

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“INTEGRACIÓN SEMI-ANALÍTICA DE LA MATRIZ DE
RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO LAGRANGIANO
CUADRILÁTERO DE 9 NODOS USANDO MATEMÁTICA
SIMBÓLICA”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. LISETH VALENCIA

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: ANÁLISIS NUMÉRICO Y ELEMENTOS FINITOS.

TUTOR: DR. JUAN C. OSORIO

Barquisimeto, Venezuela.

Julio de 2010

*Este trabajo esta dedicado unica y
exclusivamente a DIOS, por ser mi todo.
Por darme la capacidad necesaria a lo
largo de mi carrera y sobre todo en este
trabajo...*

AGRADECIMIENTOS

A mi Padre Celestial porque fue él el que obró en mi *el querer como el hacer, por su buena voluntad...*

A mis padres, Alba y Luis, por transmitirme su amor al conocimiento y la excelencia.

A mis hermanos, Dra. Likhy Valencia y Dr. Luis Valencia, por ayudarme a ser la persona que soy para lograr mis metas.

A la Lcda. Willennys García, por darme todo lo que podía dar. Compartiendo conocimiento a lo largo de mi carrera, amistad y sobre todo el apoyo físico y espiritual para el desarrollo de este trabajo, eres lo MAXIMO amiga.

Al Lcdo. Alexander Mendoza por ayudarme en todo a lo que ciencia se refiere, compartiendo sus vastos conocimientos conmigo de manera desinteresada.

Al Lcdo. Oswaldo Paéz, por orientarme en los caminos de la matemática aplicada compartiendo siempre sus experiencias y motivandome a la innovación.

Al Prof. Wilfredo Angulo por quien siento una gran admiración y que sin saberlo me inspiro en sus trabajos, dedicación y excelencia académica para considerar esta línea de investigación.

A los Profesores Wilmer Colmenares e Ismael Huerta quienes me han dado ejemplo desde el inicio de mi carrera de lo que es un verdadero matemático, me han orientado, aconsejado y hecho de mi vida universitaria una verdadera delicia. Los Admiro y quiero muchísimo. GRACIAS.

A los que en los momentos críticos de la investigación me dieron apoyo en cuanto a ideas y soluciones, Ing. Hugo N. Parra, Lcda. Lina Garzón, Prof. Edgar Guedez, T.S.U. Inaícen Gómez, Prof. Thaiz Erazo, Prof. Eduardo Sánchez, T.S.U. José Zerpa, Lcdo. Luis Castillo, Sra. Belkys Romero, Sra. Julieta Hartz, Dra. Yolyer Flores.

A los que durante mi carrera hicieron de mi vida algo inolvidable: Wille, Lina, Luis, María, Andreina, Paty, Dicmar, Jesús, Jeferson, Manuel, Adrian, Jorge, Elifer, Nicolas, Daixy, Yajaira, Pablo, Javier, Adlin, Jairo, Arnaldo, Sra. Alberto Gómez, Sra. Inaícen.

Finalmente, y por ser los más importantes, a mi tutor, al Dr. Juan Carlos Osorio,

por orientarme, por sus consejos, por querer siempre la excelencia en mí, por compartir su extenso conocimiento y aceptar trabajar conmigo a pesar de no conocerme y a la Dra. Iris Lozada por sus excelentes aportes a este trabajo y por los días de dedicación sin esperar nada a cambio, por su fe en mí. Fue una experiencia maravillosa trabajar con tan excelentes educadores en todas las áreas del conocimiento, les estaré eternamente agradecida.

A todos los que oraron por mí gracias...

Resumen

El cálculo de los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito consiste en evaluar integrales múltiples de funciones racionales, lo que genera un alto costo de tiempo de CPU. En este trabajo, se presenta una metodología general aplicada a la integración simbólica de la matriz de rigidez de un elemento finito lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos en problemas de elasticidad plana. El elemento es considerado isoparamétrico de lados rectos. Esta metodología permite calcular los elementos de la matriz de rigidez de forma sencilla y se presenta la integración semi-analítica de la matriz. Antes de calcular la integral se hace una clasificación de los términos de la matriz de rigidez en distintos grupos según metodología presentada por Lozada I., Osorio J., Griffiths D. y Cerrolaza M. en el 2006. La matriz de rigidez del elemento es de orden 18×18 , simétrica y esta particionada en bloques de orden 2×2 , correspondientes a la incidencia de los grados de libertad de cada par de nodos. La integración semi-analítica y la matemática simbólica son usadas para obtener una fórmula básica para evaluar la matriz de rigidez. La expresión resultante mantiene la precisión obtenida por integración numérica tipo Gaussiana de orden 2×2 . El software de matemática simbólica **Maple** es usado para simplificar y optimizar los cálculos. Se hace la comparación entre la integración semi-analítica y la integración numérica convencional (Cuadratura de Gaussiana de orden 2×2) en cuanto a precisión para obtener la matriz de rigidez.

Palabras claves: Integración semi-analítica, matemática simbólica, elementos finitos, matriz de rigidez.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Introducción	1
1. Planteamiento del Problema	5
1.1. Descripción del MEF	5
1.2. Formulación	6
2. Fundamentos teóricos	10
2.1. Antecedentes	10
2.2. Matriz de rigidez	11
2.2.1. Propiedades de la matriz de rigidez	12
2.3. Integración numérica	12
2.4. Matemática simbólica	13
3. Análisis y desarrollo de la metodología	15
3.1. Términos de la matriz de rigidez	15
3.1.1. Relación de adyacencia	15
3.2. Obtención de los elementos	27
3.2.1. Grupo A	27
3.2.2. Grupo B	30
3.2.3. Grupo C	32
3.2.4. Grupo D	33
3.2.5. Grupo E	35
3.2.6. Grupo F	36
3.2.7. Grupo G	38
3.2.8. Grupo H	39
3.2.9. Grupo I	39

3.2.10. Grupo J	40
3.2.11. Grupo K	41
3.2.12. Grupo L	43
4. Ejemplo	45
5. Conclusiones	48
A. Matriz de rigidez	49
B. Análisis elástico lineal en la llave de acero con ABAQUS	53
Referencias	62

Introducción

Una de las tareas fundamentales del ingeniero consiste en la predicción cuantitativa del comportamiento de un sistema tecnológico, para proceder a su diseño eficiente o para cumplir con especificaciones de producción. Ejemplos de los mismos los podemos encontrar en áreas del flujo de calor, mecánica de fluidos, electromagnetismo, reacciones químicas y otros. Para ello debe hacer uso de conceptos de física, química y matemática, para formular un modelo matemático del sistema o proceso en consideración. Dicho modelo no es más que un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas representan magnitudes de interés tecnológico que permiten describir el comportamiento del objeto bajo análisis. Consecuentemente, para llevar a cabo la predicción del sistema, el ingeniero debe resolver cuantitativamente las mencionadas ecuaciones para dedicarse a continuación, a la interpretación técnica y al análisis de los resultados. En muchas situaciones, los modelos pertinentes involucran problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por mencionar algunos de dichos casos pueden citarse el estudio estructural de automóviles, aviones, puentes, o el análisis de campo de flujo de calor en componentes de máquinas, flujo de fluidos, filtración en presas de tierra, entre otras. Debido a la gran dificultad para obtener soluciones analíticas a las ecuaciones aludidas, la ingeniería ha recurrido, históricamente, al uso de modelos simplificados basados en resultados experimentales, experiencia y en el mejor de los casos en unas pocas soluciones matemáticas particulares relativas a un modelo más preciso. Esta metodología general de la ingeniería ha dado muy buenos resultados y aún lo sigue haciendo. No obstante, es importante notar que se trata de una metodología que presenta fuertes limitaciones en cuanto a las posibilidades de análisis, hecho que se hace más grave si se consideran las crecientes necesidades de la tecnología moderna. Este cuadro ha ido cambiando con el advenimiento de la computación electrónica y con el desarrollo asociado de métodos computacionales. En el contexto que se alude han aparecido importantes técnicas numéricas entre las cuales se destacan los métodos de diferencias finitas, elementos de contorno y elementos finitos. En particular este último

es el más poderoso y, en consecuencia, el más utilizado.

Los problemas de ingeniería se estudian con modelos matemáticos que representan situaciones físicas, estos modelos son ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno e iniciales determinadas. Las ecuaciones diferenciales son derivadas, que se deducen aplicando leyes fundamentales y principios de la naturaleza a sistemas, estas representan el equilibrio de masas, fuerzas o energía. Cuando es posible la solución exacta de estas ecuaciones nos muestran el comportamiento de un sistema en estudio bajo ciertas condiciones, las soluciones analíticas están compuestas de dos partes (1) una parte homogénea y (2) una parte particular. En cualquier problema de ingeniería, hay dos clases de parámetros que influyen en la forma como el sistema se comportará, primero están los parámetros que dan información sobre el comportamiento natural de un sistema dado, estos incluyen propiedades tales como el modulo de elasticidad, la conductividad térmica y la viscosidad. Luego están los parámetros que producen un disturbio o alteración en el sistema, como fuerzas externas, momentos, diferencia de temperatura en el medio y diferencias de presión en flujos de fluidos. El comportamiento natural de un sistema que se deduce es la parte homogénea de la solución de las ecuaciones diferenciales, en contraste, los parámetros que causan disturbios aparecen en la solución particular. Es importante comprender el papel de estos parámetros en el modelado con las técnicas de elementos finitos, en términos de sus respectivas apariciones de las denominadas matrices de dureza o rigidez (stiffness) o conductancia y las matrices de carga o fuerza. Los sistemas característicos siempre presentan la matriz de rigidez, la matriz de conductancia o la matriz resistencia, mientras los parámetros que producen disturbios aparecen en la matriz de carga.

Hay muchos problemas prácticos en ingeniería los cuales no podemos obtener la solución exacta, esto se puede atribuir a la complejidad natural de las ecuaciones diferenciales o a las dificultades que pueden ocurrir con las condiciones de contorno o iniciales. Para tratar este tipo de problemas usamos las aproximaciones numericas. En contraste a la solución analítica, que muestra el comportamiento exacto de un sistema en cualquier punto del mismo, las soluciones numéricas aproximan la solución exacta solo en puntos discretos, llamados nodos. El primer paso en cualquier procedimiento numérico es la discretizacion, este proceso divide el medio de interés en un número de pequeñas subregiones y nodos. Dos de los métodos numéricos mas utilizados son: (1)

método de las diferencias finitas y (2) método de los elementos finitos (MEF). Con el método de las diferencias finitas, la ecuación diferencial es escrita para cada nodo y las derivadas son reemplazadas por ecuaciones de diferencias, con ello se logra un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas, aunque este método es fácil de entender y utilizar en problemas simples, se presentan dificultades al aplicarlo a geometrías complejas o condiciones de contorno complejas, esta situación es real para problemas con materiales con propiedades no isotrópicos (que no tienen iguales propiedades en todas las direcciones). En contraste, el método de los elementos finitos (MEF) usa una formulación integral más que ecuaciones diferenciales para crear un sistema de ecuaciones algebraicas.

En la resolución de problemas por el MEF en el plano, usualmente se utilizan triángulos y cuadriláteros para la discretización del continuo. La fórmula de Felippa, nos permite calcular de manera inmediata las integrales que definen las componentes de la matriz de rigidez del elemento triangular. En el caso de los elementos cuadriláteros, estas integrales generalmente no son fáciles de calcular, por lo que mediante un cambio de variable se transforman en otras con límites de integración muy sencillos pero no así el integrando, que suele contener términos racionales, los cuales resultan difíciles de resolver, debido a lo complejo del cálculo de dichos términos, a excepción de algunos casos. Por lo expuesto es usual recurrir a cualquier método de integración numérica entre ellos resalta el de Gauss-Legendre, debido a que requiere un número mínimo de evaluaciones para calcular dichas integrales. Por tal motivo, esto ha sido objeto de estudio para muchos investigadores, los cuales han querido generar técnicas que nos permitan obtener los elementos de la matriz de rigidez, de una manera sencilla donde se mantenga o mejore la precisión de los resultados, al igual que los tiempos computacionales.

