UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Propiedades especiales de algunos espacios de Banach clásicos

Autor: Br. María Eugenia Colina Meazoa
Tutor: M.Sc. Jurancy Ereú (UCLA)

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Licenciado en Ciencias Matemáticas.

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Julio, 2010.

Dedicatoria

A *Dios* todopoderoso, y a las personas que sobre este mundo durante toda mi vida me han llenado de amor, luz y felicidad; *mi madre y mis hermanos.*

Agradecimientos

A *Dios todopoderoso*, mi padre eterno, que siempre permanece a mi lado y a mi madre en el cielo *María* que intercede ante Dios por mi para que me ayude y me guie por el buen camino.

A la persona que me ha entregado su vida ,que me ha acompañado y apoyado siempre a pesar de no gustarle algunas de mis decisiones,que me ha enseñado a amar y que sobre la tierra me hace sentir el más puro de los sentimientos que se pueden sentir hacia alguien, *mi mai*.

A *mis hermanos* Jessie y Antonio, que siempre han estado a mi lado dandome animo y que en los momentos que me sentía más estresada con sus locuras encontraban la manera de hacerme sentir mejor.

A *mi novio* Heber, por apoyarme, comprenderme, ayudarme, brindarme tu amor y estar a mi lado en los momentos que mas lo necesitaba. Espero que asi siga siendo durante muchísimo tiempo, ¡te amo!.

A mi tutora Jurancy Ereú, por su excelente calidad como docente,por su dedicación, sobretodo por ayudarme en la realización de éste proyecto y por explicarme y transmitirme de manera paciente sus conocimientos, siempre le estaré muy agradecida.

A mis amigos de toda la vida, Rosymar Peralta y Gabriel Barreto, que siempre me dieron ese aliento y esa mano amiga para seguir adelante luchando por lo deseaba.

A María Peraza, por ayudarme en la transcripción del proyecto y porque resultaste ser una persona a la cual le tome muchísimo cariño, a pesar de que te conocí a mitad de la carrera compartimos muchos momentos inolvidables.Ojala Dios permita que ésta amistad tan loca y sincera perdure en el tiempo.

A Yhon Meza y a Rona Borges, por brindarme su amistad, su ayuda, su afecto y su apoyo. Igualmente le pido a Dios que nuestra amistad perdure por siempre.

A todas aquellas personas que durante mis años en la universidad me ayudaron de una u otra manera y me hicieron pasar gratos e inolvidables momentos y a todos aquellos profesores que me dejaron grandes enseñanzas durante la carrera.

Resumen

Éste trabajo especial de grado presenta de manera clara y precisa el estudio de algunas propiedades topológicas de los espacios de Banach clásicos ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, ℓ_∞ y c_0.

Estos espacios clásicos juegan un papel de gran importancia en la teoría de los espacios de Banach, es por ello que en este caso se da especial atención a estudiar la completitud, la separabilidad de estos espacios, la propiedad de Schur (sólo para el espacio ℓ_1) y las condiciones bajo las cuales un espacio de Banach X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1.

La bibliografía principal que sustentará el trabajo especial de grado es [2], el cual es un texto dedicado al estudio de la teoría de espacios de Banach. acá se demuestra que la convergencia débil de sucesiones en el espacio ℓ_1 implica la convergencia en norma (propiedad de Schur) y las condiciones bajo las cuales un espacio de Banach X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1. Se complementa con dos textos de análisis funcional, como son [5] y[6]. En los mismos se estudia la completitud y la separabilidad de los espacios mencionados anteriormente.

Introducción

El desarrollo de la teoría de los espacios de Banach se remonta al siglo XX y comienza con la investigación de Norbert Wiener y Hans Hahn para luego ser continuada y culminada por Stefan Banach entre los años 1920 y 1922, aunque aún en esa época no se les habia atribuido ese nombre y sólo se referian a los mismos como espacios lineales normados completos, dichos espacios en al actualidad poseen una posición de gran importancia en la teoría del análisis funcional y en muchos otros campos de las matemáticas.

Por otro lado, en el caso de la propiedad de Schur, la misma fue establecida por Issai Schur en el año 1921 para el espacio de sucesiones ℓ_1, luego se descubrió que también se cumplía para otros espacios de Banach.

La finalidad de ésta investigación es demostrar de una manera clara y sencilla algunas propiedades topológicas de los espacios de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, ℓ_∞ y c_0, entre esas propiedades están la completitud, la separabilidad y responder interrogantes como ¿la convergencia débil de sucesiones en ℓ_1, implica la convergencia en norma?, (propiedad de Schur) así como ¿bajo que condiciones un espacio de Banach contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1?.

Índice general

1 Preliminares

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1. Un **espacio vectorial** sobre el campo $\mathbb{C}$ es un conjunto no vacío X de elementos $x,\ y,\ ...$ (llamados vectores) con dos operaciones algebraicas, llamadas adición vectorial y multiplicación de vectores por escalar, y que verifican las siguientes propiedades:

p.1 Para todo $x \in X : x + y = y + x$.

p.2 Para todo $x,\ y,\ z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$.

p.3 Existe un único $0 \in X$ tal que $x + 0 = 0 + x,$ para todo $x \in X$.

p.4 Para todo $x \in X,$ existe $-x \in X : x + (-x) = 0$.

p.5 Para todo $x \in X,$ para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C} : \alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.

p.6 Para todo $x \in X,\ 1.x = x$ (1 es la identidad de $\mathbb{C}$).

p.7 Para todo $x \in X,$ para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C} : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.

p.8 Para todo $x,\ y \in X,$ para todo $\alpha \in \mathbb{C} : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Definición 1.2. Un **subespacio** de un espacio vectorial X es un subconjunto no vacío Y de X tal que para todo $y_1,\ y_2 \in Y$ y todos los escalares $\alpha,\ \beta$ se tiene que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. De aquí, Y es en sí mismo un espacio vectorial.

Definición 1.3. Un **espacio normado** X es un espacio vectorial con una norma definida sobre el mismo, donde una **norma** es una función a valores reales sobre X cuyo valor sobre un $x \in X$ está denotado por $\|x\|$ y el cual tiene las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 1.4. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X, que es, una función real definida sobre $X \times X$ tal que para cualesquiera $x,\ y \in X$ se verifica que:

1. $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Observación 1.1. Una norma define una métrica d sobre X la cual está dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ con $x,\ y \in X$, llamada la métrica inducida por la norma.

Definición 1.5. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) se dice que converge si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0,$$

si esto ocurre x es el límite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y escribiremos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ o bien } x_n \to x \text{ cuando } n \to \infty,$$

lo que equivale a decir que para todo $r > 0$, existe $N \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, r)$, para todo $n > N$, donde $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Definición 1.6. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es una **sucesión de Cauchy** si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $m, n > N$.

Teorema 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces, una sucesión convergente en X es acotada.

Teorema 1.2. Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.

Definición 1.7. Un espacio métrico (X, d) es un **espacio completo** si toda sucesión de Cauchy converge en él, esto es, tiene un límite el cual es un elemento de X.

Definición 1.8. Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo (completo bajo la métrica inducida por la norma).

Existen resultados de gran importacia para nuestro trabajo como:

Teorema 1.3 (Subespacio Completo)**.** Un subespacio M de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si M es cerrado en X.

A continuación definamos algunos conceptos y enunciemos un teorema que necesitaremos más adelante.

