UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

1-Formas y el Espacio de Primera Cohomología

Autor: Br. José Angel Contreras Gedler
Tutor: Dr. Wilmer Colmenárez Rodriguez (UCLA)

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
como requisito final para optar al grado de
Licenciado en Ciencias Matemáticas

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Abril, 2010

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Introducción

Una 1-forma sobre una variedad diferenciable M, puede ser descrita como una función que a cada punto de la variedad le asigna un covector, el cual es un funcional lineal sobre el espacio tangente a M en dicho punto. Al concentrar nuestra atención en el fibrado tangente $T(M)$ de M, es posible construir a partir de él, el fibrado dual llamado fibrado cotangente $T^*(M)$ cuyas secciones diferenciables son precisamente, las 1-formas.

Si consideramos una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, la diferencial df es una 1-forma sobre M. Pero existen 1-formas que no se pueden expresar como la diferencial de alguna función $f \in C^\infty(M)$. Cuando esto ocurre, la 1-forma es llamada exacta. Al igual, existen 1-formas que son localmente exactas, es decir, en cada punto de la variedad existe un entorno en el cual la 1-forma es exacta. La relación entre las formas exactas y las formas localmente exactas nos da información sobre la topología de la variedad M a través del espacio $H^1(M)$, llamado el espacio de primera cohomología de de Rham, un espacio vectorial cuyos elementos son clases de equivalencia de 1-formas localmente exactas, donde dos 1-formas localmente exactas son equivalentes si y sólo si su diferencia es una 1-forma exacta.

El presente trabajo, basado en el desarrollo del capítulo 6 de la referencia principal [C], comienza con la construcción de un fibrado vectorial cualquiera, a partir de la definición de un cociclo γ y un isomorfismo de fibrados. Se establece que todo fibrado construido desde un cociclo proveniente del fibrado, es isomorfo al fibrado original. Partiendo del cociclo que caracteriza al fibrado se introduce la definición del llamado fibrado dual, cuyas fibras son isomorfas al dual de las fibras del fibrado inicial.

En el capítulo 2 se aplica la construcción del fibrado vectorial arbitrario, al fibrado tangente $T(M)$ de una variedad M y se define el fibrado cotangente $T^*(M)$. El conjunto $A^1(M)$ de 1-formas sobre M, tiene estructrura de $C^\infty(M)$-módulo y se define un isomorfismo de módulos que da la representación canónica de las 1-formas. Luego se definen la derivada exterior y los pull-back, con lo que se evidencia la funtorialidad de A^1, de la catergoría de variedades diferenciables y funciones diferenciables a la categoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales.

Al considerar curvas diferenciables sobre la variedad M se define, en el capítulo 3, las integrales de linea, mediante las cuales se caracteriza las 1-formas exactas. En este mismo capítulo se define la homotopía diferenciable entre lazos diferenciables a trozos. Gracias a la homotopía diferenciable podemos establecer que la integral es invariante sobre lazos homotópicos y de aquí se prueba que en $\mathbb{R}^n$ toda 1-forma localmente exacta es exacta.

En el capítulo 4 trabajamos con el funtor contravariante H^1 y, despues de definir el espacio $H^1(M)$, se define la equivalencia homotópica de una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$, que induce un isomorfismo lineal entre $H^1(N)$ y $H^1(M)$ para concluir con el espacio de primera cohomología de S^1.

Algunas aplicaciones topológicas de $H^1(S^1)$ sobre la teoría del grado son vistas en el capítulo 5, donde se realizan algunos preliminares sobre el grado módulo 2. Se estudia luego el grado de una aplicación sobre S^1, primero desde el punto de vista del levantamiento de una aplicación diferenciable y después en términos de valores regulares. Se aplica esta teoría para demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra. Finalizamos el capítulo con algunos comentarios sobre la estructura de $\pi[S^1, S^1]$ y el isomorfismo canónico que existe entre este conjunto y el grupo fundamental $\pi_1(S^1, 1)$.

Al final recogemos en un apéndice los resultados y definiciones principales sobre la teoría de categorías y funtores, espacios de recubrimiento y grupo fundamental que son utilizados en este trabajo. Para las definiciones principales de la teoría de categorías puede consultarse las referencias [BT] y [C]. Sobre espacios de recubrimiento y grupo fundamental referimos a [C], [Ma] y [Mu2].

1.2. Construcción de un fibrado vectorial

Definición 1 Sean M una m-variedad diferenciable, E una variedad diferenciable de dimensión $(m+n)$ y $\pi : E \longrightarrow M$ una función sobreyectiva y diferenciable. El sistema (E, M, π) será llamado un *n-fibrado vectorial* sobre M si se cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in M$, el conjunto $E_x = \pi^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial real n-dimensional.
2. Existen un cubrimiento abierto $\{W_j\}_{j\in J}$ de M y difeomorfismos $\psi : \pi^{-1}(W_j) \longrightarrow$

$W_j \times \mathbb{R}^n$ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(W_j) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W_j \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_j"] \\ & W_j & \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

3. Para cada $j \in J$ y $x \in W_j$, la restricción $\psi_{jx} = \psi_j|_{E\,x}$ mapea el espacio vectorial E_x isomórficamente en el espacio vectorial $\{x\} \times \mathbb{R}^n$.

E es llamado el *espacio total*, M el *espacio base*, π la *proyección* del fibrado y E_x es la *fibra* sobre x. También llamaremos a cada W_j *vecindad trivializante* para el fibrado y $\{W_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento localmente trivializante (de M) para E.

Definición 2 Sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M$ n-fibrados vectoriales sobre M. Un *isomorfismo de fibrados* es un par (φ, id), donde $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ es diferenciable e $id : M \longrightarrow M$ es la identidad, de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M \arrow[r, "id"'] & M \end{tikzcd}$$

es conmutativo, φ es biyectiva, diferenciable y lleva a E_{1x} isomórficamente (como espacio vectorial) en E_{2x} para todo $x \in M$. Si $E_2 = M \times \mathbb{R}^n$, con π_2 la proyección canónica, el isomorfismo φ es llamado una *trivialización* de E_1.

Definición 3 Denotaremos $GL(n)$ al grupo lineal general de matrices no singulares sobre $\mathbb{R}$. Un $GL(n)$-*cociclo* sobre M es una familia $\gamma = \{W_j, \gamma_{ji}\}_{i,j\in J}$ tal que $\{W_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento abierto de M y $\gamma_{ji} : W_i \cap W_j \longrightarrow GL(n)$ es una función diferenciable para todo $i, j \in J$, todo sujeto a las siguientes condiciones:

$$\gamma_{kj}(x)\gamma_{ji}(x) = \gamma_{ki}(x) \tag{1.1}$$

para todo $x \in W_i \cap W_j \cap W_k$ y para todo $i, j, k \in J$. Estas propiedades implican, para una apropiada escogencia de x y de índices $i, j \in J$,

$$\gamma_{ii}(x) = I_n \tag{1.2}$$
$$\gamma_{ij}(x) = (\gamma_{ji}(x))^{-1} \tag{1.3}$$

Si el cociclo γ proviene de un n-fibrado vectorial E, a partir de sus trivializaciones locales, en el sentido de que para $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ consideramos:

$$(W_i \cap W_j) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_i^{-1}} \pi^{-1}(W_i \cap W_j) \xrightarrow{\psi_j} (W_i \cap W_j) \times \mathbb{R}^n$$

donde esta composición tiene la forma $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, \gamma_{ji}(x) \cdot v)$ diremos que γ es una *estructura de cociclo* para E.

Una estructura de cociclo γ para E contiene toda la información necesaria para rearmar el fibrado salvo por un isomorfismo de fibrado. En efecto, un $GL(n)$-cociclo $\gamma = \{W_j, \gamma_{ji}\}_{i,j \in J}$ sobre M caracteriza un n-fibrado vectorial para el cual éste es una estructura de cociclo. Veamos cuál es el procedimiento para dicha construcción. Sea

$$\widetilde{E}_\gamma = \bigsqcup_{j \in J} W_j \times \mathbb{R}^n$$

donde el símbolo $\bigsqcup$ denota unión disjunta. Dados $(x, v) \in W_j \times \mathbb{R}^n$ y $(y, w) \in W_i \times \mathbb{R}^n$ definamos sobre $\widetilde{E}_\gamma$ la siguiente relación:

$$(x, v) \sim (y, w) \text{ si y sólo si } x = y \in W_j \cap W_i \text{ y } w = \gamma_{ji}(x)v.$$

Esta es una relación de equivalencia como consecuencia inmediata de las condiciones de cociclo. Consideremos la proyección sobre el primer factor

$$\pi_j : W_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow W_j$$

dada por $\pi_j(x, v) = x$, y definamos

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{E}_\gamma \longrightarrow M$$

por $\widetilde{\pi}(x, v) = \pi_j(x, v) = x$ para $(x, v) \in \widetilde{E}_\gamma$. Esta función preserva la relación de equivalencia. En efecto, si $(x, v) \sim (y, w)$ entonces $x = y$, de modo que

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(x, v) &= y \\ &= \pi_i(y, w) \\ &= \widetilde{\pi}(y, w). \end{aligned}$$

Sea $E_\gamma = \widetilde{E}_\gamma / \sim$. Como $\widetilde{\pi}$ preserva la relación $\sim$, queda bien definida la función

$$\widetilde{\pi} : E_\gamma \longrightarrow M.$$

Proposición 1 *El sistema $(E_\gamma, M, \widetilde{\pi})$ es un n-fibrado vectorial diferenciable.*

Demostración. Dado $x \in M$ tenemos

$$\begin{aligned}(E_\gamma)_x = \widetilde{\pi}^{-1}(x) &= \widetilde{\pi}^{-1}(x)\\ &= \pi_j^{-1}(x)\\ &= \{x\} \times \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

el cual tiene estructura de espacio vectorial real. Observemos ahora que $\widetilde{\pi}^{-1}(W_j) = \pi_j^{-1}(W_j) = W_j \times \mathbb{R}^n$. Por lo que podemos considerar la función identidad, $id : \widetilde{\pi}^{-1}(W_j) \longrightarrow W_j \times \mathbb{R}^n$ que es un difeomorfismo y claramente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\pi}^{-1}(W_j) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & & W_j \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& W_j &
\end{tikzcd}$$

conmuta, cumpliendo así con la propiedad de trivialidad local. ■

Proposición 2 *Existe un isomorfismo de fibrados entre* $(E_\gamma, M, \widetilde{\pi})$ *y* (E, M, π)*, donde el cociclo* γ *proviene de las trivializaciones locales* $\psi_j : \pi_j^{-1}(W_j) \longrightarrow W_j \times \mathbb{R}^n$ *del fibrado* (E, M, π).

Demostración. Debemos probar que existe $\psi : E_\gamma \longrightarrow E$, isomorfismo de fibrados, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_\gamma \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "id"'] & M
\end{tikzcd}$$

En efecto, a partir de las trivializaciones locales $\psi_j : \pi_j^{-1}(W_j) \longrightarrow W_j \times \mathbb{R}^n$ del fibrado (E, M, π), definamos $\psi : E_\gamma \longrightarrow E$ que preserve la relación de equivalencia.

Sean $(x, v) \in W_j \times \mathbb{R}^n$ y $(y, w) \in W_i \times \mathbb{R}^n$ tales que $(x, v) \sim (y, w)$. Ahora,

$$\begin{aligned}(x, v) \sim (y, w) &\Rightarrow\ x = y \text{ y } w = \gamma_{ij}(x) \cdot v\\ &\Rightarrow\ \psi_i \psi_j^{-1}(x, v) = (x, \gamma_{ij}(x) \cdot v)\\ &\Rightarrow\ \psi_j^{-1}(x, v) = \psi_i^{-1}(x, \gamma_{ij}(x) \cdot v)\\ &\Rightarrow\ \psi_j^{-1}(x, v) = \psi_i^{-1}(y, w)\end{aligned}$$

Definamos $\widetilde{\psi} : \widetilde{E}_\gamma \longrightarrow E$ por $\widetilde{\psi}(x, v) = \psi_j^{-1}(x, v)$ la cual, por lo anterior, preserva la relación de equivalencia y permite que la función

$$\begin{aligned}\psi : E_\gamma &\longrightarrow E\\ [x, v] &\longmapsto \widetilde{\psi}(x, v)\end{aligned}$$

quede bien definida. Probemos ahora que $\pi \circ \psi = id \circ \widetilde{\pi}$.

$$\begin{aligned} (\pi \circ \psi)[x, v] &= \pi(\widetilde{\psi}(x, v)) \\ &= \pi(\psi_j^{-1}(x, v)) = x \in W_j \subset M. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (id \circ \widetilde{\pi})[x, v] &= id(\pi_j(x, v)) \\ &= id(x) = x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi \circ \psi = id \circ \widetilde{\pi}$. ■

1.3. Fibrado dual de fibrados vectoriales

Sea $\gamma = \{W_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathscr{A}}$ un $GL(k)$-cociclo proveniente de una familia de trivializaciones $\psi_\alpha : \pi^{-1}(W_\alpha) \longrightarrow W_\alpha \times \mathbb{R}^k$ de un k-fibrado vectorial. Este $GL(k)$-cociclo γ induce el $GL(k)$-cociclo γ' dado por

$$\gamma'_{\alpha\beta}(x) = (\gamma_{\alpha\beta}(x)^\top)^{-1} \qquad \text{para todo } x \in W_\alpha \cap W_\beta.$$

Aplicando la construcción anterior podemos, a partir del cociclo γ' construir el fibrado $E_{\gamma'}$. Dicho fibrado recibe el nombre de *fibrado dual.*

Proposición 3 *Para cada $x \in M$ la fibra $(E_{\gamma'})_x = E_x^*$ es canónicamente isomorfa al dual de la fibra $(E_\gamma)_x = E_x$.*

Demostración. Denotemos las clases de equivalencia $(E_\gamma)_x$ por $[x, v, \alpha]$ y aquellas en $(E_{\gamma'})_x$ por $[x, v, \alpha]^*$. Evaluemos $[x, w, \alpha]^*$ sobre $[x, v, \alpha]$ mediante la fórmula

$$[x, w, \alpha]^* \cdot [x, v, \alpha] = w^\top \cdot v \tag{1.4}$$

Veamos que esta acción está bien definida, para lo cual tomaremos $x \in W_\alpha \cap W_\beta$, $v, w \in \mathbb{R}^k$ y α, β tales que $[x, w, \alpha]^* = [x, v, \beta]^*$ y $[x, v, \alpha] = [x, w, \beta]$. Por como están definidas estas relaciones a partir de los respectivos cociclos, tenemos

$$[x, w, \alpha]^* = [x, \gamma'_{\beta\alpha}(x) \cdot w, \beta]^*$$
$$[x, v, \alpha] = [x, \gamma_{\beta\alpha}(x) \cdot v, \beta]$$

Así

$$\begin{aligned} v^\top \cdot w &= (\gamma'_{\beta\alpha}(x) \cdot w)^\top \cdot \gamma_{\beta\alpha}(x) \cdot v \\ &= w^\top (\gamma'_{\beta\alpha}(x))^\top \gamma_{\beta\alpha}(x) \cdot v \\ &= w^\top \gamma_{\alpha\beta}(x) \gamma_{\beta\alpha}(x) \cdot v \\ &= w^\top \cdot v \end{aligned}$$

Con esto vemos que (1.4) no depende del representante de la clase. De ahí que esté bien definida dicha acción, la cual además es lineal. Como $[x, w, \alpha]^* \in (E_{\gamma'})_x = E^*_x$ está actuando linealmente sobre los elementos de E_x, tenemos claramente $E^*_x \subset (E_x)^*$, donde $(E_x)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x, \mathbb{R})$. Pero E^*_x y $(E_x)^*$ tienen la misma dimensión. Por tanto, $E^*_x = (E_x)^*$ canónicamente. ■

Observemos que el doble dual de un n-fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$ es canónicamente isomorfo al fibrado original. Esto es, $(E^*)^* = E$. En efecto, es imnediato que $(\gamma'_{\alpha\beta})' = \gamma_{\alpha\beta}$.