Este trabajo ha sido dividido en capítulos para una mejor comprensión del contenido. En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema a resolver y se expone la formulación del mismo describiendo el MEF. En el capítulo 2, se hace una breve reseña histórica de los resultados alcanzados por algunos investigadores, cuyos temas de investigación están directamente relacionados con el tema, se dan propiedades de la matriz de rigidez, se presenta una introducción a la integración numérica y se hace una referencia a la matemática simbólica. En el Capítulo 3 se hace el análisis y desarrollo de la metodología utilizada, describiendo la matriz de rigidez del elemento lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos haciendo una clasificación de sus términos en 12 grupos basada

en un concepto de adyacencia entre los nodos que conforman el elemento y la relación de paralelismo y ortogonalidad entre sus grados de libertad. Además se deduce la fórmula cerrada para calcular los términos de la matriz de rigidez del elemento lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos. En el capítulo 4 se expone un ejemplo práctico utilizando los resultados obtenidos. Y finalmente en el Capítulo 5 se plantean las conclusiones de la investigación y se expone la eficacia computacional y la precisión de los resultados de la integración semi-analítica, en comparación a la integración numérica. Es importante señalar que la integración semi-analítica mejora sustancialmente los tiempos de cómputo (CPU) manteniendo los resultados obtenidos en el trabajo de Lozada et al. en [L] (2006) y en consecuencia, la capacidad de análisis de grandes estructuras.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El método de los elementos finitos es una opción numérica que sirve para aproximar las soluciones de problemas donde es muy difícil o imposible obtener soluciones analíticas. En este trabajo se utiliza una metodología descrita por Griffiths en [G] para el cálculo de la matriz de rigidez basado en el MEF para problemas bidimensionales, además de encontrarse resultados que producen una disminución del tiempo de CPU. En este estudio se tratarán problemas de elasticidad (tensión y deformación), más específicamente el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito plano.

§1.1. Descripción del MEF

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados «elementos finitos». El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados «nodos». Un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos finitos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama «malla». Los cálculos se realizan sobre la malla de puntos, que a su vez sirve de base para la discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con las relaciones de adyacencia o conectividad entre nodos se relacionan los valores de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable y los nodos

se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

El elemento finito a estudiar en este trabajo es lagrangiano cuadrilátero de nueve nodos con dos grados de libertad por nodo, enumerados en sentido horario.

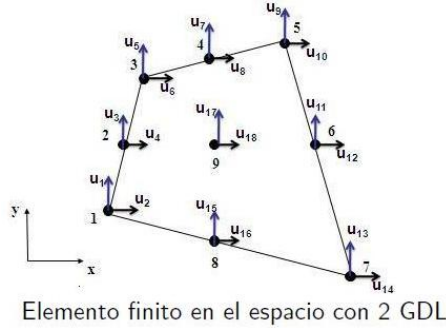


FIGURA 1.1: Elemento finito lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos con dos grados de libertad por nodo.

§1.2. Formulación

Las tensiones están relacionadas con las deformaciones a través de la ley constitutiva para el estado plano de tensión y de deformación en la expresión dada por:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (1.1)$$

Donde D es la matriz con Las propiedades elásticas del material, matriz constitutiva (matriz simétrica) donde $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^t$ son las tensiones normales y $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$ es la deformación.

D viene dada por:

$$D = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & 0 \\ E_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Para tensión plana

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} ; \quad E_2 = E_1 \nu \quad (1.3)$$

y para deformación plana

$$E_1 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ; \quad E_2 = \frac{E_1 \nu}{(1 - \nu)} \quad (1.4)$$

siendo E : Módulo de Young y ν : Coeficiente de Poisson.

Para hallar las funciones de forma se utilizan polinomios obtenidos a través de polinomios de Lagrange.

Así, el elemento bidimensional de 9 nodos tiene tres nodos en cada dirección

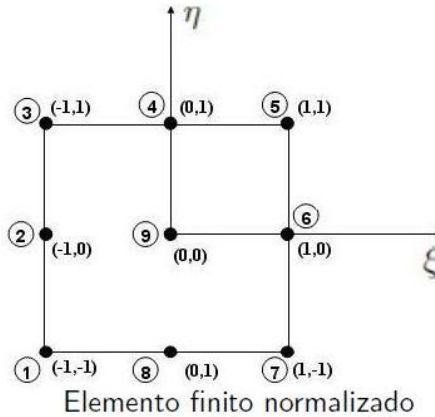


FIGURA 1.2: Elemento finito en el plano de Gauss.

Las funciones de forma para interpolar la geometría y los campos de desplazamiento son obtenidas utilizando el polinomio de Lagrange según dirección ξ , multiplicado por el polinomio de Lagrange según dirección η .

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(1 + \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(1 + \eta) & N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1) & N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta - 1) \\
 N_9(\xi, \eta) &= (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

La transformación del plano Cartesiano al Gaussiano está dada por

$$x = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) x_i ; \quad y = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (1.6)$$

y por regla de la cadena

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

en notación matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

siendo

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

y con la matriz B de deformación-dezplazamiento

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{con } B = [B_1 \dots B_9] \quad (1.12)$$

hacemos el triple producto de matrices ($B^t DB$) para obtener la matriz de rigidez K .

$$K = \int_e \int B^t DB w dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB w |J| d\xi d\eta \quad (1.13)$$

(w es el parámetro que representa el espesor del elemento y permanece constante en el cálculo), ver Apéndice (A)

Se considera a la matriz de rigidez particionada en submatrices K_{ij} de orden 2×2 . Así, las componentes de cada submatriz K_{ij} representan las incidencias del grado de

libertad horizontal y vertical del nodo i sobre el grado de libertad horizontal y vertical del nodo j .

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) |J| d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x}) |J| d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y}) |J| d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_1 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}) |J| d\xi d\eta \end{bmatrix}$$

Estas integrales, usualmente son aproximadas utilizando integración numérica, empleando grandes cantidades de tiempo de CPU, resultando costosas y complicadas. Por tal motivo, este problema ha sido objeto de estudio para muchos investigadores, los cuales han querido generar técnicas que permitan obtener los elementos de la matriz de rigidez, de una manera mas sencilla donde se mantenga o mejore la precisión de los resultados y se reduzcan los tiempos computacionales.

En este trabajo se implementaremos una metodología que nos permitirá calcular las componentes de la matriz de rigidez de manera mas sencilla mejorando o manteniendo los tiempos de CPU obtenidos por integración Gaussiana.

Al ahorrar tiempo de cálculo en la matriz de rigidez de un elemento, se facilita el cálculo de la matriz de rigidez global, la cual generalmente está constituida por una gran cantidad de elementos del mismo tipo.

Existe una amplia gama de softwares que trabajan con elementos finitos, los cuales al momento de calcular las integrales múltiples, aproximan las soluciones de éstas mediante métodos numéricos para evitar el alto costo en el tiempo de CPU, dándole así mayor prioridad a la rapidez del software que a la exactitud del mismo.

Es por eso que se usa un método por el cual se calcula de manera más rápida la matriz de rigidez para el elemento finito lagrangiano cuadrilátero de nueve nodos. Se genera una fórmula cerrada que de forma secuencial va generando los términos de la matriz de rigidez que previamente han sido clasificados en grupos.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

§2.1. Antecedentes

En el área de ingeniería y física se utiliza el conocimiento de la ciencia y la matemática para encontrar las mejores soluciones a problemas concretos, creando los modelos matemáticos apropiados de los problemas que les permiten analizarlos rigurosamente y probar las soluciones potenciales para realizar diseños o desarrollar soluciones tecnológicas a necesidades sociales, industriales o económicas. Para ello, se debe identificar y comprender los obstáculos más importantes para poder realizar un buen diseño que siempre requiere innovación tecnológica. Los métodos numéricos actuales han evolucionado gracias a las exigencias de nuevas tecnologías. Hasta las últimas dos décadas del siglo XX la integración de matrices de rigidez de elementos finitos para cuadriláteros era calculada de forma explícita para casos específicos de rectángulos y cuadriláteros convexos. En 1981 Okabe M en [O] presenta fórmulas de integración analítica para funciones racionales integradas sobre elementos finitos cuadriláteros convexos de cuatro nodos. Mientras que Badu y Pinder en [BP] (1984) presentan el desarrollo de las fórmulas para el caso particular de cuadriláteros deformados de lados rectos. Por otra parte, Mizukami en [M] (1996) presenta algunas fórmulas de integración analítica para un elemento isoparamétrico de cuatro nodos que son fáciles de codificar con mucho tiempo de computo. Trabajó con paralelogramos y los comparó con cuadratura 2×2 en precisión y estabilidad. Rathod en [R] (1988) trabaja con trapecios para generar formulas de integración analítica que permiten calcular las integrales en forma *exacta* y propone un método para el cálculo de las funciones generadoras. En (1960) Yagawa, Ye y Yoshimura en [Y] presentan un método para mejorar la eficiencia de la integración numérica basado en manipulación simbólica. Griffiths en [G] (1994) presentó una fórmula general que crea una técnica para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero

isoparamétrico de cuatro nodos, utilizando transformaciones de coordenadas. Siguiendo la línea de Yagawa, Ye y Yoshimura, Griffiths y Mustoe en [GM] (1995) describen como la Selective Reduced Integration (SRI) de la matriz de rigidez para un elemento cuadrilátero deformado plano de cuatro nodos puede ser generado en forma cerrada con la ayuda de sistemas de algebra computacional (CAS) y como eso puede llegar a mejorar en el tiempo de corrida.

Rathod y Shafiqul en [RS] (2000) muestran fórmulas de integración explícita para elementos cuadriláteros en forma trapezoidal de la familia de Lagrange que dan lugar a una evaluación fácil y eficiente de las matrices del elemento finito en los procedimientos de solución. En el trabajo de Lozada et al. en [L] (2006) generalizan los resultados obtenidos por Griffiths en [G] (1994), para aplicarlo en la integración semi-analítica de las matrices de rigidez de los elementos finitos cuadriláteros de ocho nodos en problemas de elasticidad bidimensional, obteniendo mejoras de un 37% en los tiempos de cálculo en comparación a la integración numérica (Gauss con 4 puntos). Para la presente investigación se consideran los resultados de estos autores y se hacen generalizaciones en torno a esto.

§2.2. Matriz de rigidez

la matriz de rigidez conceptualmente relaciona los desplazamientos de una serie de puntos o nodos, con los esfuerzos puntuales efectivos en dichos puntos. Desde un punto de vista operativo relaciona los desplazamientos incógnita de una estructura con las fuerzas exteriores conocidas, lo cual permite encontrar las reacciones, esfuerzos internos y tensiones en cualquier punto de la estructura.

En el método de los elementos finitos, se usa una matriz de rigidez que generaliza el concepto anterior. En problemas mecánicos la matriz relaciona desplazamientos nodales con esfuerzos nodales, aunque el concepto también aparece en problemas no mecánicos donde los términos relacionados por la matriz de rigidez reciben otras interpretaciones. En problemas térmicos por ejemplo los “desplazamientos” y las “fuerzas” pueden representar temperaturas y flujos de calor respectivamente, entre otros.

§2.2.1. Propiedades de la matriz de rigidez

- EQUILIBRIO: Cualquier desplazamiento o giro en un extremo del elemento produce fuerzas que se encuentran en equilibrio. Ejemplo de un asentamiento en un extremo.
- MOVIMIENTO DE CUERPO RIGIDO: Si el elemento se mueve sin sufrir deformaciones internas las fuerzas de extremo que genera serán nulas.
- SINGULARIDAD: La matriz de rigidez no tiene inversa ya que sus ecuaciones no son independientes sino redundantes. Para que tenga solución se necesita restringir algunos grados de libertad para hacer el elemento estático.
- SIMETRÍA: Se cumple la ley de los desplazamientos recíprocos.

§2.3. Integración numérica

Salvo en los casos más sencillos, no es posible realizar analíticamente las integrales obtenidas en la formulación, razón por la que es necesario recurrir a técnicas de integración numérica.

Una de tales técnicas, denominada cuadratura de Gauss. La cuadratura de Gauss-Legendre de orden m integra exactamente un polinomio de grado $(2m - 1)$ o menor, evaluando el integrando en m puntos (x_i) .

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m \omega_i f(\xi_i) \quad (2.1)$$

En la que ω_i es el peso que se da a cada uno de los valores particulares del integrando, y m , el número de puntos considerados. En los libros de referencia, se pueden encontrar tablas donde se dan los puntos y coeficientes de ponderación como se muestra en la Tabla 2.1.

En el caso bidimensional, se tiene

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{j=1}^{m_\eta} \omega_i \omega_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.2)$$

y análogamente en tres dimensiones.

n	$\pm\xi_i$	W_i
1	0.0	2.0
2	0.5773502692	1.0
3	0.774596697	0.555555556
	0.0	0.888888889
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
5	0.9061798459	0.2369268851
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0	0.568888889
6	0.9324695142	0.1713244924
	0.6612093865	0.3607615730
	0.2386191861	0.4679139346
7	0.9491079123	0.1294849662
	0.7415311856	0.2797053915
	0.4058451514	0.3818300505
	0.0	0.4179591837
8	0.9602898565	0.1012285363
	0.7966664774	0.2223810345
	0.5255324099	0.3137066459
	0.1834346425	0.3626837834

TABLA 2.1: Puntos de Gauss y coeficientes de ponderación.

En lo que se refiere a la elección del número de puntos de integración, debería ser, como máximo, el necesario para integrar exactamente el polinomio que constituye el integrando, ya que con más puntos no se conseguiría mejorar el resultado.

En este trabajo usaremos Cuadratura gaussiana de orden 2×2 basados en la Tabla 2.1.

