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} bg(re^{it})\overline{h}(re^{it})dt \\
&= lim_{r\to 1} \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{h}(re^{it})dt + \lim_{r\to 1} \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{it})\overline{h}(re^{it})dt \\
&= a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

ahora veamos la antisimetria, por un lado se tiene que

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt$$

por otra parte;

$$\begin{aligned}
\langle g, f \rangle &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{it})\overline{f}(re^{it})dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(re^{it})\overline{f}(re^{it})}dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt \\
&= \overline{\langle f, g \rangle}
\end{aligned}$$

Así se tiene que $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ Luego, $\overline{\langle g, f\rangle} = \langle f, g\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{f}(re^{it})d\theta \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2 d\theta \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Así, $\langle f, f\rangle \geqslant 0$, si $f = 0$, entonces $\langle f, f\rangle = 0$ Por lo tanto $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interior Sea z en D, si $f \in F$ entonces, por ser también analítica, $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

y si $|z| \leqslant r < 1$, entonces

$$|f(z)|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |z|^{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n},$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta,$$

ahora bien definamos $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f(z)|^2)^{1/2}$, Ahora como $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$por tanto

$$|f(z)| \leqslant \|f\|.$$

Luego la funcional $f \mapsto f(z)$ es continua para cada $z \in D$, entonces H posee núcleo reproductivo. Este espacio es conocido como el **ESPACIO H^2 DE HARDY** .

EJEMPLO 2.2.3. Sea D la bola abierta unitaria sobre $\mathbb{C}$. Consideremos el espacio A^2 de todas las funciones complejas analíticas sobre D y cuadrado integrables, es decir,

$$A^2 = \{f \in F(D) : \int\int_D |f(z)|^2 \, dA(z) < \infty\}$$

En A^2 el producto interior queda definido

$$\langle f, g\rangle = \int\int_D f(x+iy)\overline{g(x+iy)dxdy}$$

Veamos que A^2 es un subespacio cerrado de L^2_D
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesion en A^2 convergente a una función $f \in L^2_D$ y z_0 un elemento en D,entonces existe un número $r > 0$ tal que el Disco $\bar{D}_r(z_0) = \{z : |z_0 - z| \leqslant r\} \subset D$, toda función en A^2 es armonica en D por hipótesis. Ahora para toda $m, n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leqslant \frac{1}{(r\pi)^2}\int\int_{\bar{D}_r(z_0)} |f_n(z) - f_m(z)| \, dxdy \leqslant \frac{1}{(r\pi)^2}\int\int_D |f_n(z) - f_m(z)| \, dxdy$$

aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene lo siguiente

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leqslant \frac{1}{r\pi^{3/2}} \|f_n - f_m\|$$

, luego, $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número $g(z_0)$. Donde g es la función definida en D como $g(z) = \lim f_n(z)$ como es limite de funciones analíticas se tiene que g es analítica, entonces $g = f$ casi seguramente. De acá se tiene que A^2 es cerrado. Ahora bien nos intersa, saber si esta clase posee núcleo reproductivo.
En efecto;
Para $z \in \overline{D}$ y $f \in A^2$

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leqslant \frac{1}{\pi^2 r} \int\int_{D_r(z)} |f(z)|\, dxdy \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^2 r} (\int\int_{D_r(z)} |f(z)|\, dxdy)^{1/2} (\int\int_{D_r(z)} 1dxdy)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^2 r} \|f\| \, (r^2\pi)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} r} \|f\|
\end{aligned}$$

y la constante r solo depende de z, entonces la funcional $f \longmapsto f(z)$ es continua,luego A^2 posee nùcleo reproductivo. A este clase se le conoce como el **ESPACIO A^2 DE BERGMAN** pues fue Bergman quien descubrió que esta clase poseia n.r

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Si K es el n.r. para el espacio de Hilbert H , entonces para todo par $x, y \in E$ se tiene*

i) $K(x, x) \geqslant 0$,

ii) $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$,

iii) $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x)K(y, y)$.