CAPÍTULO 2

El Espacio de las 1-formas

2.1. 1-Formas

Apliquemos la construcción del capítulo anterior al fibrado tangente $T(M)$.

Definición 4 Sean M una variedad diferenciable y $x \in M$.

- El espacio dual $(T_xM)^*$ de $T_x(M)$ es llamado *espacio cotangente* de M en x y es denotado por T_x^*M.
- Cada $\alpha \in T_x^*M$ es llamado *vector cotangente* a M en x.
- El fibrado T^*M con fibras $T_x^*(M)$, dual del fibrado tangente, es llamado *fibrado cotangente* de M.

Sean $U \subset M$ abierto, $x \in U$ y $f \in C^\infty(U)$. Denote G_x el álgebra de gérmenes en x. Como $T_{f(x)}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ canónicamente, obtenemos un funcional lineal $df_x : T_x(M) \longrightarrow \mathbb{R}$. Así, $df_x \in T_x^*(M)$. Es evidente que df_x depende sólo de los gérmenes $[f]_x \in G_x$ por lo que obtenemos que $d : G_x \longrightarrow T_x^*(M)$ es un funcional $\mathbb{R}$-lineal.

Lema 1 *Para cada $X_x \in T_xM$ se cumple $df_x(X_x) = X_x(f)$, para $f \in C^\infty(U)$, donde U es un entorno de x.*

Demostración. Sea $(U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta coordenada alrededor de x. Puesto que $f : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $df_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ y $df_x = Jf_x = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right]$. Si expresamos

$$X_x = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T_xM,$$

entonces,

$$df_x(X_x) = Jf_x \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = X_x(f).$$

■

Corolario 1 *Los covectores $dx^1, \ldots, dx^n$ asociados a las funciones de coordenadas locales $x^1, \ldots, x^n$ alrededor de $x \in M$ forman una base de $T_x^*(M)$.*

Demostración. Puesto que $\dim T_x^*(M) = n$, es suficiente probar que el conjunto $dx^1, \ldots, dx^n$ es linealmente independiente. Por el Lema 1,

$$dx_x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x) = \delta_{ij}.$$

Así

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i dx_x^i = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^n b_i dx_x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 = b_j, \text{ para } j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

■

Corolario 2 *La aplicación lineal $d : G_x \longrightarrow T_x^*(M)$ es sobreyectiva.*

Esto es, todo covector es el diferencial de una función.

Recordemos que una *sección diferenciable* del fibrado tangente $T(M)$ es una función diferencable $X : M \longrightarrow T(M)$ tal que $X(x) = X_x \in T_x(M)$ para algún $x \in M$. Las secciones del fibrado tangente son llamadas *campo de vectores*. Análogamente se define una *sección* del fibrado cotangente como una función

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow T^*(M) \\ x &\longmapsto \omega_x \in T_x^*(M) \end{aligned}$$

llamada *campo de covectores*. Dados $x \in U \subset M$, y $(U, x^1, \ldots, x^n)$, carta coordenada alrededor de x, la sección ω puede ser escrita localmente como

$$\omega_x = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx^i \tag{2.1}$$

para algunas funciones $f_1, \ldots, f_n : U \longrightarrow R$ llamadas funciones componentes de ω. La siguiente proposición nos proporciona la diferenciabilidad de la sección ω.

Proposición 4 *Sea $\omega : M \longrightarrow T^*(M)$ una sección, no necesariemente diferenciable o continua. Entonces, ω es diferenciable si la función*

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \omega_x(X_x) \end{aligned}$$

es diferenciable para toda sección diferenciable X de $T(M)$.

Demostración. Sea X una sección diferenciable de $T(M)$. Por hipótesis se tiene que la función $x \mapsto \omega_x(X_x)$ es diferenciable. Además, dados $x \in M$ y $(U, x^1, \ldots, x^n)$, carta local de x, existen funciones $f_1, \ldots, f_n$ que caracterizan a ω localmente, en el sentido de la ecuación (2.1). Evaluando ω_x en X_x tenemos

$$\omega_x(X_x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx^i(X_x).$$

Así, las funciones componentes de ω, a saber, $f_1, \ldots, f_n$ son diferenciables en M. Por tanto ω es diferenciable. ■

Definición 5 El $C^\infty(M)$-módulo $\Gamma(T^*(M))$ de secciones diferenciables del fibrado cotangente es denotado por

$$A^1(M) = \Gamma(T^*(M)).$$

Los elementos de $A^1(M)$ son llamados *campos de covectores* o *1-formas* de M. Si $\omega \in A^1(M)$, entonces su valor en $x \in M$ es denotado por $\omega_x \in T^*_x(M)$.

2.2. Representación Canónica

Denotemos por $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ el $C^\infty(M)$-módulo de todas las funciones de $\mathfrak{X}(M)$ en $C^\infty(M)$ que son $C^\infty(M)$-lineal. Toda 1-forma $\omega \in A^1(M)$ actúa sobre $\mathfrak{X}(M)$ mediante la correspondencia $X \mapsto \omega(X) \in C^\infty(M)$ dada por

$$\omega(X)(x) = \omega_x(X_x), \text{ para todo } x \in M.$$

Es claro que $\omega(fX) = f\omega(X)$ para toda $f \in C^\infty(M)$. En efecto, dado $x \in M$ cualquiera se tiene

$$\begin{aligned} \omega(fX)(x) &= \omega_x((fX)(x)) \\ &= \omega_x(f(x)X_x) \\ &= f(x)\omega_x(X_x) \end{aligned}$$

Como $x \in M$ es arbitrario se cumple $\omega(fX) = f\omega(X)$. Así podemos ver esta 1-forma como un elemento $\omega \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$. Esto define un homomorfismo inyectivo de $C^\infty(M)$-módulos

$$A^1(M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)).$$

Mostraremos ahora que este homomorfismo también es una sobreyección, para lo cual probaremos primero los siguientes lemas.

Sean $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ y $U \subseteq M$ abierto.

Lema 2 *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $X|_U \equiv 0$, entonces $\alpha(X)|_U \equiv 0$.*

Demostración. Dado $x \in U$ empleamos el Lema de Urysohn para escoger $f \in C^\infty(M)$ que se anula en $x \in U$ y es idénticamente igual a 1 en $M \setminus U$. Entonces $fX = X$ y

$$\alpha(X) = \alpha(fX) = f\alpha(X).$$

Esto muestra que

$$\alpha(X)(x) = f(x)\alpha(X)(x) = 0.$$

Como esto es cierto para $x \in U$ arbitrario, se sigue que $\alpha(X)|_U \equiv 0$. ■

Lema 3 *Existe una aplicación canónica $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(U), C^\infty(U))$ tal que $\widetilde{\alpha}(X|_U) = \alpha(X)|_U$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Si $Y \in \mathfrak{X}(U)$, definamos $\widetilde{\alpha}(Y) \in C^\infty(U)$ como sigue: para $y \in U$ arbitrario, escojamos $f \in C^\infty(M)$ tal que $f \equiv 1$ en alguna vecindad abierta $V \subset U$ de y y $f\big|_{M\setminus U} \equiv 0$. Entonces podemos interpretar a fY como un campo definido en todo M y $fY|_V = Y|_V$. Definamos

$$\widetilde{\alpha}(Y)(y) = \alpha(fY)(y).$$

Por el Lema 2 la definición de $\widetilde{\alpha}(Y)$ es independiente de f y de V. Es claro que esto define $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(\mathfrak{X}(U), C^\infty(U))$ y que $\widetilde{\alpha}(X|_U) = \alpha(X)|_U$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. ■

Corolario 3 *Si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$, entonces $\alpha(X)(x)$ depende solamente del valor X_x de X (y no de X en general), para todo $x \in M$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Sea $x \in M$. Escojamos una vecindad U de x en M sobre la cual $T(M)$ es trivial, y sea $Y^1, \ldots, Y^n \in \mathfrak{X}(U)$ un sistema de referencia local del espacio tangente en cada punto de U, en el sentido que $\{Y^1(x), \ldots, Y^n(x)\}$ es una base de $T_x(M)$ para $x \in U$. Entonces un campo arbitrario $X \in \mathfrak{X}(M)$ puede ser escrito sobre U como

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i Y^i$$

y con esto expresamos

$$\begin{aligned} \alpha(X)(x) &= (\alpha|_U)(X|_U)(x) && (2.2)\\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x)(\alpha|_U)(Y^i)(x). && (2.3) \end{aligned}$$

En (2.3), la única dependencia respecto de X está expresada en los valores $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, con lo cual queda demostrado el resultado. ■

La propiedad de α en el corolario anterior es llamada *propiedad tensorial*.

Lema 4 *Sea $\eta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Entonces, η tiene la propiedad tensorial si y sólo si $\eta \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$.*

Demostración. En el corolario anterior se mostró que si $\eta \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$, entonces η tiene la propiedad tensorial. Para el recíproco supongamos que η tiene la propiedad tensorial y sean $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $x \in M$ el valor $\eta(fX)(x)$ depende sólo de $f(x)X_x$, así, por la $\mathbb{R}$-linealidad tenemos

$$\eta(fX)(x) = \eta(f(x)X)(x) = f(x)\eta(X)(x).$$

Como $x \in M$ es arbitrario, $\eta(fX) = f\eta(X)$. ■

Para $x \in M$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ definimos $\alpha_x \in T_x^*(M)$ como sigue. Dado $v \in T_x(M)$, sea $X \in \mathfrak{X}(X)(M)$ cualquier campo de vectores tal que $X_x = v$. Definimos

$$\alpha_x(v) = \alpha(X)(x).$$

Como α tiene la propiedad tensorial, el valor $\alpha(X)(x)$ depende sólo de $X(x) = v$ y no de la escogencia de una extensión X; de modo que α_x está bien definida como función de $T_x(M)$ a $\mathbb{R}$. Luego, $\alpha_x \in T_x^*(M)$ para cada $x \in M$. Ahora, como la función $x \longmapsto \alpha_x(X_x)$ es diferenciable y dado que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una sección diferenciable de $T(M)$ tenemos, por la Proposición 4, que la aplicación $x \longmapsto \alpha_x$ define una sección diferenciable de $T^*(M)$. Esto identifica a α como un elemento de $A^1(M)$.

Se ha demostrado así la siguiente proposición:

Proposición 5 *Existe un isomorfismo canónico*

$$A^1(M) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$$

de $C^\infty(M)$-módulos.

2.3. Pull-Back y La Derivada Exterior

Definición 6 Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades. Dados $x \in M$ y $\alpha \in T^*_{\varphi(x)}N$ definimos $\varphi_x^*(\alpha) \in T_x^*(M)$ por

$$\varphi_x^*(\alpha)(X_x) = \alpha(\varphi_{*x}(X_x)), \text{ para cada } X_x \in T_x(M).$$

Esto define una función lineal

$$\varphi_x^* : T^*_{\varphi(x)}(N) \longrightarrow T_x^*(M)$$

llamada *adjunto* de φ_{*x}. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ diferenciable. Si $\omega \in A^1(N)$, se define $\varphi^*(\omega) : M \longrightarrow T^*(M)$ por

$$\varphi^*(\omega)_x = \varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)}), \text{ para cada } x \in M.$$

Por otro lado, para $f \in C^\infty(N)$, definimos $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in C^\infty(M)$.

