UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA TEORÍA DE GRAFOS"

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. JANETH DEL CARMEN CAÑIZALEZ ESCOBAR

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: TEORIA DE GRAFOS Y COMBINATORIA.
TUTOR: DRA. ISABEL MÁRQUEZ DE MASTROMARTINO.

Barquisimeto, Venezuela. Junio de 2010

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA TEORÍA DE GRAFOS"

presentado por la ciudadana BR. JANETH DEL CARMEN CAÑIZALEZ ESCOBAR titular de la Cédula de Identidad No. 16.278.934, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ______________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Gracias a DIOS.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a **Dios** nuestro Señor.

RESUMEN

Índice

Índice de figuras

NOTACIONES

G	grafo de orden n
$V(G)$	conjunto de vértices de G
$E(G)$	conjunto de lados de G
$\|A\|$	cardinal del conjunto A
$\|V(G)\|$	orden de G
$\|E(G)\|$	tamaño de G
$m(x,y)$	multiplicidad del par de vértices x , y
$\mathbb{N}$	$\{1,2,...\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup 0 = \{0,1,2,...\}$
$d_G(x)$	grado de x respecto a G
$\delta(G)$	$min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$
$\triangle(G)$	$max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$
N_n	grafo nulo de orden n
K_n	grafo completo de orden n
k-conjunto	conjunto formado por k elementos
$\mathbb{P}(C)_k$	conjunto formado por k-subconjuntos del conjunto C
$K_{m,n}$	grafo bipartito completo
$G[X]$	subgrafo inducido por X
$A(G)$	matriz de adyacencia de G
n-ciclo	ciclo de longitud n
$long(L)$	longitud de la cadena L
I_n	$\{1,2,\ldots,n\}$
S_n	permutaciones en I_n
$P_A(\lambda)$	polinomio característico respecto a la matriz A
$P(G;\lambda)$	polinomio característico de G
$Tr(A)$	traza de la matriz A
$rang(A)$	rango de la matriz A
$det(A)$	determinante de la matriz A

Capítulo 1
PRELIMINARES

En este capítulo presentamos los conceptos básicos de la ***teoría de grafos****, tipos de grafos, subgrafos, cadenas, ciclos, grafos conexos, entre otros, los cuales son necesarios para el desarrollo de los próximos capitulos. También daremos un teorema relacionado a grafos bipartitos, que será de gran utilidad para demostrar teoremas posteriores.*

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE GRAFOS

Definición 1.1.1. Un ***grafo*** G es un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto **no vacío** cuyos elementos llamaremos ***vértices*** y

$$E(G) = \{e = \{x, y\} : x, y \in V(G)\}$$

es un conjunto formado por pares no ordenados de vértices cuyos elementos llamaremos ***lados*** o ***aristas***.
El orden de G y el tamaño de G vienen dados por $|V(G)|$ y $|E(G)|$ respectivamente. Si V(G) y E(G) son conjuntos finitos diremos que G es un grafo finito. En caso contrario diremos que G es infinito.

Observación 1.1.1.

- Por abuso de notación consideraremos a $e = \{x, x\}$ un elemento de E(G) que denominaremos ***lazo***.
- Consideraremos a $e_1 = \{u, v\}, e_2 = \{u, v\}$ elementos distintos de E(G).

- En adelante cuando hablemos de grafos, nos estaremos refiriendo a grafos finitos.
- Los grafos finitos pueden representarse mediante diagramas, formados por puntos que representan a los vértices y líneas que unen a estos puntos, las cuales representan a los lados.
- En un grafo G, sólo cuando sea necesario se le asignará a cada uno de sus vértices un nombre o símbolo para distinguirlo de los demás. En este caso diremos que G es un ***grafo etiquetado***.

Ejemplo 1.1.1.

- $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G) = \{a, b, c\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2\}$ con $e_1 = \{a, c\}$, $e_2 = \{c, b, a\}$, no es un grafo, pues e_2 es una terna y por la Definición 1.1.1 un lado está formado por un par de vértices.
- $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G) = \{a, b, c, d\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con $e_1 = \{a, c\}$, $e_2 = \{c, d\}$, $e_3 = \{d, d\}$, $e_4 = \{a, c\}$, es un grafo de orden 4 y tamaño 4; donde el lado e_3 es un lazo. La Figura 1.1 siguiente es un diagrama que representa dicho grafo etiquetado.

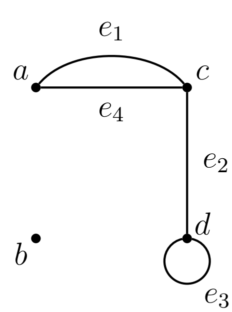

Figura 1.1: Grafo etiquetado

Definición 1.1.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sea $e = \{u, v\} \in E(G)$. Diremos que: e ***incide*** en u y en v, u y v son vértices ***extremos*** de e, u y v son ***adyacentes*** o e ***une*** a u y v.

Si $e_1, e_2 \in E(G)$, diremos que e_1 y e_2 son: **adyacentes** si tienen un extremo en común y ***paralelos*** si los extremos de e_1 y e_2 son iguales.

Ejemplo 1.1.2. En el grafo dado por la Figura 1.1, e_1 incide en a y en c, los lados e_1 y e_2 son adyacentes pues tienen a c como extremo común y los lados e_1 y e_4 son paralelos dado que, $e_1 = \{a, c\}$ y $e_4 = \{a, c\}$.

Definición 1.1.3. Sean G un grafo y $u, v \in V(G)$. Diremos que u es ***vecino*** de v si $u \neq v$, y u es adyacente a v. Denotaremos por $N_G(v)$ al conjunto de los vecinos de v, esto es, $N_G(v) = \{u \in V(G) : u \textit{ es vecino de } v\}$. A este conjunto lo denominaremos ***la vecindad*** de v.

Denominaremos ***vecindad cerrada*** de v, al conjunto $N_G(v) \cup \{v\}$ y lo denotaremos por $N_G[v]$.

Ejemplo 1.1.3. En el grafo dado por la Figura 1.1, tenemos que:

$N_G(a) = \{c\} = N_G(d)$, $N_G(b) = \{\emptyset\}$ y $N_G(c) = \{a, d\}$.

Definición 1.1.4. Sea G un grafo. G es un ***multigrafo*** si éste tiene lados paralelos y no tiene lazos, y G es un ***pseudografo*** si éste tiene al menos un lazo.

Ejemplo 1.1.4. El grafo dado por la Figura 1.1 aunque posee lados paralelos, no es un multigrafo, pues tiene un lazo, por lo que éste es un pseudografo.

Definición 1.1.5. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. La ***multiplicidad*** del par de vértices x, y es el número de lados que tienen por extremos a x e y. La denotaremos por $m(x, y)$.

Observación 1.1.2. Sean $G = (V(G), E(G))$ y $x, y \in V(G)$, tenemos: $m(x, y) \in \mathbb{N}_0$ y $m(x, x) = q$, donde q es el número de veces que está unido el vértice x con él mismo.

Ejemplo 1.1.5.

En el grafo dado por la Figura 1.1, algunas multiplicidades son: $m(a, c) = 2$, $m(d, d) = 1$, $m(b, d) = 0$.

1.1.1. Grafo simple

Definición 1.1.6. Un grafo G es ***simple*** si no posee lazos ni lados paralelos.

Observación 1.1.3. Si $G = (V(G), E(G))$ es un grafo simple, tenemos que:

$$m(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ ó } 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.6. El grafo dado por la Figura 1.1 no es simple, pues e_3 es un lazo y el grafo siguiente dado por la Figura 1.2, es simple.

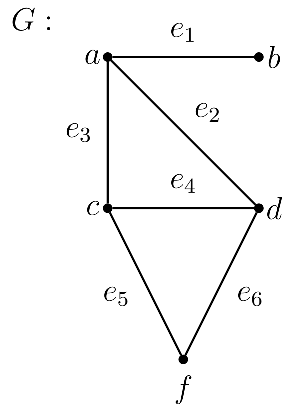

Figura 1.2: Grafo simple

1.1.2. Grado máximo y mínimo de un grafo.

Definición 1.1.7. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. El ***grado*** de un vértice $x \in V(G)$ es el número de lados que inciden en x. Lo denotaremos por $d_G(x)$, donde, $d_G(x) \in \mathbb{N}_0$.
Un lazo es contado dos veces.

Llamaremos $\delta(G) = min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ y $\triangle(G) = max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$

Ejemplo 1.1.7. En el grafo dado por la Figura 1.1, tenemos que: $d_G(a) = 2$, $d_G(b) = 0$, $d_G(c) = 3$, $d_G(d) = 3$. Por lo que, $\delta(G) = 0$ y $\triangle(G) = 3$.

Definición 1.1.8. Sea G un grafo de orden n. Llamaremos ***grado medio*** de G al número

$$\bar{d}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Observación 1.1.4. Sea G un grafo de orden n. Entonces:

(a)

$$\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \triangle(G).$$

En efecto, por definición tenemos que, para todo $v \in V(G)$

$$\delta(G) \leq d_G(v) \leq \triangle(G).$$

Así, $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \leq n\triangle(G)$, de aquí que,

$$\delta(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \leq \triangle(G).$$

(b)

$$\bar{d}(G) = \frac{2|E(G)|}{n}.$$

En efecto, tenemos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$. Luego,

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{2|E(G)|}{n}.$$

Ejemplo 1.1.8. En el grafo dado por la Figura 1.1, tenemos que:

$$\bar{d}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{2+0+3+3}{4} = 2,$$

así, el grado medio de G es igual a 2.

1.2. GRAFOS ISOMORFOS

Definición 1.2.1. Dos grafos $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ son ***isomorfos***, si existe una función biyectiva $f : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$, que preserva adyacencias, es decir, $\{f(x), f(y)\}$ es un lado de G_2, si y sólo si, $\{x, y\}$ es un lado de G_1, y los denotaremos por $G_1 \approx G_2$,

Ejemplo 1.2.1. Los grafos representados por la figura 1.3 son isomorfos dado que existe la función

$$f : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$$

dada por $f(x_i) = y_i,$ para todo $0 \leq i \leq 4$, que preserva incidencias.

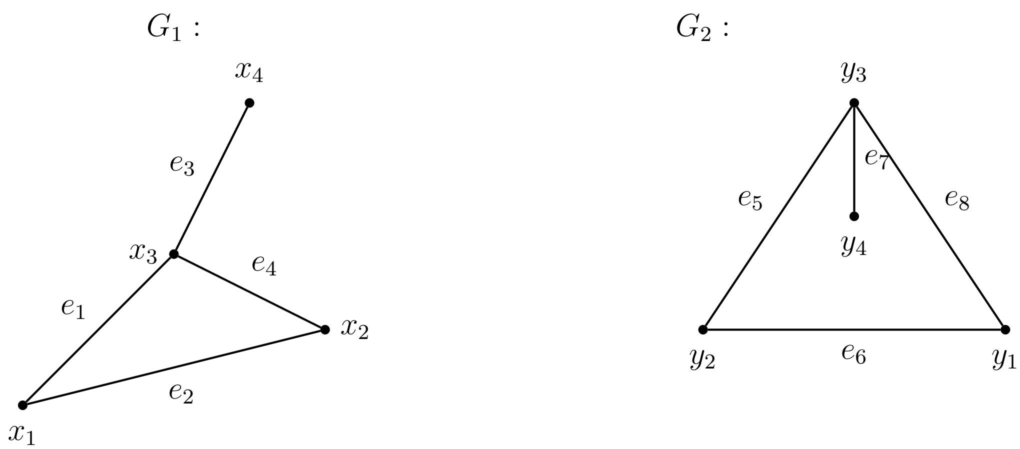

Figura 1.3: Grafos isomorfos

Observación 1.2.1. Al decir, **el grafo** o **los grafos**, no implica que sea la única representación del mismo o los mismos, sino que los demás diagramas existentes de dicho grafo, son isomorfos a el.

1.3. ALGUNOS TIPOS DE GRAFOS

Existen grafos, que se diferencian entre si por el tipo y el número de lados que puedan unir a cada par de vértices, éstos grafos reciben nombres particulares y sirven de base para el estudio de otros grafos. A continuación hablaremos de los grafos: nulos, completos, regulares y bipartitos; los cuales son imprescindibles para el desarrollo de nuestro trabajo.

1.3.1. Grafo nulo

Definición 1.3.1. Un grafo G de orden n es un grafo ***nulo*** si el conjunto de lados es vacío, y lo denotaremos por N_n.

Llamaremos a N_1 **grafo trivial**.

Observación 1.3.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo nulo. Tenemos que:

(a) $m(x, y) = 0$, para todo $x, y \in V(G)$.

(b) $d_G(x) = 0$, para todo $x \in V(G)$.

Ejemplo 1.3.1. El grafo dado por la Figura 1.4 es un N_4.

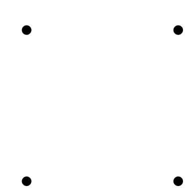

Figura 1.4: Grafo N_4

1.3.2. Grafo completo

Definición 1.3.2. Un grafo simple de orden n, es un grafo ***completo*** si para todo par de vértices en G existe un lado que los une. Denotaremos los grafos completos de orden n, por K_n, para todo $n \geq 1$.

Observación 1.3.2.

(a) Para todo $x, y \in V(K_n)$

$$m(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

(b) Para todo $x \in V(K_n)$, tenemos que, $d_{K_n}(x) = n - 1$.

Ejemplo 1.3.2. El grafo dado por la Figura 1.5 es un K_5.

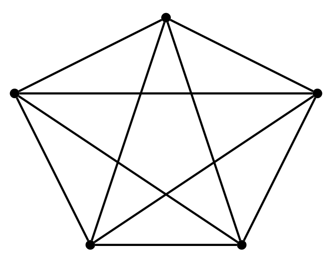

Figura 1.5: Grafo K_5

1.3.3. Grafos regulares

Definición 1.3.3. Diremos que $G = (V(G), E(G))$ es un grafo ***regular*** o ***t-regular*** si para todo $x \in V(G)$, ocurre que $d_G(x) = t$, para algún $t \in \mathbb{N}_0$. En este caso diremos que G es t-regular.

Ejemplo 1.3.3.

- El grafo dado por la Figura 1.2 no es regular, dado que $d_G(b) = 1$ y $d_G(c) = 3$.
- N_n es regular por la Observación 1.3.1(b).
- K_n es regular por la Observación 1.3.2 (b).
- Los siguientes grafos dados por la Figura 1.6 son regulares.

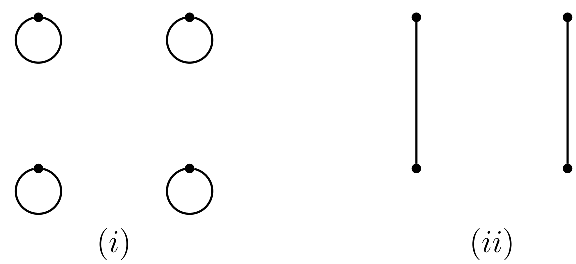

Figura 1.6: Grafos regulares

1.3.4. Grafos bipartitos

Definición 1.3.4. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Diremos que G es un **grafo bipartito** si existe $\{V_1(G), V_2(G)\}$, partición de $V(G)$, tales que $V_1(G)$ y $V_2(G)$ son subconjuntos independientes de $V(G)$.

Denotaremos a G por $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$.

Ejemplo 1.3.4. El grafo dado por la Figura 1.7 es bipartito dado que para $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$, existen subconjuntos $V_1(G) = \{a, b, c\}$ y $V_1(G) = \{d, e, f\}$ independientes de $V(G)$, que son una partición de $V(G)$.

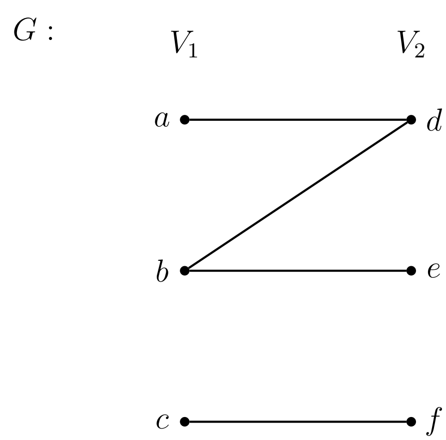

Figura 1.7: Grafo bipartito

Definición 1.3.5. Un grafo bipartito $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ es ***completo*** si para todo $x \in V_1(G)$ e $y \in V_2(G)$ tenemos que $e = \{x, y\} \in E(G)$, Cuando $p = |V_1(G)|$ y $q = |V_2(G)|$, lo denotaremos por $K_{p,q}$.

Ejemplo 1.3.5. El grafo dado por la Figura 1.8 es un $K_{3,2}$.

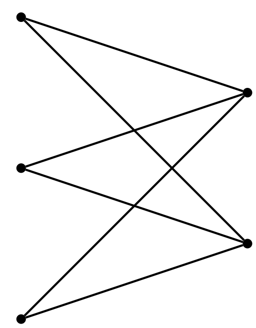

Figura 1.8: Grafo $K_{3,2}$

Definición 1.3.6. Diremos que un grafo bipartito $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ es ***balanceado***, si $|V_1(G)| = |V_2(G)|$.

Ejemplo 1.3.6. El grafo bipartito dado por la Figura 1.7 es balanceado.

1.4. SUBGRAFOS

Definición 1.4.1. Un ***k-conjunto*** es un conjunto formado por k elementos. Para C conjunto definimos

$$\mathbb{P}(C)_k = \{X \subset C : X \text{es un k-subconjunto}\}.$$

Definición 1.4.2. Sea un grafo $G = (V(G), E(G))$.
Diremos que el grafo $H = (V(H), E(H))$ es un:

- ***Subgrafo*** de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G) \cap \mathbb{P}(V(H))_2$.
- ***Subgrafo parcial*** de G si $V(H) = V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.
- ***Subgrafo inducido o generado*** de G si H es subgrafo de G y para cada $x, y \in V(H)$, tal que $\{x, y\} \in E(G)$, se tiene que $\{x, y\} \in E(H)$.

Ejemplo 1.4.1.

- El grafo G_1 dado por la Figura 1.9, es un subgrafo generado del grafo dado por la Figura 1.2, pero no es subgrafo parcial; dado que, $f \in V(G)$ pero, $f \notin V(G_1)$.
- El grafo G_2 dado por la Figura 1.9 no es un subgrafo del grafo dado por la figure 1.2, pues $e_7 \in E(G_2)$ pero $e_7 \notin E(G)$.