§2.4. Matemática simbólica

Se refiere al uso de los ordenadores para manipular ecuaciones matemáticas y expresiones en forma simbólica, en oposición a la manipulación de las cantidades numéricas que representan esos símbolos. Este sistema podría ser utilizado para la integración o la diferenciación simbólica, la sustitución de una expresión a otra, la simplificación de una expresión, entre otros. Uno de los más conocidos paquetes de software de matemática simbólica es Mathematica . Otros incluyen Matlab, REDUCE, SymbMath, Laboratorio de Matemáticas simbólico, TRIGMAN, UBASIC.

La matemática simbólica comprende:

- La simplificación a la mínima expresión posible, o alguna forma estándar, incluida la simplificación automática.

- La sustitución de símbolos o valores numéricos de ciertas expresiones.
- Diferenciación total y parcial.
- Integración definida y algunas indefinidas , incluyendo las integrales simbólicas multidimensionales.
- Operaciones con matrices incluyendo productos, inversas, entre otras.

Un sistema de álgebra computacional (CAS) es un programa de software que facilita la matemática simbólica.

La funcionalidad básica de un CAS es la manipulación de expresiones matemáticas en forma simbólica. Las expresiones manipuladas por el CAS incluyen típicamente polinomios en varias variables, funciones estándar de las expresiones (sine, exponenciales, entre otras); diversas funciones especiales (las funciones de Bessel ,entre otras); funciones arbitrarias de las expresiones, que la optimización; derivadas, integrales, las simplificaciones, las cantidades y los productos de las expresiones; las matrices de las expresiones, y así sucesivamente.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS Y DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA

§3.1. Términos de la matriz de rigidez

Los terminos de la matriz de rigidez se obtienen usando la regla de integración de Gauss-Legendre de orden 2x2. Como se trata de una matriz simétrica de orden 18x18 (agrupada en bloques de 2x2 (K_{ij} $i, j = 1, \dots, 9$)), solo 171 elementos son necesarios. Esos elementos son clasificados en 12 grupos (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) de acuerdo a la adyacencia (que es un factor clave en esta metodología de Griffiths) entre los Grados De Libertad (GDL) del elemento.

§3.1.1. Relación de adyacencia

En esta sección se propone y desarrolla una clasificación general para los términos de la matriz de rigidez del elemento finito lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos en 12 grupos, basada en un concepto de adyacencia entre los nodos que conforman el elemento y la relación de paralelismo y ortogonalidad entre sus grados de libertad (como se muestra en la figura3.1.1).

Diremos que:

- Un nodo es 0-adyacente, si es adyacente a si mismo.
- Dos nodos son 1-adyacentes, si estan en la frontera del elemento finito y no existe nodo que los separe.
- Dos nodos son 2-adyacentes, si estan en la frontera del elemento finito y existe un nodo entre ellos.

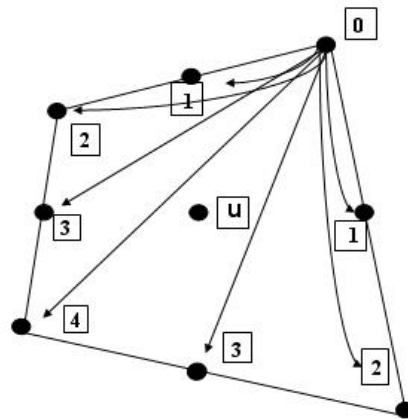


FIGURA 3.1: Relación de adyacencia entre nodos.

- Dos nodos son 3-adyacentes, si están en la frontera del elemento finito y existen dos nodos entre ellos.
- Dos nodos son 4-adyacentes, si están en la frontera del elemento finito y existe tres nodos entre ellos (también se llaman nodos opuestos).
- Un nodo es único-adyacente, si no está en la frontera del elemento finito.

Podemos visualizar todas las componentes de la matriz de rigidez, a través de un grafo G con vértices en los grados de libertad del elemento y una relación R dada por las incidencias sobre los vértices. Se quiere clasificar los elementos de la matriz en grupos en base a la incidencia de los grados de libertad en los vértices.

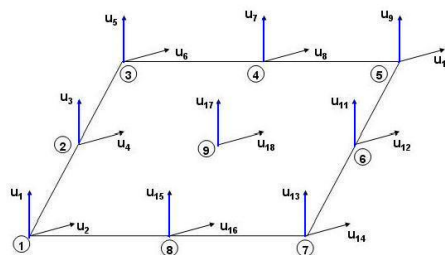


FIGURA 3.2: Elemento finito con dos grados de libertad (GDL) por nodo.

Para esta clasificación se considera la submatrices K_{ij} de orden 2×2 observando que los grados de libertad (tanto horizontal como vertical) de un nodo i inciden directa-

mente en los grados de libertad (tanto horizontal como vertical) de un nodo j al haber desplazamiento.

Así, podemos visualizar las componentes de la matriz de rigidez, a través de un grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4\}$ cuyos vértices son los grados de libertad (tanto horizontales como verticales) del elemento y una relación R_i dada por las adyacencias entre los nodos y la incidencia de sus GDL.

Donde

- $G_1=V$, Conjunto de vértices de grados de libertad horizontales provenientes de los nodos $N_i, i = \{1, \dots, 8\}$

$$\{u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, u_{11}, u_{13}, u_{15}\}$$

- $G_2=H$, Conjunto de vértices de grados de libertad verticales provenientes de los nodos $N_i, i = \{1, \dots, 8\}$

$$\{u_2, u_4, u_6, u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\}$$

- $G_3=\{u_{17}\}$ Conjunto de vértices de grados de libertad horizontales provenientes del nodo 9.

$$\{u_{17}\}$$

- $G_4=\{u_{18}\}$ Conjunto de vértices de grados de libertad verticales provenientes del nodo 9.

$$\{u_{18}\}$$

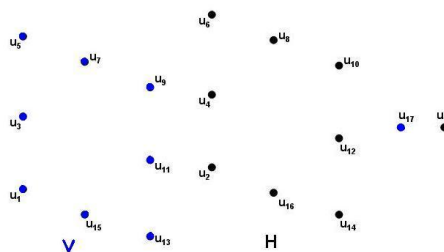


FIGURA 3.3: Conjunto de vértices.

Sea X el conjunto de todos los elementos de la matriz de rigidez, es decir, $X = \{k_{ij}/i = \{1, \dots, 18\}, j = \{1, \dots, 18\}\}$ y a, b grados de libertad tanto horizontales como verticales.

Grupo A $x \in A$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_1\}$, con R_1 dada por

aR_1b , si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos 0-adyacentes

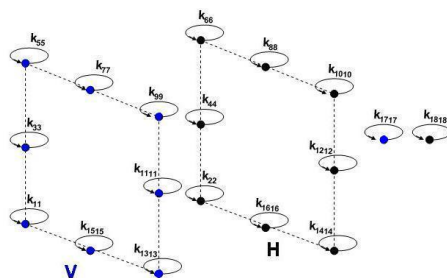


FIGURA 3.4: Grupo A.

Luego, los terminos del **Grupo A** son:

$$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55}, k_{66}, k_{77}, k_{88}, k_{99}, k_{1010}$$

$$k_{1111}, k_{1212}, k_{1313}, k_{1414}, k_{1515}, k_{1616}, k_{1717}, k_{1818}$$

Grupo B $x \in B$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_2\}$, con R_2 dada por

aR_2b , si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos 0-adyacentes

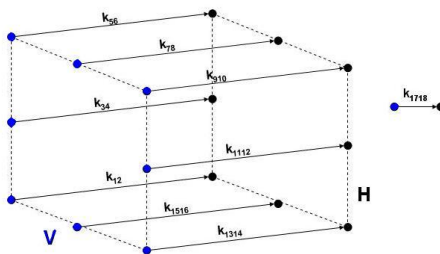


FIGURA 3.5: Grupo B.

Luego, los terminos del **Grupo B** son:

$$k_{12}, k_{34}, k_{56}, k_{78}, k_{910}, k_{1112}, k_{1314}, k_{1516}, k_{1718}$$

Grupo C $x \in C$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_3\}$, con R_3 dada por

aR_3b , si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos 2-adyacentes

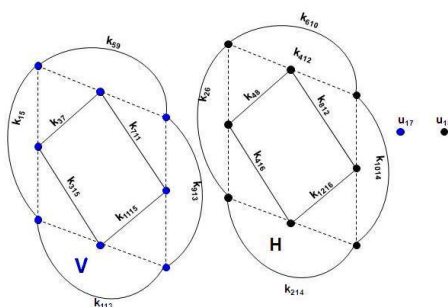


FIGURA 3.6: Grupo C.

Luego, los terminos del **Grupo C** son:

$$k_{15}, k_{59}, k_{913}, k_{113}, k_{37}, k_{315}, k_{711}, k_{1115}$$

$$k_{26}, k_{610}, k_{1014}, k_{214}, k_{416}, k_{48}, k_{812}, k_{1216}$$

Grupo D $x \in D$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_4\}$, con R_4 dada por

aR_4b , si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos 2-adyacentes

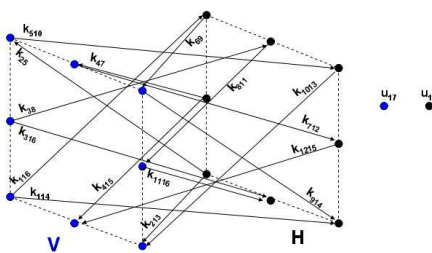


FIGURA 3.7: Grupo D.

Luego, los terminos del **Grupo D** son:

$$k_{114}, k_{16}, k_{316}, k_{38}, k_{25}, k_{510}, k_{47}, k_{712}, k_{69}$$

$$k_{914}k_{811}, k_{1116}, k_{1215}, k_{415}, k_{1013}, k_{213}$$

Grupo E $x \in E$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_5\}$, con R_5 dada por

aR_5b , si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos 4-adyacentes u opuestos

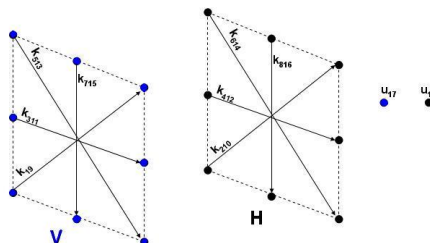


FIGURA 3.8: Grupo E.

Luego, los terminos del **Grupo E** son:

$$k_{19}, k_{311}, k_{513}, k_{715}, k_{210}, k_{412}, k_{614}, k_{816}$$

Grupo F $x \in F$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_6\}$, con R_6 dada por

aR_6b , si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos 4-adyacentes u opuestos

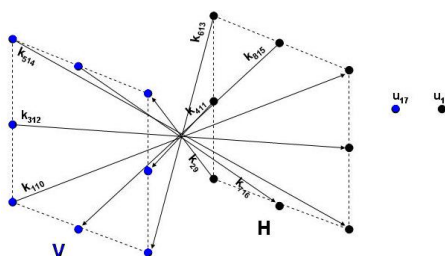


FIGURA 3.9: Grupo F.

Luego, los terminos del **Grupo F** son:

$$k_{110}, k_{312}, k_{514}, k_{716}, k_{29}, k_{411}, k_{613}, k_{815}$$

Grupo G $x \in G$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_7\}$, con R_7 dada por

aR_7b , si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos 1-adyacentes

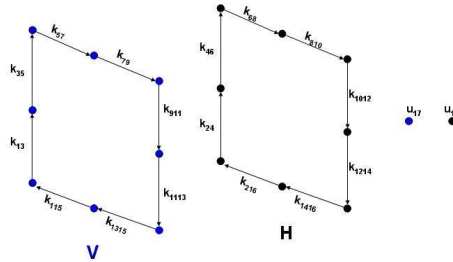


FIGURA 3.10: Grupo G.

Luego, los terminos del **Grupo G** son:

$$k_{13}, k_{35}, k_{57}, k_{79}, k_{911}, k_{1113}, k_{1315}, k_{115}$$

$$k_{24}, k_{46}, k_{68}, k_{810}, k_{1012}, k_{1214}, k_{1416}, k_{216}$$

Grupo H $x \in H$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_8\}$, con R_8 dada por

aR_8b , si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos 1-adyacentes

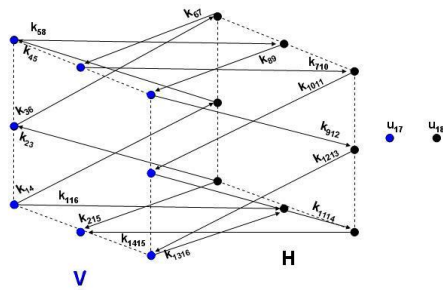


FIGURA 3.11: Grupo H.

Luego, los terminos del **Grupo H** son:

$$k_{116}, k_{14}, k_{23}, k_{36}, k_{45}, k_{58}, k_{67}, k_{710}, k_{89}$$

$$k_{912}, k_{1011}, k_{1114}, k_{1213}, k_{1316}, k_{1415}, k_{215}$$

Grupo I $x \in I$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_9\}$, con R_9 dada por

aR_9b , si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos 3-adyacentes

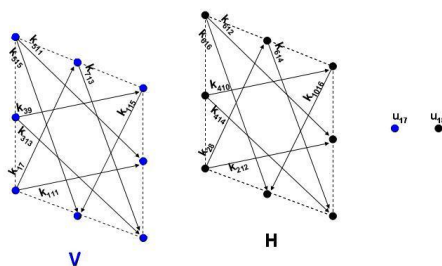


FIGURA 3.12: Grupo I.

