UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

“El Teorema de Harnack”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Luis Manuel Castillo Flores

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas.
Área de Conocimiento: Análisis Complejo.
Tutor: MSc. Ronald Gutiérrez.

Barquisimeto, Venezuela. Septiembre de 2010

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"El Teorema de Harnack"

Presentado por el ciudadano Luis Manuel Castillo Flores titular de la Cédula de Identidad Nº 17.964.329. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas..

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas., se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

Con justo orgullo dedico este trabajo a mi padre, José Luis Castillo, luchador incansable en la vida y digno ejemplo a seguir.

Agradecimientos

Son muchas las personas a las cuales debo agradecer por haber alcanzado esta meta. Comienzo por agradecer infinitamente a los pilares fundamentales de mi vida, mis padres María Flores y José Luis Castillo, por todo el apoyo incondicional brindado no sólo durante esta dura etapa sino durante toda mi existencia y por siempre creer en mi como ser humano. También quiero agradecer al resto de mi familia, mis hermanos Luisimar y Luis José, por ser fuente constante de estímulo e inspiración en momentos difíciles.

Agradezco a la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" por el apoyo socio-económico brindado durante mis años de estudio en sus instalaciones y a su personal docente y administrativo que de una u otra manera han contribuido con mi formación profesional. Quiero agradecer especialmente al profesor Ronald Gutiérrez, orientador de este trabajo, por su dedicación y colaboración prestada para culminar exitosamente esta meta.

Finalmente, expreso mi más sincero y profundo agradecimiento a todos mis amigos y compañeros que me ayudaron a enfrentar de una manera más agradable los obstáculos presentados en estos años de amistad y compañerismo académico. En primer lugar, quiero agradecer a mi compañera de mil y un batallas, Isabel Argüelles Acosta; gracias por estar siempre allí. Entre otros, agradezco a Mario P. Montero, Ronald Herrera y familia, Rona Borges y familia, Willennys García y familia, Jeferson Torrealba y familia, María Andreina Peraza y familia, Liseth Valencia, Lina Cortés y Jesús Freítez.

“El Teorema de Harnack”

Resumen

Se pretende hacer un breve estudio de las *funciones armónicas*. Dichas funciones tienen segundas derivadas parciales continuas y cumplen con la llamada *ecuación de Laplace*, a saber, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Como objetivo principal, se tiene, presentar una demostración del Teorema de Harnack como lo expone [C]. Este Teorema es un importante resultado en el análisis complejo pues establece que el espacio de funciones armónicas, sobre una región, es completo. Además, señala que toda sucesión creciente en el mencionado espacio ó converge a una función armónica del espacio ó tiende a infinito uniformemente sobre subconjuntos compactos de la región. Por último, se desea realizar un estudio breve de las *funciones subarmónicas* y extender, a este tipo de funciones, algunos de los resultados obtenidos para funciones armónicas.

Índice

Capítulo 1

Introducción.

La ecuación de Laplace fue introducida por necesidades de la mecánica Newtoniana, pero aparece en muchas ramas de la física teórica como la astronomía, electrostática, mecánica de fluidos, mecánica cuántica, entre otras. A las soluciones de tal ecuación se le llaman *funciones armónicas*. Las funciones armónicas tienen segundas derivadas parciales continuas y cumplen con la llamada *ecuación de Laplace*, a saber, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. El estudio de las funciones armónicas, que en este trabajo se presenta, se hace desde un punto de vista topológico.

Se han conseguido resultados al estudiar funciones armónicas sobre regiones. Entre ellos mencionamos el Teorema de Harnack, el cual fué estudiado por el matemático alemán Carl Gustav Axel Harnack (7 de mayo de 1851. Tartu, Estonia - †3 de abril de 1888. Dresden, Alemania) y dice que el conjunto de las funciones armónicas sobre una región G, que denotaremos por $Har(G)$, es completo; además, este Teorema señala que toda sucesión creciente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Har(G)$ ó converge a una función en $Har(G)$ ó tiende a infinito uniformemente sobre subconjuntos compactos de la región G.

En el capítulo 2 se presentan algunas definiciones, notaciones y resultados básicos del análisis complejo, siendo uno de los resultados más importantes en este capítulo el hecho de dotar al conjunto de las funciones continuas (definidas en un subconjunto abierto G del conjunto de los números complejos en un espacio (Ω, d) completo) de una métrica ρ con la cual se convertirá en un espacio métrico completo que a futuro, en los siguientes capítulos, será de gran relevancia para nuestro interés como lo es el estudio de las funciones armónicas.