Demostración. Para verificar (i), consideremos que $K(\cdot, x) \in H$ y

$$0 \leqslant \|K(\cdot, x)\|^2 = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, x)\rangle = K(x, x).$$

Ahora bien,$K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x)\rangle = \overline{\langle K(\cdot, x), K(\cdot, y)\rangle} = \overline{K(y, x)}$, lo cual prueba (ii). Por último,

$$\begin{aligned}
|K(x, y)|^2 &= |\langle K(\cdot, y), K(\cdot, x)\rangle|^2 \\
&\leqslant \|K(\cdot, y)\|^2 \|K(\cdot, x)\|^2 \\
&= K(x, x)K(y, y).
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.2.4. *Si el espacio de Hilbert H con núcleo reproductivo K es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert más grande H', si $f \in H$ es la proyección del elemento h de H' sobre H, entonces para todo $y \in E$,*

$$f(y) = \langle h(\cdot), K(\cdot, y)\rangle$$

, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior de H

Demostración. Sea el H_1 un espacio de Hilbert y H un subespacio cerrado con núcleo reproductivo K. Consideremos un elemento de H' digamos h y la descomposición $h = f + g$, donde g es ortogonal a el espacio de Hilbert H y $f \in H$ es la proyección del elemento h sobre H esto es $P(h) = f, f \in H$ y $f(y) = \langle h, K_y \rangle$. Para $y \in E$ tomemos la función $K(\cdot, y) \in F$, luego

$$\begin{aligned}\langle h(\cdot), K(\cdot, y)\rangle &= \langle (f+g)(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \\ &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle + \langle g(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \\ &= f(y) + 0 \\ &= f(y)\end{aligned}$$

por la propiedad reproductiva y por la ortogonalidad de g con H □

PROPOSICIÓN 2.2.5. *Si H posee un núcleo reproductivo K y si $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ es un sistema ortonormal numerable en H, entonces, para toda sucesión de números $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$$

, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\,|g_n(x)| \leqslant K(x,x)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2)^{1/2}$$

Demostración. haciendo uso de la generalización de la desigaldad de Hölder se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\,|g_n(x)| \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2)^{1/2}$$

donde $g_n(x) = \langle g_n(\cdot), K(\cdot, x)\rangle$
Ahora por otro lado haciendo uso de la desigualdad de Bessel, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g_n(\cdot), K(\cdot, x)\rangle|^2 \\ &\leqslant \|K(\cdot, x)\|^2 \\ &= K(x,x)\end{aligned}$$

luego;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\,|g_n(x)| &\leqslant (\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|^2)^{1/2}\\ &\leqslant (\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2)^{1/2}K(x,x)^{1/2}\\ &= K(x,x)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

□

*S*2.3. MATRICES POSITIVAS Y NÚCLEOS REPRODUCTIVOS

Supongamos que E tiene cardinalidad finita N. Una funcion $K : E\times E\to\mathbb{F}$, determina una transformación matricial de dimension menor o igual a N, definida en $\mathbb{F}^N$, en el siguiente sentido. Si $y_1, y_2, \ldots, y_N$ elementos de E, entoces es posible introducir una matriz $\mathbf{K}$ =$[K(y_i,y_j)]_i, j$. Tomemos un vector $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N)\in\mathbb{F}^N$, si la forma cuadrática
$\overline{\xi}\mathbf{K}\,\xi^t=\sum_{i,j=1}^{N}K(y_i,y_j)\overline{\xi}_i\xi_j$
con $\xi_j\in\mathbb{F}, j=1,2,\ldots,n$ es no negativa, y es nula sólo si $\xi_j=0$,entonces decimos que la función K es una **MATRIZ POSITIVA** . De manera general, para cualquier conjunto E, la función $K : E\times E\to\mathbb{F}$ se denomina **MATRIZ POSITIVA** , si para cualquier número finito de elementos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de E, la forma cuadrática $\sum_{i,j=1}^{n}K(y_i,y_j)\overline{\xi}_i\xi_j$, con $\xi_j\in\mathbb{F}$, $j=1,2,\ldots,n$, es no negativa, y es nuyla sólo si $\xi_j=0$, para toda $j=1,2,\ldots,n$.