Definición 1.9. Un conjunto M es **numerable** si es finito o si podemos asociar enteros positivos con los elementos de M de forma tal que para cada elemento de M le corresponda un único entero positivo y recíprocamente, para cada entero positivo $1, 2, 3...$ le corresponda un único elemento de M.

Definición 1.10. Sea M un subconjunto de un espacio métrico X, entonces un punto $x_0 \in X$ (el cual puede ser o no ser un punto de M) es llamado un **punto de acumulación** de M (o punto límite de M) si toda vecindad de x_0 contiene al menos un punto $y \in M$ distinto de x_0.

Definición 1.11. Un subconjunto M de un espacio métrico X se denomina **conjunto denso** si $\overline{M} = X$ donde $\overline{M}$ es la clausura de M y consiste de los puntos que están en M y los puntos de acumulación de M.

Definición 1.12. Un espacio X se dice que es un **espacio separable** si posee algún subconjunto numerable, el cual es denso en X.

Teorema 1.4. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) y $\overline{M}$ su clausura. Entonces:

(a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en M tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

(b) M es cerrado si y sólo si $x_n \in M$ con $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ implica que $x \in M$.

Por otro lado, estudiemos algunos aspectos básicos de teoría de operadores.

Definición 1.13. Sean X, Y espacios vectoriales. Un **operador lineal** $T : \mathfrak{D}(T) \subset X \to Y$ es un operador tal que para cualquier par $x,\ y \in \mathfrak{D}(T)$ y escalares α en el campo se verifica que:

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{y} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Definición 1.14. Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : \mathfrak{D}(T) \subset X \to Y$ es un **operador lineal acotado** si existe $k > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$.

Teorema 1.5. Sean $T : \mathfrak{D}(T) \subset X \to Y$ un operador lineal, X, Y espacios normados, entonces, T es continuo si y sólo si T es acotado.

Demostración.

En primer lugar, supongamos que T es continuo sobre un $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ arbitrario. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$\|T(x) - T(x_0)\| \leq \epsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{D}(T) \text{ que satisface } \|x - x_0\| \leq \delta. \quad (1.1)$$

Tomemos cualquier $y \neq 0$ en $\mathfrak{D}(T)$ hacemos $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$, entonces,

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y.$$

De aquí, $\|x - x_0\| = \delta$, así haciendo uso de (1.1) y la linealidad de T, se tiene que

$$\epsilon \geq \|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|T(y)\|.$$

Luego,

$$\|T(y)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|.$$

Dado que esto se cumple para todo $y \in \mathfrak{D}(T)$ distinto de cero, T es acotado.

Por otro lado, para $T \cong 0$ la proposición es trivial. Sea $T \ncong 0$, entonces, $\|T\| \neq 0$. Supongamos que T es acotado y consideremos cualquier $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$. Sea cualquier $\epsilon > 0$, entonces, dado que T es lineal, para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{donde} \quad \delta = \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

se obtiene que,

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \epsilon.$$

Dado que $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ fué arbitrario, esto demuestra que T es continuo. ■

Teorema 1.6. (**Banach-Steinhaus**) Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : X \to Y$ de un espacio de Banach X en un espacio normado Y tal que $(\|T_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotado para todo $x \in X$, digamos, $\|T_n x\| \leq c_x,\ n = 1, 2, 3...$, donde c_x es un número real positivo. Entonces, la sucesión de las normas $\|T_n\|$ está acotada, esto es, existe un c tal que
$\|T_n\| \leq c,\ n = 1, 2, ...$.

Los siguientes conceptos darán lugar a conocer resultados importantes para nuestro estudio.

Definición 1.15. Una **topología** τ es una colección de subconjuntos abiertos de X que verifican que:

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$.

(iii) Si $A \in \tau$ entonces $\bigcup A \in \tau$.

Definición 1.16. Un **espacio topológico** es el par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X.

Definición 1.17. Sea T una aplicación de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, se dice que T es una **aplicación abierta** T si la imagen de conjuntos abiertos de X son conjuntos abiertos de Y.

Teorema 1.7. (**Teorema de la Aplicación Abierta**) Sean X e Y espacios de Banach y T un operador lineal acotado. Si T es sobreyectivo, entonces, T es una aplicación abierta.

Lema 1.1. *Sea T un operador lineal de un espacio de normado X en un espacio normado Y. Si T es una aplicación abierta, entonces, existe $\delta > 0$ tal que, $\delta B_Y \subset T(B_X)$, donde $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.*

Definición 1.18. Un **funcional lineal** f es un operador con dominio en un espacio vectorial X y rango en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.19. Sea X un espacio normado. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineales acotados constituyen un espacio normado con norma dada por,

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \quad \text{con } x \neq 0.$$

Éste conjunto es denominado el **espacio dual** de X y se denota por X^*.

Observación 1.2. La colección X^* de funcionales lineales continuos sobre X puede ser identificada con la colección de funciones a valores reales, lineales, continuos y acotados sobre B_X.

Teorema 1.8. Sea X un espacio normado y sea $x_0 \neq 0$ cualquier elemento de X. Entonces, existe un funcional lineal acotado $\widetilde{f}$ sobre X tal que,

$$\|\widetilde{f}\| = 1 \quad \text{y} \quad \widetilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Corolario 1.1. *Para todo x en un espacio normado X se tiene que,*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \quad \text{con } f \neq 0.$$

Ahora, definamos diversos conceptos los cuales resultaran una base fundamental para la teoría que desarrollaremos.

Definición 1.20. Dada una colección $\mathfrak{F}$ de funciones de un conjunto X a un espacio topológico Y. La topología sobre X para la cual toda función de $\mathfrak{F}$ es continua es llamada **topología débil**.

Definición 1.21. Una sucesión $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ en X se dice que **converge en norma** si existe un $x \in X$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que para $n > N$ se verifica que $\|x_n - x\| < \epsilon$.

En tal caso se denotará por:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \to x \text{ cuando } n \to \infty.$$

Definición 1.22. Una sucesión $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ en un espacio normado X se dice que **converge débilmente** si existe un $x \in X$ tal que para cualquier $f \in X^*$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{ó} \quad x_n \xrightarrow{w} x \text{ cuando } n \to \infty.$$

Definición 1.23. Sea X un espacio vectorial normado y sea $(e_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ una sucesión no nula en X. Se dice que $(e_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ es una **base de Schauder** de X si, para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ llamada las coordenadas de x, tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

donde la serie converge en norma a x.

Definición 1.24. Decimos que $(x_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ es una **sucesión básica** de un espacio normado X si $(x_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ es una base para su subespacio generado lineal cerrado, a dicho subespacio lo denotamos por $[x_i]$ ó $\overline{span}(x_i)$ y donde

$$span\{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 1.25. Dos sucesiones básicas $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ (posiblemente en diferentes espacios) se denominan **bases equivalentes** si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ convergen o divergen al mismo tiempo. De manera similar , $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ son equivalentes si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que,

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|_Y \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_X \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|_Y .$$

Definición 1.26. Un **isomorfismo** entre dos espacios normados X e Y es una aplicación lineal T de X sobre Y, la cual es biyectiva, continua, con inversa continua. Además X e Y son llamados espacios normados **isomorfos**.

Definición 1.27. Una **isometría** de un espacio normado X a un espacio normado Y es una aplicación $T : X \to Y$ que preserva norma, esto es, $\|Tx - Ty\|_Y = \|x - y\|_X$ para cualquier par $x, y \in X$. Si dicha aplicación T es lineal, entonces sólo se necesita que verifique que $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ para cualquier $x \in X$. Además, si existe una isometría biyectiva $T : X \to Y$ diremos que los espacios normados X e Y son **isométricos**.