El capítulo 3, en un principio, introduce las nociones básicas sobre las funciones armónicas y funciones armónicas conjugadas. Luego, expone resultados importantes acerca del estudio de dichas funciones tales como el Teorema del Valor Medio, el Principio del Máximo (primera y segunda versión) además de un estudio local de las funciones armónicas (sobre discos) y una caracterización importante de estas funciones, la cual involucra la Propiedad del Valor Medio.

En el capítulo 4 se tiene como objetivo el estudio del Teorema de Harnack. Antes de realizar la demostración de este Teorema se hace un estudio de la Desigualdad de Harnack, la cual es fundamental para lograr el objetivo que se quiere. Finalmente, el capítulo 5 presenta un estudio de las *funciones subarmónicas* y *superarmónicas*; dicho estudio arroja un resultado importante como es el hecho de que el Teorema de Harnack no es válido para funciones subarmónicas (ni para las superarmónicas).

Capítulo 2

Preliminares.

En este capítulo se presentan algunos resultados básicos del análisis complejo que serán de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos. Para simplificar notación, a un punto $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$ también lo denotaremos por (x, y). Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) : \alpha^2 + \beta^2 + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\},$$

el cual gráficamente representa "un cascarón esférico" como se observa en la Figura 2.1. A cada punto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ en S le asociamos el número complejo $z = (x, y)$ que resulta de la intersección de la recta que pasa por los puntos $(0, 0, 1)$ y $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ con el plano $\mathbb{C}$ (nótese que $S - \{(0, 0, 1)\} \equiv \mathbb{C}$). A z se le llama *proyección estereográfica* de $P = (\alpha, \beta, \gamma)$.

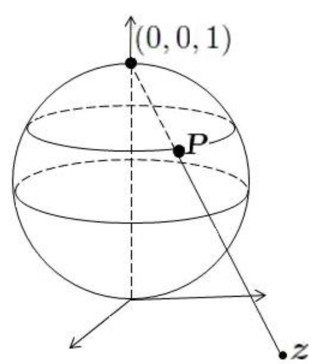

Figura 2.1: *Esfera de Riemann.*

Más específicamente, si $P = (\alpha, \beta, \gamma) \in S$ y su número complejo asociado es $z = (x, y)$ entonces obtenemos las siguientes relaciones:

1. $x = \dfrac{\alpha}{1 - \gamma}$.

2. $y = \dfrac{\beta}{1-\gamma}$.

3. $\alpha = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$.

4. $\beta = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$.

5. $\gamma = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$.

Ahora bien, si agregamos el ∞ a $\mathbb{C}$ entonces los entornos de ∞ serán las proyecciones de los entornos de $(0,0,1)$. Por lo tanto, podemos asociar ∞ con el punto $(0,0,1)$.

DEFINICIÓN 2.1. *Llamaremos* ***plano complejo extendido*** *al conjunto* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *el cual denotaremos por* $\mathbb{C}_\infty$ (es claro que $\mathbb{C}_\infty \equiv S$).

Observación 2.1. *En este trabajo utilizaremos las siguientes notaciones, para un subconjunto A de X*

(a) *El* ***interior*** *de A lo denotaremos por $int(A)$.*

(b) *La* ***clausura*** *de A lo denotaremos por A^-.*

(c) *La* ***frontera*** *de A lo denotaremos por ∂A.*

(d) *La* ***frontera extendida*** *de A es la frontera de A en $\mathbb{C}_\infty$ y lo denotaremos por $\partial_\infty A$.*

También, en lo que sigue, consideraremos que:

(e) *D representa el disco abierto unitario, es decir, el disco abierto centrado en 0 y de radio 1.*

(f) *$B(a,r)$ y $\bar{B}(a,r)$ representan los discos abiertos y cerrados, centrados en a y de radio r, respectivamente.*

Recordemos ahora algunas definiciones y resultados de análisis complejo.

DEFINICIÓN 2.2. **(a)** *Un espacio métrico (X,d) es* ***conexo*** *si los únicos subconjuntos de X que son tanto abiertos como cerrados son $\varnothing$ y X.*

(b) *Si A es un subconjunto de X entonces A es un* ***subconjunto conexo*** *de X si el espacio métrico (A, d) es conexo.*

Un tipo de conjunto conexo especial con el que trabajaremos es el llamado *simplemente conexo.*

(c) *Un conjunto es* ***simplemente conexo*** *si su complemento es conexo (en pocas palabras este es un conjunto "abierto y sin agujeros").*

(d) *Una* ***región*** *es un subconjunto abierto y conexo de los números complejos.*

Recordemos que una función f definida en un subconjunto abierto G de $\mathbb{C}$ es **analítica** si esta tiene derivada en cada punto de G. También es útil recordar la existencia de derivadas de cualquier orden de una función analítica, es decir, *si f es una función analítica entonces f es infinitamente diferenciable.*

Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si (Ω, d) es un espacio métrico completo entonces denotaremos por $\mathcal{C}(G, \Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas de G en Ω (el cual es no vacío pues contiene al menos a las funciones constantes).