PROPOSICIÓN 2.3.1. *Un núcleo K definido en espacio de Hilbert H es una matriz positiva.*

Demostración. Sea K el n.r. del espacio Hilbert H. Si $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, son escalares en $\mathbb{F}$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son elementos de H, entonces para la función $x\mapsto\sum_{j=1}^{n}K(x,y_j)\xi_j$ de$H$ se tiene que

$$\begin{aligned}0\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{n}K(\cdot,y_j)\xi_j\right\|^2 &= \left\langle\sum_{j=1}^{n}K(\cdot,y_j)\xi_j,\sum_{i=1}^{n}K(\cdot,y_i)\xi_i\right\rangle\\ &=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{\xi}_i\xi_j\left\langle K(\cdot,y_j),K(\cdot,y_i)\right\rangle\\ &=\sum_{i,j=1}^{n}K(y_i,y_j)\overline{\xi}_i\xi_j \qquad \text{según la propiedad reproductiva.}\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.3.1. *A toda matriz positiva $K : E\times E\to\mathbb{C}$ corresponde una única clase de funciones con una única norma determinada, formando un espacio de Hilbert y admitiendo a K como su núcleo reproductivo. Esta clase es denotada por $H(K)$, y es llamada el* **ESPACIO DE HILBERT CON N.N.** *K* **GENERADO POR LA MATRIZ POSITIVA** *K* .

Demostración. Consideremos la clase H_0 de funciones $f : E \to \mathbb{C}$ definidas por la representacion unica

$$f(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j K(x, y_j)$$

$x \in E$ con $K : E \times E \to \mathbb{C}$ una matriz positiva, J un subconjunto de indices finito, $\alpha_j \in \mathbb{C}, y_j \in E, j \in J$ Ahora bien, si $f \in H_0$ podemos definir sobre cada clase una norma

$$\|f\|_0^2 = \left\| \sum_{j\in J} \alpha_j K(\cdot, y_j) \right\|_0^2 = \sum_{i,j\in J} K(y_i, y_j)\overline{\alpha_i}\alpha_j$$

Si $f, g \in H_0$, el producto interno tiene la forma

$$\langle f, g\rangle_0 = \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j K(\cdot, y_j), \sum_{i\in I} \alpha_i^* K(\cdot, y_i^*) \right\rangle_0 = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} K(y_i^*, y_j)\overline{\alpha_i^*}\alpha_j$$

luego,sea $f \in F_o$ entonces si $y \in E$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_0 &= \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j K(\cdot, y_j), K(\cdot, y) \right\rangle_0 \\
&= \sum_{j\in J} \alpha_j \left\langle K(\cdot, y_j), K(\cdot, yj) \right\rangle_0 \\
&= \sum_{j\in J} K(y, y_j) \\
&= f(y)
\end{aligned}$$

entonces K es el núcleo reproductivo para la clase H_0,pero esta clase no es completa por esta razón aun no es un Espacio de Hilbert. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ en H_0 y un elemento $y \in E$ $|f_n(y) - f_m(y)| = \left|\langle f_n(\cdot) - f_m(\cdot), K\rangle_0\right| \leqslant \|f_n - f_m\|_0 \|K(\cdot, y)\|_0$ de acá se tiene que la sucesión de numeros complejos $\{f_n(y)\}_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy y por tanto convergente (por ser el espacio complejo) de manera que podemos definir una función $f : E \to \mathbb{C}$ tal que $f_(y) \longmapsto f(y)$ consideremos de esta manera la clase $H(K)$ de funciones limítes de sucesiones de Cauchy en H_0. Por lo tanto si $f, g \in H(K)$ entonces existen $\{f_n(y)\}_{n\geqslant 1}$ y $\{g_n(y)\}_{n\geqslant 1}$ sucesiones de Cauchy en H_0 convergentes a f, g respectivamente

Sobre esta clase $H(K)$ definimos un producto interno y una norma mediante las siguientes expresiones

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_0$$

y

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|f\|_0^2 \text{ respectivamente}$$

Observemos que K es el núcleo reproductivo de la clase $H(K)$ Si $f \in H(K)$ y $\{f_n(y)\}_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en H_0 convergente (puntualmente) a f entonces