Lema 5 *Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades y $\omega \in A^1(N)$, entonces $\varphi^*(\omega) \in A^1(M)$ y queda definida así una aplicación lineal*

$$\varphi^* : A^1(N) \longrightarrow A^1(M)$$

entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Más aún, si $f \in C^\infty(N)$, entonces

$$\varphi^*(f\omega) = \varphi^*(f)\varphi^*(\omega).$$

Demostración. Sea $\omega \in A^1(N)$. Entonces $\varphi^*(\omega) : M \longrightarrow T^*(M)$ está definido por $\varphi^*(\omega)_x = \varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)})$ para todo $x \in M$. Pero $\varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)})$ es un covector en M tal que $\varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)})(X_x) = \omega_{\varphi(x)}(\varphi_{*x}(X_x))$ para todo $X_x \in T_x(M)$. Evidentemente el adjunto φ_x^* es diferenciable, por lo que la función $x \longmapsto \omega_{\varphi(x)}(\varphi_{*x}(X_x))$ es diferenciable. Aplicando la Proposición 4 se deduce que $\varphi^*(\omega)$ es una sección diferenciable de $T^*(M)$. Por tanto, $\varphi^*(\omega) \in A^1(M)$. Sean $\omega, \sigma \in A^1(N)$ y $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(a\omega + \sigma)_x &= \varphi_x^*((a\omega + \sigma)_{\varphi(x)}) \\
&= \varphi_x^*(a\omega_{\varphi(x)} + \sigma_{\varphi(x)}) \\
&= a\varphi_x^*(a\omega_{\varphi(x)}) + \varphi_x^*(\sigma_{\varphi(x)}) \\
&= a\varphi^*(\omega)_x + \varphi^*(\sigma)_x.
\end{aligned}$$

Por tanto, φ^* es lineal. Tomemos ahora $f \in C^\infty(N)$ y $x \in M$ fijo.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f\omega)_x &= \varphi_x^*((f\omega)_{\varphi(x)}) \\
&= \varphi_x^*(f(\varphi(x))\omega_{\varphi(x)}) \\
&= f(\varphi(x))\varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)}) \\
&= (f \circ \varphi)(x)\varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)}) \\
&= \varphi^*(f)(x)\varphi^*(\omega)_x.
\end{aligned}$$

Como $x \in M$ es arbitrario, obtenemos $\varphi^*(f\omega) = \varphi^*(f)\varphi^*(\omega)$. ■

Lema 6 *Si $\varphi : M \longrightarrow N$ y $\psi : N \longrightarrow P$ son funciones diferenciables entre variedades, entonces*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

en $A^1(P)$ y en $C^\infty(P)$.

Demostración. Sea $\omega \in A^1(P)$. Por definición tenemos que

$$(\psi \circ \varphi)^*(\omega)_x = (\psi \circ \varphi)^*_x(\omega_{\psi(\varphi(x))}),$$

y apelando a las definiciones respectivas desarrollamos

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)^*_x(\omega_{\psi(\varphi(x))})(X_x) &= \omega_{\psi(\varphi(x))}((\psi \circ \varphi)_{*x(X_x)}) \\ &= \omega_{\psi(\varphi(x))}(\psi_{*\varphi(x)}\varphi_{*x}(X_x)) \\ &= \psi^*_{\varphi(x)}(\omega_{\psi(\varphi(x))}(\varphi_{*x}(X_x))) \\ &= \varphi^*_x(\psi_{\varphi(x)^*}(\omega_{\psi(\varphi(x))}))(X_x).\end{aligned}$$

Luego, $(\psi\circ\varphi)^*_x(\omega_{\psi(\varphi(x))}) = \varphi^*_x(\psi_{\varphi(x)}(\omega_{\phi(\varphi(x))}))$, lo cual implica $(\psi\circ\varphi)^*(\omega)_x = (\varphi^*\circ\psi^*)(\omega)_x$ para todo $x \in M$. Con esto se obtiene $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Sea $f \in C^\infty(P)$, aplicando tres veces la definición de $*$ se tiene $(\psi \circ \varphi)^*(f) = f \circ \psi \circ \varphi = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^* \circ \psi^*)(f)$. ■

De lo anterior vemos que A^1 es un funtor contravariante de la categoría de variedades diferenciables y funciones diferenciables a la categoría de espacios vectoriales reales y aplicaciones lineales (vea el apéndice para las nociones de catogorías y funtores).

Definición 7 Si $f \in C^\infty(M)$ entonces df es llamada la *derivada exterior* de f. La aplicación $\mathbb{R}$-lineal $d : C^\infty(M) \longrightarrow A^1(M)$ es llamada *diferenciación exterior*. Donde $df : M \longrightarrow T^*(M)$ definida por $df(x) = df_x$ para todo $x \in M$, es una 1-forma sobre M.

Lema 7 *Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces $d(fg) = fdg + gdf$.*

Demostración. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

$$\begin{aligned}d(fg)(X) &= X(fg) \\ &= fX(g) + gX(f) \\ &= fdg(X) + gdf(X) \\ &= (fdg + gdf)(X).\end{aligned}$$

Como X es arbitrario, obtenemos el resultado. ■

Este lema es una *regla de Leibnitz* para la diferenciación exterior.

Proposición 6 *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ diferenciable. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(N) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"'] & C^\infty(N) \arrow[d, "d"] \\ A^1(N) \arrow[r, "\varphi^*"'] & A^1(M) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto es, para cualquier $f \in C^\infty(N)$, $d(\varphi^*(f)) = \varphi^*(df)$.

Demostración. Sea $x \in M$ arbitrario y $X_x \in T_x(M)$. Aplicando definiciones se tiene

$$\begin{aligned}(\varphi^* df)_x(X_x) &= \varphi_x^*(df_{\varphi(x)})(X_x)\\ &= df_{\varphi(x)}(\varphi_{*x}(X_x))\\ &= d(f\circ\varphi)_x(X_x)\\ &= d(\varphi^*(f))_x(X_x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\varphi^*(df)) = d\varphi^*(f)$. ■

Esta propiedad de d es llamada *naturalidad* de la derivada exterior.

2.4. Derivada de Lie de 1-formas

DEFINICIÓN 8 Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y Φ el flujo local generado por X. Se define la *derivada de Lie* $\mathcal{L}_X : A^1(M) \longrightarrow A^1(M)$, por

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_t^*(\omega)-\omega}{t}, \text{ para cualquier } \omega \in A^1(M) \tag{2.4}$$

tomado puntualmente sobre M.

Veamos la existencia del límite, para lo cual estudiemos $\Phi_t^*(\omega)-\omega$, para $x \in M$ fijo, pero arbitrario.

$$\begin{aligned}(\Phi_t^*(\omega)-\omega)_x(X_x) &= [(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)})-\omega_x](X_x)\\ &= (\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)})(X_x)-\omega_x(X_x)\\ &= \omega_{\Phi_t(x)}((\Phi_t)_{*x}(X_x))-\omega_{\Phi_0(x)}(X_x)\end{aligned}$$

Observemos que la función $t \mapsto \omega_{\Phi_t(x)}((\Phi_t)_{*x}(X_x)$ es diferenciable ya que $t \mapsto \Phi_t(x)$ es diferenciable para $x \in M$ fijo, ω es diferenciable y $t \mapsto (\Phi_t)_{*x}(X_x)$ es diferenciable, para x fijo. Luego el límite

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_t^*(\omega)-\omega}{t}$$

está definido, para cualquier $\omega \in A^1(M)$

PROPOSICIÓN 7 *Dadas $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in A^1(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios, la derivada de Lie satisface las siguientes identidades:*

(1) $\mathcal{L}_X(df) = d\mathcal{L}_X(f)$

(2) $\mathcal{L}_X(f\omega) = \mathcal{L}_X(f)\omega + f\mathcal{L}_X(\omega)$

(3) $\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = \mathcal{L}_X(\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X(Y))$

Donde

$$\mathcal{L}_X(Y) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_{-t*}(Y) - Y}{t} \text{ y } \mathcal{L}_X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f) - f}{t}$$

Demostración.

(1) Aplicando la Proposición 6, $\Phi_t^*(df) - df = d\Phi_t^*(f) - df = d(\Phi_t^*(f) - f)$. Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(df) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(df) - df}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{d(\Phi_t^*(f) - f)}{t} \\
&= d \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f) - f}{t} \\
&= d\mathcal{L}_X(f).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{L}_X(df) = d\mathcal{L}_X(f)$.

(2) Observemos que, para $x \in M$ arbitrario pero fijo, se tiene

$$\begin{aligned}
[\Phi_t^*(f\omega) &- f\omega]_x = \Phi_t^*(f\omega)_x - f(x)\omega_x \\
&= [\Phi_t^*(f)\Phi_t^*(\omega)]_x - f(x)\omega_x \\
&= f(\Phi_t(x))(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)}) + f(x)(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)}) - f(x)(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)}) - f(x)\omega_x \\
&= f(x)[(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)}) - \omega_x] + [\Phi_t^*(f)_x - f(x)](\Phi_t)_x^*\omega_{\Phi_t(x)}.
\end{aligned}$$

Luego, tomando en cuenta que $(\Phi_t)_x^*\omega_{\Phi_t(x)} \to \omega_x$ cuando $t \to 0$, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(f\omega)_x &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f\omega)_x - f(x)\omega_x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(\omega)_x - \omega_x}{t} f(x) + \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f)_x - f(x)}{t} (\Phi_t)_x^*\omega_{\Phi_t(x)} \\
&= \mathcal{L}_X(\omega)_x f(x) + \mathcal{L}_X(f)_x \omega_x.
\end{aligned}$$

Como $x \in M$ es cualquiera, resulta que $\mathcal{L}_X(f\omega) = \mathcal{L}_X(f)\omega + f\mathcal{L}_X(\omega)$.

(3) Para probar la identidad (3) estudiemos primero la expresión $[\Phi_t^*(\omega(Y)) - \omega(Y)]_x$, para $x \in M$ fijo.

$$\begin{aligned}
[\Phi_t^*(\omega(Y)) &- \omega(Y)]_x = \omega_{\Phi_t(x)}(Y_{\Phi_t(x)}) - \omega_x(Y_x) \\
&= \omega_{\Phi_t(x)}[Y_{\Phi_t(x)} + (\Phi_t)_{*x}(Y_x) - (\Phi_t)_{*x}(Y_x)] - \omega_x(Y_x) \\
&= \omega_{\Phi_t(x)}((\Phi_t)_{*x}(Y_x)) + \omega_{\Phi_t(x)}[(\Phi_t)_{*x}((\Phi_{-t})_{*\Phi_t(x)}(Y_{\Phi_t(x)}) - Y_x)] - \omega_x(Y_x) \\
&= [(\Phi_t)_x^*(\omega_{\Phi_t(x)})(Y_x) - \omega_x(Y_x)] + \omega_{\Phi_t(x)} \circ (\Phi_t)_x^*[(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(x)}(Y_{\Phi_t(x)}) - Y_x] \\
&= [\Phi_t^*(\omega)_x - \omega_x](Y_x) + \omega_{\Phi_t(x)} \circ (\Phi_t)_x^*[(\Phi_{-t})_*(Y)_x - Y_x].
\end{aligned}$$

Cuando $t \to 0$ la función $(\Phi_t)_{*x}$ se aproxima a la función identidad $id_{T_x(M)}$ y $\omega_{\Phi_t(x)} \to \omega_x$. Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\omega(Y))_x &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\Phi_t^*(\omega)_x - \omega_x}{t}\right](Y_x) + \omega_x \lim_{t\to 0}\left[\frac{(\Phi_{-t})_*(Y)_x - Y_x}{t}\right] \\
&= \mathcal{L}_X(\omega)_x(Y_x) + \omega_x \mathcal{L}_X(Y)_x.
\end{aligned}$$

Como $x \in M$ es arbitrario, se obtiene el resultado esperado. ■

CAPÍTULO 3

Integrales de línea

3.1. Integral de Línea e independencia de caminos

Si $\omega \in A^1(M)$ y $s : [a,b] \longrightarrow M$ es una curva diferenciable, entonces $s^*(\omega) \in A^1([a,b])$ y podemos escribir $s^*(\omega) = fdt$.

Definición 9 La *integral de línea* de $\omega \in A^1(M)$ a lo largo de la curva diferenciable $s : [a,b] \longrightarrow M$ es

$$\int_s \omega = \int_s s^*(\omega) = \int_a^b f(t)dt.$$

Lema 8 *Sean $s : [a,b] \longrightarrow M$ y $u : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ diferenciables. Hagamos $\sigma = s \circ u$. Entonces.*

(1) Si $u(c) = a$ y $u(d) = b$, entonces $\int_s \omega = \int_\sigma \omega$ para toda $\omega \in A^1(M)$.

(2) Si $u(c) = b$ y $u(d) = a$, entonces $-\int_s \omega = \int_\sigma \omega$ para toda $\omega \in A^1(M)$.

Demostración. Sea t la coordenada de $[a,b]$ y τ la coordenada de $[c,d]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_c^d \sigma^*(\omega) \\ &= \int_c^d u^*(s^*(\omega)) \\ &= \int_c^d u^*(fdt) \\ &= \int_c^d (f \circ u)\frac{du}{dt}d\tau.\end{aligned}$$

En el caso (1) la regla para el cambio de variables implica $\int_\sigma \omega = \int_a^b fdt = \int_s \omega$. En el caso (2) implica $\int_\sigma \omega = \int_b^a fdt = -\int_s \omega$. ∎

Lema 9 *Sean $s_1 : [a,b] \longrightarrow M$ y $s_2 : [c,d] \longrightarrow M$ caminos diferenciables coincidiendo en los puntos inicial y final, esto es, $s_1(a) = s_2(c) = x$ y $s_1(b) = s_2(d) = y$. Si $f \in C^\infty(M)$ entonces,*

$$\int_{s_1} df = \int_{s_2} df = f(y) - f(x).$$

Demostración. Apelando al Lema anterior supongamos, sin pérdida de generalidad, que $[a,b] = [c,d]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1} df &= \int_a^b s_1^*(df) \\
&= \int_a^b d(f \circ s_1) \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(s_1(t))dt \\
&= f(s_1(b)) - f(s_1(a)) \\
&= f(y) - f(x)
\end{aligned}$$

Análogamente, se establece que

$$\int_{s_2} df = f(s_2(b)) - f(s_2(a)) = f(y) - f(x),$$

con lo cual queda demostrado el Lema. ■

La noción de integral de línea puede ser extendida para permitir la integración de 1-formas a través de caminos $s : [a,b] \longrightarrow M$ que son sólo diferenciables a trozos. Esto es, sean $s : [a,b] \longrightarrow M$ continua y $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_q = b$ una partición de $[a,b]$ tal que $s_i = s\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ es diferenciable, $1 \leqslant i \leqslant q$. Escribimos $s = s_1 + \cdots + s_q$ y definimos

$$\int_s \omega = \sum_{i=1}^q \int_{s_i} \omega.$$

Corolario 4 *Sean $s_1 : [a,b] \longrightarrow M$ y $s_2 : [a,b] \longrightarrow M$ caminos diferenciables a trozos que coinciden en los puntos inicial x y final y . Entonces, para $f \in C^\infty(M)$ se tiene*

$$\int_{s_1} df = \int_{s_2} df = f(y) - f(x).$$

Lema 10 *Si $\omega \in A^1(M)$ y si para todo camino diferenciable a trozos s la integral $\int_s \omega$ es nula, entonces $\omega = 0$.*

Demostración. Supongamos que no es así. Luego existen un punto $z \in M$ y un vector $v \in T_z(M)$ tales que $\omega_z(v) > 0$. Sea $s : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow M$ diferenciable tal que $s(0) = z$ y $\dot{s}(0) = v$.