Definición 1.28. Sea X un espacio vectorial. Una aplicación lineal $P : X \to X$ es llamada una **proyección** sobre un subespacio Y de X si $P(X) = Y$ y $P(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Definición 1.29. Un subespacio Y de un espacio de Banach X es **complementado** en X si existe una proyección lineal acotada de X sobre Y. Equivalentemente, dado un subespacio cerrado M de un espacio lineal normado Z, diremos que M es complementado en Z si existe otro subespacio cerrado tal que $Z = M \oplus N$.

2

Algunos espacios de Banach clásicos, ℓ_∞, c_0, y , ℓ_p con $1 \leq p < \infty$

En primer lugar, como objetivo inicial de esta investigación queremos demostrar que c_0, ℓ_∞ y ℓ_p, para cada $1 \leq p < \infty$ son espacios de Banach, pero para ello debemos demostrar que dichos espacios son por definición, espacios normados completos bajo la métrica inducida por la norma.

2.1. ℓ_∞ es un espacio de Banach.

2.1.1. ℓ_∞ es un espacio vectorial.

Definamos el espacio de sucesiones ℓ_∞ como

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C},\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y $\beta \in \mathbb{C}$. ℓ_∞ es un espacio vectorial con las operaciones algebraicas definidas como

$$(x_1,\ x_2,\ ...) + (y_1,\ y_2,\ ...) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...) \quad \text{y}$$

$$\beta(x_1,\ x_2,\ ...) = (\beta x_1,\ \beta x_2,\ ...).$$

Las cuales son la suma y la multiplicación por escalar respectivamente.

En efecto, note que $\ell_\infty \neq \emptyset$, puesto que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ está acotada.

Ahora bien, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$, entonces, $\sup_n |x_n| < \infty$ y $\sup_n |y_n| < \infty$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ (fijo arbitrario)

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n| < \infty.$$

De aquí,

$$\sup_n |x_n + y_n| < \infty.$$

Así, ℓ_∞ es cerrado bajo la suma.

Por otro lado, consideremos, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ (fijo arbitrario),

$$|\alpha x_n| = |\alpha||x_n| \leq |\alpha| \sup_n |x_n| < \infty.$$

En consecuencia,

$$\sup_n |\alpha x_n| < \infty.$$

Por tanto, ℓ_∞ es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

A continuación, verifiquemos otra serie de propiedades que se deben cumplir para que ℓ_∞ sea un espacio vectorial:

Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

1. La conmutatividad del cuerpo $\mathbb{C}$ nos permite lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x_1,\ x_2,\ ...) + (y_1,\ y_2,\ ...) &= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...) \\ &= (y_1 + x_1,\ y_2 + x_2,\ ...) \\ &= (y_1,\ y_2,\ ...) + (x_1,\ x_2,\ ...). \end{aligned}$$

   Así, para todo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ se verifica la propiedad conmutativa en ℓ_∞, esto es,

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} + (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

2. El cuerpo de los números complejos cumple con la propiedad asociativa

lo que nos garantiza que:

$$\begin{aligned}((x_1,\ x_2,\ ...)+(y_1,\ y_2,\ ...))+(z_1,\ z_2,\ ...) &= (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...)+(z_1,\ z_2,\ ...)\\ &= (x_1+y_1+z_1,\ x_2+y_2+z_2,\ ...)\\ &= (x_1+(y_1+z_1),\ x_2+(y_2+z_2),\ ...)\\ &= (x_1,\ x_2,\ ...)+(y_1+z_1,\ y_2+z_2,\ ...)\\ &= (x_1,\ x_2,\ ...)+((y_1,\ y_2,\ ...)+(z_1,\ z_2,\ ...)).\end{aligned}$$

Así, para todo $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}},\ (y_n)_{n;\in\,\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ se tiene que se verifica la asociatividad en ℓ_∞, es decir,

$$((x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}+(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}})+(z_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}+((y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}+(z_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}).$$

3. Además,

$$\begin{aligned}(x_1,\ x_2,\ ...) &= (x_1,\ x_2,\ ...)+(0,\ 0,\ ...)\\ &= ((x_1,\ x_2,\ ...)).\end{aligned}$$

Por tanto, existe $(0,\ 0,\ ...) \in \ell_\infty$ tal que, para todo $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$., se cumple que :

$$(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\ +\ (0)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

4. Por último para la suma se verifica que:

$$\begin{aligned}(x_1,\ x_2,\ ...)+(-x_1,\ -x_2,\ ...) &= (x_1+(-x_1),\ x_2+(-x_2),\ ...)\\ &= (0,\ 0,\ ...).\end{aligned}$$

De acá, para cualesquiera $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, existe $(-x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ tal que, se verifica que :

$$(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\ +\ (-x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (0)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

5. Ahora bien, para la multiplicación por escalar se tiene que:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(x_1,\ x_2,\ ...)) &= \alpha(\beta x_1,\ \beta x_2,\ ...)\\ &= (\alpha\beta x_1,\ \alpha\beta x_2,\ ...)\\ &= (\alpha\beta)(x_1,\ x_2,\ ...).\end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y para cualesquiera $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que :

$$\alpha(\beta x_n) = (\alpha\beta)(x_n) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

6. Consideremos la identidad de $\mathbb{C}$. Ahora,

$$\begin{aligned}1.(x_1,\ x_2,\ ...) &= (1.x_1,\ 1.x_2,\ ...)\\ &= (x_1, x_2, ...).\end{aligned}$$

Luego, para cualquier $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$,

$$1.(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

7. Además,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(x_1,\ x_2,\ ...) &= ((\alpha+\beta)x_1,\ (\alpha+\beta)x_2,\ ...)\\ &= (\alpha x_1+\beta x_1,\ \alpha x_2+\beta x_2,\ ...)\\ &= (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...)+(\beta x_1,\ \beta x_2,\ ...)\\ &= \alpha(x_1,\ x_2,\ ...)+\beta(x_1,\ x_2,\ ...).\end{aligned}$$

Así, para cada $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y para cada $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha+\beta)(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \alpha(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}+\beta(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

8. Por último para la multiplicación por escalar y la suma,

$$\begin{aligned}
\alpha((x_1,\ x_2,\ ...)+(y_1,\ y_2,\ ...)) &= \alpha(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...)\\
&= (\alpha(x_1+y_1),\ \alpha(x_2+y_2),\ ...)\\
&= (\alpha x_1+\alpha y_1),\ \alpha x_2+\alpha y_2),\ ...)\\
&= (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...)+(\alpha y_1,\ \alpha y_2,\ ...)\\
&= \alpha(x_1,\ x_2,\ ...)+\alpha(y_1,\ y_2,\ ...).
\end{aligned}$$

   En consecuencia, para cualquier $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(x_n+y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \alpha(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} + \alpha(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

En conclusión, dado que ℓ_∞ es no vacio, cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar y además cumple las ocho propiedades demostradas anteriormente, entonces, ℓ_∞ es un espacio vectorial. ■

2.1.2. ℓ_∞ es un espacio normado.

La métrica sobre ℓ_∞, se define como

$$d(x,y) = \sup_j |x_j - y_j|,$$

donde $x=(x_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}}$ y $y=(y_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}}$ son sucesiones en ℓ_∞.

Verifiquemos que éste espacio es normado con la norma definida por:

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty \quad \text{donde } x=(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty. \tag{2.1}$$

En efecto, sean $x,\ y \in \ell_\infty$ donde, $x=(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ y $y=(y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$.