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{n\to\in\infty} f_n(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_0 \\ &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \text{ para cada } y \in E \end{aligned}$$

Ahora veamos la unicidad, si H es un espacio de Hilbert de funciones que admite a K como su núcleo reproductivo entonces $H_0 \subset H$, pues los elementos de H_0 de funciones $K(\cdot, y)$ pertenecientes a H,ahora si $\|\cdot\|_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ definen la norma y el producto interno en H y $f \in H_0$ con representacion $f(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j K(x, y_j)$ J un subconjunto de indices finito, $\alpha_j \in \mathbb{C}, y_j \in E, j \in J$ entonces

$$\begin{aligned} \|f_0\|_1^2 &= \left\|\sum_{j\in J} \alpha_j K(\cdot, y_j)\right\|_1^2 \\ &= \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j K(\cdot, y_j), \sum_{i\in J} \alpha_i K(\cdot, y_i)\right\rangle_1 \\ &= \sum_{i,j\in J} \alpha_j \overline{\alpha}_i K(y_i, y_j) \\ &= \|f_0\|_0^2 \end{aligned}$$

Es decir, la restricción a H_0de la norma $\|\cdot\|$ de H coincide con la norma $\|\cdot\|_0$ de H_0. Entonces la completación funcional $H(K)$ de H_0 es tambíen un sunconjunto de H (pues las sucesiones de Cauchy en H_0 lo son tambíen en H, y H es completo)
Consideremos entonces una función $f \in H(K)$ por definición existe una sucesión de Cauchy $\{f_n(y)\}_{n\geqslant 1}$ en H_0 cuuyo limíte es f

$$0 \leqslant \left|\|f\|_1 - \|f_n\|_0\right| = |\|f\|_1 - \|f_n\|_1| \leqslant \|f - f_n\|_1$$

, entoces $\lim_{n\to\infty} \left|\|f\|_1 - \|f_n\|_0\right| = 0$ con lo cual $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 = \|f\|_1 = \|f\|$ de acá se tiene que la norma $\|\cdot\|_1$ coincide con la norma $\|\cdot\|$ en $H(K)$ de manera similar se puede comprobar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ coincide con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $H(K)$. Entonces $H(K)$ es un subespacio de Hilbert de H
Ahora bien; por otra parte por la proposición (1.2.2)se tiene que si $f \in H$, entonces existe
$f^* = P_{H(K)}$ y $f' \perp H(K)$ tal que $f = f^* + f'$ entonces

$$\begin{aligned} f(y) &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= \langle f^*(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 + \langle f'(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= \langle f^*(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= f^*(y), \text{ para toda } y \in E \end{aligned}$$

Por tanto $f \in H(K)$
Luego; $H(K)$ y H son el mismo espacio de Hilbert □

Capítulo 3

Espacios Funcionales Analíticos

S3.1. Espacios Funcionales Analíticos

Definición 3.1.1. Un **Espacio de Banach** X es un espacio normado tal que toda sucesión de Cauchy es convergente (es decir, X es un espacio completo).

Podemos citar algunos ejemplos de espacios de Banach importantes como son:

- Para $1 \leqslant p < \infty$ el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ de todos las sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, las cuales satisfacen $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ dotado de la norma

$$\| \cdot \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

  donde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, es un espacio de Banach.

- El espacio $\ell^{\infty} = \ell^{\infty}(\mathbb{N})$ denota el espacio normado de todas las sucesiones de valores escalares acotadas cuya norma se define como $\| \cdot \|_{\infty} = \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$, para $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$.

Definición 3.1.2. Sea H un espacio de Banach cuyos vectores son funciones analíticas sobre un dominio $E \subset \mathbb{C}$. H se dice que es un **Espacio de Banach Funcional Analítico** (*BFA*), si para cada $y \in E$ el funcional de evaluación $f \mapsto G_y(f) = f(y)$ (con $f \in H$) es continuo.

En el caso que H sea un espacio de Hilbert (H), lo llamaremos **Espacio de Hilbert Funcional Analítico** (*HFA*).