Escogiendo $\varepsilon > 0$ más pequeño (si es necesario) podemos asumir que $\omega_{s(t)}(\dot{s}(t)) > 0$, para $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Luego $s^*(\omega)_t{=}\omega_t(s(t))dt > 0$ entonces, $\int_s \omega = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^*(\omega) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_{s(t)}(\dot{s}(t))dt >$ 0 , contradiciendo la hipótesis. ■

Definición 10 Diremos que $\omega \in A^1(M)$ tiene integral de línea *independiente por caminos* si, para todo camino diferenciable a trozos $s : [a,b] \longrightarrow M$, la integral $\int_s \omega$ depende sólo de $s(a)$ y $s(b)$.

Definición 11 Un camino diferenciable a trozos $s : [a,b] \longrightarrow M$ es un *lazo* si $s(a) = s(b)$.

Lema 11 *Sea M una variedad diferenciable conexa. Entonces dos puntos cualesquiera de M pueden ser unidos por un camino diferenciable a trozos.*

Demostración. Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario, fijo de M y definamos el subconjunto $\mathcal{C} \subseteq M$ por $\mathcal{C} = \{x \in M :$ existe un camino diferenciable a trozos en M de x_0 a $x\}$. Claramente $x_0 \in \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C}$ es distinto de vacío. Bajo la hipótesis de conexidad, probaremos que $\mathcal{C} = M$ mostrando que $\mathcal{C}$ es abierto y cerrado.

Sea $x \in \mathcal{C}$, cualquiera. Luego existe un camino diferenciable a trozos s de x_0 a x. Si (U, φ) es una carta coordenada alrededor de x y x' es cualquier punto en U, entonces podemos construir un camino diferenciable a trozos de x_0 a x', siguiendo primero a s de x_0 a x y luego de x a x' mediante un segmento de recta parametrizado por φ. Luego U está totalmente contenido en $\mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C}$ es abierto.

Por otra parte, si $x \in \partial\mathcal{C}$, la frontera topológica de $\mathcal{C}$, tomemos (U, φ), carta coordenada alrededor de x. Del hecho que x sea punto frontera se deduce que existe un punto $x' \in \mathcal{C} \cap U$. En este caso podemos construir un camino diferenciable a trozos de x_0 a x siguiendo primero uno de x_0 a x' (ya que $x' \in \mathcal{C}$) y luego siguiendo un segmento de recta parametrizado por φ de x' a x. Esto muestra que $\mathcal{C}$ contiene todos sus puntos frontera, o lo que es lo mismo, $\mathcal{C}$ es cerrado. ■

3.2. Formas exactas

Definición 12 Una 1-forma $\omega \in A^1(M)$ es *exacta* si $\omega = df$ para alguna $f \in C^\infty(M)$.

El Lema 9 dice que la integral de línea $\int_s \omega$ de una 1-forma exacta ω sólo depende de los puntos inicial y final del camino s. En $\mathbb{R}$ toda 1-forma es exacta. En efecto, si $\omega = gdx$ para alguna función $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces haciendo $f(x) = \int_0^x g(u)du$ encontramos que $df_x = g(x)dx$.

Teorema 1 *Para todo $\omega \in A^1(M)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) ω *es una forma exacta*

(ii) $\int_s \omega = 0$ *para todo lazo diferenciable a trozos* s

(iii) ω *tiene integral de línea independiente del camino.*

Demostración. ((i) $\Rightarrow$ (ii)) Si $\omega = df$ es exacta y $s : [a,b] \longrightarrow M$ es un lazo diferenciable a trozos, con $s(a) = q = s(b)$, entonces el Corolario 4 implica que

$$\int_s \omega = \int_q \omega = 0,$$

donde q denota el camino constante $q(t) = q$, $a \leqslant t \leqslant b$.

((ii) $\Rightarrow$ (iii)) Sean s_1 y s_2 curvas diferenciables a trozos enpezando en el mismo punto x y terminando en el mismo punto y. Sin pérdida de generalidad, supongamos que s_1 está parametrizada en $[-1,0]$ y s_2 en $[0,1]$. Sea $u : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por $u(t) = 1-t$. Entonces $s_2 \circ u$ comienza en y y termina en x, además, $s_1 + s_2 \circ u = s : [-1,1] \longrightarrow M$ es un lazo diferenciable a trozos. De (ii) tenemos que

$$0 = \int_s \omega = \int_{s_1} \omega - \int_{s_2} \omega \tag{3.1}$$

Por lo tanto ω tiene integral de línea independiente por caminos. Donde en (3.1) hemos usado la parte (2) del Lema 8 para escribir $\int_{s_2 \circ u} \omega = -\int_{s_2} \omega$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Usaremos (iii) para construir $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = df$. Sin pérdida de generalidad supongamos que M es conexa. Fijemos un punto base $x_0 \in M$. Dado un punto $x \in M$ cualquiera, por el Lema 11 existe un camino diferenciable a trozos $s : [a,b] \longrightarrow M$ tal que $s(a) = x_0$ y $s(b) = x$. Sea $f(x) = \int_s \omega$. Por (iii) esta definición es independiente del camino diferenciable a trozos s, de x_0 a x. Probemos primero que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Sean $q \in M$ arbitrario y $(U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta coordenada alrededor de q con $U = \operatorname{int} D^n$, donde D^n es la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$. En estas coordenadas podemos escribir

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n g_i dx^i,$$

donde $g_i \in C^\infty(U)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Para cada $x \in U$ definamos $s_x : [0,1] \longrightarrow U$ por $s_x(t) = tx$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ y expresemos $f|_U$ por la fórmula

$$f(x) = f(q) + \int_{s_x} \omega.$$

Así, sobre U se obtiene

$$\begin{aligned} f(x^1,\ldots,x^n) &= f(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 g_i(tx^1,\ldots,tx^n)\frac{d}{dt}(tx^i)dt \\ &= f(0)+\sum_{i=1}^{n} x^i\int_0^1 g_i(tx^1,\ldots,tx^n)dt. \end{aligned}$$

Claramente, la última expresión es una función diferenciable de $x^1,\ldots,x^n$. Luego, como $q\in M$ es arbitrario, $f\in C^\infty(M)$.

Mostremos finalmente que $\omega = df$. Sea $s:[a,b]\longrightarrow M$ un camino diferenciable a trozos arbitrario. Sean $c<a$ y $s_0:[c,a]\longrightarrow M$ diferenciable a trozos tal que $s_0(c)=x_0$ y $s_0(a)=s(a)$. Entonces,

$$f(s(b))=\int_{s_0+s}\omega=\int_{s_0}\omega+\int_s\omega=f(s(a))+\int_s\omega.$$

De aquí

$$\int_s\omega=f(s(b))-f(s(a))=\int_s df.$$

Luego la forma $\widetilde{\omega}=\omega-df$ satisface que $\int_s\widetilde{\omega}=0$ para todo camino diferenciable a trozos s. Por el Lema 10 se tiene $\widetilde{\omega}=0$ por tanto, $\omega=df$. ■

Ejemplo 1 La 1-forma

$$\eta=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

definida sobre la variedad $M=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ no es exacta. En efecto, consideremos el lazo diferenciable $s:[0,2\pi]\longrightarrow M$ definido por $s(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$. Podemos calcular $s^*(\eta)$ directamente sustituyendo $x=\cos t$ y $y=\operatorname{sen} t$ en la expresión de η, lo cual da como resultado

$$\int_s\eta=\int_{[0,2\pi]}\frac{-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t dt)+\cos t(\cos t dt)}{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0.$$

Definición 13 Una 1-forma $\omega\in A^1(M)$ es *localmente exacta* si para $x\in M$ existe una vecindad abierta U de x tal que $\omega|_U$ es exacta.

Ejemplo 2 Vimos en el Ejemplo 1 que la 1-forma η no es exacta. Afirmamos en este ejempo que ella sí es localmente exacta. Si $q \in M$ no está en el eje y, la función $\theta_1 = \arctan(y/x)$ está definida y es diferenciable en una vecindad de q y además $d\theta_1 = \eta$. Si $q \in M$ no está en el eje x, entonces en una vecindad de q definimos la función $\theta_2 = -\arctan(x/y)$, la cual también cumple que $d\theta_2 = \eta$. Como ningún punto de $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pertenece a ambos ejes simultáneamente, concluimos que η es localmente exacta en M.

Definición 14 Sean $s_0, s_1 : [a,b] \longrightarrow M$ lazos diferenciables a trozos. Diremos que s_0 es *homotópica (diferenciablemente a trozos)* a s_1, y lo escribiremos $s_0 \sim s_1$ si existen una función continua

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow M$$

y una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ tal que

1. $H\big|_{([t_{i-1},t_i]\times[0,1])}$ es diferenciable, $1 \leqslant i \leqslant r$.
2. $H(t,0) = s_0(t)$ y $H(t,1) = s_1(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.
3. $H(a,\tau) = H(b,\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

La relación de homotopía diferenciable a trozos es una relación de equivalencia.

Proposición 8 *Si $\omega \in A^1(M)$ es localmente exacta y si s_1 y s_2 son lazos diferenciables a trozos y homotópicos entre sí, entonces*

$$\int_{s_1} \omega = \int_{s_2} \omega.$$

Antes de demostrar esta Proposición probemos primero las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $R = [a,b] \times [c,d] \subset U$ y $\omega \in A^1(U)$ localmente exacta. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $R_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \times (c-\varepsilon, d+\varepsilon) \subset U$ y $\omega|_{R_\varepsilon}$ es exacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por rectángulos abiertos de R tal que $\omega|_{U_i}$ es exacta para cualquier $i \in I$. Como $\bigcup U_i$ es un entorno abierto de R, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{R}_\varepsilon \subset \bigcup U_i \subset U$, donde $\overline{R}_\varepsilon$ denota la clausura de $R_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \times (c-\varepsilon, d+\varepsilon)$.

Como $\overline{R}_\varepsilon$ es compacto existe $\delta > 0$ (conocido como *número de Lebesgue* del cubrimiento $\mathcal{U}$) tal que todo subconjunto $E \subset \overline{R}_\varepsilon$ con $\operatorname{diam}(E) < \delta$ está totalmente contenido en algún $U_i \in \mathcal{U}$. También se cumple, por la misma compacidad de $\overline{R}_\varepsilon$, que existe $\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$ subcubrimiento finito de $\overline{R}_\varepsilon$ tal que $\overline{R}_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^r U_i$.

Nuestro objetivo es definir una función $f \in C^\infty(R_\varepsilon)$ tal que $\omega|_{R_\varepsilon} = df$. Para ello particionamos el rectángulo $\overline{R}_\varepsilon$ en m filas y n columnas con pequeños subrectángulos cerrados R_{ij} con $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$, donde cada R_{ij} tiene lados r_1, r_2 tales que $\max\{r_1, r_2\} < \delta$. Luego $R_{ij} \subset U_k$ para algún $k \in \{1, 2 \cdots r\}$, con lo cual se cumple que $\omega|_{U_k}$ es exacta.

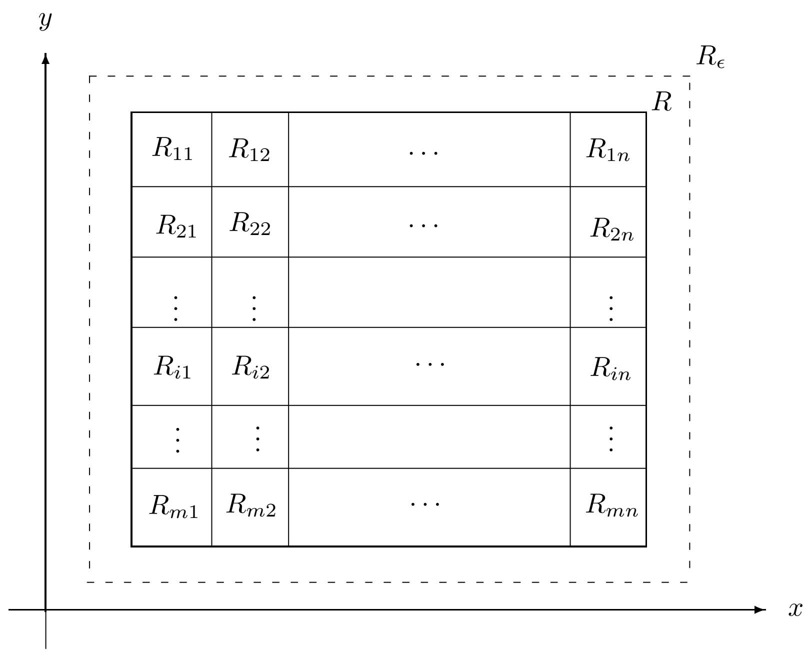

Figura 3.1: Construcción de $f \in C^\infty(R_\varepsilon)$.