1. En primer lugar, como $|x_n| \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces, para cualquier $x=(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$,

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \geq 0.$$

2. Además,

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_n |x_n| = 0. \\ &\Leftrightarrow \quad |x_n| \leq 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \\ &\Leftrightarrow \quad x_n = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \\ &\Leftrightarrow \quad x = (0)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $x \in \ell_\infty$,

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = (0)_{n \in \mathbb{N}}.$$

3. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces,

$$|\alpha| \|x\|_\infty = |\alpha| \sup_n |x_n| = \sup_n |\alpha||x_n| = \sup_n |\alpha x_n| = \|\alpha x\|_\infty.$$

Así, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in \ell_\infty$,

$$|\alpha| \|x\|_\infty = \|\alpha x\|_\infty.$$

4. Por último,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \sup_n |x_n + y_n| \\ &\leq \sup_n (|x_n| + |y_n|) \\ &\leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $x,\ y \in \ell_\infty$,

$$\|x + y\|_\infty \ \leq \ \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Así, ℓ_∞ es un espacio vectorial normado con la norma definida en (2.1). ■

2.1.3. ℓ_∞ es un espacio completo.

Sea $(x_m)_{m\,\in\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_∞, donde $x_m = (x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \cdots)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$, tal que, para $m, n > N$, se tiene que

$$d(x_n, x_m) = \sup_j |x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| < \epsilon.$$

Note que para cada $j \in \mathbb{N}$ fijo

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| < \epsilon \text{ con } m, n > N. \tag{2.2}$$

De aquí, para cada j fijo, la sucesión $(x_j^{(1)},\ x_j^{(2)},\ \cdots)$ es de Cauchy. Ahora bien, como $(x_j^{(m)})_{m\,\in\,\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ es completo, entonces, $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge, digamos, $x_j^{(m)} \to x_j$ cuando $m \to \infty$.

Si usamos estos límites infinitos $x_1,\ x_2,\ \cdots$ podemos definir $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots)$ y demostrar que $x_m \to x$ con $x \in \ell_\infty$.

Notemos que en (2.2) cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$|x_j^{(m)} - x_j| < \epsilon \;\text{ con }\; m > N. \tag{2.3}$$

Luego, como $x_m = (x_j^{(m)})_{j\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ existe un número k_m tal que $|x_j^{(m)}| \leq k_m$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Así, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x_j| = |x_j - x_j^{(m)} + x_j^{(m)}| &\leq |x_j - x_j^{(m)}| + |x_j^{(m)}| \\ &< \epsilon + k_m. \end{aligned}$$

Por tanto, $(x_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}}$ está acotada (pues $\epsilon + k_m$ no depende de j). En consecuencia, $x = (x_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$.

Por otro lado, de (2.3), como ϵ es cota superior de $\{|x_j^{(m)} - x_j| : j \in \mathbb{N}\}$ entonces,

$$d(x_m, x) = \sup_j |x_j^{(m)} - x_j| < \epsilon \;\text{ para }\; m > N,$$

esto es, $x_m \to x$.

Por tanto, como $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy arbitraria, entonces, ℓ_∞ es completo.

Así, al ser un espacio vectorial normado completo con la métrica inducida por la norma, entonces, ℓ_∞ es un espacio de Banach. ■

2.2. ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio de Banach.

2.2.1. ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio vectorial.

Definamos el espacio de sucesiones ℓ_p como

$$\ell_p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}.$$

Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$ para $1 \leq p < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ es un espacio vectorial con las operaciones algebraicas definidas como:

$$(x_1,\ x_2,\ ...) + (y_1,\ y_2,\ ...) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...) \quad \text{y}$$

$$\alpha(x_1,\ x_2,\ ...) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...).$$

Las cuales son la suma y la multiplicación por escalar respectivamente.

En efecto, como la sucesión nula converge módulo p, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} |(0)_n|^p < \infty$, entonces $\ell_p \neq \emptyset$, con$1 \leq p < \infty$.

Ahora bien, usando la desigualdad de Minkowski, la cual se define como

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &= \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\ &\leq \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Así, ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es cerrado bajo la adición.

Por otro lado, para $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha|^p |x_n|^p) < \infty.$$

En consecuencia, ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar. De manera análoga al caso de ℓ_∞ se demuestran el resto de las propiedades para que este espacio sea vectorial. ■

2.2.2. ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio normado.

La métrica sobre ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ se define como

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en ℓ_p con $1 \leq p < \infty$.

Para ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ definimos,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para todo } x \in \ell_p (1 \leq p < \infty). \tag{2.4}$$

Sean x, $y \in \ell_p$, donde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora bien,

1. Como $|x_n| \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

2. Además,

$$\begin{aligned}
\|x\|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0. \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0. \\
&\Leftrightarrow \quad |x_n|^p = 0 \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \\
&\Leftrightarrow \quad |x_n| = 0 \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \\
&\Leftrightarrow \quad x_n = 0 \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \\
&\Leftrightarrow \quad x = (0)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para cualquier $x \in \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene que,

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\begin{aligned}
|\alpha|\|x\|_p &= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\alpha|^p (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\alpha x\|_p.
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $x \in \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se verifica que:

$$|\alpha|\|x\|_p = \|\alpha x\|_p.$$

4. Hacemos uso de la desigualdad de Minkowski para verificar que se cumple la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

Así, para cada $x \in \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$, se cumple que,

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Por consiguiente, ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio vectorial con la norma definida para ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ en (2.4). ■

2.2.3. ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio completo.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, donde $x_n = (x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,\ m > N$

$$d(x_n, x_m) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Observemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$ se obtiene que,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Fijando j se obtiene de (2.6) que $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy sobre el campo, el cual es completo, por lo tanto converge, digamos $x_j^{(n)} \to x_j$ cuando $n \to \infty$. Usando estos límites, definamos $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots)$. Veamos que $x \in \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$ y que $x_n \to x$.

Si en (2.5) elevamos la desigualdad a la $p \geq 1$ se tiene que para $m,\ n > N$:

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p, \quad \text{con } k = 1,\ 2,\ \cdots .$$

Ahora cuando $m \to \infty$ para $n > N$, $\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$, haciendo $k \to \infty$, para $n > N$, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$. De acá,

$$x_n - x = (x_j^{(n)} - x_j) \in \ell_p.$$

Ahora bien, por la desigualdad de Minkowski $x = x_n + (x - x_n) \in \ell_p$. Además,

$$d(x_n, x)^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p.$$

Así, $x_n \to x$. Por consiguiente, ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es completo.

Por tanto, ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es un espacio de Banach. ■

2.3. c_0 es un espacio de Banach.

2.3.1. c_0 es un espacio vectorial.

Sea

$$c_0 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

Sean $(y_n)_{n \in \mathbb{N}},\ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ y $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. c_0 es un subespacio vectorial de ℓ_∞ con las operaciones algebraicas definidas como en ℓ_∞.

En efecto,dado que la sucesión nula converge a cero, entonces, $c_0 \neq \emptyset$.

Ahora bien, dado que $y_n,\ z_n \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda y_n + \mu z_n = \lim_{n\to\infty} \lambda y_n + \lim_{n\to\infty} \mu z_n = \lambda \lim_{n\to\infty} y_n + \mu \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Así, para cualquier par de sucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y cualquier par de escalares $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$ se tiene que,

$$\lambda(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Además $c_0 \subset \ell_\infty$. En consecuencia, c_0 es un subespacio de ℓ_∞.