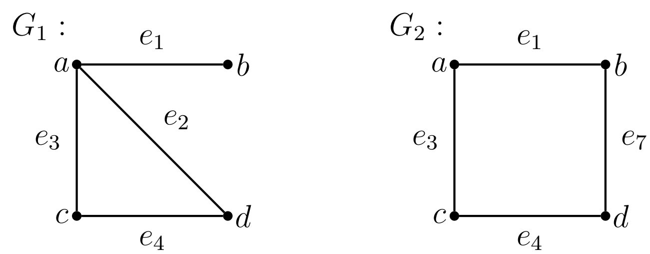

Figura 1.9: Subgrafos

Definición 1.4.3. Dado un grafo $G = (V(G), E(G))$.

Para cualquier conjunto $X \subset V(G)$ con $X \neq \varnothing$, definimos el ***Subgrafo inducido por*** X, denotado por $G[X]$ al grafo dado por: $G[X] = (V(G[X]), E(G[X]))$

donde, $V(G[X]) = X$ y $E(G[X]) = E(G) \cap \mathbb{P}(X)_2$.

Ejemplo 1.4.2.

Para el grafo $G = (V(G), E(G))$ dado por la Figura 1.2, tenemos que, $G[X] = G_3$, donde G_3 es el grafo dado por la Figura 1.10 y $X = \{a, b, d, f\} \subset V(G)$.

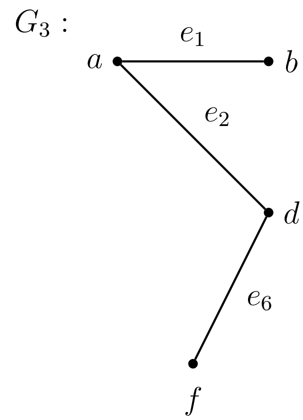

Figura 1.10: Grafo inducido por X

1.4.1. Conjunto independiente

Definición 1.4.4. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sea $S \subset V(G)$, $(S \neq \emptyset)$. Diremos que S es un **conjunto independiente** de $V(G)$ si el subgrafo inducido por S es nulo.

Ejemplo 1.4.3. $S = \{a, b\}$ es un subconjunto independiente de $V(G)$, donde G es dado por la Figura 1.2, ya que, $G[S]$ es el subgrafo nulo dado por la Figura 1.11.

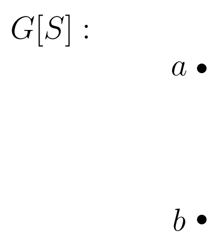

Figura 1.11: Grafo inducido por S

1.4.2. Cliques

Definición 1.4.5. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Un ***clique*** H de G es un subgrafo completo de G.

Si $|V(H)| = 1$ diremos que H es un clique-vértice de G. H es **máximal** si no existe un clique T de G, tal que, $V(H) \subset V(T)$.

Ejemplo 1.4.4.

- K_n es un clique máximal de K_n, de orden n.
- En el grafo dado por la Figura 1.2, tenemos tres cliques máximales dados por la Figura 1.12.

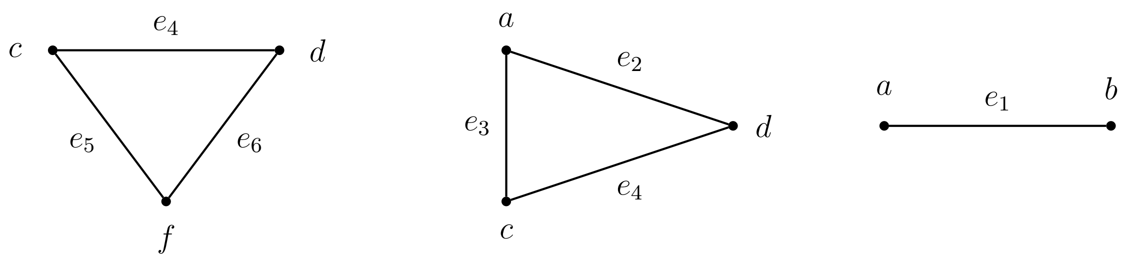

Figura 1.12: Cliques

1.4.3. Bicliques

Definición 1.4.6. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Un **biclique** es un subgrafo H de G tal que H es bipartito completo .

Ejemplo 1.4.5. El grafo G dado por la Figura 1.13 es un biclique, pues es un subgrafo bipartito completo del grafo dado por la Figura 1.8.

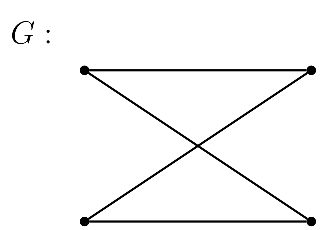

Figura 1.13: Biclique

1.5. CADENAS Y CICLOS

1.5.1. Cadenas

Definición 1.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Una ***cadena*** de G es una secuencia alternada de vértices y lados de G, $x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{r-1}, e_r, x_r$; donde $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ para todo i, con $1 \leq i \leq r$. A los vértices x_0 y x_r los denominaremos extremos de la cadena P.

También podemos escribir una cadena $x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{r-1}, e_r, x_r$ como $x_0, x_1, \ldots, x_r$ o $e_1, e_{12}, \ldots, e_r$, y la denotaremos por $[x_0, x_r]$, $L(x_0, x_r)$ o simplemente L cuando no sea relevante indicar los extremos de dicha cadena.

La ***longitud*** de una cadena L, viene dada por el número de lados que constituyen a L, y es denotada por, $long(L)$.

Observación 1.5.1.

(a) Una cadena L de G es un subgrafo de G. Así, dado que la longitud de L viene dada por el número de lados que la constituyen, la longitud de L es el tamaño de L.

(b) Si x_0 y x_r son los extremos de una cadena P, diremos que, x_0 y x_r están unidos por P.

(c) Un único vértice es una cadena de longitud cero.

(d) Un lado $e = \{x, y\} \in V(G)$, es una cadena de longitud 1.

(e) Si existe una cadena en G, $P_1 = x_0e_1x_1...e_rx_r$ de extremos x_0 y x_r, existe una cadena $P_2 = x_re_rx_{r-1}...x_1e_1x_0$ de extremos x_r y x_0.

(f) Si existen dos cadenas $P_1 = x_0e_1x_1 \ldots e_rx_r$ y $P_2 = x_re_{r+1}y_{r+1} \ldots y_{s-1}e_sy_s$ en G, es decir, con un extremo en común, existe una cadena

$P = x_0e_1x_1 \ldots e_rx_re_{r+1}y_{r+1} \ldots y_{s-1}e_sy_s$, que no es más que la concatenación de las cadenas P_1 y P_2.

Ejemplo 1.5.1. En el grafo dado por la Figura 1.14, $P = a, e_2, d, e_4, c, e_5, f, e_6, d, e_7, b$ representa una cadena, y $long(P) = 5$.

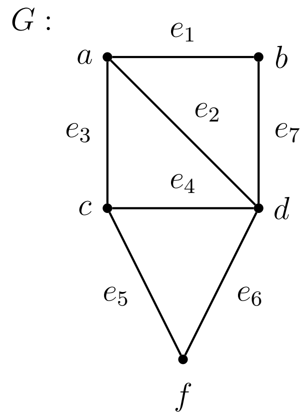

Figura 1.14: Cadenas

Definición 1.5.1. Sea $P = x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{r-1}, e_r, x_r$ una cadena. Diremos que P es:

- ***Cerrada*** si $x_0 = x_r$.
- ***Simple*** si los términos de la secuencia $e_1, ..., e_k$ son diferentes.
- ***Elemental*** si los términos de la secuencia $x_0, ..., x_r$ son diferentes.

Ejemplo 1.5.2. En el grafo dado por la Figura 1.14:

- $P = a, e_2, d, e_6, f, e_5, c, e_4, d$, es una cadena simple, pero no es elemental pues se repite el vértice d. La longitud de p es 4.
- $P_1 = a, e_3, c, e_5, f, e_6, d, e_2, a$, es una cadena cerrada de longitud 4.

1.5.2. Ciclos

Definición 1.5.2. Entenderemos por ***ciclo*** en un grafo G una cadena elemental cerrada de G.

La longitud de un ciclo viene dada por el número de sus vértices distintos . Un ciclo de longitud r lo denotaremos por C_r.

Ejemplo 1.5.3. En el grafo dado por la Figura 1.14, un ciclo de longitud 4 es, $C_4 = a, e_3, c, e_5, f, e_6, d, e_2, a$.

Caracterización de grafos bipartitos mediante ciclos

Teorema 1.5.1. *Un grafo es bipartito si y sólo si carece de ciclos de longitud impar.*

Demostración.

Sea $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ bipartito y $C = v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ un ciclo de G. Como cada lado $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ une un elemento de $V_1(G)$ con uno de $V_2(G)$, concluimos que vértices consecutivos de C son extremos de lados distintos de $E(G)$, luego los vértices de subindice par están todos en uno de los conjuntos de la partición, y los de subindice impar en el otro.

Como $v_0 = v_n$(por ser los extremos de C), n tiene la misma paridad que 0, es decir es par.

Así C tiene longitud par.

Recíprocamente, supongamos que G carece de ciclos de longitud impar. Si G es disconexo, basta probar que cada componente de G es bipartita, así podemos suponer que G es conexo.

Sea $v_0 \in V(G)$ y definamos

$$V_1(G) = \{v \in V(G)\text{: existe una cadena de longitud impar entre } v_0 \text{ y } v\} \tag{1.1}$$

$$V_2(G) = V(G) - V_1(G). \tag{1.2}$$

Por 1.1 y 1.2, las cadenas entre v_0 y cualquier vértice de $V_2(G)$ serán todas de longitud par. Además $V_1(G)$ y $V_2(G)$ forman una partición de $V(G)$.

Ahora, si dos vértices v, w de $V_1(G)$ son adyacentes, las cadenas de longitud impar que los une con v_0, más el lado $\{v, w\}$, constituyen un ciclo impar, (contradicción). Por lo tanto no hay ningun par de vértices adyacentes en $V_1(G)$.

Análogamente, en $V_2(G)$ no exixten vértices adyacentes. En consecuencia $V_1(G)$ y $V_2(G)$ son conjuntos independientes. Así cualquier lado une algún vértice de $V_1(G)$ con alguno de $V_2(G)$. Luego G es bipartito. $\square$

1.6. GRAFOS CONEXOS

Definición 1.6.1. Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es ***conexo*** si es trivial o si para todo $x, y \in V(G)$, tal que, $(x \neq y)$ existe una cadena de extremos x e y.

En otro caso diremos que G es ***disconexo***.

Ejemplo 1.6.1. El grafo dado por la Figura 1.14 es conexo pues para todo $x, y \in V(G)(x \neq y)$ existe una cadena que los une y el grafo dado por la Figura 1.7 no es conexo pues no existe cadena que una a los vértices e y f.

Definición 1.6.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sean $x, y \in V(G)$. Diremos que x esta ***relacionado con*** y (xRy), si y sólo si, $x = y$ ó existe una cadena de extremos x e y.

Teorema 1.6.1. *La relación R dada en la Definición 1.6.2, es de equivalencia.*

Demostración.

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo.

Sea $x \in V(G)$. Por la Definición 1.6.2, xRx para todo $x \in V(G)$. Luego, se cumple la reflexividad.

Sean $x, y \in V(G)(x \neq y)$. Supongamos que xRy, por la Definición 1.6.2 existe la una cadena $P = [x, y]$ y por Observación 1.5.1(e) existe $P' = [y, x]$, y así por la Definición 1.6.2, yRx. Por lo tanto se cumple la simetría.

Sean $x, y, z \in V(G)$. Supongamos que xRy y yRz, por la Definición 1.6.2 existen cadenas $P_1 = [x, y]$ y $P_2 = [y, z]$ y por Observación 1.5.1(f) existe $P = [x, z]$, así por la Definición 1.6.2, xRz. Luego se cumple la transitividad.

Así, la relación R es de equivalencia. $\square$

Teorema 1.6.2. *Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es conexo sii para toda dicotomía $\{V_1, V_2\}$ del conjunto $V(G)$ existe un lado $e \in E(G)$ que tiene un extremo en V_1 y el otro extremo en V_2.*

Definición 1.6.3. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Denominaremos las ***componentes*** de G, a los subgrafos generados por las clases de equivalencias que determinan la relación dada en la Definición 1.6.2.

Cada componente de G es un grafo conexo, razón por la cual las componentes de G son llamadas ***componentes conexas***.

Observación 1.6.1. Por la Definición 1.6.3, un grafo es conexo, si y sólo si, posee una sóla componente conexa.

Ejemplo 1.6.2. El grafo G dado por la figura 1.15 es disconexo, dado que, para los vértices b y d no existe cadena que los una. G posee dos componentes conexas.

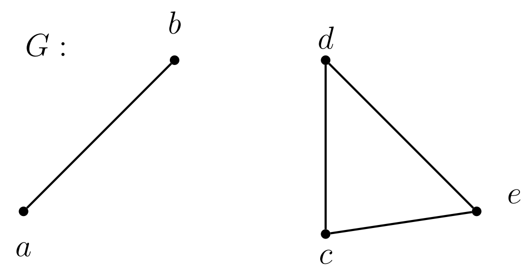

Figura 1.15: Grafo disconexo

Capítulo 2

MATRIZ DE ADYACENCIA DE UN GRAFO

Existen diversas maneras para representar un grafo, en cada caso una de ellas resulta la más adecuada dependiendo del problema concreto al que se desea aplicar.

Una de tales representaciones es la **matriz de adyacencia***, la cual de la forma más sencilla guarda informacion sobre un grafo, en la memoria de una computadora, mediante el uso de vectores que enumeran por indices a los vértices, de manera que los lados se puedan ver como relaciones entre éstos indices, y poder hacer operaciones con estas matrices. Es de vital importancia manejar este tipo de representación para el desarrollo de este trabajo, pues esta constituye el elemento central de la teoria espectral de grafos. Por ello este capítulo esta dedicado especialmente a la matriz de adyacencia.*

2.1. CONCEPTO DE MATRIZ DE ADYACENCIA

Definición 2.1.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo con $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$.

Denominaremos $A(G) = [a_{i,j}]$ ***matriz de adyacencia de*** G, a la matriz cuadrada de orden n, cuyas filas y columnas están indexadas por $V(G)$, definida por:

$$a_{i,j} = m(v_i, v_j).$$

Observación 2.1.1.

(a) La matriz $A(G)$ es simétrica.

(b) Si G es simple, $A(G)$ es una matriz binaria cuyos elementos son ceros y unos, y la diagonal principal está formada sólo por ceros.

(c) $a_{ij} = q > 1$, si $i \neq j$, significa que existen q lados paralelos de extremos v_i y v_j. Si $i = j$ significa que en el vértice v_i existen q lazos.

(d) Sean $v_i, v_j \in V(G)$.

El grado de v_i está dado por

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Y el grado de v_j está dado por

$$d(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Ejemplo 2.1.1.

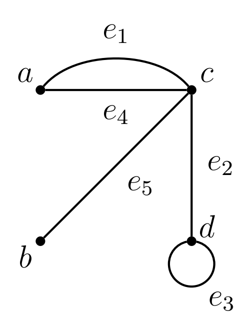

Figura 2.1: Grafo de orden 4 y tamaño 5.

El grafo dado por la Figura 2.1 lo podemos representar con la matriz de adyacencia $A(G)$ como sigue:

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ésta representación matricial no es única, pues, haciendo permutaciones sobre los vértices de G, obtenemos:

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ d \\ a \\ c \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d & a & c & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Por lo anteriormente expuesto, y como un conjunto de n elementos posee $n!$ permutaciones, podemos concluir que:

Un grafo G de orden n, lo podemos representar mediante , ***n! matrices de adyacencias distintas***, pero equivalentes.

Observación 2.1.2. Si G_1 y G_2 son grafos isomorfos, entonces sus matrices de adyacencias son semejantes o equivalentes.

Nota 2.1.1. De ahora en adelante cuando hablemos de "la matriz de adyacencia"quedará sobreentendido que es única salvo permutaciones de filas y columnas.

2.2. MATRIZ DE ADYACENCIA DE ALGUNOS TIPOS DE GRAFOS

2.2.1. Matriz de adyacencia de grafos nulos

Dado que todos los vértices de un grafo nulo tienen multiplicidad cero, la matriz de adyacencia de N_n viene dada por la matriz nula, de orden n.

En otras palabras,

$A(N_n) = [a_{ij}]_n$ donde, $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

Ejemplo 2.2.1. La matriz de adyacencia de N_4 viene dada por

$$A(N_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.2. Matriz de adyacencia de grafos completos

Por Observación 1.3.2(a), y Definición 2.1.1, la matriz de adyacencia de K_n viene dada por

$A(K_n) = [a_{ij}]_n$ donde,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. La matriz de adyacencia de K_5 viene dada por:

$$A(K_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.3. Matriz de adyacencia de grafos bipartitos completos

Para un grafo bipartito completo $G = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G))$, tal que $|V_1(G)| = m$ y $|V_2(G)| = n$, la matriz de adyacencia de G puede ser expresada como una matriz por bloques, salvo permutaciones de vértices, como sigue,

$$A(G) = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [1]_{m\times n} \\ [1]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n).}$$

Sea G el grafo bipartito completo a continuación,

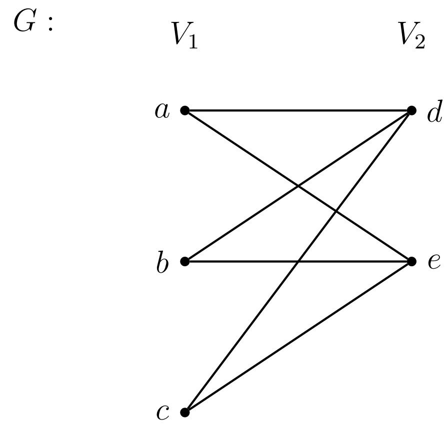

Figura 2.2: Grafo bipartito completo

Nótese que $A(G)$ se puede expresar como una matriz por bloques, salvo permutaciones de filas y columnas de la siguiente manera:

$$A(G) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} [0]_{3\times 3} & [1]_{3\times 2} \\ [1]_{2\times 3} & [0]_{2\times 2} \end{bmatrix}_{(5)\times(5)}.$$

Proposición 2.2.1. *Sea G un grafo simple, cuyos vértices son $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con $n > 1$ y sea $A(G)$ su matriz de adyacencia. Se cumple que el valor de la (i, j)-ésima entrada de $A(G)^k$ es igual al número de cadenas de longitud k en G, con extremos v_i y v_j.*

Demostración.

Probemos por inducción sobre k. Sea G un grafo simple de orden n $(n > 1)$, supongamos que los vértices de G son $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de G.