Luego, los terminos del **Grupo I** son:

$$k_{17}, k_{111}, k_{39}, k_{313}, k_{511}, k_{515}, k_{713}, k_{915}$$

$$k_{28}k_{212}, k_{410}, k_{414}, k_{612}, k_{616}, k_{814}, k_{1016}$$

Grupo J $x \in J$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_{10}\}$, con R_{10} dada por

$aR_{10}b$, si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos 3-adyacentes

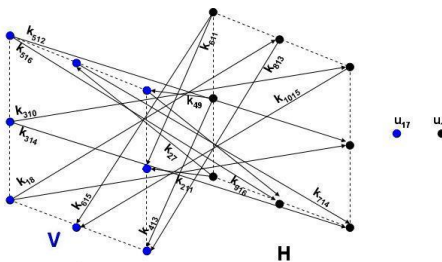


FIGURA 3.13: Grupo J.

Luego, los terminos del **Grupo J** son:

$$k_{112}, k_{18}, k_{314}, k_{310}, k_{516}, k_{512}, k_{27}, k_{714}$$

$$k_{49}k_{916}, k_{611}, k_{211}, k_{813}, k_{413}, k_{1015}, k_{615}$$

Grupo K $x \in K$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_{11}\}$, con R_{11} dada por

$aR_{11}b$, si y solo si a y b son grados de libertad paralelos provenientes de nodos único-adyacentes

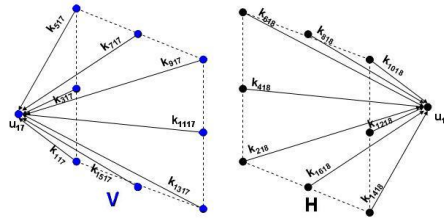


FIGURA 3.14: Grupo K.

Luego, los terminos del **Grupo K** son:

$$k_{117}, k_{317}, k_{517}, k_{717}, k_{917}, k_{1117}, k_{1317}, k_{1517}$$

$$k_{218}k_{418}, k_{618}, k_{816}, k_{1018}, k_{1218}, k_{1418}, k_{1618}$$

Grupo L $x \in L$ si y solo si, X es una arista del grafo $G = \{G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4, R_{12}\}$, con R_{12} dada por

$aR_{12}b$, si y solo si a y b son grados de libertad perpendiculares provenientes de nodos único-adyacentes

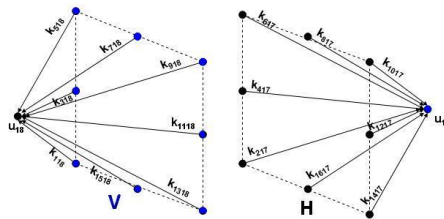


FIGURA 3.15: Grupo L.

Luego, los terminos del **Grupo L** son:

$$k_{118}, k_{318}, k_{518}, k_{718}, k_{918}, k_{1118}, k_{1318}, k_{1518}$$

$$k_{217}, k_{417}, k_{617}, k_{817}, k_{1017}, k_{1217}, k_{1417}, k_{1617}$$

De esto, podemos ver la clasificación de los términos en la siguiente tabla

Grupo	Términos	Descripción
A	$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55}, k_{66}, k_{77}, k_{88}, k_{99}, k_{1010}$ $k_{1111}k_{1212}k_{1313}, k_{1414}, k_{1515}, k_{1616}, k_{1717}, k_{1818}$	GDL paralelos de nodos 0-adyacentes
B	$k_{12}, k_{34}, k_{56}, k_{78}, k_{910}, k_{1112}, k_{1314}, k_{1516}, k_{1718}$	GDL ortogonales de nodos 0-adyacentes
C	$k_{15}, k_{59}, k_{913}, k_{113}, k_{37}, k_{315}, k_{711}, k_{1115}$ $k_{26}, k_{610}k_{1014}, k_{214}, k_{416}, k_{48}, k_{812}, k_{1216}$	GDL paralelos de nodos 2-adyacentes
D	$k_{114}, k_{16}, k_{316}, k_{38}, k_{25}, k_{510}, k_{47}, k_{712}, k_{69}$ $k_{914}k_{811}, k_{1116}, k_{1215}, k_{415}, k_{1013}, k_{213}$	GDL ortogonales de nodos 2-adyacentes
E	$k_{19}, k_{311}, k_{513}, k_{715}, k_{210}, k_{412}, k_{614}, k_{816}$	GDL paralelos de nodos 4-adyacentes (opuestos)
F	$k_{110}, k_{312}, k_{514}, k_{716}, k_{29}, k_{411}, k_{613}, k_{815}$	GDL ortogonales de nodos 4-adyacentes (opuestos)
G	$k_{13}, k_{35}, k_{57}, k_{79}, k_{911}, k_{1113}, k_{1315}, k_{1115}$ $k_{24}, k_{46}, k_{68}, k_{810}, k_{1012}, k_{1214}, k_{1416}, k_{216}$	GDL paralelos de nodos 1-adyacentes
H	$k_{116}, k_{14}, k_{23}, k_{36}, k_{45}, k_{58}, k_{67}, k_{710}, k_{89}$ $k_{912}, k_{1011}, k_{1114}, k_{1213}, k_{1316}, k_{1415}, k_{215}$	GDL ortogonales de nodos 1-adyacentes
I	$k_{17}, k_{111}, k_{39}, k_{313}, k_{511}, k_{515}, k_{713}, k_{915}$ $k_{28}k_{212}, k_{410}, k_{414}, k_{612}, k_{616}, k_{814}, k_{1016}$	GDL paralelos de nodos 3-adyacentes
J	$k_{112}, k_{18}, k_{314}, k_{310}, k_{516}, k_{512}, k_{27}, k_{714}$ $k_{49}k_{916}, k_{611}, k_{211}, k_{813}, k_{413}, k_{1015}, k_{615}$	GDL ortogonales de nodos 3-adyacentes
K	$k_{117}, k_{317}, k_{517}, k_{717}, k_{917}, k_{1117}, k_{1317}, k_{1517}$ $k_{218}k_{418}, k_{618}, k_{816}, k_{1018}, k_{1218}, k_{1418}, k_{1618}$	GDL paralelos de nodos unico-adyacentes
L	$k_{118}, k_{318}, k_{518}, k_{718}, k_{918}, k_{1118}, k_{1318}, k_{1518}$ $k_{217}, k_{417}, k_{617}, k_{817}, k_{1017}, k_{1217}, k_{1417}, k_{1617}$	GDL ortogonales de nodos unico-adyacentes

TABLA 3.1: Clasificación de los términos de la matriz de rigidez del elemento lagrangiano cuadrilátero de 9 nodos.

Con esta clasificación los elementos que conforman cada grupo quedan distribuidos en la matriz de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} A & B & G & H & C & D & I & J & E & F & I & J & C & D & G & H & K & L \\ & A & H & G & D & C & J & I & F & E & J & I & D & C & H & G & L & K \\ & & A & B & G & H & C & D & I & J & E & F & I & J & C & D & K & L \\ & & & A & H & G & D & C & J & I & F & E & J & I & D & C & L & K \\ & & & & A & B & G & H & C & D & I & J & E & F & I & J & K & L \\ & & & & & A & H & G & D & C & J & I & F & E & J & I & L & K \\ & & & & & & A & B & G & H & C & D & I & J & K & L \\ & & & & & & & A & H & G & D & C & J & I & L & K \\ & & & & & & & & A & B & G & H & C & D & K & L \\ & & & & & & & & & A & H & G & D & C & L & K \\ & & & & & & & & & & A & B & G & H & K & L \\ & & & & & & & & & & & A & H & G & L & K \\ & & & & & & & & & & & & A & B & K & L \\ & & & & & & & & & & & & & A & L & K \\ & & & & & & & & & & & & & & A & B \\ & & & & & & & & & & & & & & & A \end{bmatrix}$$

Luego, tenemos la distribución por grupos de los elementos de la matriz de rigidez.

Ahora, considerando las funciones de forma (1.5) y la transformación isoparamétrica tenemos que:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}\{a_x + b_x\xi + c_x\eta + d_x\xi\eta\} \\ Y &= \frac{1}{4}\{a_y + b_y\xi + c_y\eta + d_y\xi\eta\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{cases} a_s = s_1 + s_3 + s_5 + s_7 \\ b_s = -s_1 - s_3 + s_5 + s_7 \\ c_s = -s_1 + s_3 + s_5 - s_7 \\ d_s = s_1 - s_3 + s_5 - s_7 \end{cases} \quad (3.2)$$

con $s = x$ ó y

Así, el determinante Jacobiano de la transformación puede ser expresado como:

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta \quad (3.3)$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dados por

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{8}(b_x c_y - c_x b_y) \\ \alpha_1 = \frac{1}{8}(b_x d_y - d_x b_y) \\ \alpha_2 = \frac{1}{8}(c_x d_y - d_x c_y) \end{cases} \quad (3.4)$$

Recordando que

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) |J| d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x}) |J| d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y}) |J| d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (E_1 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}) |J| d\xi d\eta \end{bmatrix}$$

Aplicamos cuadratura gaussiana y manipulamos la expresión usando matemática simbólica para obtener

$$\begin{aligned} k_{ij} = & \left[\frac{3(E_1 s_1 + E_2 s_2 + G s_3) A_1 + \sqrt{3} f_1 (E_1 s_4 + E_2 s_5 + G s_6)}{3A_1^2 - f_1^2} \right] \\ & + \left[\frac{3(E_1 t_1 + E_2 t_2 + G t_3) A_1 + \sqrt{3} f_2 (E_1 t_4 + E_2 t_5 + G t_6)}{3A_1^2 - f_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$A_1 = \alpha_0$$

$$f_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$f_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

y las funciones s_i, t_i para $i = \{1, \dots, 6\}$ dependen de las coordenadas nodales y de los grupos donde se encuentre el elemento k_{ij} .

§3.2. Obtención de los elementos

Usando la fórmula anterior (3.5) se procede a obtener todos los grupos de la matriz de rigidez partiendo de un representante, ya que el resto de los términos del grupo correspondiente puede ser generado usando una de las transformaciones basadas en las coordenadas nodales como se muestra en la Tabla 3.2.

Nodo	T_1	T_2	T_3	T_4
(x_1, y_1)	(x_3, y_3)	(y_5, x_5)	(y_3, x_3)	(y_1, x_1)
(x_3, y_3)	(x_5, y_5)	(y_3, x_3)	(y_1, x_1)	(y_3, x_3)
(x_5, y_5)	(x_7, y_7)	(y_1, x_1)	(y_7, x_7)	(y_5, x_5)
(x_7, y_7)	(x_1, y_1)	(y_7, x_7)	(y_5, x_5)	(y_7, x_7)

TABLA 3.2: Transformaciones de coordenadas.