Dotaremos al conjunto $\mathcal{C}(G, \Omega)$ de una métrica con la cual se convertirá en un espacio métrico completo. Para ello haremos uso del siguiente resultado del análisis complejo.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si G es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ entonces existe una sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de G tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Más aún, los conjuntos K_n pueden ser escogidos satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $K_n \subset K_{n+1}$.

(b) *$K \subset G$ y K es compacto implica que $K \subset K_n$ para algún n.*

Puede demostrarse que para cada número entero $n \geqslant 1$, si hacemos

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} - G) \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$

entonces (K_n) satisface las condiciones de la Proposición 2.1. Para detalles ver [C].

Ahora bien, si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde cada K_n es compacto y $K_n \subset K_{n+1}$, definamos

$$\rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\},$$

para funciones f y g en $\mathcal{C}(G, \Omega)$.

Nótese que $0 \leqslant \rho_n(f, g) < \infty$ para todo n y para cualesquiera f y g continuas, ya que por la compacidad de K_n los conjuntos $f(K_n)$ y $g(K_n)$ poseen diámetro finito; lo cual implica que el conjunto $\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Por otro lado, es fácil verificar que ρ_n es una métrica en el espacio $\mathcal{C}(G, \Omega)$.

Sin embargo, para convertir a $\mathcal{C}(G, \Omega)$ en un espacio métrico completo debemos definir otra métrica más general y que no dependa de la escogencia de la sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Con el fin de cumplir este objetivo, definamos para cualesquiera f y g en $\mathcal{C}(G, \Omega)$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \tag{2.1}$$

Dado que $t(1+t)^{-1} \leqslant 1$ para todo $t \geqslant 0$, la serie en (2.1) converge (ya que esta dominada por $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ la cual es una serie geométrica).

Proposición 2.2. *Sea ρ la métrica definida como en (2.1), entonces $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}(G, \Omega)$. Es claro que $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ por ser d una métrica en Ω. Por otra parte, si $\rho(f, g) = 0$ entonces $\rho_n(f, g) = 0$ para todo n lo cual implica que $f|_{K_n} = g|_{K_n}$, dado que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ se obtiene que $f = g$. Por último, si hacemos $\mu_n = \dfrac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$ entonces al ser ρ_n una métrica en $\mathcal{C}(G, \Omega)$ tenemos que μ_n es también una métrica en $\mathcal{C}(G, \Omega)$, y usando este hecho se demuestra que ρ verifica la desigualdad triangular. ■

El siguiente Lema es de suma importancia puesto que además de ser fundamental para demostrar la completitud del espacio $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ nos permitirá concluir que la escogencia de los conjuntos compactos K_n no altera la topología que induce la métrica ρ. Es decir, métricas ρ generadas a partir de diferentes sucesiones de compactos K_n satisfaciendo las condiciones de la Proposición 2.1 son topológicamente equivalentes.

Lema 2.1. *Sean G un subconjunto de $\mathbb{C}$ y ρ la métrica definida como en (2.1). Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$ tales que para f y g en $\mathcal{C}(G, \Omega)$,*

$$\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f, g) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Recíprocamente, si $\delta > 0$ y un compacto $K \subset G$ son dados, existe $\varepsilon > 0$ tal que para f y g en $\mathcal{C}(G, \Omega)$,

$$\rho(f,g) < \varepsilon \Rightarrow \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta. \tag{2.3}$$

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente, existe un entero p de modo que $\sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Escojamos $K = K_p$ (donde K_p pertenece a la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la Proposición 2.1). Por otro lado, por la continuidad de la función $\dfrac{t}{1+t}$ en $t = 0$ obtenemos la existencia de un $\delta > 0$ de manera que $\dfrac{t}{1+t} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ siempre que $0 \leqslant t < \delta$.

Ahora bien, supongamos que f y g son funciones en $\mathcal{C}(G, \Omega)$ satisfaciendo que $\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$, como $K_n \subset K_p = K$ para $1 \leqslant n \leqslant p$, entonces $0 \leqslant \rho_n(f,g) \leqslant \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$ para $1 \leqslant n \leqslant p$, por lo que resulta $\dfrac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para $1 \leqslant n \leqslant p$. Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{-\varepsilon}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo cual, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho(f,g) &= \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \\
&< \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para demostrar (2.3), supongamos ahora que K y δ son dados. Por la Proposición 2.1 existe un entero $p \geqslant 1$ de modo que $K \subset K_p$, por consiguiente

$$\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \leqslant \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_p\} = \rho_p(f,g). \tag{2.4}$$