■

2.3.2. c_0 es un espacio normado.

Como c_0 es un subespacio de ℓ_∞, entonces, c_0 es un espacio normado con la norma inducida desde ℓ_∞. Por lo tanto, c_0 es un espacio normado. ■

2.3.3. c_0 es un espacio completo.

Para demostrar que c_0 es completo consideremos la métrica inducida desde ℓ_∞ por ser c_0 es subespacio de ℓ_∞.

Demostremos que c_0 es subespacio cerrado de ℓ_∞ y como ℓ_∞ es completo, entonces por el teorema 1.3 concluiremos que c_0 es completo. Para ello demostremos que $c_0 = \overline{c_0}$.

Sabemos que $c_0 \subset \overline{c_0}$, demostremos que $\overline{c_0} \subset c_0$. En efecto, sea $x = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \overline{c_0}$, entonces por teorema 1.4) existe $x_n = (\alpha_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y cualquier j, se tiene que:

$$|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \leq \sup_j |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| = d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Luego, como $x_N \in c_0$ sus términos forman una sucesión convergente a cero y por consiguiente el teorema 1.2 nos garantiza que es una sucesión de Cauchy. De acá, para el $\epsilon > 0$ dado, existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_j^{(N)} - \alpha_k^{(N)}| < \frac{\epsilon}{3}$, para cualesquiera $j, k \geq N_1$ y $|\alpha_j^{(N)}| < \frac{\epsilon}{3}$, para cualquier $j \geq N_2$.

Tomando $N_0 = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se tiene que para $j, k \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
|\alpha_j| &\leq |\alpha_j - \alpha_j^{(N)}| + |\alpha_j^{(N)} - \alpha_k^{(N)}| + |\alpha_k^{(N)}| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

De aquí, $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $\alpha_j \in \mathbb{C}$ es convergente a cero. En consecuencia, $x \in c_0$. Luego, como $x \in \overline{c_0}$ fue arbitrario, entonces c_0 es cerrado en ℓ_∞ . Por lo tanto, c_0 es completo en virtud del teorema 1.3. ■

3 Separabilidad de algunos espacios de Banach $\ell_p,\ (1 \le p < \infty)$, ℓ_∞ y c_0

En el capítulo anterior se demostró que $\ell_p,\ (1 \le p < \infty),\ \ell_\infty$ y c_0 son espacios vectoriales normados completos y por tanto *espacios de Banach*, procederemos a estudiar la separabilidad de dichos espacios.

3.1. Separabilidad de $\ell_p,\ (1 \le p < \infty)$.

Teorema 3.1. ℓ_p, para $1 \le p < \infty$ es separable.

Demostración.

Sea M el conjunto de todas las sucesiones "y" de la forma $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$, donde n es cualquier número entero positivo y los y_n son números racionales para todo n, es decir,

$$M = \{y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ 0,\ 0,\ \cdots) : y_n \in \mathbb{Q},\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que, por la forma en que está definido el conjunto M, es un subconjunto numerable de ℓ_p, con $1 \le p < \infty$.

Ahora bien, demostremos que M es denso en ℓ_p. Sea, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$ (fijo pero arbitrario), entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $n = n(\epsilon)$ tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}. \tag{3.1}$$

(por ser el resto de una serie convergente).

Por otra parte, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, se tiene que para cada x_i existe $y_i \in \mathbb{Q}$ tal que podemos encontrar $y \in M$ que satisfaga

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}. \tag{3.2}$$

Luego, de (3.1) y (3.2),

$$[d(x,y)]^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p.$$

Así, $d(x,y) < \epsilon$, es decir, para todo $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap M \neq \emptyset$, pues $y \in M$ y $y \in B(x,\epsilon)$. De aquí, $y \in \overline{M}$, en consecuencia, M es denso en ℓ_p.

Por tanto, dado que M es un subconjunto numerable de $\ell_p,$ con $1 \leq p < \infty$ que es denso en $\ell_p,$ con $1 \leq p < \infty$, entonces, ℓ_p es separable para $1 \leq p < \infty$.

■

3.2. No separabilidad de ℓ_∞.

Teorema 3.2. ℓ_∞ no es separable.

Demostración.

Sea $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots)$ una sucesión formada por ceros y unos, es decir,

$$Y = \{y = (y_n)_{n \,\in\, \mathbb{N}} \ \text{ sucesión formada por ceros y unos}\}.$$

Observemos que $y \in \ell_\infty$, por consiguiente, $Y \subset \ell_\infty$.

A cada y le asociamos el número real $\hat{y} \in [0,1]$ cuya representación binaria viene dada por :

$$\frac{y_1}{2^1} + \frac{y_2}{2^2} + \cdots + \frac{y_n}{2^n} + \cdots .$$

Ahora bien, como el conjunto de puntos en el intervalo $[0,1]$ es no numerable, cada $\hat{y} \in [0,1]$ tiene una representación binaria y los diferentes $\hat{y}'s$ tienen distintas representaciones binarias, entonces, existen incontables sucesiones de ceros y unos. En consecuencia, el conjunto Y es no numerable.

Por otro lado, recordando que la métrica sobre ℓ_∞ es

$$d_\infty(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|,$$

donde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces, para $x,\ y \in Y$ tal que $x \neq y$ se tiene que $d_\infty(x, y) = 1$. Si consideramos cada una de esas sucesiones el centro de una bola pequeña, digamos de radio 1/3 se tiene que esas bolas no se intersectan, las cuales son no contables (puesto que $\{B(y, \frac{1}{3}) : y \in Y\} \subset Y$). De aquí, $\{B(y, \frac{1}{3}) : y \in Y\}$ es una familia no numerable de conjuntos disjuntos.

Ahora, si $\mathcal{D}$ es cualquier conjunto denso en ℓ_∞, entonces cada una de las bolas disjuntas debe contener un elemento de $\mathcal{D}$, pero como hay un conjunto no numerable de bolas también debe haber un conjunto no numerable de elementos de $\mathcal{D}$. De acá, $\mathcal{D}$ no puede ser numerable y dado que $\mathcal{D}$ fue un conjunto denso arbitrario de ℓ_∞, esto demuestra que ℓ_∞ no puede tener subconjuntos densos que sean numerables. Por lo tanto, ℓ_∞ no es separable. ■

3.3. Separabilidad de c_0.

Teorema 3.3. c_0 es separable.

Demostración.

Sea M el conjunto de todas las sucesiones "y" de la forma $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$, donde n es cualquier número entero positivo y los y_n son números racionales para todo n, es decir,

$$M = \{y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ 0,\ 0,\ \cdots) : y_n \in \mathbb{Q},\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que, por la forma en que está definido el conjunto M, es un subconjunto numerable de c_0.

Ahora bien, demostremos que M es denso en c_0. Sea, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ (fijo pero arbitrario), entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que para $n > N$

$$\sup_{i \geq N+1} |x_i| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Por otra parte, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, se tiene que para cada x_i existe $y_i \in \mathbb{Q}$ tal que podemos encontrar $y \in M$ que satisfaga

$$|x_i - y_i| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.4}$$

Luego, de (3.3) y (3.4),

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_i |x_i - y_i| \\ &\leq \sup_{1\leq i\leq N} |x_i - y_i| + \sup_{i\geq N+1} |x_i| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Así, $d(x,y) < \epsilon$, es decir, para todo $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap M \neq \emptyset$, pues $y \in M$ y $y \in B(x,\epsilon)$. De aquí, $y \in \overline{M}$, en consecuencia, M es denso en c_0.