Para $k = 1$ por definición de $A(G)$, tenemos que la (i, j)-ésima entrada de $A(G)$ es igual a cero ó uno,que es el número de cadenas de longitud 1 en G, con extremos v_i y v_j.

Supongamos que es cierto para $k = p$, es decir, el valor de la (i, j)-ésima entrada de $A(G)^p$ es igual al número de cadenas de longitud p en G, con extremos v_i y v_j.

Probemoslo para $k = p + 1$.

Tenemos que, la entrada (i, j)-ésima de $A(G)^{p+1}$ es el producto de la fila i de $A(G)^p$ por la columna j de $A(G)$, es decir, si llamamos $(a, b, c, \ldots)$ a la fila i de $A(G)^p$ y $(a', b', c', \ldots)$ a la columna j de $A(G)$, entonces $aa' + bb' + cc' \ldots$, es el valor de la (i, j)-ésima entrada de $A(G)^{p+1}$.

El número de cadenas de longitud $p + 1$ de v_i a v_j que pasan en último lugar por el vértice v_1 será 0 si v_1 y v_j no son adyacentes.

En conclusión, como el número de cadenas de v_i a v_1 es el primer elemento de la fila i de $A(G)^p$, y el primer elemento de la columna j de $A(G)$ es 1 ó 0, dependiendo de si v_1 y v_j son o no adyacentes, tendremos que el número de cadenas de longitud $p + 1$ de i a j, que pasan en último lugar por el vértice v_2 será siempre bb', y así sucesivamente.

El número total de cadenas de longitud $p + 1$ que une a v_i con v_j será $aa' + bb' + cc' \ldots$, es decir, la (i, j)-ésima entrada de $A(G)^{p+1}$.

Luego se cumple que el valor de la (i, j)-ésima entrada de $A(G)^k$ es igual al número de cadenas de longitud k en G, con extremos v_i y v_j.

□

Capítulo 3

ALGUNOS ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

3.1. VALORES Y VECTORES PROPIOS

A continuación daremos la definición de valores y vectores propios, polinomio característico, y algunas propiedades relacionadas a dicho polinomio, pues estas son las principales herramientas que usaremos para encontrar los espectros de los grafos.

Definición 3.1.1. Sean C un cuerpo y A una matriz cuadrada de orden n sobre C y 0 una matriz nula de dimensión $n \times 1$. Diremos que $\lambda \in C$ es un ***valor propio*** de A si existe una matriz columna

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \neq 0$$

sobre C, tal que $Av = \lambda v$.

Al escalar λ lo llamaremos ***valor propio*** (o valor característico) de A asociado a v y al vector v lo denominaremos ***vector propio*** (o vector característico) de A asociado al valor propio λ.

Dada cualquier matriz cuadrada A de orden n, deseamos obtener todos los vectores propios de A junto con sus correspondientes valores propios. Este problema, llamado problema de valores característicos, podemos resolverlo observando primeramente que:

$$\text{Si } v \neq [0]_{n\times 1} \text{ y } Av = \lambda v, \text{ entonces } Av = \lambda v = (\lambda I_n)v,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

En consecuencia,

$$(\lambda I_n)v - Av = (\lambda I_n - A)v = [0]_{n\times 1}.$$

Así,

$$(\lambda I_n - A)v = [0]_{n\times 1}. \tag{3.1}$$

3.1.1. Espacio propio

Dado que por definición $v \neq [0]_{n\times 1}$, el problema de valores característicos se reduce a encontrar la solución no trivial de la ecuación (3.1), es decir, los v que satisfagan dicha ecuación.

El conjunto solución para (3.1) viene dado por

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : (\lambda I_n - A)v = [0]_{n\times 1}\}.$$

Observación 3.1.1. E_λ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, sean $v_1, v_2 \in E_\lambda$ entonces,

$$\begin{aligned}(\lambda I_n - A)(v_1 + v_2) &= (\lambda I_n - A)v_1 + (\lambda I_n - A)v_2\\ &= [0]_{n\times 1} + [0]_{n\times 1}\\ &= [0]_{n\times 1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_1 + v_2 \in E_\lambda$.

Además,

$$\begin{aligned}(\lambda I_n - A)(\alpha v_1) &= \alpha(\lambda I_n - A)v_1\\ &= \alpha[0]_{n\times 1}\\ &= [0]_{n\times 1}.\end{aligned}$$

Así, $\alpha v_1 \in E_\lambda$.

De esta manera, queda demostrado que E_λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, luego, $dimE_\lambda \leq n$.

Por otro lado, por definición de núcleo, E_λ es el núcleo de la matriz $(\lambda I_n - A)$. Así, $dimE_\lambda = \mathcal{V}(\lambda I_n - A)$, donde $\mathcal{V}(\lambda I_n - A)$ representa la **nulidad** de la matriz $\lambda I_n - A$.

Definición 3.1.2. Sea A una matriz real de orden n, y λ un valor propio de A. Al subespacio $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : (\lambda I_n - A)v = [0]_{n\times 1}\}$ lo llamaremos ***espacio propio*** de A, asociado al valor propio λ.

Definición 3.1.3. Llamaremos polinomio característico de A al determinante de la matriz $\lambda I_n - A$, y lo denotaremos por $P_A(\lambda)$, así

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A).$$

Como consecuencia de las Definiciones 3.1.1 y 3.1.3, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. *Sean C un cuerpo, A una matriz cuadrada de orden n sobre C. Entonces $\lambda \in C$ es un valor propio de A si y solo si*

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = 0. \tag{3.2}$$

Demostración.

$(\Longrightarrow)$ Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $P_A(\lambda) \neq 0$, y que λ es un valor propio de A.

Tenemos que A es una matriz cuadrada de orden n. Como $P_A(\lambda) \neq 0$ entonces, $det(\lambda I_n - A) \neq 0$. Luego la matriz $(\lambda I_n - A)$ es no singular, así el sistema homogéneo de n ecuaciones en las incognitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, determinado por la ecuación 3.1, tiene únicamente la solución

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Contradicción, dado que por la Definición 3.1.1, $v \neq [0]_{n\times 1}$. Así λ no es un valor propio de A.

Por lo tanto,

$$det(\lambda I_n - A) = 0.$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $P_A(\lambda) = 0$, esto implica que $det(A - \lambda I) = 0$, luego la matriz $(\lambda I_n - A)$ es singular, así existe

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \neq [0]_{n\times 1},$$

tal que, satisface 3.1. En consecuencia por la Definición 3.1.1, λ es un valor propio de A. $\square$

Observación 3.1.2. Al resolver $det(\lambda I_n - A)$, se obtiene que $P_A(\lambda)$ es un polinomio de grado n en la variable λ. Como consecuencia del Teorema 3.1.1, tenemos que toda raíz de $P_A(\lambda)$ es un valor propio de A.

Teorema 3.1.2. Teorema fundamental del álgebra.

Todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene exactamente n raíces no necesariamente distintas, es decir, contadas con su multiplicidad.

Nota 3.1.1. En adelante consideraremos matrices reales.

Observación 3.1.3.

(a) Dado que el coeficiente de λ^n en $P_A(\lambda)$ es 1, $P_A(\lambda)$ es un polinomio mónico.

(b) Debido a que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, por el **Teorema fundamental del álgebra**, todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$, tiene n raíces exactamente (contando multiplicidades). Como todo valor propio de A es una raíz del polinomio $P_A(\lambda)$, concluimos que, **(contando multiplicidades) cada matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{R}$, tiene exactamente n valores propios.**

Proposición 3.1.1. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si λ es un valor propio de A y $k \geq 1$, entonces λ^k es un valor propio de A^k.*

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre k.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Sea λ un valor propio de A, entonces existe un vector v no nulo tal que $Av = \lambda v$.

Para $k = 1$es evidente por lo que haremos la prueba para $k = 2$. Tenemos que,

$$A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

Así, $A^2 v = \lambda^2 v$, es decir, λ^2 es un valor propio de A^2.

Supongamos que se cumple para $k = m$, esto es: λ^m es un valor propio de A^m. Así,

$$A^m v = \lambda^m v.$$

Probemos que se cumple para $k = m + 1$, esto es: λ^{m+1} es un valor propio de A^{m+1}.

Tenemos que,

$$A^{m+1} v = A(A^m v) = A(\lambda^m v) = \lambda^m (Av) = \lambda^m (\lambda v) = \lambda^{m+1} v.$$

Luego, λ^{m+1} es un valor propio de A^{m+1}.

Así, hemos probado que Si λ es un valor propio de A y $k \geq 1$, entonces λ^k es un valor propio de A^k.

□

Teorema 3.1.3. [4] *Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A y B poseen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Sean A y B matrices semejantes de orden n, entonces existe una matriz invertible M, tal que, $M^{-1}AM = B$. Luego,

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= det(\lambda I_n - B) \\
&= det(\lambda I_n - M^{-1}AM) \\
&= det(M^{-1}(\lambda I_n)M - M^{-1}AM) \\
&= det(M^{-1}(\lambda I_n - A)M) \\
&= det(M^{-1})det(\lambda I_n - A)det(M) \\
&= det(\lambda I_n - A) \\
&= P_A(\lambda).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. $\square$

3.1.2. Procedimiento para hallar los valores y vectores propios

Dada una matriz cuadrada A de orden n. Para encontrar los valores y vectores propios de A, basta seguir los siguientes pasos:

(a) Hallamos $P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$.

(b) Hallamos las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $P_A(\lambda)$, que son los valores propios de A, para ello hacemos $P_A(\lambda) = 0 \in \mathbb{R}$.

(c) Luego para encontrar los vectores propios de A, resolvemos el sistema homogéneo $(\lambda_i I_n - A)v = 0_{n\times 1}$ correspondiente a cada valor propio λ_i.

Los $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ asociados a cada λ_i son los vectores propios de A.

Ejemplo 3.1.1. Encontremos los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Hallemos el polinomio caraterístico de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I_2 - A) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 + 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{aligned}$$

Luego, el polinomio característico de A es:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

(b) Hallemos las raíces de $P_A(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ó } \lambda = 1. \end{aligned}$$

Así, los valores propios de A son: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$.

(c) Hallemos los vectores propios de A.

Para $\lambda_1 = 3$ tenemos que,

$$\begin{aligned} (3I_n - A)v = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v_1 = v_2 \end{aligned}$$

Luego, los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$ son los $v \in \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : v_1 = v_2 \right\}$.

Para $\lambda_2 = 1$ tenemos que,

$$\begin{aligned}(1I_n - A)v = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v_1 = -v_2\end{aligned}$$

Luego, los valores propios asociados a $\lambda_2 = 1$ son los $v \in \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : v_1 = -v_2 \right\}$.

3.1.3. Método de Leverrier

Podemos encontrar el polinomio característico de una matriz sin utilizar determinantes. A continuación presentamos uno de los métodos(Método de Leverrier) para encontrar el polinomio característico de una matriz, en el cual se usan las trazas de las potencias de dicha matriz.

Recordemos el concepto de traza.

Definición 3.1.4. Definimos la ***traza*** de una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$, como la suma de los elementos de su diagonal principal y la denotaremos por $Tr(A)$, es decir,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ejemplo 3.1.2. La traza de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

viene dada por:

$$Tr(A) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Según el método de Leverrier* [9]*, el polinomio característico de la matriz A viene dado por:

$$P_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} P_i \lambda^{n-i}.$$

Sea $P_0 = 1$. Para hallar los coeficientes P_i con $i = \{1, \ldots, n\}$, debemos:

(a) Hallar A^2, A^3,…,A^n.

(b) Hallar $Tr(A)$, $Tr(A^2)$, …, $Tr(A^n)$.

(c) Luego,

$$P_i = -\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} P_j Tr(A^{i-j}).$$

Ejemplo 3.1.3. Encontremos el polinomio característico $P_A(\lambda)$ del Ejemplo 3.1.1 usando el método de Leverrier.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontremmos A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) $Tr(A) = 4$ y $Tr(A^2) = 10$.

(c) Hallemos los coeficientes del polinomio característico.

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = -\frac{1}{1}[P_0 Tr(A)] = (-1)(4) = -4.$$

Así, $P_1 = -4$

$$P_2 = -\frac{1}{2}[P_0Tr(A^2) + P_1Tr(A)] = -\frac{1}{2}[1(10) + (-4)4] = -\frac{1}{2}(-6) = 3.$$

Así, $P_2 = 3$

Luego,

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Definición 3.1.5. Sea λ un valor propio de una matriz A.

(a) ***La multiplicidad algebraica*** de λ es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio caracteristico de A, y la denotaremos por $m_a(\lambda)$.

(b) ***La multiplicidad geométrica*** de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ, y la denotaremos por $m_g(\lambda)$, es decir,

$$m_g(\lambda) = dimE_\lambda.$$

Nota 3.1.2. De ahora en adelante al usar el término multiplicidad estaremos haciendo referencia a la multiplicidad algebraica, de lo contrario se indicará que la multiplicidad es geométrica.

Teorema 3.1.4. [4] *Sea λ un valor propio de una matriz A. Entonces, la multiplicidad geométrica de λ no excede la multiplicidad algebraica de λ.*

Ejemplo 3.1.4. Las multiplicidades de los valores propios de la matriz A del Ejemplo 3.1.1 vienen dadas por:

La multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 3$ y de $\lambda_2 = 1$ es igual a 1 en ambos casos. Luego, por el Teorema 3.1.4, podemos deducir que, la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 3$ y de $\lambda_2 = 1$ es igual a 1 en ambos casos.

La coincidencia de las multiplicidades algebraica y geométrica de los valores propios de una matriz, ocurre si dicha matriz es simétrica. Esto se prueba mas adelante.

3.2. TEOREMA ESPECTRAL

En matemáticas, y más especialmente en álgebra lineal y análisis funcional, el teorema de descomposición espectral, o más brevemente teorema espectral, expresa las condiciones bajo las cuales un operador o una matriz pueden ser diagonalizados (es decir, representadas como una matriz diagonal en alguna base). Es de nuestro interés mostrar este resultado para una mejor comprensión del siguiente capitulo. Antes de demostrar éste teorema, citaremos algunas definiciones y teoremas necesarios para obtener dicha demostración, así como tambien para ser usados en otros resultados a lo largo de este trabajo.

Nota 3.2.1. En $\mathbb{R}^n$ consideraremos el producto interno usual.

Teorema 3.2.1. *Sea λ un valor propio de una matriz real A de orden n. Entonces y E_λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.2.2. *Sea A una matriz A de orden n. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los distintos valores propios de A y $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ los espacios propios asociados respectivamente a cada λ_i, con $1 \leq i \leq k$. Entonces A es diagonalizable si, y sólo si,*

$$\sum_{i=1}^{k} dim E_{\lambda_i} = n$$

Teorema 3.2.3. *Sea A una matriz real y simétrica de orden n. Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de A, asociados a los vectores propios v_1 y v_2 respectivamente, entonces v_1 y v_2 son ortogonales. En consecuencia, si $v_1 \in E_{\lambda_1}$ y $v_2 \in E_{\lambda_2}$ entonces $v_1 \cdot v_2 = 0$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

Definición 3.2.1. Un conjunto S de vectores es ***ortogonal*** si el producto interno de cada par de vectores $u, v \in S$ es igual a cero, es decir, S es ortogonal si cada par de vectores en S es ortogonal. Si además, cada vector en S tiene norma igual a 1, diremos que S es ***ortonormal*** .

Definición 3.2.2. Un conjunto S de vectoressi es ortogonal y.

Teorema 3.2.4. *Cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero en un espacio con producto interno, es linealmente independiente.*

Teorema 3.2.5. *Cualquier conjunto finito linealmente independiente en un espacio con producto interno, se puede convertir en un conjunto ortonormal mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.*

Definición 3.2.3. Una matriz Q de orden n es ortogonal si:
Q es invertible y $Q^{-1} = Q^t$.

Teorema 3.2.6. *Una matriz Q de orden n, es ortogonal si, y sólo si, las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.2.7. *Sea A una matriz de orden n. Entonces $detA \neq 0$, si y sólo si, las columnas de A son linealmente independientes.*

Teorema 3.2.8. *Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial V. Entonces cualquier subconjunto independiente, de S se puede expandir a una base para S.*

Definición 3.2.4. El ***rango*** de una matriz A, es el número máximo de filas o columnas de A linealmente independientes, y lo denotaremos por $rang(A)$.

Teorema 3.2.9. *Sea A una matriz de dimensión $m \times n$. Entonces, el rango de A más la nulidad de A es igual al número de columnas de A. Es decir,*

$$rang(A) + \mathcal{V}(A) = n.$$

En particular, por Observacion 3.1.1 $ran(\lambda I_n - A) + dimE_{lambda}) = n$.

Teorema 3.2.10. [4] *Si $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces S es linealmente independiente.*

Teorema 3.2.11. Teorema espectral.[6]

Una matriz real y simétrica de orden n tiene n vectores propios ortonormales.

Demostración.

Sea A una matriz simétrica, real de orden n.

Por Teorema 3.2.2, la suma de las dimensiones de los subespacios propios de A es igual a n, si A es diagonalizable. Así, para probar que A posee n vectores propios ortonormales, basta probar que A es diagonalizable, y que para cada valor propio λ de A, se cumple que $dimE_\lambda = m(\lambda)$, dado que por Teorema fundamental del álgebra, $\sum_\lambda m(\lambda) = n$.

En consecuencia, va a existir una base ortonormal B_λ para cada E_λ, y $|B_\lambda| = m(\lambda)$. Luego, el Teorema 3.2.3, nos permite construir una base ortonormal $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$, para el espacio de los vectores propios de A. Además, dado que $\bigcap_\lambda B_\lambda = \emptyset$, entonces $|B| = \sum_\lambda E_\lambda = \sum_\lambda m(\lambda) = n$. Así, $|B| = n$. Esto completaria la prueba.

Probemos:

Sea λ_1 un valor propio de A con multiplicidad algebraica k. Entonces por Teorema 3.2.1 el espacio propio de A asociado a λ_1,

$E_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^n : (\lambda_1 I_n - A)v = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Sea $u_1 \in E_{\lambda_1}$.

Tenemos que, por Teorema 3.2.8, u_1 se puede expandir a una base $u_1, v_2, \ldots, v_n$ para $\mathbb{R}^n$ y por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, (Teorema 3.2.5), podemos transformar ésta base, en una base ortonormal $u_1, u_2, \ldots, u_n$ para $\mathbb{R}^n$.

Sea Q la matriz cuyas columnas son los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, es decir,

$Q = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}_{n\times n.}$

Luego por Teorema 3.2.6, Q es ortogonal así por definición Q es invertible y $Q^{-1} = Q^t$.