Ahora bien, por la continuidad de la función $\dfrac{s}{1-s}$ en el punto $s = 0$, existe $r > 0$ de manera que $\dfrac{s}{1-s} < \delta$ siempre que $0 \leqslant s < r$. Así, cuando $t \geqslant 0$ y $\dfrac{t}{1+t} < r$

entonces $t < \delta$. Escojamos $\varepsilon = \dfrac{r}{2^p}$ y se verifica entonces que

$$\begin{aligned}
\rho(f,g) < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon = r \\
&\Rightarrow \rho_p(f,g) < \delta \\
&\Rightarrow \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} < \delta,
\end{aligned}$$

donde la última implicación es consecuencia de (2.4). ∎

Proposición 2.3. **(a)** *Un conjunto $\mathcal{O} \subset (\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ es abierto si, y sólo si, para cada $f \in \mathcal{O}$ existen un conjunto compacto K y un $\delta > 0$ tales que*

$$\{g : d(f(z),g(z)) < \delta, z \in K\} \subset \mathcal{O}.$$

(b) *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ converge a una función f si, y sólo si, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre todos los subconjuntos compactos de G.*

(c) *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ converge a una función f si, y sólo si, para todo $z \in G$ existe $r_z > 0$ de manera que $f_n \to f$ uniformemente sobre $\bar{B}(z,r_z)$.*

Demostración. **(a)** Si $\mathcal{O}$ es un conjunto abierto en $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ y $f \in \mathcal{O}$ entonces existe $\varepsilon > 0$ de manera que $\{g : \rho(f,g) < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$. Por la primera parte del Lema anterior existen $\delta > 0$ y $K \subset G$ compacto tales que para cada $f, g \in \mathcal{C}(G,\Omega)$ sucede que

$$\sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f,g) < \varepsilon.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
g \in \{g : d(f(z),g(z)) < \delta, z \in K\} &\Rightarrow d(f(z),g(z)) < \delta; \text{ para todo } z \in K \\
&\Rightarrow \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} < \delta \\
&\Rightarrow \rho(f,g) < \varepsilon \\
&\Rightarrow g \in \mathcal{O}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si el conjunto $\mathcal{O}$ posee la propiedad de que para toda $f \in \mathcal{O}$ existe un conjunto compacto K y un $\delta > 0$ tales que

$$\{g : d(f(z), g(z)) < \delta, z \in K\} \subset \mathcal{O},$$

entonces por la segunda parte del Lema anterior para cada $f \in \mathcal{O}$ podemos escoger $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} g \in \{g : \rho(f, g) < \varepsilon\} &\Rightarrow \rho(f, g) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta \\ &\Rightarrow d(f(z), g(z)) < \delta; \text{ para todo } z \in K \\ &\Rightarrow g \in \{g : d(f(z), g(z)) < \delta, z \in K\} \subset \mathcal{O}, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\mathcal{O}$ es abierto.

(b) Sea K un subconjunto compacto de G y fijemos $\delta > 0$. Por el Lema anterior existe $\varepsilon > 0$ satisfaciendo (2.3). Como $f_n \to f$ en $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$ podemos escoger un entero $N \geqslant 1$ (que depende sólo de ε) de manera que $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant N$. De esta manera, si $n \geqslant N$ entonces resulta que $\sup\{d(f_n(z), f(z)) : z \in K)\} < \delta$ lo cual equivale a decir que $f_n \to f$ uniformemente en K.

Supongamos ahora que $f_n \to f$ uniformemente sobre cualquier compacto de G. Sea $\varepsilon > 0$, de nuevo por el Lema 2.1 existen $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$ de modo que se cumple (2.2) para todo par de funciones f, g en $\mathcal{C}(G, \Omega)$. Ahora bien, por la convergencia uniforme de la sucesión (f_n) a f en el compacto K existe $N > 0$ (el cual depende solo de δ) tal que $d(f_n(z), f(z)) < \delta$ cuando $n \geqslant N$ y para todo $z \in K$, así $\sup\{d(f(z), g(z) : z \in K)\} < \delta$ si $n \geqslant N$ lo cual implica, por (2.2), que $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$. En consecuencia, se ha demostrado que $f_n \to f$ en $(\mathcal{C}(G, \Omega), \rho)$.