§3.2.1. Grupo A

A partir del término k_{111} (el cual se obtiene al evaluar la fórmula generadora (3.5) para $i = 1$ y $j = 1$), se generarán los demás términos de la diagonal relacionados con los nodos vértices con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{13}{864}(b_y - c_y)^2 \\
 s_2 &= 0 \\
 s_3 &= \frac{13}{864}(b_x - c_x)^2 \\
 s_4 &= \frac{5}{576}\sqrt{3}(b_y - c_y)^2 \\
 s_5 &= 0 \\
 s_6 &= \frac{5}{576}\sqrt{3}(b_x - c_x)^2 \\
 t_1 &= \frac{1}{864}(b_y(b_y - c_y - d_y) + c_y(c_y - d_y) + d_y^2) \\
 t_2 &= 0 \\
 t_3 &= \frac{1}{864}(b_y(b_x - c_x - d_x) + c_x(c_x - d_x) + d_x^2)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$t_4 = \frac{1}{1728} \sqrt{3}(c_y^2 - b_y^2 - 2d_y c_y + 2d_y b_y)$$

$$t_5 = 0$$

$$t_6 = \frac{1}{1728} \sqrt{3}(c_x^2 - b_x^2 - 2d_x c_x + 2d_x b_x)$$

El orden en que se generan los términos y las transformaciones aplicadas es

$$k_{11} \xrightarrow{T_1} k_{1313} \xrightarrow{T_1} k_{99} \xrightarrow{T_1} k_{55} \xrightarrow{T_3} k_{1010} \xrightarrow{T_1} k_{1414} \xrightarrow{T_1} k_{22} \xrightarrow{T_1} k_{66}$$

Ahora, con el término k_{33} , se generan los términos de la diagonal relacionados con los nodos vértices, tomando la ecuación (3.5) y las siguientes funciones:

$$s_1 = \frac{1}{216} (4b_y^2 + 10(c_y - d_y)b_y + 7(c_y - d_y)^2)$$

$$s_2 = 0$$

$$s_3 = \frac{1}{216} (4b_x^2 + 10(c_x - d_x)b_x + 7(c_x - d_x)^2)$$

$$s_4 = \frac{1}{108} \sqrt{3}(b_y^2 + 3(c_y - d_y)b_y + 2(c_y - d_y)^2)$$

$$s_5 = 0$$

$$s_6 = \frac{1}{108} \sqrt{3}(b_x^2 + 3(c_x - d_x)b_x + 2(c_x - d_x)^2) \quad (3.7)$$

$$t_1 = \frac{1}{216} (4b_y^2 + 10(d_y - c_y)b_y + 7(c_y - d_y)^2)$$

$$t_2 = 0$$

$$t_3 = \frac{1}{216} (4b_x^2 + 10(d_x - c_x)b_x + 7(c_x - d_x)^2)$$

$$t_4 = \frac{1}{108} \sqrt{3}(b_y^2 + 3(d_y - c_y)b_y + 2(c_y - d_y)^2)$$

$$t_5 = 0$$

$$t_6 = \frac{1}{108} \sqrt{3}(b_x^2 + 3(d_x - c_x)b_x + 2(c_x - d_x)^2)$$

Observe el orden en que se generan los términos y las transformaciones aplicadas en cada caso

$$k_{33} \xrightarrow{T_1} k_{1515} \xrightarrow{T_1} k_{1111} \xrightarrow{T_1} k_{77} \xrightarrow{T_3} k_{88} \xrightarrow{T_1} k_{1212} \xrightarrow{T_1} k_{1616} \xrightarrow{T_1} k_{44}$$

Para el término k_{1717} se evalúa la fórmula generadora (3.5) para $i = 9$ y $j = 9$ con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{2}{27}(c_y - b_y)^2 \\
 s_2 &= 0 \\
 s_3 &= \frac{2}{27}(b_x - c_x)^2 \\
 s_4 &= 0 \\
 s_5 &= 0 \\
 s_6 &= 0 \\
 t_1 &= \frac{2}{27}(c_y + b_y)^2 \\
 t_2 &= 0 \\
 t_3 &= \frac{2}{27}(b_x + c_x)^2 \\
 t_4 &= 0 \\
 t_5 &= 0 \\
 t_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Similarmente para el término k_{1818} considerando las funciones:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{2}{27}(b_x - c_x)^2 \\
 s_2 &= 0 \\
 s_3 &= \frac{2}{27}(c_y - b_y)^2 \\
 s_4 &= 0 \\
 s_5 &= 0 \\
 s_6 &= 0 \\
 t_1 &= \frac{1}{27}((b_x + c_x)^2 + (c_y + b_y)^2) \\
 t_2 &= 0 \\
 t_3 &= t_1
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
t_4 &= \frac{1}{27}((c_y + b_y)^2 - (b_x + c_x)^2) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= -t_4
\end{aligned}$$

§3.2.2. Grupo B

Con el término k_{12} se generan los demás términos del grupo relacionados con los nodos vértices a partir de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{13}{864}(b_y(c_y - b_y) + c_x(b_y - c_y)) \\
s_3 &= s_2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{5}{576}\sqrt{3}(b_x(c_y - b_y) + c_x(b_y - c_y)) \\
s_6 &= s_5 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{1728}(b_x(d_y + c_y - 2b_y) + c_x(b_y + d_y - 2c_y) + d_x(b_y + c_y - 2d_y)) \\
t_3 &= t_2 \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_x(b_y - d_y) + c_x(d_y - c_y) + d_x(c_y - b_y)) \\
t_6 &= t_5
\end{aligned} \tag{3.10}$$

El orden de generación de los términos y las transformaciones aplicadas es:

$$k_{12} \xrightarrow{T_1} k_{1314} \xrightarrow{T_1} k_{910} \xrightarrow{T_1} k_{56}$$

Los demás términos de este grupo son generados a partir de k_{34} y las fórmulas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{216}(b_x(5(d_y - c_y) - 4b_y) + (7(d_y - c_y) - 5b_y)c_x + (7(c_y - d_y) + 5b_y)d_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= s_2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{108}\sqrt{3}(b_x(\frac{3}{2}(d_y - c_y) - b_y) + c_x(2(d_y - c_y) - \frac{3}{2}b_y) + d_x(2(c_y - d_y) + \frac{3}{2}b_y)) \\
s_6 &= s_5 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{216}(b_x(5(c_y - d_y) - 4b_y) + (7(d_y - c_y) - 5b_y)c_x + (7(c_y - d_y) + 5b_y)d_x) \\
t_3 &= t_2 \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= \frac{1}{108}\sqrt{3}(b_x(\frac{3}{2}(c_y - d_y) - b_y) + c_x(2(d_y - c_y) - \frac{3}{2}b_y) + d_x(2(c_y - d_y) + \frac{3}{2}b_y)) \\
t_6 &= t_5
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La manera como se generan los términos es:

$$k_{34} \xrightarrow{T_1} k_{1516} \xrightarrow{T_1} k_{1112} \xrightarrow{T_1} k_{78}$$

Finalmente para el término k_{1718} se evalúa la fórmula generadora (3.5) para $i = 9$ y $j = 9$ con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{2}{27}(b_x(c_y - b_y) + c_x(b_y - c_y)) \\
s_3 &= s_2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= 0 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= -\frac{2}{27}(b_x + c_x)(c_y + b_y) \\
t_3 &= t_2 \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

§3.2.3. Grupo C

Con el término k_{15} se generan los términos del grupo relacionados con los nodos esquinas a partir de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1728}(2b_y^2 + 5b_y(c_y - d_y) + 5d_y c_y - 7c_y^2) \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= \frac{1}{1728}(2b_x^2 + 5b_x(c_x - d_x) + 5d_x c_x - 7c_x^2) \\
s_4 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_y^2 + 3b_y(c_y - d_y) - 4c_y^2 + 3d_y c_y) \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_x^2 + 3b_x(c_x - d_x) - 4c_x^2 + 3d_x c_x) \\
t_1 &= \frac{1}{1728}(2b_y^2 + 5b_y(d_y - c_y) - 7c_y^2 + 5c_y d_y) \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= \frac{1}{1728}(2b_x^2 + 5b_x(d_x - c_x) - 7c_x^2 + 5c_x d_x) \\
t_4 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_y^2 + 3b_y(d_y - c_y) - 4c_y^2 + 3d_y c_y) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_x^2 + 3b_x(d_x - c_x) - 4c_x^2 + 3d_x c_x)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

El orden de generación es:

$$k_{15} \xrightarrow{T_1} k_{113} \xrightarrow{T_1} k_{913} \xrightarrow{T_1} k_{59} \xrightarrow{T_3} k_{610} \xrightarrow{T_1} k_{1014} \xrightarrow{T_1} k_{214} \xrightarrow{T_1} k_{26}$$

Los otros términos del grupo se generan a partir del término k_{37} y las fórmulas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{216}(b_y^2 + (c_y + d_y)b_y + (c_y - d_y)^2) \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= \frac{1}{216}(b_x^2 + (c_x + 2d_x)b_x + (c_x - d_x)^2) \\
s_4 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}(c_y^2 - b - y^2 - c_y d_y - d_y b_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_5 &= 0 \\
s_6 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}(c_x^2 - b - x^2 - c_x d_x - d_x b_x) \\
t_1 &= \frac{1}{216}(b_y(11c_y - 12d_y) - 5b_y^2 - 5c_y^2 - 7d_y^2 + 12c_y d_y) \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= \frac{1}{216}(b_x(11c_x - 12d_x) - 5b_x^2 - 5c_x^2 - 7d_x^2 + 12c_x d_x) \\
t_4 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}(b_y(6c_y - 7d_y) - 3b_y^2 - 3c_y^2 - 4d_y^2 + 7c_y d_y) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}(b_x(6c_x - 7d_x) - 3b_x^2 - 3c_x^2 - 4d_x^2 + 7c_x d_x)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

El orden de generación es:

$$k_{37} \xrightarrow{T_1} k_{315} \xrightarrow{T_1} k_{1115} \xrightarrow{T_1} k_{711} \xrightarrow{T_3} k_{48} \xrightarrow{T_1} k_{812} \xrightarrow{T_1} k_{1216} \xrightarrow{T_1} k_{416}$$

§3.2.4. Grupo D

Partiendo del término k_{16} se generan los términos del grupo relacionados con los nodos esquinas con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{1728}((c_y - b_y)(2b_x + 7c_x) + 5d_x(b_y - c_y)) \\
s_3 &= \frac{1}{1728}(b_x(5d_y - 7c_y - 2b_y) + c_x(7c_y + 2b_y - 5d_y)) \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_x(c_y - b_y) + 4c_x(c_y - b_y) + 3d_x(b_y - c_y)) \\
s_6 &= \frac{1}{1728}\sqrt{3}(b_x(3d_y - 4c_y - b_y) + c_x(b_y + 4c_y - 3d_y)) \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{1728}((b_x + c_x)(7c_y - 5d_y - 2b_y)) \\
t_3 &= \frac{1}{1728}(7c_x(b_y + c_y) - 2b_x(b_y + c_y) - 5d_x(b_y + c_y))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$t_4 = 0$$

$$t_5 = \frac{1}{1728} \sqrt{3} ((b_x + c_x)(4c_y - 3d_y - b_y))$$

$$t_6 = \frac{1}{1728} \sqrt{3} (4c_x(b_y + c_y) - b_x(b_y + c_y) - 3d_x(b_y + c_y))$$

Se generan de la forma siguiente:

$$k_{16} \frac{T_1}{k_{213}} \frac{T_1}{k_{914}} \frac{T_1}{k_{510}} \frac{T_2}{k_{69}} - k_{69} \frac{T_1}{k_{25}} - k_{25} \frac{T_1}{k_{114}} - k_{114} \frac{T_1}{k_{1013}}$$

Para los términos relacionados con los vértices, se parte del término k_{38} y se utilizan las siguientes fórmulas:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{1}{216} (b_x(c_y - b_y - d_y) + c_x(d_y - c_y - 2b_y) + d_x(c_y - b_y - d_y))$$

$$s_3 = \frac{1}{216} (c_x(b_y + d_y - c_y) + d_x(c_y - b_y - d_y) - b_x(b_y + d_y + 2c_y))$$

$$s_4 = 0$$

$$s_5 = \frac{1}{216} \sqrt{3} (b_y b_x + Cx(d_y - c_y) + b_y d_x)$$

$$s_6 = \frac{1}{216} \sqrt{3} (b_x(d_y + b_y) + c_y d_x - c_y c_x) \quad (3.16)$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{216} (b_x(7(d_y - c_y) + 5b_y) + c_x(5(c_y - d_y) - 4b_y) + d_x(7(d_y - c_y) + 5b_y))$$

$$t_3 = \frac{1}{216} (b_x(5(d_y + b_y) - 4c_y) + c_x(5c_y - 7(d_y + b_y)) + d_x(7(b_y + d_y) - 5c_y))$$

$$t_4 = 0$$

$$t_5 = \frac{1}{108} \sqrt{3} ((b_x + d_x)(2(d_y - c_y) + \frac{3}{2}b_y) + c_x(\frac{3}{2}(c_y - d_y) - b_y))$$

$$t_6 = \frac{1}{108} \sqrt{3} (b_x(\frac{3}{2}(d_y + b_y) - c_y) + c_x(\frac{3}{2}c_y - 2(d_y + b_y)) + d_x(2(b_y + d_y) - \frac{3}{2}c_y))$$

El orden de generación es:

$$k_{38} = k_{47} \frac{T_1}{k_{316}} = k_{415} \frac{T_1}{k_{1116}} = k_{1215} \frac{T_1}{k_{712}} = k_{811}$$

§3.2.5. Grupo E

Con el término k_{19} , y las funciones siguientes:

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\frac{1}{1728}(b_y - c_y)^2 \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= -\frac{1}{1728}(b_x - c_x)^2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= 0 \\
t_1 &= -\frac{1}{1728}((b_y - c_y)^2 - 2b_y c_y + 2d_y^2) \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= -\frac{1}{1728}((b_x - c_x)^2 - 2b_x c_x + 2d_x^2) \\
t_4 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(d_y c_y - d_y b_y) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(d_x c_x - d_x b_x)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se obtienen los términos restantes del grupo y las transformaciones aplicadas en cada caso son:

$$k_{19} \xrightarrow{T_1} k_{513} \xrightarrow{T_3} k_{210} \xrightarrow{T_1} k_{614}$$

Similarmente, para generar los otros términos del grupo partiendo del término k_{311} se toman las funciones siguiente:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{216}(c_y^2 - 2b_y^2 - d_y^2 - 2c_y b_y) \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= \frac{1}{216}(c_x^2 - 2b_x^2 - d_x^2 - 2c_x b_x) \\
s_4 &= \frac{1}{8}\sqrt{3}d_y b_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_5 &= 0 \\
s_6 &= \frac{1}{8}\sqrt{3}b_x d_x \\
t_1 &= \frac{1}{216}(c_y^2 - d_y^2 - 2b_y^2 + 2c_y b_y) \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= \frac{1}{216}(c_x^2 - d_x^2 - 2b_x^2 + 2c_x b_x) \\
t_4 &= -s_4 \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= -s_6
\end{aligned} \tag{3.18}$$