De ésta manera, A es semejante a Q^tAQ, dado que,

$$\begin{aligned} Q(Q^tAQ)Q^{-1} &= (QQ^t)A(QQ^{-1}) \\ &= (QQ^{-1})A(QQ^{-1}) \\ &= I_nAI_n \\ &= A \end{aligned}$$

y así $A = Q(Q^tAQ)Q^{-1}$.

Luego, como A es semejante a Q^tAQ, entonces por Teorema 3.1.3, A y Q^tAQ tienen el mismo polinomio característico.

Así,

$$P_A(\lambda) = P_{Q^tAQ}(\lambda) \Rightarrow det(\lambda I_n - A) = det(\lambda I_n - Q^tAQ).$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
Q^tAQ &= \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}_{n\times n} A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} u_1^t\lambda_1 u_1 & u_1^tAu_2 & \dots & u_1^tAu_n \\ u_2^t\lambda_1 u_1 & u_2^tAu_2 & \dots & u_2^tAu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n^t\lambda_1 u_1 & u_n^tAu_2 & \dots & u_n^tAu_n \end{bmatrix}_{n\times n}
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\|u_1\| = 1$ tenemos que

$$1 = \|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} \Rightarrow 1 = \|u_1\|^2 = u_1 \cdot u_1$$

Así, $u_1^t\lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1^t u_1 = \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1$.

Ademas, dado que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es un conjunto ortonormal, él es ortogonal por definición, en consecuencia, para todo $2 \leq i \leq n$

$$u_i^t \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_i^t u_1 = \lambda_1 \cdot 0 = 0.$$

Luego,

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^t A u_2 & \ldots & u_1^t A u_n \\ 0 & u_2^t A u_2 & \ldots & u_2^t A u_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & u_n^t A u_2 & \ldots & u_n^t A u_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Ahora, como $A = A^t$ tenemos que.

$$(Q^t A Q)^t = (AQ)^t (Q^t)^t = Q^t A^t Q = Q^t A Q$$

así, $(Q^t A Q)^t = Q^t A Q$. En consecuencia, $Q^t A Q$ es simétrica.
Luego, podemos expresar a $Q^t A Q$ como:

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & \ldots & q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & q_{n2} & q_{n3} & \ldots & q_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n.}$$

Así, el polinomio característico de $Q^t A Q$ viene dado por:

$$
\begin{aligned}
P_{Q^tAQ}(\lambda) &= det(\lambda I_n - Q^tAQ) \\
&= det \begin{bmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - q_{22} & -q_{23} & \dots & -q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -q_{n2} & -q_{n3} & \dots & \lambda - q_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= (\lambda-\lambda_1) det \begin{bmatrix} \lambda - q_{22} & -q_{23} & \dots & -q_{2n} \\ -q_{32} & \lambda - q_{33} & \dots & -q_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_{n2} & -q_{n3} & \dots & \lambda - q_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}
\end{aligned}
$$

$$P_{Q^tAQ}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) det M_{11}(\lambda),$$

donde $M_{11}(\lambda)$ es el $1,1$-ésimo menor de la matriz $\lambda I_n - Q^tAQ$.

Ahora, si $k = 1$, A posee un vector ortonormal asociado a λ_1.

Supongamos que $k > 1$. Así, $det(\lambda I_n - A)$ contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)^2$.

Dado que,

$$det(\lambda I - A) = det(\lambda I - Q^tAQ) = (\lambda - \lambda_1) det M_{11}$$

concluimos que el $det M_{11}$ contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)$, es decir,

$$det M_{11}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) q(\lambda).$$

Así, $det M_{11}(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_1) q(\lambda_1) = 0q(\lambda_1) = 0$.

Como $det M_{11}(\lambda_1) = 0$ entonces, por Teorema 3.2.7, las columnas de $M_{11}(\lambda_1)$ son linealmente dependientes. Así, las ultimas $n-1$ columnas de $\lambda_1 I_n - Q^tAQ$ son linealmente dependientes y como la primera columna de $\lambda_1 I_n - Q^tAQ$ es nula, entonces $\lambda_1 I_n - Q^tAQ$ posee a lo más, $n-2$ columnas linealmente independientes.

Es decir, $rang(\lambda_1 I_n - Q^tAQ) \leq n-2$, y dado que $\lambda_1 I_n - Q^tAQ$ y $\lambda_1 - A$ son semejantes, entonces $rang(\lambda_1 I_n - A) \leq n - 2$.

Luego, por Observación— 3.2.9, $\mathcal{V}(\lambda_1 I_n - A) \geq 2$, es decir, $dim E_{\lambda_1} \geq 2$.

Así, E_{λ_1} contiene al menos dos vectores propios linealmente independientes.

Si $k = 2$, ya hemos encontrado u_1, u_2 vectores propios de A asociados a λ_1, linealmente independientes, y por Teorema 3.2.5 podemos construir un conjunto de dos vectores propios de A ortonormales.

Si $k > 2$, entonces podemos encontrar dos vectores ortonormales $u_1, u_2 \in E_{\lambda_1}$ y expandir $\{u_1, u_2\}$ a una base ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ para $\mathbb{R}^n$.

Sea W la matriz cuyas columnas son los vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Así, $W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}$.

Luego por un procedimiento análogo al realizado anteriormente, se demuestra que

$$\lambda I_n - W^t A W = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \beta_{33} & -\beta_{34} & \ldots & -\beta_{3n} \\ 0 & 0 & -\beta_{43} & \lambda - \beta_{44} & \ldots & -\beta_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -\beta_{n3} & -\beta_{n4} & \ldots & \lambda - \beta_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

y como $k > 2$, tenemos como antes, que

$$det \begin{bmatrix} \lambda_1 - \beta_{33} & -\beta_{34} & \ldots & -\beta_{3n} \\ -\beta_{43} & \lambda_1 - \beta_{44} & \ldots & -\beta_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\beta_{n3} & -\beta_{n4} & \ldots & \lambda_1 - \beta_{nn} \end{bmatrix} = 0.$$

Con lo que, $rang(\lambda_1 I_n - W^t A W) \leq n-3$ y así, por Teorema 3.2.9, $\mathcal{V}(\lambda_1 I - A) \geq 3$. $dim E_{\lambda_1} \geq 3$.

Continuando con este proceso, se demuestra que $dim E_{\lambda_1} \geq k$.

Pero tenemos, por Teorema 3.1.4, que la multiplicidad geométrica de λ_1 que es igual a la dimensión del espacio propio asociado a λ_1 no excede a la multiplicidad algebraica de λ_1, es decir, $dim E_{\lambda_1} \leq k$.

Por lo tanto,

$$dimE_{\lambda_1} = k.$$

Luego concluimos que, para cada λ_i con $1 \leq i \leq s$ de multiplicidad $m(\lambda_i)$, se puede encontrar una base ortonormal con $m(\lambda_i)$ elementos.

Como A es simétrica entonces es diagonalizable, así por Teorema 3.2.2

$$\sum_{\lambda} dimE_{\lambda_i} = n.$$

Luego, por Teorema 3.2.3, podemos construir una base ortonormal $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$, para el espacio de los vectores propios de A.

Además, dado que $\bigcap_\lambda B_\lambda = \emptyset$, entonces $|B| = \sum_\lambda E_\lambda = \sum_\lambda m(\lambda) = n$. Así, $|B| = n$. Obteniendose así, una base de n vectores propios ortonormales de A.

$\square$

Como consecuecia del teorema espectral, tenemos:

Lema 3.2.1. *Si A es una matriz real y simétrica de orden n, y λ es un valor propio de A, entonces la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica de λ coinciden.*

Teorema 3.2.12. [4] *Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes, si y solo si, la multiplicidad geométrica de todo valor propio es igual su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores propios linealmente independientes si todos sus valores propios son distintos.*

3.2.1. Propiedades elementales de los valores propios.

Teorema 3.2.13. *Sean $A = [a_{ij}]_n$ una matriz cuadrada de orden n,*

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$$

el polinomio característico de A y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces de $P_A(\lambda)$, es decir los valores propios de A. Entonces se cumple:

(a) $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n P_A(0) = detA$.

(c) *Si A es simétrica real y $\lambda \in \mathbb{R}$, la multiplicidad de λ como un valor propio de A es $n - rang(\lambda I_n - A)$.*

(d) *α es raíz del polinomio $P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$ si y sólo si $\alpha + c$ es raíz del polinomio $P_{A_c}(\lambda) = det(\lambda I_n - A_c)$, donde c es un escalar, $A_c = cI_n + A$ y las multiplicidades de α y $\alpha + c$ coinciden.*

Demostración.

(a) Sean A_n una matriz cuadrada de orden n, $P_{A_n}(\lambda)$ el polinomio característico de A_n y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces de $P_A(\lambda)$, es decir, los valores propios de A_n.

Queremos probar que $Tr(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Por Definición 3.1.3, tenemos que

$$P_{A_n}(\lambda) = det(\lambda I_n - A_n). \tag{3.3}$$

Por otro lado, dado que por Observación 3.1.3(b), $P_{A_n}(\lambda)$ es un polinomio de grado n, con n raíces, tenemos que:

$$P_{A_n}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i). \tag{3.4}$$

Luego, el coeficiente s de λ^{n-1} en el polinomio dado por (3.3) es igual al coeficiente t de λ^{n-1} en el polinomio dado por (3.4).

Probaremos que $s = -Tr(A_n)$ y $t = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, y en consecuencia quedaría probado que:

$$Tr(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Probemos que se cumple para $n = 2$ y $n = 3$.

Sea $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, una matriz cuadrada de orden 2.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} P_{A_2}(\lambda) &= det(\lambda I_2 - A) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (-a_{21})(-a_{12}) \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Luego, el coeficiente de λ en $P_{A_2}(\lambda)$ es igual a $-Tr(A_2)$.

Suponemos cierto para $n = k$, esto es, para cualquier matriz A_k (cuadrada de orden k), el coeficiente de λ^{k-1} en $P_{A_k}(\lambda)$ es $-Tr(A_k)$.

Luego podemos escribir, (dado que $P_{A_k}(\lambda)$ es mónico.)

$$P_{A_k}(\lambda) = \lambda^k - Tr(A_k)\lambda^{k-1} + H(\lambda)$$

donde $H(\lambda)$ es un polinomio de grado $< k - 1$

Probemos que se cumple para $n = k + 1$.

Sea $A_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$.

Debemos hallar el coeficiente de λ^k en $P_{A_{k+1}}$. Tenemos que,

$$P_{A_{k+1}} = det(\lambda I_{k+1} - A_{k+1})$$

Hagamos $B = (\lambda I_{k+1} - A_{k+1})$, luego

$$det(B) = det(\lambda I_{k+1} - A_{k+1}) = det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} & -a_{1,k+1} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2k} & -a_{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & \lambda - a_{kk} & -a_{k,k+1} \\ -a_{k+1,1} & -a_{k+1,2} & \dots & -a_{k+1,k} & \lambda - a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

Resolvemos el determinante por desarrollo de cofactores, sobre la primera fila de B.

Así tenemos,

$$det(B) = (\lambda - a_{11})B_{11} + (-a_{12})B_{12} + \dots + (-a_{1,k+1})B_{1,k+1}, \tag{3.5}$$

donde $B_{ij} = (-1)^{1+j} det(M_{1j})$ con M_{1j} el $1j$-ésimo menor de B.

En la ecuación (3.5) nos interesa el término $(\lambda - a_{11})B_{11}$, ya que éste nos dará el coeficiente de λ^k en $P_{A_{k+1}}(\lambda)$.

Luego,

$$(\lambda - a_{11})B_{11} = \lambda B_{11} - a_{11}B_{11}. \tag{3.6}$$

Tenemos por definición de cofactor, que

$$B_{11} = (-1)^2 det(M_{11}) = det(M_{11}),$$

donde,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2k} & -a_{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k2} & \dots & \lambda - a_{kk} & -a_{k,k+1} \\ -a_{k+1,2} & \dots & -a_{k+1,k} & \lambda - a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} = (\lambda I - A')$$

donde $A' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,k+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \dots & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden k.

Así, $B_{11} = det(M_{11}) = det(\lambda I - A') = P_{A'}(\lambda)$

Luego, $B_{11} = P_{A'}(\lambda)$, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción en A', en consecuencia,

$$P_{A'}(\lambda) = \lambda^k - Tr(A')\lambda^{k-1} + Q_1(\lambda) = B_{11},$$

donde $Q_1(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k-1$.

Entonces,

$$\lambda B_{11} = \lambda^{k+1} - Tr(A')\lambda^k + Q_2(\lambda),$$

donde $Q_2(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k$ y $a_{11}b_{11} = a_{11}\lambda^k - a_{11}Tr(A')\lambda^{k-1} + Q_3(\lambda)$, donde $Q_3(\lambda)$ es un polinomio de grado $< k-1$.

Luego (3.6) queda

$$(\lambda - a_{11})B_{11} = \lambda^{k+1} - (Tr(A') + a_{11})\lambda^k + Q(\lambda),$$

donde $Q(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k$.

Por definición de A' y de A_{k+1} tenemos que:

$$Tr(A') + a_{11} = Tr(A_{k+1}).$$

En consecuencia, el coeficiente de λ^k en $P_{k+1}(\lambda)$ es igual a $-Tr(A_{k+1})$.

Luego, queda probado para $n = k+1$.

En consecuencia, **para cualquier matriz cuadrada A_n de orden n, el coeficiente de λ^{n-1} en $P_{A_n}(\lambda)$ es igual a $-Tr(A_n)$.**

Por otro lado, podemos factorizar $P_{A_k}(\lambda)$ por medio de sus n raíces, esto es,

$$P_{A_k}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

que es un polinomio mónico de grado n.

Así el coeficiente de λ^n en $P_A(\lambda)$ es 1. Luego $P_A(\lambda)$ es un polinomio mónico de grado n.

Probemos por inducción sobre n, que para cualquier matriz cuadrada A_n de orden n, el coeficiente de λ^{n-1} en $P_{A_n}(\lambda)$ es igual a $-\sum_{i=1}\lambda_i$.

Probemoslo para $n = 2$.

Sea A_2 una matriz cuadrada de orden 2, entonces A_2 posee dos raíces: λ_1 y λ_2.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} P_{A_2}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Así,

$$P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - (\sum_{i=1}^{2}\lambda_i)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Luego, que el coeficiente de λ es igual a $-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i$

Supongamos que es cierto para $n = k$, esto es, para cualquier matriz A_k de orden k, el coeficiente de λ^{k-1} en $P_{A_k}(\lambda)$ es $-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

Así, podemos escribir,

$$P_{A_k}(\lambda) = \lambda^k - (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\lambda)^{k-1} + Q(\lambda)$$

donde $Q(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k - 1$.

Probemos que se cumple para $n = k + 1$.

Sea A_{k+1} una matriz de orden $k + 1$ así tenemos que, $P_{A_{k+1}}(\lambda)$ posee $k + 1$ raíces digamos λ_1, λ_2, …, λ_{k+1}.

Luego, podemos expresar a $P_{A_{K+1}}(\lambda)$ como

$$P_{A_{K+1}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_{k+1})$$

Aplicando la hipotesis de inducción tenemos que,

$$P_{A_{k+1}}(\lambda) = [\lambda^k - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda^{k-1} + H_1(\lambda)](\lambda - \lambda_{k+1})$$

donde $H_1(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k-1$.

Así,

$$\begin{aligned} P_{A_{k+1}}(\lambda) &= \lambda^{k+1} - (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\lambda^k + H_1(\lambda)\lambda - \lambda_{k+1}\lambda^k + (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\lambda^{k-1}\lambda_{k+1} - H_1(\lambda)\lambda_{k+1} \\ &= \lambda^{k+1} - (\lambda_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\lambda^k + H(\lambda) \end{aligned}$$

Luego tenemos,

$$P_{A_{k+1}}(\lambda) = \lambda^{k+1} - (\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i)\lambda^k + H(\lambda).$$

donde $H(\lambda)$ es un polinomio de grado$< k$.

Por lo tanto, el coeficiente de λ^k en $P_{A_{k+1}}$ es igual a $-\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i$.

Así, hemos probado que **para una matriz A_n de orden n, el coeficiente de λ^{n-1} en $P_{A_n}(\lambda)$ es igual a $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.**

Luego hemos hallado dos expresiones para el coeficiente de λ^{n-1} en $P_{A_n}(\lambda)$, $-Tr(A_n)$ y $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, en consecuencia,

$$Tr(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(b) Tenemos que, para una matriz A de orden n

$$det(\lambda I_n - A) = P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i). \tag{3.7}$$

Si hacemos $\lambda = 0$ en (3.7), obtenemos

$$det(-A) = P_A(0) = \prod_{i=1}^{n}(-\lambda_i). \tag{3.8}$$

Por Teorema **??**(e)

$$det(-A) = (-1)^n det(A).$$

Así, (3.8) queda

$$(-1)^n det(A) = P_A(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i).$$

En consecuencia,

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i) = (-1)^n P_A(0) = det(A).$$

(c) Sea A una matriz real y simétrica de orden n.

Si λ es un valor propio de A, entonces por Lema 3.2.1, las multiplicidades algebraica y geométrica de λ coinciden, es decir,

$$m(\lambda) = m_g(\lambda). \tag{3.9}$$

Por otro lado, por Definición **??**, tenemos que

$$m_g(\lambda) = \mathcal{V}(\lambda I_n - A). \tag{3.10}$$

Luego, por Teorema 3.2.9

$$rang(\lambda I_n - A) + \mathcal{V}(\lambda I_n - A) = n. \tag{3.11}$$

En consecuencia por (3.9), (3.10) y (3.9) tenemos que:

$$m(\lambda) = n - rang(\lambda I_n - A).$$

(d) Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo C, $c \in C$ y $A_c = cI_n + A$.

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ es raíz de } det(\lambda I_n - A) &\Leftrightarrow det(\alpha I_n - A) = 0 \\
&\Leftrightarrow det(\alpha I_n + (cI_n - cI_n) - A) = 0 \\
&\Leftrightarrow det((\alpha I_n + cI_n) - (cI_n + A)) = 0 \\
&\Leftrightarrow det((\alpha + c)I_n - (cI_n + A)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha + c \text{ es raíz de } det(\lambda I_n - (cI_n + A)) \\
&\Leftrightarrow \alpha + c \text{ es raíz de } det(\lambda I_n - A_c).
\end{aligned}$$

□

3.3. POLINOMIO MÍNIMO

Teorema 3.3.1. Teorema de Cayley-Hamilton. *Si $P_A(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz real y simétrica A, entonces $P_A(A) = 0$. En otras palabras, A satisface su propio polinomio característico.*

Definición 3.3.1. Sea A una matriz de orden n sobre un cuerpo C. El polinomio mínimo de A denotado por ψ_A es el polinomio mónico de menor grado que A satisface, es decir, $\psi_A(A) = 0$. Donde 0 es la matriz nula de orden n.