Teorema 3.1.1. *Sea H un espacio de HFA, con núcleo reproductivo K y $E \subset \Omega$, entonces el espacio generado por $K(E) = \{K_x : x \in E\}$ es denso en H.*

Demostración. Sea $f \in H$, observemos que

$$\begin{aligned} f \perp \operatorname{span}\{K(E)\} &\iff \langle f, K_y \rangle = 0 \quad \forall y \in E \\ &\iff f(y) = 0 \quad \forall y \in E. \end{aligned}$$

Como f es analítica, tenemos que $f = 0$ (por unicidad de las funciones analíticas).

Por lo tanto, el espacio generado por $K(E)$ es denso en H. □

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Sea $\{e_j\}_{j\in J}$ una familia ortonormal de vectores en H las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) La familia $\{e_j\}_{j\in J}$ es una base ortonormal

ii) Si $x \perp e_j$ para $j \in J$ entonces $x = 0$

iii) Para cada vector x tal que $\langle x, e_j\rangle \neq 0$ para a lo más una cantidad numerable de indices $j \in J, x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j$ donde la serie converge en norma

iv) para cada par de vectores x, y se tiene que $\langle x, e_j\rangle \neq 0$ y $\langle y, e_j\rangle \neq 0$ para a lo sumo una cantidad numerable de indices y $\langle x, y\rangle = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle}$

v) Para cada vector x,

$$\|x\|^2 = \sum \left|\langle x, e_j\rangle\right|^2$$

PROPOSICIÓN 3.1.2. *Para cada entero n, sea $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ define una función en $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el conjunto*

$$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

es un conjunto ortonormal completo en L_2.

Demostración. En primer lugar veamos que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Por la definición de producto interno en L_2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta})\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\overline{e^{im\theta}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta,
\end{aligned}$$

ahora estudiemos los casos cuando $n = m$ y $n \neq m$.

- Caso $1 : n = m$

$$\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta})\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\theta|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi = 1
\end{aligned}$$

- Caso 2 : $n \neq m$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{u}\, \frac{du}{i(n-m)}, \text{ (haciendo } u = i(n-m)\theta \Rightarrow du = i(n-m)d\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{u}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)\theta}|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)} 2i\sin((n-m)\pi) \\
&= \frac{1}{(n-m)\pi}\sin((n-m)\pi) \\
&= \frac{1}{2t}\sin(t\pi), \text{ haciendo } t = n-m \neq 0 \text{ además } t\in\mathbb{Z}, \text{ ya que } n, m \text{ lo están} \\
&= 0, \text{ ya que } \sin(t\pi) = 0 \text{ para todo } t\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que $\langle e^{in\theta}, e^{im\theta}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$

Solo falta probar que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es completo, esto lo podemos ver en ((**?**), pp. 183-186). □

El siguiente teorema nos permite relacionar los núcleos reproductivos con las bases ortonormales. Un espacio de Hilbert funcional analítico con una base ortonormal conocida se le puede obtener de manera explicita su núcleo reproductivo

TEOREMA 3.1.2. *Sea H un espacio HFA, con núcleo reproductivo K. Si $\{e_j : j \in J\}$ es una base ortonormal de H (J un conjunto de índices), entonces el núcleo reproductivo K está dado por:*

$$K(x,y) = \sum_{j\in J} \overline{e}_j(y)e_j(x)$$

donde la serie converge puntualmente.

Demostración. Sea $y \in E$, observe que

$$\langle K_y, e_j\rangle = \overline{\langle e_j, K_y\rangle} = \overline{e_j(y)}.$$

Luego, $K_y \in H$ y $\{e_j : j \in J\}$ es base ortonormal de H,entonces

$$K_y = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j$$

Ahora bien:

$$\langle K_y, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \alpha_j e_j, e_i \right\rangle \qquad = \sum_{j\in J} \alpha_j \langle e_j, e_i \rangle .$$

Además $\langle e_j, e_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$ Por tanto $\langle K_y, e_i \rangle = \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle = \alpha_i \|e_i\|^2 = \alpha_i$

Por tanto $K_y = \sum_{j\in J} \langle K_y, e_j \rangle e_j$

$$K_y = \sum_{j\in J} \langle K_y, e_j \rangle e_j = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j.$$