(c) El directo es obvio usando la parte (b), ya que si $f_n \to f$ uniformemente sobre cualquier compacto de G entonces en particular, $f_n \to f$ uniformemente sobre las bolas cerradas. Recíprocamente, sean $\varepsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de G, entonces dado que $K \subset \bigcup_{z \in K} B(z, r_z)$ existen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, r_{z_i})$. Ahora bien, por hipótesis, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ podemos escoger $N_i > 0$ de modo que $d(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$ para todo $z \in \bar{B}(z_i, r_{z_i})$, si tomamos $N = \text{máx}\{N_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ entonces se asegura que si $n \geqslant N$, $d(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$

para todo $z \in K$, es decir, $f_n \to f$ uniformemente sobre K. Usando la parte (b) se obtiene lo requerido. ■

De esta Proposición se desprenden hechos sumamente importantes, por un lado **(b)** y **(c)** nos dan una caracterización de la convergencia de sucesiones en el espacio $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$ y por otra parte **(a)** nos habla de la independencia de la topología generada por ρ con respecto a la escogencia de la sucesión de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la Proposición 2.1.

COROLARIO 2.1. *La colección de conjuntos abiertos es independiente de la escogencia de los conjuntos K_n. Esto es, si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n$ donde cada K'_n es compacto y $K'_n \subset int(K'_{n+1})$ y si μ es la métrica definida por los conjuntos K'_n entonces un conjunto es abierto en $(\mathcal{C}(G,\Omega),\mu)$ si, y sólo si es un abierto en $(\mathcal{C}(G,\Omega),\rho)$.*

Observación 2.2. *En lo que sigue consideraremos a $\mathcal{C}(G,\Omega)$ como un espacio métrico cuya métrica ρ supondremos está dada por la fórmula (2.1) para alguna sucesión de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $K_n \subset int(K_{n+1})$ y $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

PROPOSICIÓN 2.4. *$\mathcal{C}(G,\Omega)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(G,\Omega)$. Fijemos $\delta > 0$, para cada compacto $K \subset G$ por el Lema 2.1 existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $f, g \in \mathcal{C}(G,\Omega)$

$$\rho(f,g) < \varepsilon \Rightarrow \sup\{d(f(z), g(z) : z \in K)\} < \delta. \tag{2.5}$$

Como (f_n) es de Cauchy podemos escoger un entero $N > 0$ de modo que $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$, siempre que $n, m \geqslant N$. Así, teniendo en cuenta (2.5), podemos concluir que para todo $n, m \geqslant N$ se verifica

$$\sup\{d(f_n(z), f_m(z)) : z \in K\} < \delta, \tag{2.6}$$

lo cual implica que $(f_n(z))$ es una sucesión de Cauchy en Ω, para cada z. De esta manera, para cada $z \in G$, por ser (Ω, d) un espacio métrico completo, existe un punto $\omega \in \Omega$ tal que $f_n(z) \to \omega$. Este procedimiento crea una función $f : G \to \Omega$ $(z \mapsto \omega)$ la cual mostraremos a continuación que es continua y que $\rho(f_n, f) \to 0$.

Sea K un compacto y tomemos $N > 0$ de manera que se satisface (2.6) para todo $n, m \geqslant N$. Si $z \in K$ es fijo pero arbitrario entonces existe un entero $m \geqslant N$ tal que

$$d(f(z), f_m(z)) = d\left(\lim_{n\to\infty} f_n(z), f_m(z)\right) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(z), f_m(z)) < \delta.$$

En consecuencia, para cualquier $n \geqslant N$ ocurre

$$d(f(z), f_n(z)) \leqslant d(f(z), f_m(z)) + d(f_m(z), f_n(z)) < \delta + \delta = 2\delta.$$

Ya que N no depende de z, esta desigualdad vale para todo $z \in K$. Por tanto,

$$\sup\{d(f_n(z), f_m(z)) : z \in K\} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Lo que equivale a decir que (f_n) converge a f uniformemente sobre todos los compactos de G. Por consiguiente, de la Proposición 2.3, podemos concluir que (f_n) converge a f en $\mathcal{C}(G, \Omega)$. Mas aún, como la convergencia es uniforme sobre bolas cerradas entonces f se el límite uniforme de funciones continuas. Por lo tanto, f es continua. $\blacksquare$

Capítulo 3
Funciones Armónicas.

En el presente capítulo se introduce la definición tanto de funciones armónicas como la de funciones armónicas conjugadas, también se presentará la Propiedad del Valor Medio y además se hará un estudio de dichas funciones de la cual se desprenden resultados importantes como lo son el Teorema del Valor Medio, el Principio del Máximo (primera y segunda versión) y una caracterización importante de estas funciones, la cual involucra la Propiedad del Valor Medio.

§3.1. Propiedades básicas de las funciones armónicas.

Definición 3.1. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función $u : G \to \mathbb{R}$ es* ***armónica*** *si u tiene segundas derivadas parciales continuas y además se satisface que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) es llamada **ecuación de Laplace**. Al conjunto de las funciones armónicas definidas sobre un subconjunto abierto G de $\mathbb{C}$ lo denotaremos por $Har(G)$.