Afirmación 3.3.1. El polinomio mínimo de A es único.

En efecto, si existen ψ_{A_1} y ψ_{A_2} polinomios mínimos (distintos) de A, entonces

$$\begin{aligned}
\psi_{A_1}(A) = 0 \quad \wedge \quad \psi_{A_2}(A) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \psi_{A_1}(A) = \psi_{A_2}(A) \\
&\Rightarrow \quad \psi_{A_1}(A) - \psi_{A_2}(A) = 0 \\
&\Rightarrow \quad (\psi_{A_1} - \psi_{A_2})(A) = 0.
\end{aligned}$$

Así, A satisface el polinomio $(\psi_{A_1} - \psi_{A_2})$, el cual es de menor grado que ψ_{A_1} y ψ_{A_2}, por ser éstos mónicos. Contradicción. Por tanto, el polinomio mínimo de A es único.

Teorema 3.3.2. *Sea A una matriz de orden n sobre un cuerpo C. Si $\psi_A(x)$ es el polinomio mínimo de A, y si $P(x)$ es un polinomio en C tal que $P(A) = 0$, entonces, $\psi_A(x)$ es un divisor de $P(x)$.*

En particular, el polinomio mínimo $\psi_A(\lambda)$ es un divisor del polinomio característico $P_A(\lambda)$.

Demostración.

Sea A una matriz de orden n sobre un cuerpo C.

Sean $P(x)$ un polinomio tal que $P(A) = 0$ y $\psi_A(x)$ el polinomio mínimo de A. Por el algoritmo de la división existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ para los cuales

$$P(x) = \psi_A(x)Q(x) + R(x) \tag{3.12}$$

con $R(x)$ de grado menor que el grado de $\psi_A(x)$ ó $R(x) = 0$.

Luego,

$$\begin{aligned} P(A) = \psi_A(A)Q(A) + R(A) &\Rightarrow R(A) = P(A) - \psi_A(A)Q(A) \\ &\Rightarrow R(A) = 0 - 0Q(A) \\ &\Rightarrow R(A) = 0 \end{aligned}$$

Así, $R(A) = 0$.

Si $R(x) \neq 0$ entonces $R(x)$ es de grado menor que el de $\psi_A(x)$ y A satisface $R(x)$. Esto contradice la definicion de polinomio mínimo.

Por lo tanto, $R(x) = 0$ y $P(x) = \psi_A(x)Q(x)$, es decir, $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

En particular, si $P_A(\lambda)$ es el polinomio característico de A y $\psi_A(\lambda)$ el polinomio mínimo de A, entonces por el Teorema de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$, así por lo anterior, $\psi_A(\lambda)$ es divisor de $P_A(\lambda)$.

□

Ejemplo 3.3.1. Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda_3 - A) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -4 \\ -2 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)^2 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 \end{aligned}$$

Luego, el polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$$

Tenemos que, $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)^2$

luego las raíces de $P_A(\lambda)$ son: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

El polinomio mínimo es $\psi_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)$.

En efecto, por el Teorema 3.3.2, $\psi_A(\lambda)$ divide al polinomio característico $P_A(\lambda)$. Los únicos polinomios mónicos que dividen a $P_A(\lambda)$ son: $\lambda - 3$ de grado 1, $\lambda - 1$ de grado 1, $(\lambda-3)(\lambda-1)$ de grado 2 y $-P_A(\lambda)$ de grado 3.

Verificaremos cada uno, comenzando por los polinomios de menor grado, hasta encontrar el polinomio al cual A satisface.

$$(A - 3I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego A no satisface el polinomio $\lambda - 3$.

$$(A - 1I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego A no satisface el polinomio $\lambda - 1$.

$$(A - 3I_3)(A - 1I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, luego A satisface el polinomio $(\lambda - 3)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, por lo tanto, el polinomio mínimo de A es:

$$\psi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Teorema 3.3.3. *El polinomio mínimo de A es $\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^{t}(\lambda - \lambda_i)$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ son los distintos valores propios de A.*

Demostración.

Tenemos que, el polinomio mínimo de A, ψ_A, divide a todos los polinomios a los cuales A satisface, es decir, si A satisface un polinomio P existe otro polinomio W, $(W(A) \neq 0)$, tal que,

$$P(A) = W(A)\psi_A(A).$$

Pues, de lo contrario, existiría un polinomio Q al cual A satisface, tal que,

$$Q(A) = W(A)\psi_A(A) + H(A),$$

donde H es un polinomio de grado menor que ψ_A lo que contradice que ψ_A es el polinomio mínimo de A.

El teorema de Cayley-Hamilton nos garantiza que A satisface el polinomio característico de A, es decir, $P_A(A) = 0$, luego dado que ψ_A divide a todo polinomio al cual A satisface, entonces ψ_A divide a P_A.

Luego, existe un polinomio ϕ tal que

$$P_A(\lambda) = \phi(\lambda)\psi_A(\lambda).$$

Pero $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$, donde los λ_i, no todos distintos, son los valores propios de A.

Luego, $\psi_A(A)$ debe ser el producto de algunos de los factores $(\lambda - \lambda_i)$.

Así, $\psi_A(A) = \prod_{i=1}^{t}(\lambda - \lambda_i)$ para algún $t \in \mathbb{N}$.

Donde λ_i, $(1 \leq i \leq t)$, son las raíces de ψ_A, y son los valores propios distintos de A.

$\square$

Capítulo 4

VALORES PROPIOS DE A(G) Y PARÁMETROS DE G

4.1. POLINOMIO CARACTERÍSTICO Y ESPECTRO DE UN GRAFO

4.1.1. Polinomio característico de un grafo

Sea G un grafo de orden n y $A(G)$ su matriz de adyacencia. Como $A(G)$ es cuadrada de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, podemos hallar el polinomio característico de $A(G)$ usando la Definición 3.1.3.

Definición 4.1.1. Sea G un grafo de orden n y $A(G)$ su matriz de adyacencia. El ***polinomio característico de*** G es el polinomio característico de $A(G)$ y lo denotaremos por $P(G;\lambda)$. Así, el polinomio característico de G viene dado por

$$P(G;\lambda) = det(\lambda I_n - A(G)).$$

Ejemplo 4.1.1. Sea G el grafo dado por la Figura 4.1

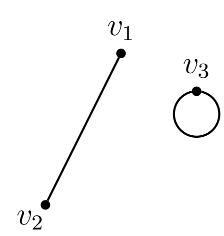

Figura 4.1: Multigrafo

la matriz de adyacencia de G es:

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El polinomio característico de $A(G)$ viene dado por:

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= det(\lambda I - A(G)) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1) det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$P(G;\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

Definición 4.1.2. Sea G un grafo de orden n y $A(G)$ su matriz de adyacencia. El ***polinomio mínimo de*** G**,** , es el polinomio mínimo de $A(G)$, es decir, es el polinomio mónico de menor grado que $A(G)$ satisface, y lo denotaremos por $\psi(G;\lambda)$. Es decir, $\psi(G; A(G)) = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden n.

Ejemplo 4.1.2. El polinomio mínimo del grafo dado por la Figura 4.1 es:
$\psi(G;\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1$

Proposición 4.1.1. *Sea G un grafo de orden n si $G_1, G_2, \ldots, G_r$ son las componentes de G, entonces*

$$P(G;\lambda) = P(G_1;\lambda)P(G_2;\lambda)\ldots P(G_r;\lambda).$$

Demostración.

Sea G un grafo cuyas componentes son $G_1, G_2, \ldots, G_r$.

Considerando $V(G) = \{V(G_1), V(G_2), \ldots, V(G_r)\}$ como un conjunto ordenado, podemos expresar la matriz de adyacencia de G como la matriz por bloques siguiente:

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A(G_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A(G_r) \end{bmatrix}.$$

Luego, el polinomio característico de G viene dado por:

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= det(\lambda I_n - A(G)) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda I_{G_1} - A(G_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda I_{G_2} - A(G_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda I_{G_r} - A(G_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde I_{G_s}, con $1 \leq S \leq r$, representa la matriz identidad cuyo orden es igual al orden de G_s y 0 representa una matriz nula.

Luego,

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= det(\lambda I_{G_1} - A(G_1))det(\lambda I_{G_2} - A(G_1))\ldots det(\lambda I_{G_r} - A(G_1)) \\ &= P(G_1;\lambda)P(G_2;\lambda)\ldots P(G_r;\lambda). \end{aligned}$$

Así,

$$P(G;\lambda) = P(G_1;\lambda)P(G_2;\lambda)\ldots P(G_r;\lambda).$$

□

4.1.2. Valores propios y espectro de un grafo

Definición 4.1.3. Sean G un grafo y $A(G)$ la matriz de adyacencia de G. Los ***valores propios*** de G son los valores propios de $A(G)$, es decir, las raíces de $P(G;\lambda)$.

Definición 4.1.4. Sea G un grafo. Los distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de G, tal que, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, con sus respectivas multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_n$, definen el ***espectro*** de G. Lo denotaremos por $Spec(G)$ y lo expresaremos mediante una matriz siguiente:

$$Spec(G) = [S_{ij}]_{2\times n}$$

donde,

$$S_{ij} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i = 1 \\ m_j & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.3. Sea G el grafo dado por la Figura 4.1, luego por el Ejemplo 4.1.1 el polinomio característico de G viene dado por:

$$P(G;\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Así las raíces del polinomio característico $P(G;\lambda)$, es decir, los valores propios de G son:

$$\lambda_1 = 1 \text{ con } m_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \text{ con } m_2 = 1$$

Luego, el espectro de G es:

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. ESPECTRO DE CIERTO TIPO DE GRAFOS

4.2.1. Espectro de grafos completos

Ejemplo 4.2.1. Hallemos el espectro de K_3.

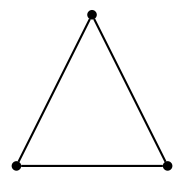

Figura 4.2: Grafo completo de orden 3.

La matriz de adyacencia de K_3 viene dada por:

$$A(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar el espectro de K_3 debemos hallar los valores propios de $A(K_3)$, para ello, buscaremos las raíces del polinomio característico $P_{A(K_3)}(\lambda)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{A(K_3)}(\lambda) &= det(\lambda I_3 - A(K_3)) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 - 3\lambda - 2. \end{aligned}$$

Así,

$$P_{A(K_3)}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} P_{A(K_3)}(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda = 2) \vee (\lambda = -1). \end{aligned}$$

Luego, $P_{A(K_3)}(\lambda)$ tiene dos raíces que son, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades 2 y 1 respectivamente.

Por lo tanto,

$$Spec(K_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $2 = 3 - 1 = n - 1$.

Generalizando tenemos que:

El espectro de K_n viene dado por:

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, la matriz de adyacencia de K_n viene dada por $A(K_n) = [a_{ij}]_n$ donde,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Podemos escribir $A(K_n) = J_n - I_n$, donde:

- $J_n = [b_{ij}]$ es una matriz de orden n tal que, $b_{ij} = 1$ para todo i, j.
- I_n es la matriz identidad de orden n.

Luego, para hallar el espectro de K_n debemos hallar los valores propios de $A(K_n)$, para ello, buscaremos el polinomio característico de $P_{A(K_n)}(\lambda)$. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P_{A(K_n)}(\lambda) &= det(\lambda I_n - A(k_n)) \\
&= det(\lambda I_n - (J_n - I_n)) \\
&= det((\lambda + 1)I_n - J_n)) \\
&= det(\lambda' I_n - J_n) \\
&= P_{J_n}(\lambda')
\end{aligned}
$$

donde $\lambda' = \lambda + 1$.

Así, para hallar las raíces de $P_{A(K_n)}(\lambda)$ es suficiente hallar las raíces de $P_{J_n}(\lambda')$. Usaremos el **Método de Leverrier**[3.1.3] para encontrar los coeficientes P_i de

$$P_{J_n}(\lambda') = \sum_{i=0}^{n} P_i(\lambda')^{n-i}.$$

Probemos por inducción sobre k, que la k-ésima potencia de la matriz J_n viene dada por:

$${J_n}^k = [n^{k-1}]_n.$$

Donde $k \in \mathbb{N}_0$.

Hallemos ${J_n}^2$.

En J_n todas las entradas son igual a 1, por lo tanto, cada una de las entradas de ${J_n}^2$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 \\
&= 1 + 1 + \cdots + 1 \\
&= n
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$J_n{}^2 = [n]_n = [n^{2-1}]_n.$$

Supongamos ahora que,

$$J_n{}^s = [n^{s-1}]_n.$$

Probemos que se cumple que

$$J_n{}^{s+1} = [n^s]_n.$$

Tenemos que,

$$J_n^{s+1} = J_n^s \cdot J_n.$$

Por otro lado $J_n = [1]_n$ y por hipótesis de inducción $J_n{}^s = [n^{s-1}]_n$. Así cada entrada de J_n^{s+1} es igual a:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n^{s-1} & n^{s-1} & \cdots & n^{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} &= n^{s-1} \cdot 1 + n^{s-1} \cdot 1 + \cdots + n^{s-1} \cdot 1 \\
&= n \cdot n^{s-1} \\
&= n^s
\end{aligned}$$

Así,

$$J_n{}^{s+1} = [n^s]_n = [n^{(s+1)-1}]_n.$$

En consecuencia,

$$Tr(J_n{}^k) = \sum_{p=1}^{n} n^{k-1} = n \cdot n^{k-1} = n^k$$

para todo k, tal que $1 \leq k \leq n$.

Así,

$$Tr({J_n}^k) = n^k.$$

Ahora hallaremos los coeficientes del polinomio característico de J_n.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= -\frac{1}{1}[P_0 Tr(J_n)] = -Tr(J_n) = -n \end{aligned}$$

$P_q = 0$, para todo número entero $2 \leq q \leq n$.

En efecto,

$P_2 = -\frac{1}{2}[P_0 Tr(J_n^2) + P_1 Tr(J_n)] = -\frac{1}{2}[1(n^2) + (-n)n] = -\frac{1}{2}(n^2 - n^2) = 0.$

Sabiendo que $P_2 = 0$, supongamos que es cierto también para todo número entero q, tal que, $2 < n \leq q$, esto es,

$$\begin{aligned} P_3 &= 0 \\ &\vdots \\ P_{q-1} &= 0 \\ P_q &= 0. \end{aligned}$$

Probemos que se cumple que

$$P_{q+1} = 0.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
P_{q+1} &= -\frac{1}{q+1}[P_0Tr(J_n^{q+1}) + P_1Tr(J_n^q) + \ldots + P_{q-1}Tr(J_n^2) + P_qTr(J_n)] \\
&= -\frac{1}{q+1}[P_0Tr(J_n^{q+1}) + P_1Tr(J_n^q)] \\
&= -\frac{1}{q+1}[n^{q+1} + (-n)n^q] \\
&= -\frac{1}{q+1}[n^{q+1} - n^{q+1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así, el polinomio característico de J_n viene dado por:

$$P_{j_n}(\lambda') = (\lambda')^n - n(\lambda')^{n-1} = (\lambda')^{n-1}(\lambda' - n).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P_{J_n}(\lambda') = 0 &\Leftrightarrow (\lambda')^{n-1}(\lambda' - n) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda' = 0) \vee (\lambda' = n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\lambda' = \lambda + 1$, tenemos: $\lambda + 1 = 0$ ó $\lambda + 1 = n$ de aquí, $\lambda = -1$ ó $\lambda = n - 1$.

Por otro lado, las multiplicidades se mantienen respecto a λ'.

Luego, $P_{A(K_n)}(\lambda)$ tiene dos raíces que son, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = n - 1$ con multiplicidades $n - 1$ y 1 respectivamente.

Por lo tanto, $Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$.

4.2.2. Espectro de grafos bipartitos completos

Ejemplo 4.2.2. Hallemos el espectro de $K_{2,1} = (V_1 \cup V_2, E)$.

La matriz de adyacencia de $K_{2,1}$ viene dada por:

$$A(K_{2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

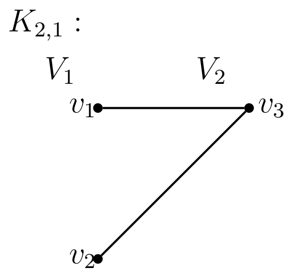

Figura 4.3: Biclique $K_{2,1}$

Para hallar el espectro de $K_{2,1}$ debemos hallar los valores propios de $A(K_{2,1})$, para ello, buscaremos las raíces del polinomio característico $P_{A(K_{2,1})}(\lambda)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} det(\lambda I_3 - A(K_{2,1})) &= det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 - 2\lambda. \end{aligned}$$

Así,

$$P_{A(K_{2,1})}(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} P_{A(K_{2,1})}(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda = \sqrt{2}) \vee (\lambda = -\sqrt{2}) \vee (\lambda = 0). \end{aligned}$$

Luego, $P_{A(K_{2,1})}(\lambda)$ tiene tres raíces que son, $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ y $\lambda = 0$ todas con multiplicidad 1.

Por lo tanto,

$$Spec(K_{2,1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que si $m = 3$, entonces $2 = mn$ y $1 = 3 - 2 = m + n - 2$, esto ocurre para todos los grafos bipartitos completos, como lo veremos a continuación.

El espectro del grafo $K_{m,n}$ viene dado por:

$$Spec(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0 & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto,

La matriz de adyacencia de $k_{m,n}$ puede ser expresada como una matriz por bloques, salvo permutaciones de vértices, como sigue:

$$A(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [1]_{m\times n} \\ [1]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}.$$

Para hallar el espectro de $K_{m,n}$ debemos hallar los valores propios de $A(K_{m,n})$, es decir las raíces del polinomio $P_{A(K_{m,n})}(\lambda) = det(\lambda I_n - A(K_{m,n}))$ y sus respectivas multiplicidades.

Hacemos $A = A(k_{m,n})$.

Para hallar dicho polinomio, usaremos nuevamente el **Método de Leverrier**, para ello debemos hallar A^k, con $2 \leq k \leq m+n$. Haremos la prueba por inducción sobre k.

Para $k = 2p$ tenemos que:

$$A^{2p} = \begin{bmatrix} [n^p m^{p-1}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^p n^{p-1}]_{n\times n.} \end{bmatrix}$$

Probemos para $p = 1$.