El orden en que se generan es:

$$k_{311} \xrightarrow{T_1} k_{715} \xrightarrow{T_3} k_{816} \xrightarrow{T_1} k_{412}$$

§3.2.6. Grupo F

Para este grupo, el término k_{110} , genera los términos correspondientes a los nodos vértices con:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{1728}(b_x(b_y - c_y) + c_x(c_y - b_y)) \\
s_3 &= s_2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= 0 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{1728}(b_x(b_y + d_y - 2c_y) + c_x(d_y + c_y - 2b_y) + d_x(2d_y - b_y - c_y)) \\
t_3 &= t_2 \\
t_4 &= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$t_5 = \frac{1}{1728} \sqrt{3}(b_x(d_y - c_y) + c_x(b_y - d_y) + d_x(b_y - c_y))$$

$$t_6 = t_5$$

luego,

$$k_{110} = k_{29} \frac{T_1}{k_{514}} = k_{618}$$

Para generar los términos correspondientes a los nodos vértices, se toma el término k_{312} , junto a

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{1}{216} (b_x(c_y - d_y + 2b_y) + (c_x + d_x)(b_y + d_y - c_y))$$

$$s_3 = \frac{1}{216} (b_x(c_y + d_y + 2b_y) + c_x(b_y - c_y - d_y) + d_x(d_y + c_y - b_y))$$

$$s_4 = 0$$

$$s_5 = \frac{1}{216} \sqrt{3}(b_x(c_y - d_y) - b_y d_x - b_y c_x)$$

$$s_6 = \frac{1}{216} \sqrt{3}(b_y c_x - b_x(c_y + d_y) - b_y d_x) \quad (3.20)$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{216} (b_x(d_y + 2b_y - c_y) + (c_x + d_x)(d_y - b_y - c_y))$$

$$t_3 = \frac{1}{216} (b_x(2b_y - d_y - c_y) - c_x(d_y + b_y + c_y) + d_x(b_y + c_y + d_y))$$

$$t_4 = 0$$

$$t_5 = \frac{1}{216} \sqrt{3}(b_x(d_y - c_y) + b_y d_x + b_y c_x)$$

$$t_6 = \frac{1}{216} \sqrt{3}(b_x(d_y + c_y) + b_y d_x - b_y c_x)$$

y obtenemos que el orden de los términos y las transformaciones aplicadas:

$$k_{312} = k_{411} \frac{T_1}{k_{716}} = k_{815}$$

§3.2.7. Grupo G

Este grupo se genera con un solo término k_{13} y las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{864}(b_y(19d_y - 5c_y) - 14b_y^2 + 19(c_y^2 - dyc_y)) \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= \frac{1}{864}(b_x(19d_x - 5c_x) - 14b_x^2 + 19(c_x^2 - c_xd_x)) \\
s_4 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(b_y(11d_y - 3c_y) + 11(cy^2 - dyc_y) - 8b_y^2) \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(b_x(11d_x - 3c_x) + 11(cx^2 - dxc_x) - 8b_x^2) \\
t_1 &= \frac{1}{864}(b_y(5c_y - 3d_y)) - 2b_y^2 - 5c_y^2 - 4d_y^2 + 9d_yc_y \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= \frac{1}{864}(b_x(5c_x - 3d_x)) - 2b_x^2 - 5c_x^2 - 4d_x^2 + 9d_xc_x \\
t_4 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(3b_y(c_y - d_y) + c_y(5d_y - 3c_y) - 2d_y^2) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(3b_x(cx - d_x + c_x(5d_x - 3c_x) - 2d_x^2)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La forma en que se generaron es:

$$\begin{aligned}
&k_{13} \frac{T_1}{k_{1315}} \frac{T_1}{k_{911}} \frac{T_1}{k_{57}} \frac{T_4}{k_{810}} \frac{T_1}{k_{1214}} \frac{T_1}{k_{216}} \frac{T_1}{k_{46}} \\
&k_{13} \frac{T_4}{k_{24}} - k_{24} \frac{T_1}{k_{1416}} - k_{1416} \frac{T_1}{k_{1012}} - k_{1012} \frac{T_1}{k_{68}} - k_{68} \frac{T_3}{k_{79}} - k_{79} \frac{T_1}{k_{1113}} - k_{1113} \frac{T_1}{k_{115}} - k_{115} \frac{T_1}{k_{35}}
\end{aligned}$$

§3.2.8. Grupo H

Ahora se generan los términos de este grupo a partir del término k_{23}

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{864}(b_x(19(c_y - d_y) + 14b_y) + c_x(19(d_y - c_y) - 14b_y)) \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(b_x(8b_y + 11(c_y - d_y)) + c_x(11(d_y - c_y) - 8b_y)) \\
s_6 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(8b_x(b_y - c_y) + 11(c_x(b_y - c_y) + d_x(c_y - b_y))) \quad (3.22) \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{864}(b_x(d_y - c_y + 2b_y) + c_x(5(c_y - d_y) - 4b_y) + d_x(4(d_y - c_y) + 2b_y)) \\
t_3 &= \frac{1}{864}(b_x(2(b_y + d_y) - 4c_y) + c_x(5c_y - 4d_y - b_y) + d_x(b_y - 5c_y + 4d_y)) \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(b_x(d_y - c_y) + c_x(3(c_y - d_y) - 2b_y) + 2d_x(b_y + d_y - c_y)) \\
t_6 &= \frac{1}{864}\sqrt{3}(2b_x(d_y - c_y) + c_x(3c_y - 2d_y - b_y) + d_x(2d_y + b_y - 3c_y))
\end{aligned}$$

La forma en que se generaron es:

$$\begin{aligned}
&k_{23} \xrightarrow{T_1} k_{1415} \xrightarrow{T_1} k_{1011} \xrightarrow{T_1} k_{67} \xrightarrow{T_3} k_{89} \xrightarrow{T_1} k_{1213} \xrightarrow{T_1} k_{116} \xrightarrow{T_1} k_{45} \\
&k_{23} \xrightarrow{T_4} k_{14} \xrightarrow{T_1} k_{1316} \xrightarrow{T_1} k_{912} \xrightarrow{T_1} k_{58} \xrightarrow{T_3} k_{710} \xrightarrow{T_1} k_{1114} \xrightarrow{T_1} k_{215} \xrightarrow{T_1} k_{36}
\end{aligned}$$

§3.2.9. Grupo I

Los términos de estegrupo se generan a partir del término k_{111}

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{864}(4b_y^2 - b_y(5c_y + d_y) + d_y c_y + c_y^2) \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= \frac{1}{864}(4b_x^2 - b_x(5c_x + d_x) + d_x c_x + c_x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_4 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(2b_y^2 - b_y(d_y + 3c_y) + c_y^2 + d_y c_y) \\
s_5 &= 0 \\
s_6 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(2b_x^2 - b_x(d_x + 3c_x) + c_x^2 + d_x c_x) \\
t_1 &= \frac{1}{864} (4b_y^2 - 7b_y(c_y + d_y) + 4d_y^2 + 5d_y c_y + c_y^2) \\
t_2 &= 0 \\
t_3 &= \frac{1}{864} (4b_x^2 - 7b_x(c_x + d_x) + 4d_x^2 + 5d_x c_x + c_x^2) \\
t_4 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(b_y(5d_y + 3c_y) - 2b_y^2 - (c_y + d_y)^2 - d_y c_y - d_y^2) \\
t_5 &= 0 \\
t_6 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(b_x(5d_x + 3c_x) - 2b_x^2 - (c_x + d_x)^2 - d_x c_x - d_x^2)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

se generaron de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&k_{111} \frac{T_1}{k_{713}} \frac{T_1}{k_{39}} \frac{T_1}{k_{515}} \frac{T_3}{k_{1016}} \frac{T_1}{k_{414}} \frac{T_1}{k_{28}} \frac{T_1}{k_{612}} \\
&k_{111} \frac{T_2 o T_4}{k_{915}} \frac{T_1}{k_{313}} \frac{T_1}{k_{410}} \frac{T_1}{k_{616}} \frac{T_3}{k_{212}} \frac{T_1}{k_{814}} \frac{T_1}{k_{17}} \frac{T_1}{k_{511}}
\end{aligned}$$

§3.2.10. Grupo J

Este grupo se genera con el término k_{211}

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{864} (b_x(c_y + d_y - 4b_y) + c_x(4b_y - d_y - c_y)) \\
s_3 &= \frac{1}{864} (4b_x(c_y - b_y) + c_x(b_y - c_y) + d_x(b_y - c_y)) \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(b_x(d_y + c_y - 2b_y) + c_x(2b_y - c_y - d_y)) \\
s_6 &= \frac{1}{864} \sqrt{3}(2b_x(c_y - b_y) + c_x(b_y - c_y) + d_x(b_y - c_y)) \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{864} (b_x(5(c_y + d_y) - 4b_y) + c_x(2b_y - d_y - c_y) + d_x(2b_y - 4(d_y + c_y)))
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$t_3 = \frac{1}{864}(b_x(2(c_y + d_y) - 4b_y) + c_x(5b_y - c_y - 4d_y) + d_x(5b_y - c_y - 4d_y))$$

$$t_4 = 0$$

$$t_5 = \frac{1}{864}\sqrt{3}(b_x(2b_y - 3(d_y + c_y)) + c_x(c_y + d_y) + 2d_x(c_y - b_y + d_y))$$

$$t_6 = \frac{1}{864}\sqrt{3}(2b_x(b_y - d_y) + (c_x + d_x)(c_y + 2d_y - 3b_y))$$

generándose los términos de la siguiente manera:

$$k_{211} = k_{112} \frac{T_1}{T_1} k_{714} = k_{813} \frac{T_1}{T_1} k_{310} = k_{49} \frac{T_1}{T_1} k_{516} = k_{615} \frac{T_3}{T_3} k_{916}$$

$$k_{916} = k_{815} \frac{T_1}{T_1} k_{314} = k_{413} \frac{T_1}{T_1} k_{18} = k_{27} \frac{T_1}{T_1} k_{512} = k_{611}$$

§3.2.11. Grupo K

Para este grupo, el término k_{117} con las siguientes ecuaciones:

$$s_1 = -\frac{5}{216}(b_y - c_y)^2$$

$$s_2 = 0$$

$$s_3 = -\frac{5}{216}(b_x - c_x)^2$$

$$s_4 = -\frac{1}{72}\sqrt{3}(b_y - c_y)^2$$

$$s_5 = 0$$

$$s_6 = -\frac{1}{72}\sqrt{3}(b_x - c_x)^2 \tag{3.25}$$

$$t_1 = \frac{1}{216}(b_y^2 + 2b_y(c_y - d_y) + c_y^2 - 2c_y d_y)$$

$$t_2 = 0$$

$$t_3 = \frac{1}{216}(b_x^2 + 2b_x(c_x - d_x) + c_x^2 - 2c_x d_x)$$

$$t_4 = \frac{1}{216}\sqrt{3}(c_y^2 - b_y^2)$$

$$t_5 = 0$$

$$t_6 = \frac{1}{216}\sqrt{3}(c_x^2 - b_x^2)$$

y las transformaciones adecuadas, se generan los términos:

$$k_{117} \xrightarrow{T_1} k_{1317} \xrightarrow{T_1} k_{917} \xrightarrow{T_1} k_{517} \xrightarrow{T_3} k_{1018} \xrightarrow{T_1} k_{1418} \xrightarrow{T_1} k_{218} \xrightarrow{T_1} k_{618}$$

Para generar el resto de los elementos del grupo, se toma el término k_{317} junto a

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{54}(b_y^2 + b_y(c_y - 2d_y) - 2c_y^2 + 2c_yd_y) \\ s_2 &= 0 \\ s_3 &= \frac{1}{54}(b_x^2 + b_x(c_x - 2d_x) - 2c_x^2 + 2c_xd_x) \\ s_4 &= \frac{1}{54}\sqrt{3}(b_y^2 - d_yb_y - c_y^2 + c_yd_y) \\ s_5 &= 0 \\ s_6 &= \frac{1}{54}\sqrt{3}(b_x^2 - d_xb_x - c_x^2 + c_xd_x) \\ t_1 &= \frac{1}{54}(b_y^2 + b_y(2d_y - c_y) - 2c_y^2 + 2c_yd_y) \\ t_2 &= 0 \\ t_3 &= \frac{1}{54}(b_x^2 + b_x(2d_x - c_x) - 2c_x^2 + 2c_xd_x) \\ t_4 &= \frac{1}{54}\sqrt{3}(b_y^2 + d_yb_y + c_yd_y - c_y^2) \\ t_5 &= 0 \\ t_6 &= \frac{1}{54}\sqrt{3}(b_x^2 + d_xb_x + c_xd_x - c_x^2) \end{aligned} \tag{3.26}$$

y obtenemos que el orden de los términos y las transformaciones aplicadas:

$$k_{317} \xrightarrow{T_1} k_{1517} \xrightarrow{T_1} k_{1117} \xrightarrow{T_1} k_{717} \xrightarrow{T_3} k_{418} \xrightarrow{T_1} k_{618} \xrightarrow{T_1} k_{1218} \xrightarrow{T_1} k_{1618}$$