Ejemplo 3.1. *La función $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $u(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica.*

En efecto, nótese que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x,$$

por lo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 2.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y,$$

por lo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -2.$$

De esta manera, la función u tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas y además

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0.$$

Por tanto, u es armónica.

Las funciones armónicas están estrechamente relacionadas con las funciones analíticas, esto se evidencia en los siguientes resultados (básicos del análisis complejo) cuyas demostraciones en este trabajo se omiten, sin embargo se pueden hallar en casi cualquier libro de análisis complejo, por ejemplo [P] o [V].

Proposición 3.1. *Una función compleja f definida en una región G es analítica si, y sólo si, tanto $Re(f) = u$ como $Im(f) = v$ son funciones armónicas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann.*

Proposición 3.2. *Una región G es simplemente conexa si, y sólo si, para cada función armónica u en G existe una función armónica v en G tal que $f = u + iv$ es una función analítica en G.*

§3.2. Funciones armónicas conjugadas.

Definición 3.2. *Sea G una región en $\mathbb{C}$, dadas dos funciones $u, v : G \to \mathbb{R}$ diremos que u y v son* ***armónicas conjugadas*** *en G si la función $f = u + iv$ es analítica en G.*

Ejemplo 3.2. *Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ la función $u(x,y) = x^2 - y^2$. Se sabe, por el Ejemplo* 3.1*, que u es armónica. Encontrar una armónica conjugada para u.*

Solución. Supongamos que $v : G \to \mathbb{R}$ es la función armónica conjugada de u. Siendo esto así, u y v son la parte real e imaginaria, respectivamente, de una función analítica; por lo cual satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{y} \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

De acá tenemos $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y$. Integrando ambos lados de esta igualdad, con respecto a x, se obtiene

$$v(x,y) = 2yx + f(y),$$

donde $f(y)$ es una función que sólo depende de y.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ &= 2x + f'(y)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + f'(y),\end{aligned}$$

lo cual implica que $f'(y) = 0$ y en consecuencia $f(y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.

De esta manera, la armónica conjugada para u es

$$v(x,y) = 2yx + c,$$

donde c es un número real.

Observación 3.1. *Nótese que, en el ejemplo anterior, para cada $c \in \mathbb{R}$ la función $v(x,y) = 2yx + c$ es una armónica conjugada para u; por lo cual existen infinitas armónicas conjugadas para u.*

§3.3. Algunas aplicaciones de las funciones armónicas conjugadas.

El siguiente resultado es consecuencia de la Proposición 3.2 y nos asegura la existencia de armónicas conjugadas en regiones simplemente conexas.

Proposición 3.3. *Sea G una región simplemente conexa y $u : G \to \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces u posee una armónica conjugada.*

También de la Proposición 3.2 resulta que si u es una función armónica definida en una región G y D' es un disco contenido en G, entonces existe una función armónica v definida en D' tal que $f = u + iv$ es una función analítica en D'. En otras palabras, cada función armónica definida en una región G posee una armónica conjugada local.

Además, nótese que si u es una función armónica y tanto v_1 como v_2 son armónicas conjugadas de u entonces $i(v_1 - v_2) = (u + iv_1) - (u + iv_2)$ es una función analítica.

Proposición 3.4. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si $u : G \to \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces u es infinitamente diferenciable.*

Demostración. Sea z_0 un punto cualquiera contenido en G. Escojamos $\delta > 0$ tal que $B(z_0,\delta) \subset G$ (este δ existe pues G es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$). Debido a que $B(z_0,\delta)$ es una región simplemente conexa, por la Proposición 3.2, u tiene una armónica conjugada, digamos v, en $B(z_0,\delta) \subset G$. De esta manera, existe una función $f = u + iv$ la cual es analítica en $B(z_0,\delta)$ y en consecuencia f es infinitamente diferenciable en $B(z_0,\delta) \subset G$.

Así, se obtiene que u es infinitamente diferenciable en $B(z_0,\delta) \subset G$ y como z_0 es punto fijo pero arbitrario en G, se concluye que u es infinitamente diferenciable en todo G. ■

Definición 3.3. *Sean G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $u : G \to \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que u tiene la **Propiedad del Valor Medio** si cuando $\bar{B}(a, r)$ está contenido en G sucede que*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

A continuación veremos, en el siguiente Teorema, que las funciones armónicas poseen la Propiedad del Valor Medio.