Fijemos nuestra atención en alguna fila i fija. Por lo anterior, el subrectángulo R_{i1} está contenido en algún abierto $U_{i1} \in \{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$ en donde $\omega|_{U_{i1}}$ es exacta, esto es, existe una función diferenciable $f_{i1} : U_{i1} \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual $\omega|_{U_{i1}} = df_{i1}$ y también $\omega|_{R_{i1}} = df_{i1}$. De manera análoga, para el rectángulo R_{i2} existe $f_{i2} : R_{i2} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\omega|_{R_{i2}} = df_{i2}$. Consideremos ahora un rectángulo Q tal que $R_{i1} \cap R_{i2} \subset Q$, para el cual también se cumple $\omega|_Q = dg$ para alguna función diferenciable g definida sobre un abierto que contiene a Q. Ahora, en $Q \cap R_{i1}$ se cumple que $\omega = dg = df_{i1}$ de modo que $g = f_{i1} + t_1$, para alguna constante $t_1 \in \mathbb{R}$. Similarmente en $Q \cap R_{i2}$ se tiene que $\omega = dg = df_{i2}$ y de aquí se cumple que $g = f_{i2} + t_2$, con $t_2 \in \mathbb{R}$ constante. Podemos ver que en $Q \cap R_{i1}$ se cumple $f_{i1} = g - t_1$ y si tomamos $c_2 = t_2 - t_1$, en $Q \cap R_{i2}$ se tiene $f_{i2} + c_2 = g - t_2 + c_2 = g - t_1$. Continuando este procedimiento en toda la fila i, y dado que hay una cantidad finita de columnas, podemos definir una función

$f_i : R_{i1} \cup R_{i2} \cup \cdots \cup R_{in} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_i(x) = \begin{cases} f_{i1}(x) & , \ x \in R_{i1} \\ f_{i2}(x) + c_2 & , \ x \in R_{i2} \\ \quad \vdots & \\ f_{in}(x) + c_n & , \ x \in R_{in} \end{cases}$$

Por la forma como se construyó la función f_i concluimos que la misma está definida en toda la fila i, es diferenciable y cumple que $\omega|_{K_i} = df_i$, donde $K_i = R_{i1} \cup R_{i2} \cup \cdots \cup R_{in}$.

Como la fila i en la construcción anterior es arbitraria, es posible encontrar una función diferenciable f_i en cada fila i del rectángulo $\overline{R}_\varepsilon$ tal que $\omega|_{K_i} = df_i$. Aplicando el mismo procedimiento, pero esta vez para las filas, es posible construir una función $f \in C^\infty(R_\varepsilon)$ tal que $\omega = df$ en R_ε, lo que demuestra la afirmación. ■

Afirmación 2 *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades y $\omega \in A^1(N)$ localmente exacta. Entonces $\varphi^*(\omega) \in A^1(M)$ es localmente exacta.*

Demostración. Sea $x \in M$ fijo. Como $\omega \in A^1(N)$ es localmente exacta, dado $\varphi(x) \in N$ existe un entorno abierto U de $\varphi(x)$ en N tal que $\omega|_U = df$ para alguna $f \in C^\infty(U)$. Luego

$$\varphi^*(\omega)_x = \varphi^*_x(\omega_{\varphi(x)}) = \varphi^*_x(df_{\varphi(x)}) = \varphi^*(df)_x = d\varphi^*(f)_x$$

Observemos que $\varphi^*(f) \in C^\infty(M)$, luego $\varphi^*(\omega)$ es exacta en un entorno abierto $\varphi^{-1}(U) = V$ de x en M. Como $x \in M$ es arbitrario, se obtiene el resultado. ■

Procedamos ahora a demostrar la Proposición 8.

Demostración. Por hipótesis existen una función continua $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow M$ y una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ del intervalo $[a,b]$ tales que

- $H\big|_{[t_{i-1},t_i]\times[0,1]}$ es diferenciable,
- $H(t,0) = s_1(t)$, $H(t,1) = s_2(t)$, para $a \leqslant t \leqslant b$,
- $H(a,\tau) = H(b,\tau)$, para $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Como $\omega \in A^1(M)$ es localmente exacta se tiene, por la Afirmación 2, que $H^*(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]\times[0,1]}$ es localmente exacta. Por otra parte, por la Afirmación 1, $H^*(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]\times[0,1]}$ es exacta para cada $1 \leqslant i \leqslant r$. En particular se cumple que $H^*(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]\times\{0\}} = s_1^*(\omega)$ y $H^*(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]\times\{1\}} = s_2^*(\omega)$. Así

$$\int_{s_1} \omega = \int_a^b s_1^*(\omega) = \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_1^*(\omega) = \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} H^*(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]\times\{0\}} = 0$$

Análogamente, $\int_{s_2} \omega = 0$. Por tanto obtenemos que $\int_{s_1} \omega = \int_{s_2} \omega$. ■

Corolario 5 *Toda 1-forma en $\mathbb{R}^n$ localmente exacta, es exacta.*

Demostración. Sea $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un lazo diferenciable a trozos y definamos

$$H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

por $H(t, \tau) = \tau s(t)$. La aplicación H es una homotopía del lazo constante 0 al lazo s. Si ω es localmente exacta, la Proposición 8 implica

$$\int_s \omega = \int_0 \omega = 0.$$

Como el lazo s es arbitrario, el Teorema 1 implica que ω es exacta. ■

CAPÍTULO 4

Cohomología de 1-Formas

4.1. El espacio de primera cohomología

En el Ejemplo 2 vimos que una forma localmente exacta sobre una variedad M puede no ser exacta y esto parece estar relacionado con la topología de la variedad. Esta obsevación intuitiva es formalizada por la definición de la cohomología de de Rham $H^1(M)$, un espacio vectorial que mide en cierto sentido cuánto difieren las nociones de exactitud y exactitud local sobre M.

Definición 15 El espacio de *1-cociclos* (de de Rham) sobre M es el conjunto

$$Z^1(M) = \{\omega \in A^1(M) : \omega \text{ es localmente exacta}\}.$$

El espacio de *1-cofronteras* (de de Rham) es el conjunto

$$B^1(M) = \{\omega \in A^1(M) : \omega \text{ es exacta}\}.$$

Notemos que si vemos a $A^1(M)$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces $Z^1(M)$ y $B^1(M)$ son subespacios vectoriales. Es claro que $B^1(M) \subset Z^1(M)$. Además ellos no son $C^\infty(M)$-submódulos de $A^1(M)$.

Definición 16 El espacio vectorial cociente

$$H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M)$$

es llamado el *espacio de primera cohomología de de Rham* de la variedad M.

Si ω es un 1-cociclo, su clase de cohomología es $[\omega] = \omega + B^1(M) \in H^1(M)$.

Cohomología es un funtor contravariante de la categoría de variedades diferenciables y funciones diferenciables a la categoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales. En efecto, por la Proposición 6, una función diferenciable arbitraria $\varphi : M \longrightarrow N$ induce una aplicación lineal $\varphi^* : Z^1(N) \longrightarrow Z^1(M)$ tal que $\varphi^*(B^1(N)) \subset B^1(M)$. Luego φ^* induce, por pasaje al cociente, una función lineal bien definida (con el mismo nombre) $\varphi^* : H^1(N) \longrightarrow H^1(M)$, cumpliéndose las propiedades funtoriales $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ y $(id_M)^* = id_{H^1(M)}$.

Proposición 9 *Sean $\omega, \widetilde{\omega} \in Z^1(M)$. Entonces $[\omega] = [\widetilde{\omega}] \in H^1(M)$ si y sólo si $\int_s \omega = \int_s \widetilde{\omega}$, para todo lazo s diferenciable a trozos en M.*

Demostración. Sean $\omega, \widetilde{\omega} \in Z^1(M)$, entonces para todo lazo diferenciable a trozos s $\int_s \omega = \int_s \widetilde{\omega}$ si y sólo si $\int_s (\omega - \widetilde{\omega}) = 0$. Por el Teorema 1, esto es cierto precisamente cuando $\omega - \widetilde{\omega} \in B^1(M)$. Equivalentemente, $[\omega] = [\widetilde{\omega}]$. ■

Estos números son llamados los *períodos* de ω y de la clase de cohomología $[\omega]$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión. Diremos que $x \in M$ es un *punto regular* de f si la derivada df_x es no singular. En este caso, se sigue del teorema de la función inversa que f mapea una vecindad de $x \in M$ difeomorficamente en un conjunto abierto en N. Un punto $y \in N$ es llamado *valor regular* de f si el conjunto $f^{-1}(y)$ contiene sólo puntos regulares.

Un punto $x \in M$ que no sea punto regular de f es llamado *punto crítico*. De igual manera, un punto $y \in N$ es un *valor crítico* de f si $f^{-1}(y)$ contiene al menos un punto crítico de f.

El siguiente teorema, conocido como el *Teorema de Sard*, será utilizado en el siguiente ejemplo para probrar que $H^1(S^n) = \{0\}$, para $n \geqslant 2$. Para la demostración véase las referencias [Mi], [C].

Teorema 2 *Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es una función diferenciable, entonces el conjunto de valores críticos tiene medida de Lebesgue cero.*

Es bien conocido que se puede construir una sobreyección continua $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (una curva que llena el espacio). Sin embargo, si s es diferenciable todo valor de s en $\mathbb{R}^2$ es un valor crítico, por lo que $s(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero. Curvas diferenciables no pueden llenar el espacio. Más generalmente, funciones de menor a mayor dimensión siempre tienen imagen con medida cero.

Ejemplo 3 Consideremos la esfera S^n, $n \geqslant 2$. Por proyección estereográfica sabemos que el complemento de un punto en S^n es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, luego, vía este difeomorfismo, todo lazo diferenciable a trozos en S^n es homotópico al lazo constante. Por el teorema de Sard, ninguna curva diferenciable a trozos en

S^n puede llenar el espacio si $n \geqslant 2$. Luego todo lazo diferenciable a trozos es homotopicamente trivial. Si $\omega \in Z^1(S^n)$ y σ es un lazo diferenciable a trozos sobre S^n entonces se tiene, por la Proposición 8 que

$$\int_\sigma \omega = 0.$$

Y por la Proposición 9 concluimos que $H^1(S^n) = \{0\}$, siempre que $n \geqslant 2$.

4.2. Equivalencia Homotópica e isomorfismo inducido

Proposición 10 *Si $f_0, f_1 : M \longrightarrow N$ son diferenciables y homotópicas entre sí, entonces las transformaciones lineales $f_0^*, f_1^* : H^1(N) \longrightarrow H^1(M)$, inducidas por f_0 y f_1 respectivamente, son iguales.*

Demostración. Sea $[\omega] \in H^1(N)$. Si $s : [a,b] \longrightarrow M$ es un lazo diferenciable a trozos, entonces $s_0 = f_0 \circ s : [a,b] \longrightarrow N$ y $s_1 = f_1 \circ s : [a,b] \longrightarrow N$ también son lazos diferenciables a trozos. Sea $H : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ una homotopía de f_0 a f_1. Entonces la aplicación compuesta

$$[a,b] \times [0,1] \xrightarrow{s \times id} M \times \mathbb{R} \xrightarrow{H} N$$

es una homotopía de s_0 a s_1. Ahora,

$$\int_s f_0^*(\omega) = \int_a^b s^* f_0^*(\omega) = \int_a^b (f_0 \circ s)^*(\omega) = \int_{s_0} \omega. \tag{4.1}$$

Pero por la Proposición 8, $\int_{s_0} \omega = \int_{s_1} \omega$. Luego, por un procedimiento análogo al empleado en (4.1) se obtiene que $\int_{s_1} \omega = \int_s f_1^*(\omega)$, por lo que $\int_s f_0^*(\omega) = \int_s f_1^*(\omega)$. Como s es un lazo diferenciable a trozos, la Proposoción 9 implica

$$f_1^*[\omega] = [f_1^*(\omega)] = [f_0^*(\omega)] = f_0^*[\omega].$$

Finalmente, como $[\omega] \in H^1(N)$ es arbitrario, se tiene que $f_0^* = f_1^*$, al nivel de cohomología, lo que demuestra la Proposición. ∎

Definición 17 Una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una *equivalencia homotópica* si existe una función diferenciable $g : N \longrightarrow M$ tal que $f \circ g \sim id_N$ y $g \circ f \sim id_M$.

Corolario 6 *Una equivalencia homotópica $f : M \longrightarrow N$ induce un isomorfismo lineal*

$$f^* : H^1(N) \longrightarrow H^1(M).$$

Demostración. Como $f \circ g \sim id_N$, se deduce de la funtorialidad contravariante del espacio de primera cohomología y la Proposición 10, que $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = id_N^* = id_{H^1(N)}$ y $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = id_M^* = id_{H^1(M)}$. Luego, f^* y g^* son isomorfismos mutuamente inversos sobre los espacios de cohomología $H^1(N)$ y $H^1(M)$. ■

Ejemplo 4 Sea $f : \{0\} \hookrightarrow D^n$ la función inclusión. Sea $g : D^n \longrightarrow \{0\}$ la función constante. Estas funciones son diferenciables y $g \circ f = id_{\{0\}}$. Consideremos la función $f \circ g : D^n \longrightarrow D^n$ con imagen $\{0\}$. Afirmamos que $f \circ g$ es homotópica a id_{D^n}. En efecto, sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ diferenciable tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Definamos $H : D^n \times \mathbb{R} \longrightarrow D^n$ por

$$H(x,t) = \varphi(t)x.$$

Entonces, $H(x,0) = \varphi(0)x = 0 = f(g(x))$ y $H(x,1) = \varphi(1)x = x = id_{D^n}(x)$, para todo $x \in D^n$, estableciendo así la homotopía deseada. Con esto tenemos que f es una equivalencia homotópica. Luego,

$$f^* : H^1(D^n) \longrightarrow H^1(\{0\}) = \{0\}$$

es un isomorfismo. Esto es, $H^1(D^n) = \{0\}$, o equivalentemente, toda 1-forma localmente exacta en D^n es exacta. Un argumento similar muestra que $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a un punto, recuperando el Corolario 5.

Ejemplo 5 Sea $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la inclusión y sea $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ la función definida por

$$g(v) = \frac{v}{\|v\|}.$$

Ambas funciones son diferenciables y $g \circ i = id_{S^{n-1}}$. Afirmamos que $i \circ g \sim id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, por consiguiente i es una equivalencia homotópica. En efecto, definamos $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ por la fómula

$$H(v,t) = \frac{v}{t + (1-t)\|v\|}.$$

Podemos ver fácilmente que H es diferenciable, ya que $\|v\| > 0$ implica que $t + (1-t)\|v\| > 0$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Entonces, $H(v,1) = v$ y $H(v,0) = \frac{v}{\|v\|} = i(g(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de modo que

$$H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H^1(S^{n-1}).$$

En particular, junto con el Ejemplo 3, esto prueba que $H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es trivial, siempre que $n \geqslant 3$.