§3.2.12. Grupo L

Este último grupo se genera primero con el término k_{118} y las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{5}{216}(b_x(b_y - c_y) + c_x(c_y - b_y)) \\
s_3 &= s_2 \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{72}\sqrt{3}(b_x(b_y - c_y) + c_x(c_y - b_y)) \\
s_6 &= s_5 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{1}{216}((b_x + c_x)(2d_y - b_y - c_y)) \\
t_3 &= \frac{1}{216}((b_y + c_y)(2d_x - b_x - c_x)) \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}((b_y - c_y)(b_x + c_x)) \\
t_6 &= \frac{1}{216}\sqrt{3}((c_y + b_y)(b_x - c_x))
\end{aligned} \tag{3.27}$$

usando las transformaciones adecuadas, el orden en el que se genera es:

$$k_{118} = k_{217} \frac{T_1}{1} k_{1417} = k_{1318} \frac{T_1}{1} k_{918} = k_{1017} \frac{T_1}{1} k_{518} = k_{617}$$

El segundo término utilizado para generar este grupo es k_{318} con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0 \\
s_2 &= \frac{1}{54}(b_x(2(d_y - c_y) - b_y) + c_x(2(c_y - d_y) + b_y)) \\
s_3 &= \frac{1}{54}(b_x(c_y - b_y) + 2c_x(c_y - b_y) + 2d_x(b_y - c_y)) \\
s_4 &= 0 \\
s_5 &= \frac{1}{54}\sqrt{3}(b_x(d_y - b_y - c_y) + c_x(c_y - d_y + b_y))
\end{aligned}$$

$$s_6 = \frac{1}{54} \sqrt{3} (b_x(c_y - b_y) + c_x(c_y - b_y) + d_x(b_y - c_y)) \quad (3.28)$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{54} (b_x + c_x)(2(c_y - d_y) - b_y)$$

$$t_3 = \frac{1}{54} ((c_y + b_y)(2(c_x - d_x) - b_x))$$

$$t_4 = 0$$

$$t_5 = \frac{1}{54} \sqrt{3} (b_x + c_x)(c_y - d_y - b_y)$$

$$t_6 = \frac{1}{54} \sqrt{3} (b_y + c_y)(c_x - d_x - b_x)$$

generándose de la siguiente forma:

$$k_{318} = k_{417} \frac{T_1}{54} k_{1518} = k_{1417} \frac{T_1}{54} k_{1118} = k_{1217} \frac{T_1}{54} k_{718} = k_{817}$$

Las igualdades que se reflejan en algunos términos obedecen a los resultados obtenidos en el trabajo de Osorio, J. et al. en [OC] (2008).

CAPÍTULO 4

EJEMPLO

Se modela una pieza bidimensional en forma de “llave” como se muestra en la Figura (4.1), empotrada en su orificio y simulando las fuerzas necesarias para enroscar una tuerca.

Este ejemplo, fue discretizado por el software ABAQUS en 31 elementos finitos lagrangianos cuadriláteros de 9 nodos, tomando las siguientes condiciones:

MATERIALS

Material, name=Acero Elastic $E=3e+07$, $\nu =0.3$

BOUNDARY CONDITIONS

Name: Empotramiento Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre

Boundary

PickedSet4, ENCASTRE

STEP: Carga llave

Step, name= Carga llave

Presión en el orificio de la llave

Static

1., 1., 1e-05, 1.

LOADS

Name: Carga de presión Type: Pressure

Dsload

PickedSurf5, P, 3500.

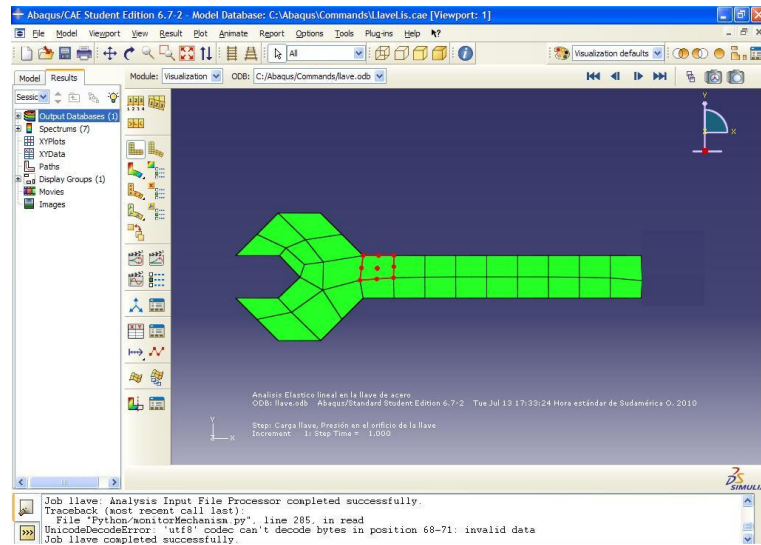


FIGURA 4.1: Discretización en Llave de acero.

Se hace el análisis elástico lineal para obtener los siguientes resultados

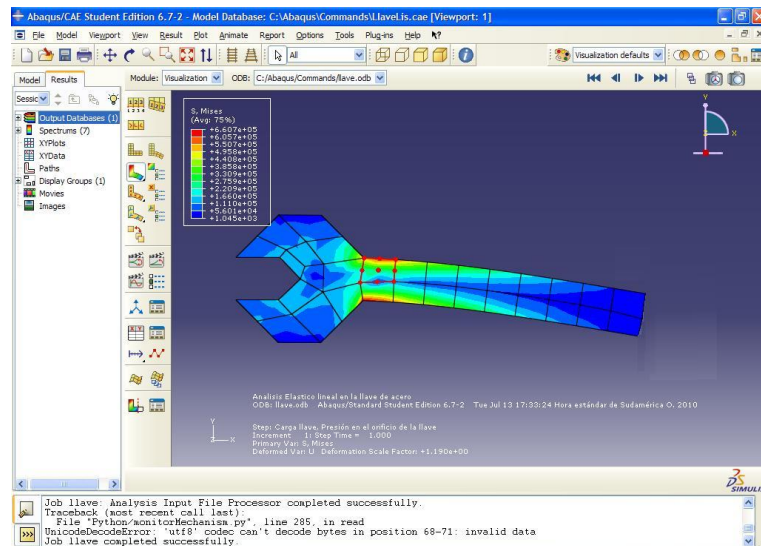


FIGURA 4.2: Análisis elástico lineal en la llave de acero.

Se puede apreciar los sectores donde se produce mayor estrés y es allí donde se toma el elemento de muestra; éste elemento es resaltado y se hace el cálculo de su matriz de rigidez usando la metodología expuesta.

En el Apéndice (B), se pueden ver los detalles de este análisis en el software ABAQUS y se puede apreciar la matriz de rigidez para el elemento finito resaltado de este

ejemplo, obtenida usando la fórmula cerrada desarrollada en este trabajo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo, se implementó de manera satisfactoria una metodología explícita para la integración semi-analítica de la matriz de rigidez del elemento finito lagrangiano cuadrilátero de nueve nodos en problemas de elasticidad plana.

Se obtuvo una expresión general que permite calcular las integrales involucradas en el cálculo de las componentes de la matriz de rigidez del elemento, mediante manipulaciones algebraicas sencillas.

Las expresiones algebraicas se basan en la manipulación del integrando. Si bien la elegancia, formulación y esfuerzo computacional es de primera importancia, el plan elaborado tiene una expresión compacta y buena eficiencia computacional.

A su vez se hizo la evaluación de desempeño de la integración semi-analítica versus integración numérica y se ha mantenido la precisión de la integración numérica convencional (Cuadratura de Gaussiana de orden 2×2) con 10 cifras significativas usando la fórmula cerrada para los términos de la matriz de rigidez del elemento que se desarrolló.

Es muy común el uso de triángulos de 3, 6, hasta 10 nodos, ya que a pesar de no ser una aproximación precisa, la integración es exacta y los cálculos son más sencillos, por lo que es de ayuda al momento de buscar rapidez en los resultados. Al usar cuadriláteros se complican un poco más los cálculos, pero se tiene una mejor aproximación.

Las relaciones que ya se han obtenido entre algunos de los términos de la matriz de rigidez para estos elementos de lados rectos se pueden muy bien extender a elementos de lados curvos.

APÉNDICE A

MATRIZ DE RIGIDEZ

Sobre los nodos del elemento se materializan las incógnitas principales del problema, es decir, los desplazamientos nodales, pues apartir de ellos se pueden calcular el resto de las incógnitas. (Estas incógnitas se denominan grados de libertad).

Para encontrar una solución aproximada del campo de desplazamiento en un punto cualquiera del elemento y que asimismo satisfaga las ecuaciones matemáticas que rigen el problema se utiliza funciones polinómicas definidas localmente para cada elemento (llamada funciones de forma). Estas funciones, definen de manera única el campo de desplazamiento dentro del elemento, en función de los desplazamientos en los nodos del mismo. Es decir,

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n \quad (\text{A.1})$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_n v_n \quad (\text{A.2})$$

$u = [u \ v]^t$ es el vector de desplazamiento de un punto del elemento.

$$N = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right] \quad \dots \quad \left[\begin{array}{cc} N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (\text{A.3})$$

son las matrices de funciones de forma del elemento, las cuales cumplen la siguiente propiedad:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1 \quad (\text{A.4})$$

y el vector de desplazamientos nodales, queda expresado así:

$$a^e = [a_1^e \ a_2^e \ \dots \ a_n^e]^t \quad \text{donde} \quad a_i^e = [u_i \ v_i]^t \quad (\text{A.5})$$

Conocidos los desplazamientos nodales, se puede discretizar el campo de deformaciones, para determinar las tres deformaciones significativas, en un punto cualquiera del elemento $\epsilon = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]$ y obtenemos la siguiente relación matricial

$$\epsilon = Ba^e \quad (\text{A.6})$$

donde

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^t \quad \text{con} \quad B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n] \quad (\text{A.7})$$

La expresión discretizada del vector de tensiones en el interior del elemento se obtiene mediante la sustitución directa de la ecuación (A.6) en la relación $\sigma = D\epsilon$, donde D es la matriz de elasticidad del elemento.

$$\sigma = D\epsilon = DBa^e \quad (\text{A.8})$$

Si existieran tensiones o deformaciones iniciales la expresión a utilizar es:

$$\sigma = D\epsilon - D\epsilon_0 + \sigma_0 = DBa^e - D\epsilon_0 + \sigma_0 \quad (\text{A.9})$$

Para la discretización de la expresión integral del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) supondremos que el equilibrio del elemento se establece únicamente en los nodos del elemento. Así, la expresión del PTV en equilibrio $\partial W = 0$, es decir,

$$\int \int \int_V \partial \epsilon^t t dV = \int \int \int_V \partial u^t b dV + \int \int \int_V \partial u^t t dS \quad (\text{A.10})$$

aplicada a un elemento puede escribirse como:

$$\int \int_{A^e} \partial \epsilon^t \sigma^t t dA = \int \int_{A^e} \partial u^t b t dA + \oint_{1^e} \partial u^t t dS + \sum_{i=1}^n \partial u_i U_i + \sum_{i=1}^n \partial v_i V_i \quad (\text{A.11})$$

donde ∂u_i y ∂v_i son los desplazamientos virtuales de los nodos del elemento y U_i y V_i las fuerzas nodales de equilibrio que corresponden a dichos desplazamientos. El trabajo virtual de dichas fuerzas puede despejarse de la ecuación anterior como:

$$\int \int_{A^e} \partial \epsilon^t \sigma^t t dA - \int \int_{A^e} \partial u^t b t dA - \oint_{1^e} \partial u^t t dS = [\partial a^e]^t q^e \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\partial a^e = [\partial u_1 \ \partial v_1 \ \dots \ \partial u_n \ \partial v_n]^t \quad \text{y} \quad q^e = [U_1 \ V_1 \ \dots \ U_n \ V_n] \quad (\text{A.13})$$