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A \\ &= \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [1]_{m\times n} \\ [1]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [1]_{m\times n} \\ [1]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [n]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [n^1 m^0]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^1 n^0]_{n\times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$A^2 = \begin{bmatrix} [n^1m^0]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^1n^0]_{n\times n} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Luego se cumple para $p = 1$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que, para $p = q$, se cumple que:

$$A^{2q} = \begin{bmatrix} [n^q m^{q-1}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^q n^{q-1}]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Probemos ahora que se cumple que, para $p = q + 1$

$$A^{2(q+1)} = \begin{bmatrix} [n^{q+1} m^{q}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^{q+1} n^{q}]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Veamos,

$$\begin{aligned} A^{2(q+1)} &= A^{2q} \cdot A^2 \\ &= \begin{bmatrix} [n^q m^{q-1}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^q n^{q-1}]_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [n]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [m(n^{q+1} m^{q-1})]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [n(m^{q+1} n^{q-1})]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [n^{q+1} m^{q}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^{q+1} n^{q}]_{n\times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$A^{2(q+1)} = \begin{bmatrix} [n^{q+1} m^{q}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^{q+1} n^{q}]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Luego, se cumple que, para $k = 2p$

$$A^{2p} = \begin{bmatrix} [n^p m^{p-1}]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m^p n^{p-1}]_{n\times n.} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, para $k = 2p + 1$ tenemos que:

$$A^{2p+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^p n^p]_{m\times n} \\ [n^p m^p]_{n\times m} & [0]_{n\times n}. \end{bmatrix}$$

Probemos que se cumple para $p = 1$.

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} [n]_{m\times m} & [0]_{m\times n} \\ [0]_{n\times m} & [m]_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [1]_{m\times n} \\ [1]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [mn]_{m\times n} \\ [nm]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$A^3 = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [mn]_{m\times n} \\ [nm]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Luego se cumple para $p = 1$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que, para $p = q$, se cumple que:

$$A^{2q+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^q n^q]_{m\times n} \\ [n^q m^q]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Probemos ahora que se cumple que, para $p = q + 1$

$$A^{2(q+1)+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^{q+1} n^{q+1}]_{m\times n} \\ [n^{q+1} m^{q+1}]_{n\times m} & [0]_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
A^{2(q+1)+1} &= A^{2q+1}\cdot A^2\\
&= \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^q n^q]_{m\times n}\\ [n^q m^q]_{n\times m} & [0]_{n\times n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} [n]_{m\times m} & [0]_{m\times n}\\ [0]_{n\times m} & [m]_{n\times n}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [n(m^{q+1} n^q)]_{m\times n}\\ [m(n^{q+1} m^q)]_{n\times m} & [0]_{n\times n}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^{q+1} n^{q+1}]_{m\times n}\\ [n^{q+1} m^{q+1}]_{n\times m} & [0]_{n\times n}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
A^{2(q+1)+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^{q+1} n^{q+1}]_{m\times n}\\ [n^{q+1} m^{q+1}]_{n\times m} & [0]_{n\times n}\end{bmatrix}.
$$

Luego, se cumple que, para $k = 2p+1$

$$
A^{2p+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^p n^p]_{m\times n}\\ [n^p m^p]_{n\times m} & [0]_{n\times n}.\end{bmatrix}
$$

Ahora hallemos $Tr(A^k)$.

Dado que,

$$
A^{2p} = \begin{bmatrix} [n^p m^{p-1}]_{m\times m} & [0]_{m\times n}\\ [0]_{n\times m} & [m^p n^{p-1}]_{n\times n.}\end{bmatrix}
$$

entonces,

$$
Tr(A^{2p}) = m(n^p m^{p-1}) + n(m^p n^{p-1}) = n^p m^p + m^p n^p = 2n^p m^p.
$$

Así,

$$
Tr(A^{2p}) = 2n^p m^p.
$$

Y como

$$
A^{2p+1} = \begin{bmatrix} [0]_{m\times m} & [m^p n^p]_{m\times n}\\ [n^p m^p]_{n\times m} & [0]_{n\times n}\end{bmatrix}
$$

entonces,

$$Tr(A^{2p+1}) = 0$$

Luego, tenemos que, la traza de A^k, con $(1 < k \leq m+n)$, viene dada por:

$$Tr(A^k) = \begin{cases} 2n^p m^p, & \text{si } k = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si } k = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Hallemos ahora los coeficientes P_i, con $(1 \leq i \leq m+n)$, de $P_A(\lambda)$.

Si $i = 2t$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{2t} &= -\frac{1}{2t}[P_0 Tr(A^{2t}) + P_1 Tr(A^{2t-1}) + P_2 Tr(A^{2t-2}) + \ldots + P_{2t-2} Tr(A^2) + P_{2t-1} Tr(A)] \\ &= -\frac{1}{2t}[P_0(2n^t m^t) + P_2(2n^{t-1}m^{t-1}) + \ldots + P_{2t-2}(2nm)] \quad \text{por (4.2).} \\ &= -\frac{1}{t}[P_0(nm)^t + P_2(nm)^{t-1} + \ldots + P_{2t-2}(nm)] \end{aligned}$$

Así,

$$P_{2t} = -\frac{1}{t}[P_0(nm)^t + P_2(nm)^{t-1} + \ldots + P_{2t-2}(nm)] \tag{4.3}$$

Por otro lado, si $i = 2t+1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{2t+1} &= -\frac{1}{2t+1}[P_0 Tr(A^{2t+1}) + P_1 Tr(A^{2t}) + P_2 Tr(A^{2t-1}) + \ldots + P_{2t-1} Tr(A^2) + P_{2t} Tr(A)] \\ &= -\frac{1}{2t+1}[P_1(2n^t m^t) + P_3(2n^{t-1}m^{t-1}) + \ldots + P_{2t-1}(2nm)] \quad \text{por (4.2)} \\ &= -\frac{2}{2t+1}[P_1(nm)^t + P_3(nm)^{t-1} + \ldots + P_{2t-1}(nm)] \end{aligned}$$

Así,

$$P_{2t+1} = -\frac{2}{2t+1}[P_1(nm)^t + P_3(nm)^{t-1} + \ldots + P_{2t-1}(nm)]. \tag{4.4}$$

Luego, por (4.3) y (4.4), tenemos que

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = -\frac{2}{1}(0) = 0$$
$$P_2 = -\frac{1}{1}[P_0(nm)] = -nm$$
$$P_3 = -\frac{2}{2(1)+1}[P_1(nm)^t] = -\frac{2}{3}(0) = 0$$
$$P_4 = -\frac{1}{2}[P_0(nm)^2 + P_2(nm)^{2-1} + P_3(nm)] = -\frac{1}{2}[(nm)^2 + (-nm)(nm) + 0] = 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 0 \\ P_2 &= -nm \\ P_3 &= 0 \\ P_4 &= 0. \end{aligned}$$

Continuando en forma recursiva tenemos que:

$$P_5 = P_6 = \ldots = P_{m+n} = 0.$$

En consecuencia, el polinomio característico de $A = A_{K_{m,n}}$ es:

$$P_{A(k_{m,n})}(\lambda) = \lambda^{m+n} - (mn)\lambda^{(m+n)-2}$$

el cual es de orden $m+n$. Encontremos las raíces de $P_{A(k_{m,n})}(\lambda)$.

$$P_{A(K_{m,n})}(\lambda) = 0 \quad \text{sii} \quad \lambda^{(m+n)-2}(\lambda^2 - mn) = 0$$

por lo tanto las raíces de $P_{A(K_{m,n})}(\lambda)$ son:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \text{con multiplicidad} & m+n-2 \\ \sqrt{mn} & \text{con multiplicidad} & 1 \\ -\sqrt{mn} & \text{con multiplicidad} & 1. \end{array}$$

De esta manera,

$$Spec(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0 & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. GRAFOS CO-ESPECTRALES

Definición 4.3.1. Los grafos G_1 y G_2 son ***co-espectrales*** si

$$Spec(G_1) = Spec(G_2).$$

Teorema 4.3.1. *Si dos grafos son isomorfos entonces tienen el mismo espectro.*

Demostración. Sean G_1 y G_2 grafos isomorfos con matrices de adyacencias $A(G_1)$ y $A(G_2)$ respectivamente.

Por Observación 2.1.2 tenemos que, $A(G_1)$ y $A(G_2)$ son semejantes, Luego, por Teorema 3.1.3, matrices semejantes poseen el mismo polinomio característico. Por lo tanto, $P(G_1;\lambda) = P(G_2;\lambda)$, en consecuencia, los valores propios de G_1 y sus correspondientes multiplicidades coinciden con los valores propios de G_2 y sus correspondientes multiplicidades. Así, $Spec(G_1) = Spec(G_2)$. □

Corolario 4.3.1. *Si dos grafos son isomorfos entonces son co-espectrales.*

Demostración. Directamente del Teorema 4.3.1 y Definición 4.3.1. □

El recíproco del Corolario 4.3.1 no necesariamente es cierto, pues existen grafos co-espectrales no isomorfos como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.1. Los grafos G_1 y G_2 de la Figura 4.4 no son isomorfos, pues en G_1 existe 1 vértice aislado, y G_2 no posee vértices aislados. Pero G_1 y G_2 son co-espectrales.

En efecto,

Encontremos el espectro de G_1.

Consideremos la matriz de adyacencia de G_1 como sigue:

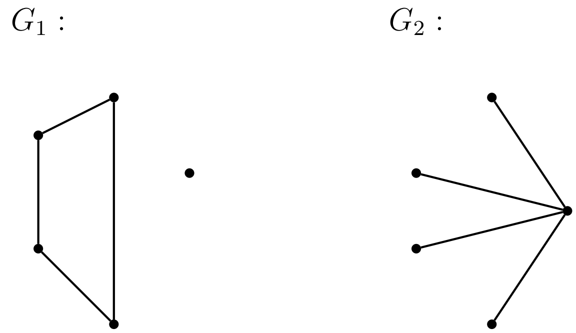

Figura 4.4: Grafos co-espectrales

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallemos $P(G_1; \lambda)$ por el método de Leverrier, para ello hallemos $Tr(A(G_1))$, $Tr(A(G_1)^2)$, $Tr(A(G_1)^3)$, $Tr(A(G_1)^4)$, $Tr(A(G_1)^5)$.

Tenemos que:

$$Tr(A(G_1)) = 0.$$

$$A(G_1)^2 = A(G_1)A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_1)^2) = 8$.

$$A(G_1)^3 = A(G_1)^2 A(G_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_1)^3) = 0$.

$$A(G_1)^4 = A(G_1)^3 A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_1)^4) = 32$.

$$A(G_1)^5 = A(G_1)^4 A(G_1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_1)^5) = 0$.

Ahora hallemos los coeficientes de $P(G_1; \lambda)$.

$P_0 = 1.$

$P_1 = \dfrac{1}{1}[P_0Tr(A(G_1))] = 0.$

$P_2 = \dfrac{1}{2}[P_0Tr(A(G_1)^2 + P_1Tr(A(G_1))] = \dfrac{1}{2}[8 + 0] = -4.$

$P_3 = \dfrac{1}{3}[P_0Tr(A(G_1)^3 + P_1Tr(A(G_1)^2) + P_2Tr(A(G_1))] = \dfrac{1}{3}[0 + 0 + 0] = 0.$

$$\begin{aligned}
P_4 &= \frac{1}{4}[P_0Tr(A(G_1)^4 + P_1Tr(A(G_1)^3) + P_2Tr(A(G_1)^2 + P_3Tr(A(G_1))] \\
&= \frac{1}{4}[32 + 0 - 32 + 0] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5 &= \frac{1}{5}[P_0Tr(A(G_1)^5 + P_1Tr(A(G_1)^4) + P_2Tr(A(G_1)^3 + P_3Tr(A(G_1)^2) + P_4Tr(A(G_1))] \\
&= \frac{1}{5}[0 + 0 + 0 + 0 + 0] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego,

$$P(G_1; \lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3.$$

Encontremos las raíces de $P(G_1; \lambda)$.

$$\begin{aligned}
P(G_1; \lambda) = 0 &\Rightarrow \lambda^5 - 4\lambda^3 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 4) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda = 0 \lor \lambda^2 - 4 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda = 0 \lor \lambda = -2 \lor \lambda = 2.
\end{aligned}$$

Así los valores propios de $P(G_1; \lambda) son :$

$\lambda = 0$, con multiplicidad 3.

$\lambda = -2$, con multiplicidad 1.

$\lambda = 2$, con multiplicidad 1.

En consecuencia el espectro de G_1 viene dado por:

$$Spec(G_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallemos ahora el espectro de G_2:

Consideremos la matriz de adyacencia de G_2 como sigue:

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontremos $P(G_2; \lambda)$ usando el método de Leverrier. Debemos hallar $Tr(A(G_2))$, $Tr(A(G_2)^2)$, $Tr(A(G_2)^3)$, $Tr(A(G_2)^4)$, $Tr(A(G_2)^5)$.

Tenemos que:

$Tr(A(G_2)) = 0$.

$$A(G_2)^2 = A(G_2)A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_2)^2) = 8$.

$$A(G_2)^3 = A(G_2)^2A(G_2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_2)^3) = 0$.

$$A(G_2)^4 = A(G_2)^3A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_2)^4) = 32$.

$$A(G_2)^5 = A(G_2)^4A(G_2) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $Tr(A(G_2)^5) = 0$.

Se observa que, $Tr(G_2)^k = Tr(G_1)^k$, para todo $k \in \{1, \ldots, 5\}$. Enconsecuencia por el método de Leverrier obtendremos que, $P(G_2; \lambda) = P(G_1; \lambda)$, y así,

$$Spec(G_2) = Spec(G_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, G_1 y G_2 son co-espectrales.

4.4. CARACTERIZACIÓN DE UN GRAFO MEDIANTE SU ESPECTRO

En la Sección 4.3 vimos que, si conocemos el espectro de un grafo, no necesariamente podemos saber cual es el grafo en cuestión, dado que existen grafos co-espectrales no isomorfos, esto significa que algunos parámetros de grafos no pueden ser caracterizados por su espectro, por ejemplo, la existencia de ciclos de longitud 4 y el grado de los vértices no dependen de su espectro como pudimos notar en la Figura 4.4. Sin embargo, podemos determinar a partir del espectro de un grafo, ciertas caracteristicas referente a sus parámetros como veremos a continuación.

4.4.1. Grafos determinados por su espectro

Determinar un grafo únicamente a través de su espectro es una tarea bastante díficil. Entre los grafos determinados por su espectro, se encuentran: grafos completos, grafos regulares, bipartitos completos, grafos ciclos, entre otros, los cuales fueron estudiados por Van Dam y Haemers en el año 2003.

Definición 4.4.1. Diremos que un grafo G es ***determinado por su espectro,*** si conociendo solamente $Spec(G)$ podemos construir a G.

Teorema 4.4.1. *Un grafo G posee un único valor propio $\lambda = 0$ si y solamente si G es nulo.*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea G un grafo de orden n, tal que $\lambda = 0$ es su único valor propio y de multiplicidad n. Tenemos que, por Definición 4.1.2 y Teorema 3.3.3, el polinomio mínimo de $A(G)$ viene dado por:

$$\psi(G; \lambda) = \lambda - 1 = \lambda.$$

Por definición de polinomio mínimo, $A(G)$ satisface $\psi(G; \lambda)$, en consecuencia,

$$[0]_n = \psi(G; \lambda) = A(G),$$

donde $[0]_n$ es la matriz nula de orden n.

Así, $A(G) = [0]_n$. Luego G es el grafo nulo de orden n.

($\Longleftarrow$) Sea G un grafo nulo de orden n.

Tenemos que $A(G)$ es la matriz nula de orden, luego el polinomio característico de G viene dado por:

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= det(\lambda I_n - A(G)) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^n. \end{aligned}$$

Así, $P(G;\lambda) = \lambda^n$, luego $0 = P(G;\lambda) = \lambda^n$ implica que $\lambda^n = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$.
En consecuencia, G posee un único valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad n. □

Corolario 4.4.1. *Grafos nulos son caracterizados por su espectro.*

Demostración. Directamente del Teorema 4.4.1. □

4.4.2. Cotas para algunos parámetros de grafos

Cotas para el grado máximo y el grado minimo de G

Lema 4.4.1. *Para todo grafo simple G, de orden n se cumple:*

$$\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \lambda_{max}(G) \leq \triangle(G).$$

Demostración. Sea G un grafo simple de orden, tal que, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sean λ un valor propio de G y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
un vector propio de G asociado a λ, es decir,

$$A(G)X = \lambda X. \tag{4.5}$$

Sea x_j la coordenada de mayor valor en X, es decir, $x_j = max\{x_i\}_{i=1}^n$.

Denotemos por $(AX)_j$, la coordenada j-ésima de $A(G)X$. Luego por (4.5)

$$(AX)_j = \lambda x_j.$$

Sea $I_{v_j} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : v_i \in N_G(v_j)\}$. Así, tenemos que

$$\lambda x_j = (AX)_j = \sum_{i \in I_{v_j}} x_i \leq |N_G(v_j)| x_j = d_G(v_j) x_j \leq \triangle(G) x_j.$$

En consecuencia,

$$\lambda \leq \triangle(G), \qquad \text{para todo } \lambda.$$

Luego $\triangle(G)$ es una cota superior de $\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } G\}$. Así por definición de máximo,

$$\lambda_{max} \leq \triangle(G). \tag{4.6}$$

Por otro lado, sea $1_n = [1]_{n\times 1}$, aplicando el Lema (4.4.2) al vector $(\frac{1}{\sqrt{n}})1_n = [\frac{1}{\sqrt{n}}]_{n\times 1}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &\geq [\frac{1}{\sqrt{n}}]^t_{n\times 1} A(G) [\frac{1}{\sqrt{n}}]_{n\times 1} \\ &= \frac{1}{n}(1^t_n A(G) 1_n) \end{aligned}$$

como,

$$\begin{aligned} 1^t_n A(G) 1_n &= \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{1\times n} A(G) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{in} \end{bmatrix}_{1\times n} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \\ &= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij}) \end{aligned}$$

tenemos:

$$1_n^t A(G) 1_n = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}).$$

Luego, por Observación 2.1.1(d), $d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, así

$$\lambda_{max} \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_G(v_j) = \bar{d}(G)$$

y por Observación 1.1.4 tenemos que,

$$\lambda_{max} \geq \bar{d}(G) \geq \delta(G). \tag{4.7}$$

en consecuencia, por (4.6) y (4.7)

$$\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \lambda_{max}(G) \leq \triangle(G).$$

Así queda probabado el lema. □

Cota superior para el diámetro de G.