Por tanto, dado que M es un subconjunto numerable de c_0 que es denso en c_0, entonces, c_0 es separable. ■

4 Propiedad de Schur

La propiedad de Schur, en general se puede estudiar para algunos espacio de Banach X, en ésta investigación, en particular, sólo nos interesará estudiarla para el espacio de Banach ℓ_1.

En primer lugar estudiaremos el espacio dual de ℓ_1 para obtener propiedades del mismo, para lo cual previamente veamos que una base de Schauder para ℓ_1 es $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, donde la única entrada no nula está en la k-ésima posición. En efecto, dado un elemento, digamos,

$$x = (x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell_1,$$

se tiene que, del hecho que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \right\|_1 = \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i| \to 0.$$

Así, dado que la serie converge en norma a x, entonces, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder para ℓ_1.

4.1. El espacio dual de ℓ_1 es ℓ_∞.

Para demostrar esto es necesario encontrar una biyección lineal isométrica entre $(\ell_1)^*$ y ℓ_∞. Recordemos que,

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\} \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{C} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una suceción acotada}\}. \\
&= \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{C} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que, } \sup_n |x_n| < \infty\}.
\end{aligned}$$

Además $(\ell_1)^* = \{f : \ell_1 \to \mathbb{C} : f \text{ es lineal y acotado}\}$. Sea $x \in \ell_1$; por el procedimiento realizado anteriormente una base de Schauder para ℓ_1 es $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$ la cual es una sucesión que tiene uno en la k-ésima coordenada y ceros en el resto. Luego, para cualquier $x \in \ell_1$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de forma que podemos escribir $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ de manera única.

Consideremos cualquier $f \in (\ell_1)^*$, como f es lineal y acotada, entonces,

$$
\begin{aligned}
f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right) &= f\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(e_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(e_k).
\end{aligned}
$$

Además,

$$|f(e_k)| \leq \|f\|_{(\ell_1)^*} \|e_k\|_{\ell_1} = \|f\|_{(\ell_1)^*}, \quad \text{pues, } \|e_k\|_{\ell_1} = 1$$

y como $\|f\|_{(\ell_1)^*}$ es cota superior de $\{|f(e_k)| : k \in \mathbb{N}\}$, entonces,

$$\sup_k |f(e_k)| \leq \|f\|_{(\ell_1)^*}. \tag{4.1}$$

Así, $(f(e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$.

De aquí, podemos definir una aplicación $T : (\ell_1)^* \to \ell_\infty$ dada por

$$T(f) = (f(e_k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ para todo } f \in (\ell_1)^*.$$

Ahora bien, demostraremos que T es un isomorfismo isométrico, para ello demostraremos que T es una aplicación lineal biyectiva que preserva norma.

T es lineal: Sean $f,\ g \in (\ell_1)^*$ y $\beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\beta T(f)+\gamma\, T(g) = \beta(f(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}}+\gamma\,(g(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}} = ((\beta f+\gamma\, g)(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}} = T(\beta f+\gamma\, g).$$

T es sobreyectiva: Sea $\omega = (\omega_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Definimos $g : \ell_1 \to \mathbb{C}$ dada por
$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$, con $x = (\alpha_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}} \in \ell_1$. Observemos que, g es lineal y acotado. En efecto, sean $y, z \in \ell_1$, dados por $y = (\beta_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}}$; $z = (\delta_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ y $\zeta,\ \eta \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\zeta\, g(y)+\eta\, g(z) = \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\omega_k+\eta \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k\omega_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\zeta\,\beta_k+\eta\,\delta_k)\omega_k = g(\zeta\, y+\eta\, z).$$

De acá, g es lineal.

Por otro lado, sea $y \in \ell_1$, $y = (\beta_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}}$. Luego,

$$|g(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\omega_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k\omega_k| \le \sup_k |\omega_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| = \sup_k |\omega_k| \|y\|_1.$$

De aquí, g es acotado y consecuentemente $g \in (\ell_1)^*$, además como $g(e_k) = \sum_{j\,\in\,\mathbb{N}} \delta_{kj}\omega_j = \omega_k$, entonces $T(g) = (g(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}} = (\omega_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}} = \omega$, esto es, para cualquier $\omega \in \ell_\infty$ existe $g \in \ell_1$ tal que $T(g) = \omega$. Así, T es sobreyectiva.

T es inyectiva: Sean $f_1, f_2 \in (\ell_1)^*$. Si $T(f_1) = T(f_2)$, entonces, $(f_1(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}} = (f_2(e_k))_{k\,\in\,\mathbb{N}}$, esto es, $f_1(e_k) = f_2(e_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, sea $x \in \ell_1$ entonces $f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_1(e_k)$ y $f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_2(e_k)$. Luego,

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_1(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_2(e_k) = f_2(x).$$

Así, $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in \ell_1$. Por lo tanto $f_1 = f_2$, por consiguiente T es inyectiva.

Luego, como T es inyectiva y sobreyectiva entonces T es biyectiva.

T es isometría: Por (4.1),

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_k |f(e_k)| \;\leq\; \|f\|_{(\ell_1)^*}.$$

De acá

$$\|T(f)\|_\infty \;\leq\; \|f\|_{(\ell_1)^*}. \tag{4.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(e_k)\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k f(e_k)| \\ &\leq \sup_k |f(e_k)| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \\ &\leq \sup_k |f(e_k)| \|x\|_{\ell_1} = \|T(f)\|_\infty \|x\|_{\ell_1}. \end{aligned}$$

De aquí, $\|T(f)\|_\infty$ es cota superior de $\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_{\ell_1}} : x \in \ell_1, x \neq 0\right\}$. En consecuencia,

$$\|f\|_{(\ell_1)^*} \;\leq\; \|T(f)\|_\infty \tag{4.3}$$

Por lo tanto, de (4.2) y (4.3) se tiene que, $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_{(\ell_1)^*}$. Así $(\ell_1)^*$ y ℓ_∞ son isométricos y consecuentemente el dual de ℓ_1 es ℓ_∞. ■

4.2. La aplicación canónica es una isometría lineal.

Consideremos un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, su espacio dual X^* y su espacio bidual $X^{**} = \{f : X^* \to \mathbb{C} : f \text{ es lineal y acotado }\}$.

Sabemos que la norma sobre el espacio dual viene dada por:

$$\|f\| = \sup_{x \in X,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Además, la norma definida sobre el espacio bidual se define como

$$\|F\| = \sup_{f \,\in\, X^*} |F(f)| = \sup_{f \,\in\, X^*,\, f \neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|},$$

ahora bien, definimos un funcional J_x sobre X^* seleccionando un $x \in X$ (fijo) y dado por $J_x(f) = f(x)$ (donde $f \in X^*$ es variable). $J_x : X^* \to \mathbb{C}$ *es un funcional lineal acotado (así* $J_x \in X^{**}$*) y tiene norma* $\|J_x\| = \|x\|$. En efecto, sean $f_1, f_2 \in X^*$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y $x \in X$ (fijo) entonces,

$$\begin{aligned} J_x(\alpha_1 f_1 \,+\, \alpha_2 f_2) &= (\alpha_1 f_1 \,+\, \alpha_2 f_2)(x) \\ &= \alpha_1 f_1(x) \,+\, \alpha_2 f_2(x) \\ &= \alpha_1 J_x(f_1) \,+\, \alpha_2 J_x(f_2), \end{aligned}$$

de acá, J_x es lineal; además por corolario (1.1)

$$\|J_x\| = \sup_{f \in X^*,\, f \neq 0} \frac{|J_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in X^*,\, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \tag{4.4}$$

Así, J_x es acotado y además $\|J_x\| = \|x\|$, en consecuencia, $J_x \in X^{**}$.