Luego, de (A.6) y de la relación $u = Na^e$ podemos escribir

$$\partial u^t = [a^e]^t N^t \quad \text{y} \quad \partial \epsilon^t = [a^e]^t B^t \quad (\text{A.14})$$

sustituyendo en (A.12)

$$[\partial a^e]^t \left[\int \int_{A^e} B^t \sigma t dA - \int \int_{A^e} N^t b t dA - \oint_{1^e} N^t t dS \right] = [\partial a^e]^t q^e \quad (\text{A.15})$$

y como los desplazamientos son arbitrarios, se tiene que

$$\int \int_{A^e} B^t \sigma t dA - \int \int_{A^e} N^t b t dA - \oint_{1^e} N^t t dS = q^e \quad (\text{A.16})$$

sustituyendo ahora el vector de tensiones, por su valor en función de los desplazamientos (A.6), (A.8) y operando se obtiene:

$$\left[\int \int_{A^e} B^t D B t dA \right] a^e - \int \int_{A^e} N^t b t dA - \oint_{1^e} N^t t dS = q^e \quad (\text{A.17})$$

Sabiendo que q^e son las fuerzas que actúan en todos los nodos del elemento e a considerar y que se cumple la relación característica

$$q^e = K^e a^e - (f_p^e + f_{\epsilon_0}^e) \quad (\text{A.18})$$

donde f_p^e representa las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier carga distribuida que actúe sobre el elemento y $f_{\epsilon_0}^e$ las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier deformación inicial, y donde el primer término representa las fuerzas inducidas por los desplazamientos de los nodos, con K^e representando la matriz de rigidez del elemento e . Así podemos concluir que si

$$f^e = f_p^e + f_{\epsilon_0}^e = \int \int_{A^e} N^t b t dA + \oint_{1^e} N^t t dS \quad (\text{A.19})$$

de (A.17) y $q^e = K^e a^e - f^e$, se tiene que

$$K^e = \int \int_{A^e} B^t D B dA \quad (\text{A.20})$$

es la matriz de rigidez del elemento, y sus terminos vienen dados por

$$K_{ij}^e = \int \int_{A^e} B_i^t D B_j dA \quad (\text{A.21})$$

APÉNDICE B

ANÁLISIS ELÁSTICO LINEAL EN LA LLAVE DE ACERO CON ABAQUS

ABAQUS es un programa destinado a resolver problemas de ciencias e ingeniería y esta basado en el método de los elementos finitos. El programa puede resolver casi todo tipo de problemas, desde un simple análisis lineal hasta simulaciones complejas no lineales. Abaqus posee una extensa librería de elementos finitos que permite modelar virtualmente cualquier geometría, así como su extensa lista de modelos que simulan el comportamiento de una gran mayoría de materiales, permitiendo su aplicabilidad en distintas áreas de ingeniería.

§Análisis elástico lineal en la llave de acero con ABAQUS

*Heading

Analisis Elastico lineal en la llave de acero

** Job name: llave Model name: Model-1

*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO

**

** PARTS

**

*Part, name=Part-1

*Node

1,	-24,8455181,	5.
2,	-30.,	5.
3,	-22,4218712,	2,46093631
4,	-25.,	0.
5,	-30.,	0.
6,	-25.,	-5.
7,	-20.,	-5.
8,	-15.,	0.
9,	25.,	0.
10,	25.,	5.
11,	-15.,	5.
12,	-20.,	10.
13,	-25.,	10.
14,	-27,5,	-2,5
15,	-17,5,	-2,5
16,	21,363636,	0.
17,	17,727272,	0.
18,	14,090909,	0.
19,	10,454545,	0.
20,	6,81818199,	0.
21,	3,18181825,	0.
22,	-0,454545468,	0.
23,	-4,090909,	0.
24,	-7,72727251,	0.
25,	-11,363636,	0.
26,	-11,363636,	5.
27,	-7,72727251,	5.
28,	-4,090909,	5.
29,	-0,454545468,	5.
30,	3,18181825,	5.
31,	6,81818199,	5.

32,	10,454545,	5.
33,	14,090909,	5.
34,	17,727272,	5.
35,	21,363636,	5.
36,	-17,5,	7,5
37,	-27,5,	7,5
38,	-21,904377,	3,94935989
39,	-19,6823063,	4,24318457
40,	-11,4184256,	2,39562869
41,	10,4532566,	2,45971894
42,	-23,434639,	-1,66908169
43,	17,8414555,	2,05570102
44,	14,1066933,	2,37295532
45,	6,81746721,	2,49007082
46,	3,18132091,	2,49921608
47,	-0,454949915,	2,49852729
48,	-4,09323263,	2,49528074
49,	-7,735425,	2,47101665
50,	-24,0961876,	5,89528608
51,	-21,7773495,	6,86671066
52,	-15,3777924,	2,10674334
53,	-19,7511463,	0,953861117
54,	19,6025467,	1,02785051
55,	17,7843628,	1,02785051
56,	19,545454,	0.
57,	-24,4708519,	5,44764328
58,	-25,7980938,	6,69764328
59,	-28,75,	6,25
60,	-27,42276,	5.
61,	-22,9367676,	6,38099861
62,	-23,0002823,	4,92232323
63,	-20,7933426,	4,09627247

64,	-20,7298279,	5,55494785
65,	-22,1631241,	3,20514822
66,	-21,0865097,	1,70739865
67,	-19,7167263,	2,5985229
68,	-17,3411522,	4,62159252
69,	-16,25,	6,25
70,	-19,6386757,	7,18335533
71,	-21,7173195,	-3,33454084
72,	-18,75,	-3,75
73,	-18,6255722,	-0,773069441
74,	-21,5928917,	-0,357610285
75,	-22,5,	-5.
76,	-25,4673195,	-2,08454084
77,	-26,25,	-3,75
78,	-27,5,	0.
79,	-28,75,	-1,25
80,	-24,2173195,	-0,834540844
81,	-17,5644684,	1,53030229
82,	-15,1888962,	3,55337167
83,	-13,181818,	0.
84,	-11,3910313,	1,19781435
85,	-13,3981094,	2,25118589
86,	-15,1888962,	1,05337167
87,	12,2799749,	2,41633701
88,	10,4539013,	1,22985947
89,	12,272727,	0.
90,	14,0988007,	1,18647766
91,	23,181818,	0.
92,	25.,	2,5
93,	23,181818,	5.
94,	21,363636,	2,5

95,	19,545454,	5.
96,	17,7843628,	3,52785063
97,	15,9740744,	2,21432829
98,	15,90909,	0.
99,	8,63536167,	2,474895
100,	6,81782436,	1,24503541
101,	8,63636398,	0.
102,	4,99939394,	2,49464345
103,	3,18156958,	1,24960804
104,	5.,	0.
105,	1,36318552,	2,4988718
106,	-0,454747677,	1,24926364
107,	1,36363637,	0.
108,	-2,27409124,	2,4969039
109,	-4,09207058,	1,24764037
110,	-2,27272725,	0.
111,	-5,91432858,	2,48314857
112,	-7,73134899,	1,23550832
113,	-5,909091,	0.
114,	-11,3910313,	3,69781446
115,	-13,181818,	5.
116,	-7,73134899,	3,73550844
117,	-9,54545403,	5.
118,	-9,57692528,	2,43332267
119,	-4,09207058,	3,74764037
120,	-5,909091,	5.
121,	-0,454747677,	3,74926376
122,	-2,27272725,	5.
123,	3,18156958,	3,74960804
124,	1,36363637,	5.

*Element, type=CPS6M 1, 16, 43, 17, 54, 55, 56

*Element, type=CPS8R

2,	1,	50,	37,	2,	57,	58,	59,	60
3,	51,	50,	38,	39,	61,	62,	63,	64
4,	39,	38,	3,	53,	63,	65,	66,	67
5,	39,	11,	36,	51,	68,	69,	70,	64
6,	42,	7,	15,	53,	71,	72,	73,	74
7,	6,	7,	42,	14,	75,	71,	76,	77
8,	4,	5,	14,	42,	78,	79,	76,	80
9,	39,	53,	52,	11,	67,	81,	82,	68
10,	8,	25,	40,	52,	83,	84,	85,	86
11,	44,	41,	19,	18,	87,	88,	89,	90
12,	16,	9,	10,	35,	91,	92,	93,	94
13,	16,	35,	34,	43,	94,	95,	96,	54
14,	43,	44,	18,	17,	97,	90,	98,	55
15,	41,	45,	20,	19,	99,	100,	101,	88
16,	45,	46,	21,	20,	102,	103,	104,	100
17,	46,	47,	22,	21,	105,	106,	107,	103
18,	47,	48,	23,	22,	108,	109,	110,	106
19,	48,	49,	24,	23,	111,	112,	113,	109
20,	40,	26,	11,	52,	114,	115,	82,	85
21,	49,	27,	26,	40,	116,	117,	114,	118
22,	48,	28,	27,	49,	119,	120,	116,	111
23,	47,	29,	28,	48,	121,	122,	119,	108
24,	46,	30,	29,	47,	123,	124,	121,	105
25,	45,	31,	30,	46,	102,	74,	80,	53
26,	41,	32,	31,	45,	125,	99,	42,	4
27,	44,	33,	32,	41,	87,	66,	3	3
28,	43,	34,	33,	44,	96,	97,	1	31
29,	51,	36,	12,	13,	70,	57,	65	38
33,	15,	8,	52,	53,	112,	86,	81,	73

```

*Nset, nset=PickedSet2, internal, generate 1, 139, 1
*Elset, elset=PickedSet2, internal, generate 1, 34, 1
*Nset, nset=PickedSet3, internal, generate 1, 139, 1
*Elset, elset=PickedSet3, internal, generate 1, 34, 1
** Section: Section-Llave
*Solid Section, elset=PickedSet3, material=Acero 1.,
*End Part
** ** ** ASSEMBLY
** *Assembly, name=Assembly
** *Instance, name=Part-1-1, part=Part-1
*End Instance
** *Nset, nset=PickedSet4, internal, instance=Part-1-1 1, 2, 3, 4, 5, 60, 78, 135, 136
*Elset, elset=PickedSet4, internal, instance=Part-1-1 2, 8, 30, 31
*Elset, elset=PickedSurf5S3, internal, instance=Part-1-1 12,
*Elset, elset=PickedSurf5S2, internal, instance=Part-1-1 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25,
26, 27, 28
*Surface, type=ELEMENT, name=PickedSurf5, internal
PickedSurf5S3, S3
PickedSurf5S2, S2
*End Assembly
** ** MATERIALS
** *Material, name=Acero
*Elastic 3e+07, 0.3 ** ** BOUNDARY CONDITIONS
** ** Name: Empotramiento Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary
PickedSet4, ENCASTRE ** _____ **
** STEP: Carga llave **
*Step, name=Carga llave
Presión en el orificio de la llave
*Static 1., 1., 1e-05, 1. **
** LOADS **
** Name: Carga de presión Type: Pressure

```

```
*Dsload
PickedSurf5, P, 3500. **
** OUTPUT REQUESTS **
*Restart, write, frequency=0 **
** FIELD OUTPUT: F-Output-1 **
*Output, field
*Node Output
RF, U
*Element Output, directions=YES
S,
*Output, history, frequency=0
*End Step
```

§Matriz de rigidez del elemento muestra en la llave de acero

REFERENCIAS

- [A] ABAQUS, Inc. *Abaqus/Cae User's Manual*. Version 6.5 United States of America. 2004
- [BP] Badu D. and Pinder F. Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1984 (1153-1166)
- [G] Griffiths D. V. Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1994 (1027-1038)
- [GM] Griffiths D. V. and Mustoe G. G. W. Selective reduced integration of four-node plane element in closed form. *Journal of Engineering Mechanics* 1995 (Vol 121. N° 6)
- [L] Lozada I. and Osorio J. and Griffiths D. and Cerrolaza M. Semi-analytical Integration of the 8-Noded Plane Element Stiffness Matrix Using Symbolic Computation. *Numer Methods Partial Differential.* 2006 (296-316)
- [M] Mizukami A. Some integration formulae for a four noded isoparametric element. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1986 (111-121)
- [O] Okabe, M. Analytical integral formulae related to convex quadrilateral finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1981 (201-218)
- [OC] Osorio, J. and Cerrolaza M. Relación entre los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito tridimensional hexaédrico de ocho nodos. *Revista internacional de Metodos Numéricos en Ingeniería (RIMNE)* Vol. 24 No 2. 2008
- [R] Rathod H. Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element. *Comput. Struct.* 1988 (1101-1109)

-
- [RS] Rathod H. and Shafiqul I. Some analytical integration formulas for trapezoidal shape quadrilateral elements of Lagrange family *Communications in Numerical Methods in engineering*.2000 (423-438)
- [S] Stroud H. and Secrest D. *Gaussian quadrature formulae*. Prentice-Hall, New York. 1999
- [V] Videla L. and Baloa T. and Griffiths D. V. and Cerrolaza M. Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane. *Elastic finite by symbolic computation*.2007
- [V] Videla L. and Cerrolaza M. and Aparicio N. Explicit integration of the Stiffness matrix of a four noded-plane elasticity finite element. *Comm. Numer. Methods Eng*.1996 (731-743)
- [Y] Yagawa G. and Ye G. and Yoshimura S. A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation. *Int. J. Numer. Methods Eng*.1990 (1539-1549)
- [Z] Zienkiewicz O. C. † *El método de los elementos finitos*. Reverté, S.A. 1982