Teorema 3.1 (Teorema del Valor Medio)**.** *Sean G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $u : G \to \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces u posee la Propiedad del Valor Medio.*

Demostración. Dado que G es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, tomemos un disco abierto D' y $r > 0$ tales que $\bar{B}(a, r) \subset D' \subset G$. Debido a que D' es un conjunto abierto simplemente conexo y u es una función armónica en D', por la Proposición 3.2 existe una función armónica, digamos v, en D' tal que la función $f : D' \to \mathbb{C}$ definida por $f = u + iv$ es analítica.

Si γ es el círculo $\{z : |z - a| = r\}$, entonces a no pertenece a γ (a está en el interior del área delimitada por γ) y haciendo uso del Teorema A.1 (Fómula Integral de Cauchy) se obtiene que:

$$f(a) Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz. \tag{3.2}$$

Ahora bien, como el círculo γ es una curva de Jordan (contorno cerrado y simple) orientada positivamente entonces $Ind(\gamma, a) = 1$.

Note que los puntos z sobre el círculo $\gamma : |z-a| = r$ tienen la forma $z = z_0 + a$, o equivalentemente $z = re^{i\theta} + a$; para algún $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (como se muestra en la Figura 3.1).

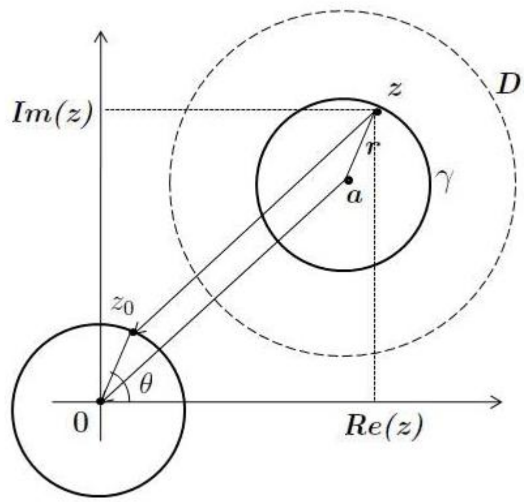

FIGURA 3.1:

De esta manera, si $z = (re^{i\theta} + a)$ entonces $dz = re^{i\theta} i d\theta$. Sustituyendo estos valores en (3.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta} + a)}{(re^{i\theta} + a) - a} re^{i\theta} i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta} + a) d\theta. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u(a) + iv(a) &= f(a) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left[u(re^{i\theta} + a) + iv(re^{\theta} + a) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta} + a) d\theta + i \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta} + a) d\theta \right]. \end{aligned}$$

En consecuencia, por igualdad de números complejos, se obtiene lo requerido, es decir

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta} + a) d\theta.$$

■

Ejemplo 3.3. *Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función dada por $u(x, y) = x^2 - y^2$, se sabe por el Ejemplo* 3.1 *que u es armónica. u tiene la Propiedad del Valor Medio.*

En efecto, sean $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que $\bar{B}(a, r) \subset \mathbb{C}$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} u(a + re^{i\theta}) &= u(a_1 + ia_2 + r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta) \\ &= (a_1 + r\cos\theta)^2 - (a_2 + ir\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= (a_1^2 - a_2^2) + 2r(a_1\cos\theta - a_2\operatorname{sen}\theta) + r^2\cos(2\theta), \end{aligned}$$

de esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_1^2 - a_2^2)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2r(a_1\cos\theta - a_2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2\cos(2\theta)d\theta \\ &= (a_1^2 - a_2^2) + 0 + 0 \\ &= u(a). \end{aligned}$$

Por tanto, u tiene la Propiedad del Valor Medio.

El Teorema a continuación, es el análogo al Teorema del Módulo Máximo para funciones armónicas.

Teorema 3.2 (Principio del Máximo. Primera versión)**.** *Sea G una región. Suponga que $u : G \to \mathbb{R}$ es una función continua y que tiene la Propiedad del Valor Medio. Si existe $a \in G$ tal que $u(a) \geqslant u(z)$ para todo $z \in G$ entonces u es una función constante.*

Demostración. Supongamos que existe $a \in G$ tal que $u(a) \geqslant u(z)$ para todo $z \in G$. Definamos el conjunto $A = \{z \in G : u(z) = u(a)\}$. Nótese que

$$u^{-1}(\{u(a)\}) = \{z \in G : u(z) = u(a)\} = A,$$

como $\{u(a)\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y $u : G \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces A es un subconjunto cerrado de G. Además $A \neq \varnothing$ ya que $a \in G$.

Probemos que A también es abierto y así, por la conexidad de G, obtendremos que $A = G$ y por tanto que u es una función constante.

Sea $z_0 \in A$, es decir, $u(z_0) = u(a)$. Escojamos $r > 0$ de manera que $\bar{B}(z_0, r) \subset G$ (r existe pues G es un conjunto abierto). Supongamos que existe $b \in B(z_0, r) \subset G$

tal que b no está contenido en A. Así, $u(a) > u(b)$ (porque $b \in G$). Nótese que $u(a) > u(b)$ por lo que $u(a) - u(b) > 0$.