Aplicación canónica: La aplicación canónica J de X en X^{**} está definida para $x \in X$ por $(J(x))(f) = J_x(f) = f(x)$.

Observemos que, J es una *aplicación lineal.* En efecto, sean $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f \in X^*$, entonces,

$$\begin{aligned} (J(\alpha x + \beta y))(f) &= J_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y); \quad f \in X^* \\ &= \alpha J_x(f) + \beta J_y(f) \\ &= \alpha (J(x))(f) + \beta (J(y))(f). \end{aligned}$$

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que,

$$(J(\alpha x + \beta y))(f) = \alpha (J(x))(f) + \beta (J(y))(f). \tag{4.5}$$

Así, de (4.4) y (4.5), J es una isometría lineal. ∎

4.3. Propiedad de Schur.

Teorema 4.1. En ℓ_1, la convergencia débil de sucesiones ímplica la convergencia en norma.

Antes de probar la propiedad de Schur debemos verificar que *una sucesión débilmente convergente en un espacio normado X es necesariamente acotada en norma.* En efecto, sean X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente, esto es, para cualquier $f \in X^*$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Consideremos la sucesión de funcionales $(J_{x_n})_{n\,\in\,\mathbb{N}} \subset X^{**}$.

Ahora bien, para cada $f \in X^*$ la sucesión $(f(x_n)) = (J_{x_n}(f))$. Luego, como $(f(x_n))$ converge, entonces, $(f(x_n))$ está acotada para cada $n \in \mathbb{N}$, por teorema 1.1.

De aquí, $(J_{x_n}(f))$ está acotada para cada $f \in X^*$, es decir, $(J_{x_n}(f))$ está puntualmente acotada sobre X^*. Ahora, dado que $(J_{x_n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores lineales acotados de un espacio de Banach X^* a un espacio normado $\mathbb{C}$ tal que $(J_{x_n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ está puntualmente acotada sobre X^*, entonces, por el teorema de Banach-Steinhaus (teorema 1.6), $(J_{x_n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ debe ser acotada. En consecuencia,

$$\sup_n \|x_n\| = \sup_n \|J_{x_n}\| < \infty.$$

■

4.3.1. Demostración de la Propiedad de Schur.

Supongamos que $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es una sucesión en ℓ_1, digamos $x_n := (x_n^{(k)})$, tal que $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge débilmente en ℓ_1. Así, $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es acotada y supongamos por absurdo que $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ no converge en norma sobre ℓ_1 , es decir, $\|x_n\|_1 \nrightarrow 0$.

Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, entonces, para todo funcional $f \in (\ell_1)^*$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(0) = 0$.

Se desea encontrar una contradicción, construyendo un funcional $f \in (\ell_1)^* = \ell_\infty$ de forma tal que $f(x_n) \nrightarrow 0$.

Consideremos, las coordenadas funcionales $e_k{}^* : \ell_1 \to \mathbb{R}$ dada por $e_k{}^*(x_n) = x_n^{(k)}$ (donde para evitar el riesgo de confusión se escribe $(x_n)^(k)$ para la k-ésima coordenada de x_n). Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, entonces, $x_n^{(k)} = e_k{}^*\ (x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$., esto es, (x_n) tiende a cero coordenada a coordenada para cada $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando la técnica de deslizamiento encorvado encontraremos que una subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es casi disjunta. En otras palabras, pasando a una subsucesión y reindizando se puede suponer que:

i. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\|x_n\|_1 \geq 5\epsilon > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

ii. Para alguna sucesión de enteros $1 \leq p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < ...$,se tiene que

$$\sum_{i<p_k} |x_k^{(i)}| < \epsilon\ , \ \sum_{i>q_k} |x_k^{(i)}| < \epsilon. \text{ Así, } \sum_{i=p_k}^{q_k} |x_k^{(i)}| \geq 3\epsilon.$$

A continuación definimos $f \in \ell_\infty$ como:

$$f(i) = \begin{cases} sgn\ (x_k\ (i)),\ si\ p_k\ \leq\ i\ \leq\ q_k & \text{para algún k} = 1,\ \ ,2\ ,\ \dots\ ,; \\ 0,\ \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$sgn(x_k(i)) = \begin{cases} 1,\ si\ x_k(i)\ \geq\ 0 & ; \\ -1,\ si\ x_k(i)\ <\ 0. \end{cases}$$

Luego por la definición de f se tiene como consecuencia que $\|f\|_\infty \leq 1$.

Además, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|f(x_k)| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_k^{(i)} f(i)\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=p_k}^{q_k} x_k^{(i)} sgn(x_k^{(i)})\right| \\
&= \left|\sum_{i=p_k}^{q_k} |x_k^{(i)}|\right| \\
&> \sum_{i=p_k}^{q_k} |x_k^{(i)}| - \sum_{i<p_k} |x_k^{(i)}| - \sum_{i>q_k} |x_k^{(i)}| \\
&> 3\epsilon - 2\epsilon = \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Pero éste hecho contradice la convergencia débil de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$. Por lo tanto la convergencia débil de sucesiones en ℓ_1 ímplica la convergencia en norma. ∎

5 Condiciones bajo las cuales un espacio de Banach X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1

Teorema 5.1. Sea X un espacio de Banach. Si existe una aplicación lineal, sobreyectiva, acotada, $T: X \to \ell_1$, entonces X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1.

Demostración.

Supongamos que existe una aplicación $T: X \to \ell_1$, la cual es lineal, sobreyectiva, y acotada, donde X es un espacio de Banach.

Ahora bien, como T es una aplicación lineal, sobreyectiva y acotada de un espacio de banach X en ℓ_1 ,(el cual es otro espacio de Banach), entonces, por el teorema de la aplicación abierta , T es una aplicación abierta. De aquí, existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\ell_1} \subset T(B_X)$ por el lema 1.1.

En consecuencia, se puede encontrar una sucesión acotada, digamos $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X, tal que $T(w_n) = e_n$. En efecto, para $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$, sabemos que $\|e_n\| = 1$, así e_n pertenece a B_{ℓ_1} para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para el $\delta > 0$ obtenido anteriomente y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\delta e_n \in \delta B_{\ell_1} \subset T(B_X) \;&\Rightarrow\; \delta e_n \in T(B_X), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\\
&\Rightarrow\; \text{Existe } x_n \in B_X \text{ tal que } T(x_n) = \delta e_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\\
&\Rightarrow\; \text{Existe } x_n \in B_X \text{ tal que } T\left(\frac{x_n}{\delta}\right) = e_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

LLamando $w_n = \frac{x_n}{\delta}$, se tiene que $T(w_n) = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $\|w_n\| = \left\|\frac{x_n}{\delta}\right\| \leq \frac{1}{\delta}$. De acá, se tiene la existencia de una sucesión acotada $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $T(w_n) = e_n$.

Definamos $Y = \overline{span}(w_i)$, donde $w \in Y$ se escribe de forma única como $w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i$ con$(a_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares.