4.3. Espacio de Primera Cohomología de S^1

Proposición 11 *Existe un isomorfismo canónico $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.*

Probaremos esta proposición a través de tres lemas. Recordemos la función de recubrimiento universal $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por

$$p(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t).$$

Esta función induce un difeomorfismo entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y S^1, variedades que en lo sucesivo son consideradas iguales, como grupos de Lie difeomorfos (véase el Ejemplo 9 del Apéndice). Definimos la aplicación lineal $\alpha : Z^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\alpha(\omega) = \int_0^1 p^*(\omega).$$

Lema 12 *La aplicación lineal α induce una aplicación lineal bien definida*

$$\alpha : H^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Demostración. Se requiere mostrar que $\ker(\alpha) \supset B^1(S^1)$. En efecto, la restricción $\sigma = p\big|_{[0,1]}$ es un lazo diferenciable y puesto que $\omega \in B^1(S^1)$ por el teorema 1 se tiene

$$\alpha(\omega) = \int_\sigma \omega = 0.$$

∎

Lema 13 *La aplicación lineal $\alpha : H^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva.*

Demostración. Basta mostrar que $\ker(\alpha) = B^1(S^1)$ para $\alpha : H^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $\omega \in Z^1(S^1)$ tal que $\alpha(\omega) = 0$. Como $[\omega] = \omega + B^1(S^1)$, debemos probar que $\omega \in B^1(S^1)$ para que α sea inyectiva. Dado $n \in \mathbb{Z}$ sea $\tau_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la traslación $\tau_n(t) = t + n$. Entonces, $p \circ \tau_n = p$ y así

$$\tau_n^* \circ p^* = p^* : A^1(S^1) \longrightarrow A^1(\mathbb{R}).$$

Esto y la fórmula de cambio de variables para la integral nos permite obtener

$$\int_n^{t+n} p^*(\omega) = \int_0^t \tau_n^*(p^*(\omega)) = \int_0^t p^*(\omega), \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.2}$$

En particular, como $\alpha(\omega) = 0$ obtenemos

$$\int_n^{n+1} p^*(\omega) = \int_0^1 p^*(\omega) = 0 = \int_{n+1}^n p^*(\omega). \tag{4.3}$$

Definamos $f_\omega \in C^\infty(S^1)$ por

$$f_\omega(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \int_0^t p^*(\omega).$$

Para que f_ω sea diferenciable basta probar que está bien definida. Estará bien definida si

$$\int_0^{t+n} p^*(\omega) = \int_0^t p^*(\omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

Si $n = 0$, es obvio. Si $n > 0$, entonces aplicamos (4.3) y (4.2) para calcular

$$\begin{aligned} \int_0^{t+n} p^*(\omega) &= \int_n^{t+n} p^*(\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} p^*(\omega) \\ &= \int_n^{t+n} p^*(\omega) \\ &= \int_0^t p^*(\omega). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $n < 0$, aplicamos (4.3) para obtener

$$\begin{aligned} \int_t^n p^*(\omega) &= \int_t^0 p^*(\omega) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-i+1}^{-i} p^*(\omega) \\ &= \int_t^0 p^*(\omega) \text{ por (4.3).} \end{aligned}$$

Así queda mostrado que f_ω está bien definida y por tanto es diferenciable. Para el levantamiento $\widetilde{f_\omega} = p^*(f_\omega) \in C^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\widetilde{f_\omega}(t) = \int_0^t p^*(\omega),$$

luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo y la Proposición 6, obtenemos

$$p^*(\omega) = d\widetilde{f_\omega} = d(p^*(f_\omega)) = p^*(df_\omega).$$

Pero $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ es un difeomorfismo local, luego ω y df_ω son iguales localmente, luego globalmente. Esto es, $\omega \in B^1(S^1)$. ∎

Ejemplo 6 Recordemos la forma localmente exacta

$$\eta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

del Ejemplo 2 y sea $\widetilde{\eta} = i^*(\eta) \in Z^1(S^1)$, donde i es la función inclusión de S^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Para el lazo $\sigma = p\big|_{[0,1]}$, se tiene que $s = i \circ \sigma$ es tal que $\sigma^*(\widetilde{\eta}) = \sigma^*(i^*(\eta)) = (i \circ \sigma)^*(\eta) = s^*(\eta) = 2\pi dt$.

Lema 14 *La aplicación lineal $\alpha : H^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva.*

Demostración. Es suficiente mostrar que α es no trivial. Dada $[\eta] \in H^1(S^1)$ considere $\widetilde{\eta} = i^*(\eta)$ para la cual se cumple

$$\alpha[\widetilde{\eta}] = \int_0^1 p^*(\widetilde{\eta}) = \int_0^1 \sigma^*(\eta) = 2\pi.$$

Por tanto α es sobreyectiva. ∎

Se ha completado así la demostración de la Proposición 11.

Corolario 7 *Se verifica que $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{R}$.*

CAPÍTULO 5

Algunas Aplicaciones Topológicas

5.1. Teoría de Grado Módulo 2

Supongamos que M es una variedad compacta y N una variedad conexa tales que $\dim(M) = m = n = \dim(N) > 0$. Si $f \in C^\infty(M, N)$, escojamos un valor regular $y \in N$ de f. Sabemos que la imagen inversa $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de M de dimensión $m-n = 0$. Luego es un conjunto de puntos aislados. Como además es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, es finito. Sea $k = |f^{-1}(y)|$ la cardinalidad de este conjunto, un entero no negativo.

Proposición 12 *Sea $R \subset N$ el conjunto de valores regulares de la función f. La función $\lambda_f : R \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ definida por $\lambda_f(y) = |f^{-1}(y)|$, es localmente constante.*

Por ser $\lambda_f(y)$ localmente constante, es constante en cada componente conexa.

Definición 18 Si $y \in N$ es un valor regular de f, entonces $\deg_2(f, y) \in \mathbb{Z}_2$ es la clase residual módulo 2 de $\lambda_f(y)$.

A continuación establecemos algunos resultados sobre grado que son requeridos para nuestros objetivos. Para la demostración el lector puede consultar [C], [Mi].

Lema 15 (*Lema de Homotopía*) *Si $f, g \in C^\infty(M, N)$ son diferenciablemente homotópicas y si $y \in N$ es un valor regular para f y para g entonces se cumple*

$$\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$$

Teorema 3 *Si y y z son valores regulares de f entonces*

$$\deg_2(f, y) = \deg_2(f, z).$$

Esta clase residual común depende sólo de la clase de homotopía de f.

Gracias a este Teorema, podemos definir sin ambigüedad una función

$$\deg_2(f) : N \longrightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Por la Proposición 12 esta función es localmente costante. Luego, por la conexidad de N, $\deg_2(f)$ es constante.

Definición 19 El elemento $\deg_2(f) \in \mathbb{Z}_2$ es llamado el *grado* (mod 2) de $f \in C^\infty(M, N)$.

Corolario 8 *Si $f, g \in C^\infty(M, N)$ son homotópicas, entonces* $\deg_2(f) = \deg_2(g)$.

Lema 16 *Si $f : M \longrightarrow N$ no es sobreyectiva, entonces* $\deg_2(f) = 0$.

Corolario 9 *Si N no es compacto*, $\deg_2(f) = 0$.

5.2. Teoría de Grado sobre S^1

Para comenzar clasificaremos las funciones diferenciables $f : S^1 \longrightarrow S^1$ bajo homotopía. La primera observación es que como $H^1(S^1) = \mathbb{R}$, la función f induce una aplicación lineal $f^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que depende sólo de la clase de homotopía de f. Así, f^* es simplemente la multiplicación por una cierta constante $a_f \in \mathbb{R}$, donde a_f depende solamente de la clase de homotopía de f. Probaremos que $a_f \in \mathbb{Z}$, mostrando en particular que este entero determina a f bajo homotopía. Esto proporcionará una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{Z}$ y el conjunto de clases de homotopía de funciones diferenciables de S^1 en sí mismo.

Lema 17 *(Lema del Levantamiento) Si $f : S^1 \longrightarrow S^1$ es diferenciable, existe una función diferenciable $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, $\widehat{f}$ es otro levantamiento de f si y sólo si $\widehat{f} = \widetilde{f} + k$ para algún entero k.

Demostración. Probaremos primero que si $g : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ es una función diferenciable, entonces existe una función diferenciable $\widetilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \widetilde{g} = g$. El levantamiento $\widetilde{g}$ será diferenciable dada la diferenciabilidad de g y el hecho que p es un difeomorfismo local. Aplicando esto a $g = p \circ f$ obtenemos que $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ es el levantamiento requerido. Primero definamos tal levantamiento sobre un intervalo compacto arbitrario $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Sean J_+ y J_- los complementos en $S^1 \subset \mathbb{C}$ de los puntos $+1$ y -1 respectivamente. Luego,

$$p^{-1}(J_+) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}(k,k+1) \text{ y } p^{-1}(J_-) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-1/2,k+1/2).$$

Estos intervalos son llevados difeomorficamente por p en J_+ y J_- respectivamente. Por la continuidad de g y la compacidad de $[a,b]$ es posible encontrar una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_q = b$ tal que $g\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ o J_+ o tiene imagen J_-, para $1 \leqslant i \leqslant q$. Entonces $g_1 = g\big|_{[t_0,t_1]}$ posee un levantamiento continuo $\widetilde{g}_1$, el cual depende solamente de la elección de $\widetilde{g}_1(t_0) \in p^{-1}(g(t_0))$ (véase el Lema 20 del Apéndice). Después, para la función $g_2 = g\big|_{[t_1,t_2]}$ puede encontrarse un único levantamiento continuo $\widetilde{g}_2$ de manera que $\widetilde{g}_2(t_1) = \widetilde{g}_1(t_1)$. Si continuamos con este argumento producimos un levantamiento de $g\big|_{[a,b]}$ como se quería, dependiendo sólo de la escogencia del valor del levantamiento en $t_0 = a$. Expresando a $\mathbb{R}$ como unión de intervalos de la forma $[k,k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, escogemos primero un levantamiento de g en $[0,1]$ mediante el procedimiento anterior, luego en $[1,2]$ tal que coincidan en 1, luego en $[-1,0]$ tal que sean iguales en 0 y así sucesivamente. Hemos encontrado un levantamiento $\widetilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
 & S^1
\end{tikzcd}$$

Haciendo $g = p \circ f$ se obtiene el resultado. Por otra parte, si $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$ son dos levantamientos de $f : S^1 \longrightarrow S^1$, el hecho que p sea un homomorfismo de grupos de Lie entre $\mathbb{R}$ y S^1 implica que

$$p(\widetilde{f}(t) - \widehat{f}(t)) = \frac{p(\widetilde{f}(t))}{p(\widehat{f}(t))} = \frac{f(p(t))}{f(p(t))} = 1. \tag{5.1}$$

Esto es, $\widetilde{f}(t) - \widehat{f}(t) \in \mathbb{Z}$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$. La continuidad de la expresión (5.1) en t implica que este valor entero es una constante k. Así, $\widehat{f} = \widetilde{f} + k$. ■

Proposición 13 *Si $f : S^1 \longrightarrow S^1$ es diferenciable, entonces $a_f = \widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$, donde $\widetilde{f}$ es cualquier levantamiento de f como en el Lema* 17.

Demostración. Sea $\widetilde{f}$ un levantamiento de f como en el Lema 17. Entonces,

$$p(\widetilde{f}(1)) = f(p(1)) = f(p(0)) = p(\widetilde{f}(0)).$$

Luego, $\widetilde{f}(1)-\widetilde{f}(0)$ es un entero que denotaremos m. Recordemos ahora la forma $\widetilde{\eta} \in Z^1(S^1)$ del Ejemplo 4 y calculemos

$$\begin{aligned}
2\pi a_f &= a_f\alpha[\widetilde{\eta}] = \alpha(a_f[\widetilde{\eta}]) = \alpha(f^*[\widetilde{\eta}]) = \int_0^1 p^*(f^*(\widetilde{\eta})) = \int_0^1 (f\circ p)^*(\widetilde{\eta}) \\
&= \int_0^1 (p\circ \widetilde{f})^*(\widetilde{\eta}) = \int_0^1 \widetilde{f}^*(p^*(\widetilde{\eta})) = \int_0^1 \widetilde{f}^*(2\pi dt) = 2\pi \int_0^1 \widetilde{f}^*(dt) \\
&= 2\pi \int_0^1 \widetilde{f}'(t)dt = 2\pi(\widetilde{f}(1)-\widetilde{f}(0)) \\
&= 2\pi m
\end{aligned}$$

Esto es, $a_f = m \in \mathbb{Z}$. ■

Definición 20 Dada una función diferenciable $f : S^1 \longrightarrow S^1$, el entero a_f es llamado el *grado* de f y es denotado por $\deg(f)$.

Corolario 10 *Si $f : S^1 \longrightarrow S^1$ es diferenciable y $\widetilde{f}$ es un levantamiento definido como en el Lema 17 y si $t \in \mathbb{R}$ es arbitrario, entonces* $\deg(f) = \widetilde{f}(t+1) - \widetilde{f}(t)$.

Demostración. Veamos a $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ como un homomorfismo de grupos. Entonces,

$$p(\widetilde{f}(t+1)-\widetilde{f}(t)) = \frac{p(\widetilde{f}(t+1))}{p(\widetilde{f}(t))} = \frac{f(p(t+1))}{f(p(t))} = 1.$$

Luego, $\widetilde{f}(t+1)-\widetilde{f}(t) \in \mathbb{Z}$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Esta función de t, siendo continua y a valores enteros, es constante en $\mathbb{R}$. Luego es igual a $\widetilde{f}(1)-\widetilde{f}(0) = \deg(f)$. ■

Definición 21 El conjunto de clases de homotopía de funciones diferenciables $f : M \longrightarrow N$ será denotado $\pi[M,N]$.

Gracias a la invarianza por homotopía de la cohomología, hemos definido una función

$$\deg : \pi[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Describamos $\deg(f)$ en términos de valores regulares. Sea $z_0 \in S^1$ un valor regular de $f : S^1 \longrightarrow S^1$. Entonces $f^{-1}(z_0) = \{z_1, \ldots, z_r\}$. Si $f^{-1}(z_0) = \varnothing$, tomamos $r = 0$. Recordemos que $\deg_2(f) = r \pmod 2$.