Puesto que la suma converge, en norma, ella converge puntualmente y

$$K(x,y) = K_y(x) = \sum_{j\in J} \overline{e_j(y)} e_j(x).$$

□

EJEMPLO 3.1.1. Consideremos el espacio de Hardy

$$H^2 = \{f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(D) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

recordemos que el producto interno de H^2 esta dado por:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

además el conjunto $\{1, z, z^2 \dots\}$ es una base ortonormal de H^2
apliquemos el teorema anterior

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overline{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z\overline{w})^n = \frac{1}{1 - z\overline{w}}$$

A $K_w(z) = \dfrac{1}{1 - z\overline{w}}$ se le conoce con el nombre de núcleo de Cauchy Al combinar el núcleo de cauchy con la propiedad reproductiva nos da lo siguiente; veamos, sea $f \in H^2$

$$\begin{aligned} f(w) = \langle f, K_w \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{K_w(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) (\overline{\frac{1}{1 - z\overline{w}}}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) (\overline{\frac{1}{1 - e^{i\theta}\overline{w}}}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) (\frac{1}{1 - e^{-i\theta} w}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} f(\xi) (\frac{1}{1 - w\overline{\xi}}) d\theta \end{aligned}$$

Esta expresion es la que se conoce en analisis complejo como la formula Integral de Cauchy

EJEMPLO 3.1.2. Consideremos el espacio de Bergman

$$A^2 = \{f \in F(D) : \int\int_D |f(z)|^2 \, dA < \infty\}$$

En ejemplo de Bergman que estudiamos anteriormente vimos que este espacio es HFA $A^2(D)$ un espacio de Hilbert cuadrado integrable (co respecto a el volumen de la medida) funciones holomorfas sobre D. La función núcleo de Bergman. $B_D : DxD \longrightarrow \mathbb{C}$ es unicamente definido por las dos condiciones siguientes:

i) $B_D(\cdot, w) \in A^2(D)$ para todo $w \in D$

ii) $\langle f, B_D(\cdot, w)\rangle = f(w)$ para todo $f \in A^2(D)$

Sea $e_n(z), n \geqslant 0$ una base ortogonalpara el espacio de Bergman $A^2(D)$. Cualquier $f \in A^2$ tiene la expancion en serie de Furier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(z)$$

Asumiendo que la suma

$$B(z, w) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$$

es una $A^2(D)$ para cada $w \in D$ podemos ver que $\langle f(z), B(z, w)\rangle = f(w), w \in D$ Para el espacio de Bergman sobre el disco $A^2(D)$, claramente el polinomio z^n son ortogonal con respecto a la medida $\frac{1}{\pi} r dr d\theta$ y $\|z^n\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Por lo tanto, $\{\sqrt{n+1}z^n : n \geqslant 0\}$ forma una base ortonormal en el espacio de Bergman del disco unitario D.
Por esto el núcleo de Bergman B_D del disco de unitario esta dado por la formula

$$B_D(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w^n} = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}$$

REFERENCIAS

[1] Bachman G., NARICI L. *Functional Analysis*. Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] Erwin Kreyszig. *Introdutory Functional Analysis With Applications.* Academic Press.New York, Santa Barbara London. 1978.

[3] N. Aronszajn, *Theory of reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.

[4] Conway J. *A Course in Functional Analysis,* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1990.

[5] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces, Selected Topics.* Lect. Notes Math. 485. Berlin, Heidelberg, New York: Springen 1975.

[6] Halmos P. R., *A Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[7] Megginson R. *An Introduction to Banach Spaces Theory.* Springer, Verlag New York. 1998.

[8] A. G. Ramm,*On the theory of reproducing kernel Hilbert Space*,Jour. of Inverse and III Posed Problems, 6N5,(1990),515-520.

[9] Rudin W. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Parin, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.

[10] S. Saitoh, *Integral Transforms, reproducing kernels and their applications* Pitman Res. Notes, Longman, New York, 1997.

[11] A. Mukherjea and K. Potthoven,*Real and Funtional Anaysis* Press.New York and London. 1978.