Definición 4.4.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y sean $u, v \in V(G)$. Definimos la ***distancia*** de u a v denotada por $d(u, v)$, como sigue:

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ t & \text{si } t = min\{long[u,v] : u, v \in V(G)\} \\ \infty & \text{si no existe cadena de extremos } u, v. \end{cases}$$

Definición 4.4.3. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Definimos ***diámetro*** de G, $diam(G)$, como sigue:

$$diam(G) = \begin{cases} max\{d(u,v) : u, v \in V(G)\} & \text{si } G \text{ es conexo.} \\ \infty & \text{si } G \text{ es disconexo.} \end{cases}$$

Teorema 4.4.2. *El diámetro de un grafo conexo G de orden n, es menor que el número de valores propios distintos de G.*

Demostración.

Sean G un grafo conexo de orden n, tal que, $diam(G) = d$, y $A = A(G)$ la matriz de adyacencia de G con k valores propios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Queremos probar que $d < k$.

Por Teorema 3.3.3, el polinomio mínimo de G, viene dado por

$$\psi(G; \lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) = \beta_0 \lambda^0 + \beta_1 \lambda^1 + \ldots + \beta_k \lambda^k,$$

donde $\beta_0, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ y $\beta_k \neq 0$.

Tenemos por definición de polinomio mínimo que $\psi(G; A) = 0$, así,

$$0 = \psi(G; A) = \beta_0 A^0 + \beta_1 A^1 + \ldots + \beta_k A^k, \tag{4.8}$$

donde A^l, con $0 \leq l \leq k$, representa la l-ésima potencia de A y 0 es la matriz nula de orden n.

Dado que $\beta_k \neq 0$, por 4.8 podemos expresar a A^k como combinación lineal de $A^0, \ldots, A^{k-1}$; es decir,

$$A^k = \alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \ldots + \alpha_{k-1} A^{k-1}, \tag{4.9}$$

donde $\alpha_t = \frac{\beta_t}{\beta_k}$.

Supongamos que,

$$k \leq d = max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}. \tag{4.10}$$

Dado que G es conexo, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, existe una cadena que los une, así, $d(u, v) > 0$ para todo $u, v \in V(G)$.

Por (4.10) tenemos que existen $v_i, v_j \in V(G)$, tales que,

$$d(v_i, v_j) = k > 0 \tag{4.11}$$

Consideremos a_{ij}^l como la ij-ésima entrada de A^l, con $0 \leq l \leq k$.

Por Proposición 2.2.1 a_{ij}^k es el número de cadenas de longitud k que unen a v_i con v_j.

Así, por (4.11) tenemos que:

(a) $a_{ij}^k > 0$.

(b) $a_{ij}^t = 0$, para todo $t < k$.

Pero por 4.9 y (b), tenemos que,

$$a_{ij}^k = \alpha_0 a_{ij}^0 + \alpha_1 a_{ij}^1 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{ij}^{k-1} = 0.$$

Contradicción con (a).

Luego, hemos probado que, el diámetro de un grafo conexo G de orden n es menor que el número de valores propios distintos de G.

□

4.4.3. Subgrafos inducidos y sus valores propios

Lema 4.4.2. [6] *Sean A una matriz de orden n real y simétrica y $f : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = x^t A x$$

entonces f alcanza su máximo y mínimo en los vectores propios unitarios u y v de A respectivamente, asociados a los valores propios máximo y minimo de A respectivamente.

Sean G un grafo de orden n y $A(G)$ la matriz de adyacencia de G.

Sea $B = \{\lambda :\ \lambda$ es un valor propio de $A(G)\}$.

Por Observación b, tenemos que $B \subset \mathbb{R}$ y $|B| = n$, luego B es acotado en $\mathbb{R}$.

Denotaremos por:

$$\lambda_{max}(G) = maxB$$

$$\lambda_{min}(G) = minB.$$

Lema 4.4.3. *Si G' es un subgrafo inducido de G, entonces se tiene:*

$$\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{min}(G') \leq \lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G).$$

Demostración.

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo de orden n. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y que la matriz de adyacencia de G viene dada por:

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n.} \end{array}$$

Sea $G' = (V(G'), E(G'))$ un grafo inducido de G.

Por definición de mínimo, es evidente que,

$$\lambda_{min}(G') \leq \lambda_{max}(G')$$

falta probar que:

$$\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{min}(G') \tag{4.12}$$

$$\lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G). \tag{4.13}$$

Definimos, $f : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = x^t A(G)x. \tag{4.14}$$

Probemos (4.13).

Por Lema 4.4.2, f alcanza su máximo en $v_0 = \begin{bmatrix} v_0^1 \\ \vdots \\ v_0^n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que v_0 es un vector propio de $A(G)$ unitario.

Así, para todo $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$,

$$f(x) \leq f(v_0),$$

es decir,

$$\begin{aligned}
x^t A(G)x &\leq v_0^t A(G) v_0 \\
&= v_0^t \lambda_{max}(G) v_0 \qquad (v_0 \text{ es vector propio asociado a } \lambda_{max}(G)) \\
&= \begin{bmatrix} v_0^1 & \ldots & v_0^n \end{bmatrix} \lambda_{max}(G) \begin{bmatrix} v_0^1 \\ \vdots \\ v_0^n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_{max}(G)((v_0^1)^2 + \ldots + (v_0^n)^2) \\
&= \lambda_{max}(G) \cdot 1 \qquad (v_0 \text{ es un vector unitario}) \\
&= \lambda_{max}(G).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x^t A(G)x \leq \lambda_{max} \qquad \text{para todo } x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Por otro lado, sin perdida de generalidad supongamos que $V(G') = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$, donde $q \leq n$. Entonces

$$A(G') = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_q \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qq} \end{bmatrix}_{q\times q.} \end{array}$$

Así, tenemos que $A(G')$ es una submatriz principal superior izquierda de $A(G)$.

Definimos, $g : M_{q\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g(x) = x^t A(G')x. \tag{4.15}$$

Por Lema 4.4.2 g alcanza su máximo en $z' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_q \end{bmatrix} \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$, donde z' es un vector propio de $A(G')$ unitario.

Sea z el vector unitario en $\mathbb{R}^n$ que se obtiene agregando $n-q$ ceros a z' a partir de su ultima coordenada, es decir,

$$z = \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Luego como g alcanza su máximo en z', tenemos que,

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(G') &= (z')^t A(G')(z') \\ &= z^t A(G) z \\ &= \lambda_{max}(G). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G).$$

La prueba de (4.12) es análoga a la de (4.13).

Luego se tiene que,

$$\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{min}(G') \leq \lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G).$$

□

4.4.4. Relación entre valores propios y grafos bipartitos

Lema 4.4.4. *Si $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ es un grafo bipartito y λ es un valor propio de G con multiplicidad m, entonces $-\lambda$ es también un valor propio de G con multiplicidad m.*

Demostración.

Sea $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ un grafo bipartito de orden n. Supongamos que G es balanceado, es decir, $|V_1(G)| = |V_2(G)| = q$.

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los vértices de G, y supongamos sin perdida de generalidad que $v_1, \ldots, v_q \in V_1(G)$ y $v_{q+1}, \ldots, v_n \in V_2(G)$. Luego, $n = 2q$ y así,

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_q \\ v_{q+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \ldots & v_q & v_{q+1} & \cdots & v_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \ldots & 0 & a_{1(q+1)} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{q(q+1)} & \ldots & a_{qn} \\ a_{(q+1)1} & \ldots & a_{(q+1)n} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nq} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Por lo tanto, podemos expresar a $A(G)$ como sigue:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix},$$

donde $0, B$ y B^t son matrices cuadradas de orden q.

Supongamos que λ un valor propio de G, con multiplicidad m y sea $v = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$,

un vector propio de G, asociado al valor propio λ, donde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$,

un vector propio asociado al valor propio λ.

Luego por definición se cumple que

$$Av = \lambda v$$

Así que,

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BY \\ B^t X \end{bmatrix} = \lambda v = \begin{bmatrix} \lambda X \\ \lambda Y. \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} \lambda X \\ \lambda Y. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BY \\ B^t X \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\lambda X = BY$$
$$\lambda Y = B^t X$$

por lo tanto,

$$-\lambda X = B(-Y)$$
$$-\lambda(-Y) = B^t X.$$

Así el vector $v' = \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $-\lambda$.

En efecto,

$$-\lambda v' = -\lambda \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(-y) \\ B^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = Av'.$$

Por otro lado, la multiplicidad de λ es independiente de los vectores propios asociados a λ. De la misma manera ocurre para $-\lambda$, por lo tanto la multiplicidad de $-\lambda$ es igual a la multiplicidad de λ, es decir m.

Por otro lado supongamos que $|V_1(G)| = q$ y $|V_2(G)| = t$ donde q y t son enteros positivos tal que $q < t$, así $q + c = t$ para algún entero positivo c.

Luego agregamos c vértices aislados $V = \{v_{q+1}, \ldots, v_{q+c}\}$ a G.

Así, obtenemos un nuevo grafo bipartito $G' = (V_1(G') \cup V_2(G'), E(G'))$ donde,

$$\begin{aligned} V_1(G') &= V_1(G) \cup V \\ V_2(G') &= V_2(G) \\ E(G') &= E(G) \end{aligned}$$

Además, $|V_1(G')| = |V_2(G')|$.

Luego, para construir $A(G')$ basta agregar a $A(G)$, c filas nulas y c columnas nulas.

En consecuencia,

$$rang(\lambda I - A(G')) = rang(\lambda I - A(G)).$$

Así los valores propios de G' coinciden con los valores propios de G.

$\square$

Teorema 4.4.3. *En un grafo G de orden n, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *G es bipartito.*

(b) *Los valores propios no nulos de G, vienen dados por pares λ_i, λ_j, tales que, $\lambda_i = -\lambda_j$. En consecuencia la cantidad de valores propios no nulos de G es par.*

(c) *$P(G;\lambda)$ o $\lambda P(G;\lambda)$ es un polinomio en λ^2.*

(d) *$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t-1} = 0$, para todo entero positivo t.*

Demostración.

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Por Lema (4.4.4), para cada λ , valor propio no nulo de G, tenemos que, $-\lambda$ es también un valor propio de G. Así el número de valores propios no nulos de G es par.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Por hipótesis tenemos que el orden de G es n, luego por Teorema fundamental del algebra, G posee n valores propios.

Caso (1): G no tiene valores propios nulos. Así, por (b) tenemos que los $n = 2q$ para algún entero positivo q.

Sean, $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_q, -\lambda_q$ los valores propios no nulos de G, no necesariamente distintos. Así, tenemos que,

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda+\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_q)(\lambda+\lambda_q) \\ &= (\lambda^2-{\lambda_1}^2)(\lambda^2-{\lambda_2}^2)\ldots(\lambda^2-{\lambda_q}^2). \end{aligned}$$

En consecuencia, $P(G;\lambda)$ es un polinomio en λ^2.

Caso (2): G posee q valores propios no nulos y r valores propios nulos, ($r \in \mathbb{N}$). Supongamos por (b) que

$$\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_q, -\lambda_q$$

, son los valores propios no nulos de G. Luego los valores propios de G son

$$\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_q, -\lambda_q, \lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_{q+r}$$

donde, $\lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} = \ldots = \lambda_{q+r} = 0$.

Así,

$$\begin{aligned} P(G;\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda+\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_q)(\lambda+\lambda_q)(\lambda-0)^r \\ &= (\lambda^2-{\lambda_1}^2)(\lambda^2-{\lambda_2}^2)\ldots(\lambda^2-{\lambda_q}^2)(\lambda-0)^r. \\ &= \lambda^r\prod_{i=1}^{q}(\lambda^2-\lambda_i^2) \\ &= Q(\lambda^2) \end{aligned}$$

Si $r = 2t$, para algún entero $t \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda^r \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) &= \lambda^{2t} \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) \\ &= (\lambda^2)^t \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(G; \lambda)$ es un polinomio en λ^2.

Si $r = 1$, tenemos que:

$$P(G; \lambda) = \lambda \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) \Rightarrow \lambda P(G; \lambda) = \lambda^2 \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2)$$

En consecuencia, $\lambda P(G; \lambda)$ es un polinomio en λ^2.

Si $r = 2t + 1$, para algún entero $t \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda^r \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) &= \lambda^{2t+1} \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) \\ &= \lambda^{2t}\lambda \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) \\ &= \lambda(\lambda^2)^t \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2).\end{aligned}$$

Así,

$$P(G; \lambda) = \lambda(\lambda^2)^t \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lambda P(G; \lambda) &= \lambda[\lambda(\lambda^2)^t \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2)] \\ &= \lambda^2(\lambda^2)^t \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2) \\ &= (\lambda^2)^{t+1} \prod_{i=1}^{q}(\lambda^2 - \lambda_i^2)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lambda P(G;\lambda) = (\lambda^2)^{t+1}\prod_{i=1}^{q}(\lambda^2-\lambda_i^2)$$

el cual es un polinomio en λ^2.

(c) $\Longrightarrow$ (b)

Sea G un grafo de orden n y $P(G;\lambda)$ el polinomio característico de G.

Supongamos que $P(G;\lambda)$ es un polinomio en λ^2, entonces o podemos expresar como sigue:

$$Q(\lambda^2) = (\lambda^2-\beta_1)(\lambda^2-\beta_2)\ldots(\lambda^2-\beta_t), \tag{4.16}$$

donde $\beta_i \in \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq t \leq n$, son sus raíces.

Por otro lado, cada factor en (4.16) es un polinomio en de grado igual a 2, luego por Teorema fundamental del álgebra éste posee dos raíces. Así,

$$\begin{aligned}(\lambda^2-\beta_i) &= (\lambda+a_i)(\lambda+b_i)\\ &= \lambda^2+(a_i+b_i)\lambda+a_ib_i.\end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios, tenemos que

$$a_i+b_i=0 \text{ y así } a_i=-b_i,$$

luego para todo $1 \leq i \leq t$, $(\lambda^2-\beta_i) = (\lambda^2-a_i^2)$ y (4.16) queda expresado de la siguiente manera,

$$Q(\lambda^2) = (\lambda^2-a_i^2)(\lambda^2-\beta_2)\ldots(\lambda^2-\beta_t).$$

Así, $Q(\lambda^2)=0$ si $(\lambda^2-a_1^2)=0 \vee (\lambda^2-a_2^2)=0 \vee \ldots \vee (\lambda^2-a_t)=0$.

En consecuencia, las raíces de $P(G;\lambda)$, es decir los valores propios de G, vienen dados en pares a_i, $-a_i$.

(b) $\Longrightarrow$ (d)

Sea G un grafo. Si λ_i es un valor propio de G, entonces tenemos que, $-\lambda_i$ es también un valor propio de G. Así, para cada par de valores propios $\lambda_i, -\lambda_i$ ocurre que,

$$\lambda_i^{2t-1} + (-\lambda_i^{2t-1}) = 0$$

donde t es un entero positivo.

En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t-1} = 0, \quad \text{para todo} t \in \mathbb{N}.$$

(d) $\Longrightarrow$ (a)

Sean G un grafo , con vértices $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $A(G)$ la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de G. Tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t-1} = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Por Proposición 3.1.1, si λ_i es un valor propio de $A(G)$ entonces λ_i^{2t-1} es un valor propio de $A(G)^{2t-1}$.

Por otro lado, por Proposición 2.2.1, el valor de la entrada (i,i)-ésima de $A(G)^{2t-1}$ ($k \in \mathbb{N}$), es el número de cadenas cerradas de longitud k de extremos igual a v_i, con $(1 \leq i \leq n)$.

En consecuencia, $Tr(A(G)^{2t-1})$ es el número de cadenas cerradas de longitud $2t-1$ en G.

Sabemos por Teorema 3.2.13 que, $Tr(A(G)^{2t-1}) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{2t-1}$. Entonces $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{2t-1}$ es el número de cadenas cerradas de longitud $2t-1$ en G.

Dado que, $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{2t-1} = 0$ ($t \in \mathbb{N}$), tenemos que el número de cadenas cerradas de longitud impar en G es cero.

Luego por Teorema 1.5.1, G es bipartito.

$\square$

4.4.5. Relación entre valores propios y grafos regulares

Los grafos regulares pueden ser caracterizados usando sus espectros.

Consideremos $1_n = [1]_{n\times 1}$ (vector con n coordenadas todas iguales a 1), el cual juega un papel muy importante en éste y otros muchos criterios que tienen que ver con valores propios, así como $J_n = [1]_n$ la matriz cuadrada de orden n, cuyas entradas son todas iguales a 1.

Proposición 4.4.1. *Sea G un grafo simple y k-regular de orden n, entonces:*

(a) k es un valor propio de G.

(b) G es conexo si y solo si la multiplicidad algebraica del valor propio k es igual a 1.

Demostración.

(a) Sean G un grafo de orden n y $A(G) = [a_{ij}]_n$ la matriz de adyacencia de G. Por hipótesis G es k-regular, luego por Definición 1.3.3, $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$. Así, la suma de las entradas de cada fila o de cada columna de $A(G)$ es igual a k.

Probar que k es un valor propio de G, es equivalente a encontrar un vector v tal que,

$$A(G)v = kv. \tag{4.18}$$

Veamos que $v = 1_n = [1]_{n\times 1}$ satisface a (4.18).

$$A(G)[1]_{n\times 1} = [a_{ij}]_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = k[1]_{n\times 1}$$

luego,

$$A(G)1_n = k1_n. \tag{4.19}$$

Así, k es un valor propio de G y 1_n es un vector propio de G asociado a k.

Luego queda probado (a).

(b) ($\Longrightarrow$) Sea G un grafo simple con vértices $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, k-regular y conexo, con matriz de adyacencia $A(G) = [a_{ij}] = A$.

Por (a), tenemos que, k es un valor propio de G.

Queremos probar que k tiene multiplicidad algebraica igual a 1. Dado que $A(G)$ es una matriz real y simétrica de orden n, y k es un valor propio de $A(G)$, entonces por Lema 3.2.1, la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica de k coinciden.

Así, basta probar que la multiplicidad geométrica de k es igual a 1. Para ello, por Definicíon 3.1.5(b), debemos probar que el espacio propio asociado a k tiene dimensión 1, es decir que éste espacio es generado por un vector.

Sea

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

un vector propio de G asociado a k.

Entonces, por definición de valor propio, tenemos que,

$$AX = kX, \tag{4.20}$$

donde $AX = [b_{i1}]_{n\times 1}$ y $kX = [c_{i1}]_{n\times 1}$.

Sea $|x_j| = max\{|x_i|\}_{i=1}^{n}$, tomado sobre las entradas de X, esto es,

$$|x_i| \leq |x_j| \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq n. \tag{4.21}$$

Establecemos una relación entre la entrada x_j del vector X y el vértice v_j de $V(G)$.