Escojamos $\widetilde{z}_i \in \mathbb{R}$ tal que $p(\widetilde{z}_i) = z_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. La función diferenciable $f : S^1 \longrightarrow S^1$ preserva la orientación en z_i si $\widetilde{f}'(\widetilde{z}_i) > 0$ e invierte la orientación en z_i si $\widetilde{f}'(\widetilde{z}_i) < 0$. Sea $\varepsilon_i = \widetilde{f}'(\widetilde{z}_i)/|\widetilde{f}'(\widetilde{z}_i)| \in \{-1, 1\}$, obsérvese que este número depende sólo de f y z_i.

Proposición 14 *Con las convenciones de arriba, se cumple que*

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i.$$

Demostración. Tomemos $a \in \mathbb{R} \backslash p^{-1}\{z_1, \ldots, z_r\}$. Luego, la intersección $p^{-1}(z_i) \cap (a, a+1)$ posee un sólo punto, el cual escogemos como nuestro $\widetilde{z}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Sea $p^{-1}(z_0) = \{b+k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y consideremos la gráfica de $s = \widetilde{f}(t)$ sobre el intervalo abierto $(a, a+1)$ y las líneas horizontales $s = b + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Cada vez que la gráfica cruza una línea $s = b + k$ el parámetro t es igual a uno de los $\widetilde{z}_i$ y ε_i indica si la gráfica cruza esta línea de manera creciente ($\varepsilon_i = 1$) o decreciente ($\varepsilon_i = -1$). La Figura (5.1) muestra el caso en que $r = 7$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_7 = 1$ y $\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$. La suma de los ε_i pertenecientes a una línea $s = b + k$ es 1, -1 o 0. Claramente la suma de todos estos valores es

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i = \widetilde{f}(a+1) - \widetilde{f}(a) = \deg(f),$$

donde la última igualdad ocurre gracias al Corolario 10. ■

(En la Figura (5.1) el grado es 3)

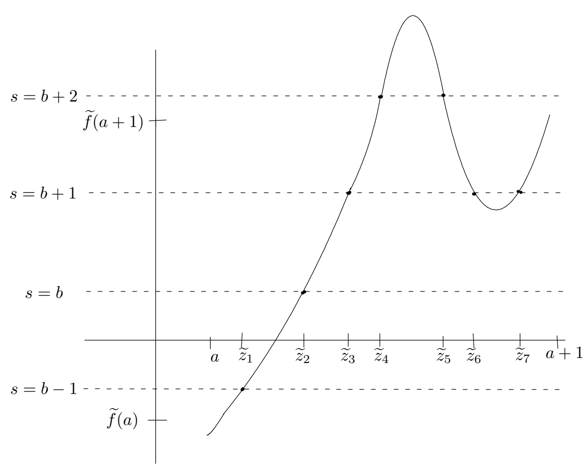

Figura 5.1: Gráfica de $\widetilde{f}$.

Corolario 11 *Si $f : S^1 \longrightarrow S^1$ es una función diferenciable se cumple que*

$$\deg_2(f) = \deg(f)(\operatorname{mod} 2).$$

Ejemplo 7 Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos $f_n : S^1 \longrightarrow S^1$ por $f_n(z) = z^n$. Viendo a S^1 como subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$. Podemos escoger el levantamiento $\widetilde{f}_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\widetilde{f}_n(t) = nt$, entonces

$$\deg(f_n) = \widetilde{f}_n(1) - \widetilde{f}_n(0) = n.$$

Si $z \in S^1$ es un valor regular de f_n, entonces $f_n^{-1}(z) = \{\rho_1, \ldots, \rho_{|n|}\}$, donde $\rho_1, \ldots, \rho_{|n|}$ son las n distintas raíces de z. Es evidente que si $n = 0$, entonces f_0 es constante y $f_0^{-1}(z) = \varnothing$. Si $n > 0$, todos los ε_i son iguales a 1 y si $n < 0$ entonces $\varepsilon_i = -1$ para todo i. Así,

$$n = \sum_{i=1}^{|n|} \varepsilon_i$$

en todos los casos.

Teorema 4 *La función* $\deg : \pi[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ *es biyectiva.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe f_n tal que $\deg(f_n) = n$, luego deg es sobreyectiva. Debemos probar que si $\deg(f) = \deg(g) = n$ entonces $f \sim g$. Definamos $\widetilde{H} : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$\widetilde{H}(t, \tau) = \tau \widetilde{f}(t) + (1 - \tau)\widetilde{g}(t).$$

Como $\widetilde{H}(t + 1, \tau) - \widetilde{H}(t, \tau) = \tau n + (1 - \tau)n = n$, es posible establecer una función diferenciable, bien definida $H : S^1 \times [0,1] \longrightarrow S^1$ mediante la fórmula

$$H(z, \tau) = p \circ \widetilde{H}(p^{-1}(z), \tau).$$

Evidentemente, $H(z, 0) = g(z)$ y $H(z, 1) = f(z)$, para cualquier $z \in S^1$. Luego $f \sim g$. ■

5.3. Teorema Fundamental del Álgebra y estructura de $\pi[S^1, S^1]$

Teorema 5 *Una función diferenciable* $f : S^1 \longrightarrow S^1$ *puede ser extendida a una función diferenciable* $F : D^2 \longrightarrow S^1$ *si y sólo si* $\deg(f) = 0$.

Demostración. Primero supongamos que la extensión diferenciable F existe. Esto es, $f = F \circ i$ donde $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ es la función inclusión. Entonces $f^* = i^* \circ F^*$ y $F^* : H^1(S^1) \longrightarrow H^1(D^2)$. Pero por el Ejemplo 5 $H^1(D^2) = \{0\}$, lo cual implica que $f^* \equiv 0$. Por tanto $\deg(f) = 0$.

Para el recícproco, supongamos que $\deg(f) = 0$. Por el Teorema 4 se sigue que f es homotópica a la función constante $f_0 \equiv 1$. Esto es, existe una homotopía $\widetilde{H} : S^1 \times [0,1] \longrightarrow$

S^1 tal que $\widetilde{H}(z,1) = f(z)$ y $\widetilde{H}(z,0) = 1$, para $z \in S^1$. Ahora, podemos reparametrizar $\widetilde{H}$ de manera que

$$H(z,t) = \begin{cases} \widetilde{H}(z, 2t-1) & , 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \\ \widetilde{H}(z,0) & , \ 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \end{cases}$$

Así $H(z,1) = f(z)$ para todo $z \in S^1$ y $H(z,t) \equiv 1$, si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Definamos ahora una función sobreyectiva y diferenciable $\varphi : S^1 \times [0,1] \longrightarrow D^2 \subset \mathbb{C}$ por $\varphi(z,t) = zt$. Entonces φ mapea $S^1 \times (0,1]$ difeomorficamente sobre $D^2 \setminus \{0\}$. Luego H define una función diferenciable sobre el disco $F : D^2 \longrightarrow S^1$ como sigue.

$$F(\varphi(z,t)) = H(z,t).$$

La cual está bien definida, es diferenciable en $D^2 \setminus \{0\}$ y es constante en $\{w \in D^2 : |w| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Luego, F es diferenciable. Evidentemente, $F(z) = H(z,1) = f(z)$, para todo $z \in S^1$, así F es una extensión de f. ■

Teorema 6 (*Teorema Fundamental del Álgebra*) *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $n \geqslant 1$. Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demostración. Podemos suponer que el coeficiente del término de grado n es 1 y escribir

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Supongamos por absurdo que f no tiene raíces. Para cada $r \in \mathbb{R}^+$ definamos una función diferenciable $F_r : D^2 \longrightarrow S^1$ por la fórmula

$$F_r(z) = \frac{f(rz)}{|f(rz)|}.$$

Esta función está bien definida gracias a la hipótesis de que f no tiene raíces. Sea $g_r = F_r|_{S^1}$. Luego hagamos $\widehat{H}_r(z,t) = (rz)^n + t(a_1(rz)^{n-1} + \cdots + a_n)$ y notemos que $\widehat{H}_r$ no se anula en $S^1 \times [0,1]$ si r es suficientemente grande. En efecto,

$$\frac{\widehat{H}_r(z,t)}{(rz)^n} = 1 + t\left(\frac{a_1}{rz} + \cdots + \frac{a_n}{(rz)^n}\right)$$

se aproxima a 1 cuando $r \to \infty$, uniformemente en $S^1 \times [0,1]$. Así, fijemos un r suficientemente grande y definamos $H : S^1 \times [0,1] \longrightarrow S^1$ por

$$H(z,t) = \frac{\widehat{H}_r(z,t)}{|\widehat{H}_r(z,t)|}.$$

Entonces $H(z,1) = g_r(z)$ y $H(z,0) = z^n$ para todo $z \in S^1$. En consecuencia, $g_r \sim f$ y $\deg g_r = \deg(f) = n > 0$. Pero g_r puede ser extendida diferenciablemente a $F_r : D^2 \longrightarrow S^1$, una contradiccíon con el Teorema 5. ■

Lema 18 *Si* $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ *son diferenciables, entonces* $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

En efecto, la funtorialidad de la cohomología implica que $a_{f\circ g} = a_f a_g$, luego el Lema es inmediato.

Corolario 12 *Si* $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ *son diferenciables, entonces* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *son homotópicas entre sí.*

Si $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ son diferenciables, se define el producto puntual, $fg : S^1 \longrightarrow S^1$ mediante la estructura de grupo de Lie de S^1. Esto es,

$$fg(z) = f(z)g(z)$$

para todo $z \in S^1$. Claramente, $f_0 g_0 \sim f_1 g_1$ siempre que ocurra $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$. Esto define un producto conmutativo sobre el conjunto $\pi[S^1, S^1]$. La función constante 1 determina la clase $[1] \in \pi[S^1, S^1]$ la cual es la identidad para dicho producto. Si $\iota : S^1 \longrightarrow S^1$ es la funcíon que a cada z le asigna su inverso multiplicativo z^{-1}, entonces cada $[f] \in \pi[S^1, S^1]$ posee un inverso $[\iota \circ f]$ relativo a este producto, así $\pi[S^1, S^1]$ es canonicamente un grupo abeliano.

Proposición 15 *La biyección* $\deg : \pi[S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sólo es necesario demostrar que $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$. Si $\deg(f) = n$ y $\deg(g) = m$ entonces $f \sim f_n$ y $g \sim f_m$. De manera que $fg \sim f_n f_m$. Pero $f_n f_m = f_{n+m}$. Así $\deg(fg) = \deg(f_n f_m) = m + n = \deg(f) + \deg(g)$. ■

Por el Ejemplo 10 del Apéndice, se tiene que el grupo fundamental $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$. Este es un isomorfismo canónico, producido por levantar un lazo σ basado en S^1 a un camino $\widetilde{\sigma}$ en el cubrimiento universal $\mathbb{R}$ empezando en 0. Gracias a la proposición anterior podemos identificar canonicamente al primer grupo fundamental de S^1 con $\pi[S^1, S^1]$.

Apéndice

Categorías y Funtores

Una *Categoria* $\mathscr{C}$ consiste en:

- una clase (no necesariamente un conjunto) de *objetos* $obj\mathscr{C}$
- para cada par ordenado $A, B \in obj\mathscr{C}$ un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ de *morfismos*.
- para cada terna $A, B, C \in obj\mathscr{C}$ una función llamada *composición*: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$ denotado por $(f, g) \longmapsto g \circ f$,

todos ellos sujetos a satisfacer los siguientes axiomas:

(i) la composición es asociativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,

(ii) para cada $A \in obj\mathscr{C}$, existe un *morfismo identidad* $Id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$ que satisface: para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ se tiene que $Id_B \circ f = f = 0 \circ Id_A$

En cualquier categoría $\mathscr{C}$, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es llamado un *isomorfismo* si existe un morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ tal que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$.

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{A}$ categorías tales que $obj\mathscr{C} \subset obj\mathscr{A}$. Si $A, B \in obj\mathscr{C}$, denotemos los dos conjuntos posibles de morfismos por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$ Entonces $\mathscr{C}$ es una *subcategoria* de $\mathscr{A}$ si

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$$

para todo $A, B \in obj\mathscr{C}$, y si la composición en $\mathscr{C}$ es igual a la composición en $\mathscr{A}$.

Una *congruencia* sobre una categoría $\mathscr{C}$ es una relación de equivalencia $\sim$ sobre la clase $\bigcup_{(A,B)} \mathrm{Hom}(A, B)$ de todos los morfismos en $\mathscr{C}$ tales que:

1. Si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $f \sim f'$ entonces $f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$.
2. Si $f \sim f'$, $g \sim g'$ y $g \circ f$ existe, entonces $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Teorema 7 *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con congruencia $\sim$ y denotemos por $[f]$ la clase de equivalencia del morfismo f. Definamos $\mathscr{C}'$ como:*

$$obj\mathscr{C}' = obj\mathscr{C}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(A,B) = \{[f] : f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\} \text{ y } [g] \circ [f] = [g \circ f]$$

entonces $\mathscr{C}'$ es una categoría.

La categoría $\mathscr{C}'$ construida en el teorema anterior es llamada una *categoría cociente* de $\mathscr{C}$. Usualmente se denota $Hom_{\mathscr{C}'}(A,B)$ como $[A,B]$.

Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{C}$ son categorías, un *funtor* $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ es una función tal que:

1. $A \in obj\mathscr{A} \longrightarrow TA \in obj\mathscr{C}$.
2. Si $f : A \longrightarrow A'$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces $Tf : TA \longrightarrow TA'$ es un morfismo en $\mathscr{C}$.
3. Si f y g son morfismos en $\mathscr{A}$ para los cuales $g \circ f$ esta definido, entonces
$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf).$$
4. $T(1_A) = 1_{TA}$, para todo $A \in obj\mathscr{A}$.