A continuación, probaremos que $(w_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$. Sea $(a_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Ahora,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|w_n\| \;\leq\; C \;\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \;=\; C \;\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 . \tag{5.1}$$

Además,

$$\|T\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \;\geq\; \left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right)\right\| \;=\; \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(w_n)\right\| \;=\; \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 . \tag{5.2}$$

Así, de (5.1) y (5.2) se tiene que

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \;\leq\; \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 \;\leq\; \|T\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| .$$

Luego, considerando $K \;=\; \text{mín}\{C, \|T\|\}$ entonces,

$$K^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \;\leq\; \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 \;\leq\; K\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| .$$

En consecuencia, $(w_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$. Esto es, la aplicación definida como $S(e_n) \;=\; w_n$ y extendida linealmente sobre todo ℓ_1, es decir, $S : \ell_1 \to X$ dada por,

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i S(e_i)$$

para todo $x \in \ell_1$, donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i)$, es un isomorfismo lineal de ℓ_1 sobre $[w_n]$. En efecto,

S es lineal: Sean $y,\; z \in \ell_1$ y $\lambda,\; \mu \in \mathbb{C}$, entonces, $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ y $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, donde $(b_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ y $(c_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ son sucesiones de escalares. Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda S(y) + \mu S(z) &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} b_i S(e_i) + \mu \sum_{i=1}^{\infty} c_i S(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda b_i S(e_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu c_i S(e_i) \\
&= S(\lambda x) + S(\mu y).
\end{aligned}$$

S es continua, para ello haciendo uso del teorema (3), verifiquemos que S es acotada.

S es acotada: Sea $y \in \ell_1$, entonces, $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$, donde $(b_i)_{i \,\in\, \mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares. Así,

$$\|S(y)\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i S(e_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i w_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \|w_i\| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|_1.$$

S es inyectiva:Sean $y,\ z \in \ell_1$, entonces, $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ y $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, donde $(b_i)_{i \,\in\, \mathbb{N}}$ y $(c_i)_{i \,\in\, \mathbb{N}}$ son sucesiones de escalares. Entonces,

$$\begin{aligned}
S(x) = S(y) &\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} b_i S(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i S(e_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} b_i S(e_i) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i S(e_i) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - c_i) S(e_i) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - c_i) w_i = 0.
\end{aligned}$$

S es sobreyectiva: Sea $w \in [w_n]$. Consideremos $x \in \ell_1$ como $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, donde $(a_i)_{i \,\in\, \mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares. Ahora bien, como S

es lineal y acotada se tiene que

$$\begin{aligned}
S(x)=S\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\right) &= S\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}S\left(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iS(e_i)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iw_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_iw_i\\
&= w
\end{aligned}$$

Luego, dado que S es una aplicación inyectiva y sobreyectiva, entonces, S es una aplicación biyectiva y además $S^{-1}=T|_{[}w_n]$. En efecto, sea $z\in\ell_1$, entonces

$$\begin{aligned}
(T|_{[}w_n]\circ S)(z)=T|_{[}w_n](S(z)) &= T|_{[}w_n]\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_iS(e_i)\right)\\
&= T|_{[}w_n]\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_iw_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_iT|_{[}w_n](w_i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\\
&= z.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $w\in[w_n]$, entonces,

$$\begin{aligned}(S \circ T|_{[}w_n])(w) = S(T|_{[}w_n](w)) &= S\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i T(w_i)\right)\\ &= S\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S(e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i w_i\\ &= w.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S^{-1} = T|_{[}w_n]$ y como T es acotada, entonces, $T|_{[}w_n]$ también lo es, mas aún el teorema (3) nos garantiza la continuidad de $T|_{[}w_n]$, por consiguiente S^{-1} es continua.

Así, S es un isomorfismo de ℓ_1 sobre $[w_n]$.

Ahora bien, ya encontramos un subespacio de X isomorfo a ℓ_1; falta demostrar que dicho espacio es complementado.
Observemos que TS está definida de ℓ_1 en ℓ_1 y además para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$TS(e_n) = T(w_n) = e_n,$$

es decir, TS es la identidad de ℓ_1.

Ahora bien, $ST : X \to X$ es una proyección sobre $[w_n]$.
En efecto, en primer lugar demostremos que ST es lineal

ST **es lineal**. En efecto, sean $w,\ z \in X$ y y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, como T y S son lineales,
entonces,

$$ST(\alpha w + \beta z) = S(\alpha T(w) + \beta T(z)) = \alpha ST(w) + \beta ST(z).$$

$ST(w) = w,$ **para cualquier** $w \in [w_n]$.

Sea $w \in [w_n],$ entonces existe $(x_k)_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ en $span(w_n)$ tal que

$$w = \lim_{k \,\to\, \infty} x_k,$$

donde $x_k = \sum_{j=1}^{k} a_j w_j$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(w) = T\left(\lim_{k \,\to\, \infty} x_k\right) &= \lim_{k \,\to\, \infty} T(x_k) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j T(w_j)\right) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j e_j\right) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} \beta_k, \quad \text{donde } \beta_k \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \end{aligned}$$

De acá, $T(w) \in \overline{span}(e_i)$. Luego,

$$\begin{aligned} ST(w) = S\left(\lim_{k \,\to\, \infty} \beta_k\right) &= \lim_{k \,\to\, \infty} S(\beta_k) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} S\left(\sum_{j=1}^{k} a_j e_j\right) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j S(e_j)\right) \\ &= \lim_{k \,\to\, \infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j w_j\right) = w. \end{aligned}$$

Así, para cualquier $w \in [w_n],$ se verifica que $ST(w) = w.$

$ST(X) = [w_n]$.

Como $[w_n]$ es subconjunto de $X,$ entonces, $ST([w_n])$ es subconjunto de $ST(X)$.

Pero, dado que, $ST(w) = w,$ para cualquier $w \in [w_n]$, entonces se tiene que,

$$[w_n] \subset ST([w_n]) \subset ST(X). \tag{5.3}$$

Por otra parte, sea $z \in ST(X)$, entonces existe $x \in X$, tal que $ST(x) = z$. Ahora bien, si $x \in X$ entonces $T(x) \in \ell_1$.

Luego, como $T(x) \in \ell_1$, entonces,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} z = ST(x) &= S\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i S(e_i)\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i. \end{aligned}$$

Por tanto, $z \in \overline{span}(w_n)$. En consecuencia,

$$ST(X) \subset [w_n]. \tag{5.4}$$

Así, de (5.3) y (5.4), $ST(X) = [w_n]$.

ST **es acotada:** Sea $w \in X$, entonces, como S y T son acotadas

$$\|ST(w)\| \leq \|S\|\|T(w)\| \leq \|S\|\|T\|\|w\|.$$

En conclusión, ST es una proyección acotada de X en X sobre $[w_n]$, por lo cual $[w_n]$ es un subespacio complementado de X isomorfo a ℓ_1. ∎

Bibliografía

[1] Bachman G., Narici L. *Functional Analysis*. Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] N. L. Carothers. *A Short Course on Banach Spaces Theory*. Summer 2000

[3] Conway J. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1990.

[4] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces, Selected Topics* .Lect. Notes Math. 485. Berlin, Heidelberg, New York: Springen 1975.

[5] Marían Fabiam, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jan Pelant, Václav Zizler. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Springer-Verlag, New York. 2001.

[6] Kreyszig Erwin.*Introductory Functional Analysis with Applications*.Universidad de Windsor.1989.

[7] Megginson R. *An Introduction to Banach Spaces Theory*.Springer, Verlag New York. 1998.

[8] Rudin W. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Paris, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.