Consideremos $V_j = N_G(v_j)$ e $I_j = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : v_i \in V_j\}$.

Tenemos que $|V_j| = k$, pues G es k-regular.

Dado que G es simple, para $A(G) = [a_{ij}]_n$ se tiene que $a_{ij} = 0$ ó $a_{ij} = 1$. Luego, la $j1$-ésima entrada de AX viene dada por:

$$b_{j1} = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i \in I_j} x_i$$

Por otro lado, la $j1$-ésima entrada de kX es:

$$c_{ji} = kx_j.$$

Así, por (4.20), $b_{j1} = c_{j1}$, es decir,

$$\sum_{v_i \in V_j} x_i = kx_j. \tag{4.22}$$

Entonces,

$$|kx_i| = k|x_i| = |x_j| + (k-1)|x_j| = |\sum_{i \in I_j} x_i| \leq \sum_{i \in I_j} |x_i|.$$

Como para todo x_l tenemos que, $|x_l| \leq |x_j|$, entonces

$$|x_j| + (k-1)|x_j| \leq \sum_{i \in I_j} |x_i| = |x_l| + |\sum_{i \in I_j i \neq l} |x_i| \leq |x_l| + (k-1)|x_j|.$$

En consecuencia,

$$|x_j| + (k-1)|x_j| \leq |x_l| + (k-1)|x_j|,$$

así, $|x_j| \leq |x_l|$ para todo x_l tal que, $v_l \in V_j$.

Pero, por (4.21), tenemos que, $|x_l| \leq |x_j|$.

Luego, $|x_l| = |x_j|$, para todo x_l tal que $v_l \in V_j$.

Afirmación: Para todo x_l, tal que $v_l \in V_j$, tenemos que $x_l = x_j$.

Probemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe x_t tal que $v_t \in V_j$, y $x_t \neq x_j$, entonces dado que $|x_t| = |x_j|$, tenemos que $x_t = -x_j$.

Luego,

$$\sum_{v_i \in V_j} |x_i| = x_j + x_j + \ldots + x_j - x_j = (k-2)x_j$$

Ası,

$$\sum_{v_i \in V_j} |x_i| = (k-2)x_j.$$

Contradicción, ya que por (4.22), $\sum_{v_i \in V_j} x_i = kx_j$.

En consecuencia, tenemos que,

$$x_i = x_j \qquad \text{para todo } v_i \text{ adyacente a } v_j. \tag{4.23}$$

Probemos que todas las coordenadas de X son iguales.

Consideremos los conjuntos $\mathcal{V}_1 = \{v_j\} \cup V_j$ y $\mathcal{V}_2 = V(G) - \mathcal{V}_1$, los cuales son una dicotomía de $V(G)$.

Nótese que si $v \in \mathcal{V}_2$, v no es adyacente a v_j.

Caso (I): $V_2 = \emptyset$, luego $|\mathcal{V}_1| = n$.

Por (4.23), $x_i = x_j$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Así, todas las coordenadas de X son iguales.

Caso (II): $V_2 \neq \emptyset$.

Luego, dado que G es conexo, por Teorema 1.6.2 existen $v_t \in \mathcal{V}_2$ y $v_r \in \mathcal{V}_1$ tal que $\{v_t, v_r\} \in E(G)$. Es decir, v_t es adyacente a v_r.

Por definición de V_j, $v_r \neq v_j$, luego $v_r \in V_j$, es decir v_r es adyacente a v_j. Así por (4.23), $x_r = x_j$, y en consecuencia $|x_r| = max\{|x_i|\}_{i=1}^{n}$.

Aplicando a r un procedimiento análogo al anterior aplicado a j, estableciendo una relación entre la entrada x_r y el vértice v_r, obtenemos que, $x_t = x_r = x_j$. Es decir, $x_t = x_j$.

Continuando con éste razonamiento, dado que G es finito, este procedimiento finaliza, y concluimos que todas las coordenadas de X son iguales.

Así, para todo vector propio X asociado a k, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \alpha[1]_{n\times 1}.$$

Luego, el vector $1_n = [1]_{n\times 1}$ genera al espacio propio asociado a k, y como $\{1_n\}$ es linealmente independiente, $\{1_n\}$ es una base para E_k, entonces $dimE_k = 1 = m_g(k)$. Así, dado que $m_g(k) = m_a(k)$, la multiplicidad algebraica de k es igual a 1.

$(\Longleftarrow)$

Supongamos que k posee multiplicidad algebraica igual 1 y que G es disconexo.

Sean $G_1, G_2, \ldots, G_q$, con $q > 1$, las componentes de G.

Dado que, cada componente de G es un subgrafo conexo de G, y además G es k-regular, entonces G_i es k-regular. Por (b)$(\Longrightarrow)$, tenemos que k es un valor propio de multiplicidad algebraica 1 para cada G_i, con $1 \leq i \leq q$.

Por Proposición 4.1.1, tenemos que:

$$P(G;\lambda) = P(G_1;\lambda)P(G_2;\lambda)\ldots P(G_q;\lambda).$$

Luego, k es raíz de $P(G_i;\lambda)$ para todo i, con multiplicidad algebraica 1. Así, k es raíz de $P(G;\lambda)$ con multiplicidad algebraica q. Contradición, pues k es valor propio de G con multiplicidad algebraica 1.

Así queda probado (b). □

Teorema 4.4.4. *Un grafo G es regular y conexo si y solo si $J_n = [b_{ij}]_n$, donde $b_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, es una combinación lineal de potencias de $A(G)$.*

Demostración. Sea G un grafo tal que $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_n$, $A(G) = [a_{ij}]_n = A$ con $a_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ la matriz de adyacencia de G y $J_n = [b_{ij}]_n$ donde $b_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

$(\Longleftarrow)$

Probemos que G es conexo.

Sean $v_i, v_j \in V(G)$ y sea a_{ij} la ij-ésima entrada de A, es decir, $a_{ij} = m(v_i, v_j)$.

Por hipótesis J_n es combinación lineal de potencias de A, esto es, existen $A^{l_1}, A^{l_2}, \ldots, A^{l_m}$ potencias de A, tales que:

$$J_n = \alpha_1 A^{l_1} + \alpha_2 A^{l_2} + \ldots + \alpha_m A^{l_m}, \tag{4.24}$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Luego, por (4.24) y definición de J_n

$$b_{ij} = \alpha_1 a_{ij}^{l_1} + \alpha_2 a_{ij}^{l_2} + \ldots + \alpha_m a_{ij}^{l_m} = 1$$

donde $a_{ij}^{l_k}$ representa la ij-ésima entrada de A^{l_k}, para todo l_k, con $1 \leq k \leq m$.

Así, $\alpha_k a_{ij}^{l_k} \neq 0$ para algún l_k.

En consecuencia, $a_{ij}^{l_k} \neq 0$ para algún l_k.

Entonces por Proposición 2.2.1, existe una cadena en G de longitud l_k que une a los vértices v_i y v_j.

En consecuencia, para todo par de vértices $v_i, v_j \in V(G)$ existe una cadena que los une. Así por Definición (1.6.1), G es conexo.

Para probar que G es regular, consideremos las matrices $J_nA = [c_{ij}]_n$ y $AJ_n = [t_{ij}]_n$.

Luego,

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Por lo tanto, $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ y por Observación 2.1.1(d), $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d_G(v_j)$.

Así,

$$c_{ij} = d_G(v_j) \quad \text{para todo } i. \tag{4.25}$$

Por otro lado,

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Por lo tanto, $t_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ y por Observación 2.1.1(d), $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_G(v_i)$.
Así,

$$t_{ij} = d_G(v_i) \quad \text{para todo } j. \tag{4.26}$$

Dado que $A^{l_k}A^{l_t} = A^{l_t}A^{l_k}$ y por (4.24) tenemos que:

$$\begin{aligned} J_nA &= (\alpha_1 A^{l_1} + \alpha_2 A^{l_2} + \ldots + \alpha_m A^{l_m})A \\ &= \alpha_1(A^{l_1}A) + \alpha_2(A^{l_2}A) + \ldots + \alpha_m(A^{l_m}A) \\ &= \alpha_1(AA^{l_1}) + \alpha_2(AA^{l_2}) + \ldots + \alpha_m(AA^{l_m}) \\ &= A(\alpha_1 A^{l_1}) + A(\alpha_2 A^{l_2}) + \ldots + A(\alpha_m A^{l_m}) \\ &= A(\alpha_1 A^{l_1} + \alpha_2 A^{l_2} + \ldots + \alpha_m A^{l_m}) \\ &= AJ_n. \end{aligned}$$

Así, $J_nA = AJ_n$, es decir, $c_{ij} = t_{ij}$ para todo i, j y en consecuencia, por (4.25) y (4.26) tenemos que:

$$d_G(v_i) = d_G(v_j), \quad \text{para todo } i, j.$$

Luego por Definición 1.3.3, G es regular.

($\Longrightarrow$)

Supongamos que G es k-regular. Luego por Proposición 4.4.1(a), k es un valor propio de G. Así, por Teorema 3.3.3, el polinomio mínimo de G viene dado por:

$$\psi(G; \lambda) = (\lambda - k)g(\lambda) \tag{4.27}$$

donde g es un polinomio en λ con un grado menos que $\psi(G; \lambda)$.

Por otro lado, por Definición 4.1.2, A satisface (4.27), es decir, $\psi(G;A) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\psi(G;A) = 0 &\Rightarrow (A - kI_n)g(A) = 0\\ &\Rightarrow Ag(A) = kg(A).\end{aligned}$$

Denotemos por M^j la j-ésima columna de cualquier matriz M. Entonces, como $[Ag(A)]^j = [kg(A)]^j$, tenemos que

$$A[g(A)]^j = k[g(A)]^j.$$

En consecuencia, por definición de valor propio, cada $[g(A)]^j$ es un vector propio de G asociado al valor propio k de G.

Luego por Proposición 4.4.1(a), $[g(A)]^j$ es un múltiplo de $1_n = [1]_{n\times 1}$ para todo $j \in \{1,\dots,n\}$, es decir,

$$[g(A)]^j = \alpha_j 1_n,$$

para algún $\alpha_j \in \mathbb{R}$, con $\alpha_j \neq 0$.

Por lo tanto,

$$g(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}_{n\times n.}$$

Por otro lado, g es un polinomio en λ con un grado menos que $\psi(G;\lambda)$, y $g(A)$ viene dado por:

$$g(A) = b_r A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \ldots + b_0 A^0,$$

donde $b_q \in \mathbb{R}$, para todo $q \in \{r, r-1, \dots, 0\}$.

Dado que A^k es simétrica para todo $k \in \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, entonces,

$$g(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}_{n\times n} = [g_{ij}]_n$$

es simétrica, y así $g_{ij} = g_{ji}$. Fijando j tenemos que, $g_{ij} = \alpha_j = g_{ji} = \alpha_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, es decir,

$$\begin{aligned} g_{1j} &= \alpha_j = g_{j1} = \alpha_1 \\ g_{2j} &= \alpha_j = g_{j2} = \alpha_2 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ g_{nj} &= \alpha_j = g_{jn} = \alpha_n \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha, \qquad (\alpha \neq 0).$$

De aquí,

$$\begin{aligned} g(A) = \alpha & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\ &= b_r A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \dots + b_0 A^0. \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha J_n = b_r A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \dots + b_0 A^0.$$

En consecuencia,

$$J_n = \beta_r A^r + \beta_{r-1}A^{r-1} + \dots + \beta_0 A^0,$$

donde, $\beta_q = \frac{b_q}{\alpha}$, para todo $q \in \{r, r-1, \dots, 0\}$.

Luego, J_n es combinación lineal de potencias de A.

$\square$

4.4.6. Valores propios de grafos complementarios

Definición 4.4.4. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo simple.

Definimos ***grafo complementario*** de G o ***complemento*** de G, como el grafo simple $\overline{G} = (V(\overline{G}), E(\overline{G}))$, donde $V(\overline{G}) = V(G)$ y $\{v_i, v_j\} \in E(\overline{G})$ si $\{v_i, v_j\} \notin E(G)$.

Proposición 4.4.2. *Sea G un grafo simple k-regular de orden n con valores propios $k, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Entonces G y su complemento $\overline{G}$ poseen los mismos vectores propios y los valores propios de $\overline{G}$ son:*

$$n - k - 1;\ -1 - \lambda_2;\ -1 - \lambda_3; \ldots; -1 - \lambda_n.$$

Demostración.

Sea G un grafo simple k-regular de orden n con matriz de adyacencia $A(G) = [a_{ij}]_n$ y $\overline{G}$ el complemento de G con matriz de adyacencia $A(\overline{G}) = [b_{ij}]_n$.

Tenemos por Definición 4.4.4 que $\overline{G}$ es simple y además $\{v_i, v_j\} \in E(\overline{G})$ si $\{v_i, v_j\} \notin E(G)$.

Así,

$$a_{ij} + b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Luego,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ 0 - a_{ij} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

y así

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 - 0 - a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ 1 - 1 - a_{ij} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$A(\overline{G}) = J_n - I_n - A(G),$$

donde $J_n = [1]_n$.

Por el Teorema espectral, existe una base ortogonal $S = \{1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vectores propios de G, asociados a los valores propios, $k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de G respectivamente.

Sabemos que, $1_n = [1]_{n\times 1}$ es un vector propio de G asociado al valor propio k de G.

Probemos que 1_n es un vector propio de $\overline{G}$.

Tenemos que,

$$A(\overline{G})1_n = (J - I_n - A(G))1_n.$$

Sea $J - n - I_n - A(G) = [c_{ij}]_n$.

Luego,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 - 0 - a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ 1 - 1 - 0 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{4.28}$$

Entonces,

$$A(\overline{G})1_n = [c_{ij}]_n 1_n.$$

Así, la fila i-ésima de $A(\overline{G})1_n$ viene dada por:

$$\begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ii} & \ldots & c_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = c_{i1} + \ldots + c_{ii} + \ldots + c_{in}.$$

Por (4.28), tenemos que:

$$\begin{aligned} c_{i1} + \ldots + c_{ii} + \ldots + c_{in} &= (1 - a_{i1}) + \ldots + (1 - a_{i,i-1}) + (1 - a_{i,i+1}) + \ldots + (1 - a_{in}) \\ &= (n-1)1 - (a_{i1} + \ldots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \ldots + a_{in}) \\ &= (n-1) - k \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = n - 1 - k.$$

Este resultado no depende de la fila escogida y en consecuencia,

$$\begin{aligned} A(\overline{G})1_n &= (J - I_n - A(G))1_n \\ &= [n - 1 - k]_{n\times 1} \\ &= (n - 1 - k)1_n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$A(\overline{G})1_n = (n - 1 - k)1_n,$$

así, 1_n es un vector propio de $\overline{G}$ asociado al valor propio $n - 1 - k$ de $\overline{G}$.

Ahora, sea $u_i \in S$, con $2 \leq i \leq n$. Veamos que u_i es un vector propio de $A(\overline{G})$.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} A(\overline{G})u_i &= (J - I_n - A(G))u_i \\ &= Ju_i - I_n u_i - A(G)u_i \end{aligned}$$

Como s es ortogonal, $1_n u_i = 0$, en consecuencia, $Ju_i = [0]_{n\times 1}$.

Por otro lado, u_i es un vector propio de G asociado a λ_i, así $A(G))u_i = \lambda_i u_i$.

Luego,

$$\begin{aligned} A(\overline{G})u_i &= [0]_{n\times 1} - u_i - \lambda_i u_i \\ &= (-1 - \lambda_i)u_i \end{aligned}$$

entonces,

$$A(\overline{G})u_i = (-1-\lambda_i)u_i, \qquad \text{Para todo, } u_i \in S,$$

y así u_i es un vector propio de $A(\overline{G})$, y está asociado al valor propio $-1-\lambda_i$, para todo $2 \leq i \leq n$.

En consecuencia, G y su complemento $\overline{G}$ poseen los mismos vectores propios, y los valores propios de $\overline{G}$ son:

$$n-k-1;\ -1-\lambda_2;\ -1-\lambda_3; \ldots; -1-\lambda_n.$$

$\square$

Conclusiones

Fué de gran importancia, como se esperaba, manejar los conocimientos de álgebra lineal, para obtener nuestros resultados propuestos, de aquí que dichos conocimientos son imprescindibles para el estudio de la teoría de grafos espectrales.

Hasta aquí hemos hallado, mediante la representación de un grafo por su matriz de adyacencia, los autovalores de cierto tipos de grafos. Hemos presentado la forma que tiene el espectro de grafos completos y grafos bipartitos completos. Dimos la definición de grafos coespectrales como herramienta para saber cuando se puede determinar un grafo mediante su espectro. Se obtuvieron las cotas de varios parámetros de un grafo, tales como grado máximo y mínimo de un grafo y diámetro en grafos conexos, todo esto en función de los valores propios de sus matrices de adyacencias. Así como también cotas para los valores propios máximos y mínimos de un grafo a partir de los valores propios máximos y mínimos de uno de sus subgrafos inducidos. Se mostró mediante teoremas, características de los valores propios para grafos bipartitos y grafos regulares. Se demostró que un grafo y su complemento poseen los mismos vectores propios y se obtuvieron, a partir de los valores propios de un grafo, los valores propios del complemento de dicho grafo.

Los resultados obtenidos en este trabajo han sido la base de varios artículos, algunos de ellos publicados. Se proponen los siguientes problemas abiertos y futuros desarrollos: Extender el estudio que realizamos a multigrafos y digrafos, estudiar otros parámetros relacionados con la distancia en grafos, obtener cotas más específicas a partir de las que se proponen en el trabajo, caracterizar los grafos en los que se alcanzan las cotas de algunos de los pańametros estudiados.

Referencias

[1] S. Lipschuts, (1971). Teoría y Problemas de Álgebra Lineal. Mc Graw-Hill de México, S.A De C.V.

[2] K. Hoffman, (1973).Álgebra Lineal. Prentice Hall.

[3] F. G. Florey , (1980). Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones. Prentice Hall Hispanoamericana. S.A.

[4] S. I.Grossman , (1996). Álgebra Lineal. Mc Graw-Hill de México, S.A De C.V.

[5] I. Márquez, (2009). Apuntes de Teoría de Grafos y Combinatoria.

[6] D. West, (2001).Introduction to Graph Theory. Second Edition. Prentice Hall.

[7] N. Biggs. E. Keith Lloyd and R. Wilson, (1978). Graph Theory. Clarendon Press.

[8] N. M de Abreu, R. Del-Vecchio, D. Stevanović, (2007). Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. SBMAC.A.

[9] N. Gastinel, (1975). Analisis numérico lineal. Editorial Reverté, S.A.