Los funtores, como se han definido son también llamados *funtores covariantes* para distinguirlos de los funtores contravariantes que cambian la dirección de las flechas. Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{C}$ son categorias, un *funtor contravariante* $S : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ es una función tal que:

1. $A \in obj\mathscr{A} \Rightarrow SA \in obj\mathscr{C}$.
2. Si $f : A \longrightarrow A'$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces $Sf : SA' \longrightarrow SA$ es un morfismo en $\mathscr{C}$.
3. Si f y g son morfismos en $\mathscr{A}$ para los cuales $g \circ f$ está definido, entonces
$$S(g \circ f) = (Sf) \circ (Sg).$$
4. $S(1_A) = 1_{SA}$, para todo $A \in obj\mathscr{A}$.

Ejemplo 8 Sea F un campo y $\mathscr{C}$ la categoría de todos los espacios vectoriales de dimensión finita sobre F. Definamos $S : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ por

$$\begin{aligned} S(V) &= V^* = \mathrm{Hom}(V,F) \\ S(f) &= f^* \end{aligned}$$

Así, S es el *funtor espacio dual* que asigna a cada espacio vectorial V su espacio dual V^*, conformada por todos los funcionales lineales sobre V, y a cada transformación lineal f, su traspuesta f^*.

Espacio de recubrimiento

En lo que sigue supondremos que todos los espacios topológicos a ser considerados son localmente conexos por caminos. Sea $p : Y \longrightarrow X$ una función continua entre espacios topológicos. Un subespacio conexo y abierto $U \subseteq X$ está *uniformemente cubierto* por p si cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ es llevada homeomórficamente sobre U por p.

Una función continua $p : Y \longrightarrow X$ es una *función de recubrimiento* si X es conexo y cada punto $x \in X$ tiene una vecindad conexa que está uniformemente cubierta por p. La terna (Y, p, X) es llamada *espacio de recubrimiento* de X. En la práctica nos referimos a Y mismo como el espacio de recubrimiento. Además, en general, no se requiere que Y sea conexo.

Sea p una función de recubrimiento. Una *transformación de recubrimiento* es un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow Y$ tal que $p \circ h = p$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Lema 19 *El conjunto Γ de transformaciones de recubrimiento, asociado a una función de recubrimiento $p : Y \longrightarrow X$ forma un grupo bajo la composición, llamado el grupo de recubrimiento.*

Ejemplo 9 La función $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definida por

$$p(t) = e^{2\pi i t}$$

es una función de recubrimiento. En efecto, fijando un punto $z_0 = e^{2\pi i t_0} \in S^1$, es claro que p lleva el intervalo compacto $[t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}]$ inyectivamente, luego homeomórficamente, en un arco compacto de S^1 conteniendo a z_0 en su interior U. Entonces $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta de intervalos abiertos $(t_0 + n - \frac{1}{4}, t_0 + n + \frac{1}{4})$, con n variando sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Evidentemente cada uno de estos intervalos es una componente conexa de $p^{-1}(U)$ y es llevada por

p homeomórficamente en U. Finalmente, $p(t) = p(s)$ si y sólo si $s = t + m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Así $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una trasformación de recubrimiento si y sólo si $h(t) = t + m_t$ donde $m_t \in \mathbb{Z}$, para $-\infty < t < \infty$. Por continuidad, m_t depende continuamente de t. Pero $\mathbb{Z}$ es un espacio discreto y $\mathbb{R}$ es conexo, luego $m_t \equiv m$ es constante. El grupo de transformaciones de recubrimiento es el grupo de traslaciones por enteros, luego es canónicamente isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de funciones continuas, donde p y p' son funciones de recubrimiento, diremos que $\widetilde{f}$ es un *levantamiento* de f a los espacios de recubrimiento. En el caso que $X = X'$ y $f = id_X$, tal levantamiento es llamado un *homomorfismo* de espacios de recubrimiento. Un homomorfismo de espacios de recubrimiento que también sea un homeomorfismo es llamado un isomorfismo de espacios de recubrimiento.

Lema 20 *Si $\widetilde{f}$ es un levantamiento de f, y si el espacio de recubrimiento Y' es conexo, entonces $\widetilde{f}$ está completamente determinada por f y por el valor de $\widetilde{f}$ en un punto.*

Corolario 13 *Sea $p : Y \longrightarrow X$ una función de recubrimiento, supongamos que Y es conexo, y sea $y \in Y$. Entonces toda transformación de recubrimiento $h : Y \longrightarrow Y$ está únicamente determinada por el punto $h(y)$.*

En efecto, una transformación de recubrimiento es un levantamiento de la transformación identidad $id : X \longrightarrow X$, donde $Y' = Y$ y $p' = p$.

Otro tipo de levantamiento importante es aquel para el cual el recubrimiento $p' : Y' \longrightarrow X'$ es el recubrimiento trivial $id : X' \longrightarrow X'$. En este caso el levantamiento continuo encaja en un triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Lema 21 *(Propiedad de Levantamiento por Caminos). Sean $p : Y \longrightarrow X$ un espacio de recubrimiento, $x \in X$, $y \in p^{-1}(x)$ y $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ un camino continuo con $\sigma(a) = x$. Entonces existe un único levantamiento $\widetilde{\sigma} : [a, b] \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{\sigma}(a) = y$.*

Otra propiedad de levantamiento importante para espacios de recubrimiento es la *propiedad de levantamiento por homotopía*. Sean f_0 y f_1 funciones continuas de un espacio Z en un espacio W. Una *homotopía* entre estas funciones es una función continua $H : Z \times [0,1] \longrightarrow W$ tal que

$$\begin{aligned} f_0(z) &= H(z,0), \text{ para todo } z \in Z \\ f_1(z) &= H(z,1), \text{ para todo } z \in Z. \end{aligned}$$

Si $C \subseteq Z$ y $f_0|_C \equiv f_1|_C$, diremos que H es una homotopía relativa $(\operatorname{mod} C)$ si, además,

$$H(z,t) = f_0(z), \text{ para todo } z \in C \text{ y } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Si existe una homotopía entre f_0 y f_1, diremos que f_0 es *homotópica* a f_1 y se escribirá $f_0 \sim f_1$, si es una homotopía $(\operatorname{mod} C)$, escribiremos $f_0 \sim_C f_1$.

Puede pensarse en una homotopía H como una deformación continua de la función f_0 a la función f_1 a través de funciones $f_t(z) = H(z,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Un caso particularmente importante de homotopía relativa es aquel en el cual las funciones son caminos

$$\sigma_i : [a,b] \longrightarrow W, \text{ con } i = 0,1$$

y $C = \partial[a,b] = \{a,b\}$. Luego las curvas tienen los mismos puntos finales $\sigma_0(a) = \sigma_1(a) = x$, $\sigma_0(b) = \sigma_1(b) = y$, y la homotopía $(\operatorname{mod} \{a,b\})$ deforma una curva en otra manteniendo los puntos finales fijos. Denotaremos esta homotopía relativa por $\sigma_0 \sim_\partial \sigma_1$.

Usualmente parametrizaremos caminos en el intervalo $[0,1]$. Si σ y τ son dos caminos tales que $\sigma(1) = \tau(0)$, podemos unirlos en este punto común para producir un camino $\sigma \cdot \tau$ uniendo $\sigma(0)$ a $\tau(1)$ y parametrizado en $[0,1]$ como sigue:

$$(\sigma \cdot \tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Un *lazo* en X basado en x_0 es un camino $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Esto es, un camino que parte de x_0 en el tiempo $t = 0$ y retornando a x_0 en el tiempo $t = 1$. Denotaremos también como x_0 al lazo constante $\sigma \equiv x_0$. Un espacio topológico X es *simplemente conexo* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. X es conexo por caminos

2. Existe un punto $x_0 \in X$ tal que todo lazo en x_0 satisface $\sigma \sim_\partial x_0$.

Un espacio X es *localmente simplemente conexo* si cada vecindad de cada punto $x \in X$ contiene una vecindad abierta de x simplemente conexa. El siguiente lema nos provee de varias caracterizaciones de conexidad simple.

Lema 22 *Las propiedades de un espacio X conexo por caminos, que a continuación se enuncian, son equivalentes:*

1. *Toda función continua $f : S^1 \longrightarrow X$ es homotópica a una función constante.*

2. *Toda función continua $f : S^1 \longrightarrow X$ puede extenderse a una función continua $F : D^2 \longrightarrow X$, donde D^2 es el disco unitario cerrado en $\mathbb{R}^2$.*

3. *Si σ y τ son caminos en X teniendo los mismos puntos inicial y final, entonces $\sigma \sim_\partial \tau$.*

4. *Si σ es un lazo en un punto arbitrario $x \in X$, entonces $\sigma \sim_\partial x$.*

5. *X es simplemente conexo.*

El recubrimiento universal

Una función de recubrimiento $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ se dice que es *universal* si $\widetilde{X}$ es conexo y, para cualquier función de recubrimiento $p : Y \longrightarrow X$ tal que Y es conexo, existe una función continua $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ que es un levantamiento de π. El espacio de recubrimiento $\widetilde{X}$ es llamado un espacio de recubrimiento universal de X.

Un *espacio punteado* es un par (Z, z_0), donde z_0 es un punto base fijo y Z es conexo por caminos. Una función

$$f : (Z, z_0) \longrightarrow (W, w_0)$$

es una función continua de Z en W tal que $f(z_0) = w_0$. Éstas son llamadas *funciones que preservan punto base.*

El conjunto de todos los espacios punteados, junto con todas las funciones que preservan punto base forma la categoría de los espacios punteados. Los espacios punteados son los objetos de la categoría y las funciones que preservan punto base son los morfismos. En esta categoría, la definición de función de recubrimiento universal $\pi : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ requiere que, para cualquier función de recubrimiento $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, exista un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\
& (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

De acuerdo con el Lema 20 el levantamiento $\widetilde{\pi}$ está únicamente determinado por la condición $\widetilde{\pi}(\widetilde{x}_0) = y_0$.

Lema 23 *Si* $\pi : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *y* $\widehat{\pi} : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *son ambas funciones de recubrimiento universal, entonces existe un único homeomorfismo* φ *haciendo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \arrow[dl, "\widehat{\pi}"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Gracias a este Lema, podemos hablar de la unicidad del espacio de recubrimiento universal de (X, x_0), siempre que exista. La existencia del espacio de recubrimiento universal nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sea* X *es conexo por caminos y localmente simplemente conexo. Entonces* X *admite un espacio de recubrimiento universal. Más aún, un espacio de recubrimiento es universal si y sólo si es simplemente conexo.*

El Grupo Fundamental

Sea $\mathcal{P}(X, x_0)$ el espacio de caminos $\sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ teniendo como punto inicial x_0 y sea $\Omega(X, x_0) \subset \mathcal{P}(X, x_0)$ el conjunto de lazos en X basados en x_0. La relación de homotopía $\sim_\partial$ define una relación de equivalencia en $\Omega(X, x_0)$, y el conjunto cociente

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/ \sim_\partial$$

forma un grupo con la operación $[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma \cdot \tau]$ llamado el *grupo fundamental* de (X, x_0).

El grupo Γ de transformaciones de recubrimiento del espacio de recubrimiento universal $\widetilde{X}$ de X es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$. El punto base x_0 juega un papel esencial en el estudio del grupo fundamental. La escogencia del punto base es determinante para especificar un isomorfismo $\Gamma \cong \pi_1(X, x_0)$.

Ejemplo 10 Por el Ejemplo 9 y el hecho que un espacio de recubrimiento simplemente conexo es universal, el espacio de recubrimiento universal del círculo es $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ($\mathbb{R}$ al ser convexo, es simplemente conexo) y el grupo de transformaciones de recubrimiento es isomorfo al grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$. Así $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, donde $x_0 = p(\mathbb{Z})$. Es de observar que un lazo en S^1, basado en x_0 y generando a $\pi_1(S^1, x_0)$, está dado por la restricción $\sigma = p\big|_{[0,1]}$.

Consideremos una función continua que preserva punto base $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ entre espacios punteados. Si $\sigma \in \Omega(X, x_0)$, entonces, como f preserva punto base, $f \circ \sigma \in \Omega(Y, y_0)$. Si $\sigma \sim_\partial \tau$, entonces $f \circ \sigma \sim_\partial f \circ \tau$, lo cual nos permite definir una función *inducida*

$$\begin{array}{rcl} f_* : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ f_*([\sigma]) & = & [f \circ \sigma]. \end{array}$$

La función inducida f_* es un homomorfismo de grupos que además cumple que si $g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ son funciones continuas que preservan punto base, entonces

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

Estas propiedades se resumen diciendo que el grupo fundamental define un funtor covariante de la categoría de espacios punteados y funciones continuas que preservan punto base a la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.

Finalmente, usando el grupo fundamental, formulamos una condición necesaria y suficiente para la existencia de leventamientos.

Teorema 9 *Sean $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función de recubrimiento y $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función continua que preserva punto base. Entonces existe un levantamiento $\widetilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ si y sólo si $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Corolario 14 *Sean $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función de recubrimiento y Z simplemente conexo. Entonces toda función continua que preserva punto base $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ posee un único levantamiento $\widetilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.*

Bibliografía

[B] W. Boothby. *An introduction to Differential Manifolds and Differential Geometry.* Academic Press. New York, 1975.

[BT] R. Bott, L. W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology* Graduate Texts in Mathematics V-82. Springer-Verlag. New York, 1982.

[C] L. Conlon. *Differentiable Manifolds.* Second Edition. Birkhäuser. Boston, 2001.

[L] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* GTM Springer-Verlag.

[Ma] W. Massey. *Introducción a la Topología Algebraica.* Editorial Reverté, S. A. 1972.

[Mi] J. W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* University of Virginia Press, 1965.

[MiS] J. W. Milnor, J. D. Stasheff *Characteristic Classes.* Princeton University Press. New Jersey, 1974.

[Mu1] J. M. Munkres. *Analysis of Manifolds.* Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[Mu2] J. M. Munkres. *Topology.* Second Edition. Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[S1] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol 1.* Publish or Perish Inc, Boston, 1970.

[S2] M. Spivak. *Cálculo en Variedades.* Editorial Reverté S. A. Barcelona, 1988.

[W] S. H. Weintraub. *Differential Forms. A complement to vector calculus.* Academic Press Inc. San Diego, 1997.