Tomemos $\varepsilon = u(a) - u(b) > 0$. Por la continuidad de la función u en $b \in G$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |z - b| < \delta &\Rightarrow |u(z) - u(b)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |u(z) - u(b)| < u(a) - u(b) \\ &\Rightarrow u(z) - u(b) < u(a) - u(b) \\ &\Rightarrow u(z) < u(a) = u(z_0), \end{aligned}$$

es decir, $u(z) < u(a) = u(z_0)$ para todo $z \in B(b, \delta)$.

Sean $\rho = |b - z_0|$ y σ el círculo $\{z \in G : |z - z_0| = \rho\}$. $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ viene dada por $\sigma(\beta) = z_0 + \rho e^{i\beta}$. Por lo que $b = z_0 + \rho e^{i\beta}$ para algún $0 \leqslant \beta < 2\pi$, y además existe un subintervalo propio $I = [x, y]$ de $[0, 2\pi]$ de modo que $\beta \in I$ y $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$ para todo $\theta \in I$ (como se puede ver en la Figura 3.2).

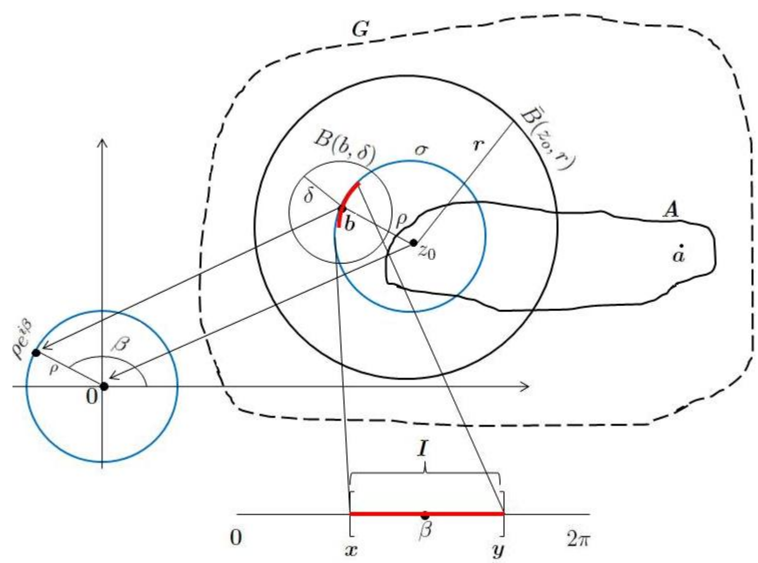

FIGURA 3.2:

Debido a que u tiene la Propiedad del Valor Medio, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^x u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta + \int_x^y u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta + \int_y^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta\right] \\
&< \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^x u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta + \int_x^y u(z_0)d\theta + \int_y^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^x u(z_0)d\theta + \int_x^y u(z_0)d\theta + \int_y^{2\pi} u(z_0)d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[xu(z_o) + (y-x)u(z_0) + (2\pi - y)u(z_0)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi u(z_0) \\
&= u(z_0).
\end{aligned}$$

En conclusión, hemos obtenido que $u(z_0) < u(z_0)$ lo cual es una contradicción (proviene de suponer que existe $b \in B(z_0, r)$ tal que b no pertenece a A). Luego $b \in B(z_0, r) \subset A$ y por tanto A es abierto. ■

Teorema 3.3 (Principio del Máximo. Segunda versión)**.** *Sean G una región y tanto $u : G \to \mathbb{R}$ como $v : G \to \mathbb{R}$ funciones continuas las cuales tienen la Propiedad del Valor Medio. Si para cada punto a en la frontera extendida $\partial_\infty G$ ocurre que*

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leqslant \liminf_{z\to a} v(z),$$

entonces ó $u(z) < v(z)$ para todo $z \in G$ ó $u = v$.

Demostración. La demostración se hará en primer lugar suponiendo que v es la función nula, esto es, $v(z) = 0$ para todo $z \in G$. Entonces, se debe demostrar que ó $u(z) < 0$ para todo $z \in G$ ó $u(z) = 0$ para todo $z \in G$.

Para cada $a \in \partial_\infty G$ se tiene que $\limsup_{z\to a} u(z) \leqslant \liminf_{z\to a} v(z) = 0$. Basta con demostar que $u(z) \leqslant 0$ para todo $z \in G$, pues si existe $d \in G$ tal que $u(d) = 0$ por la primera versión del Principio del Máximo se obtiene que $u = 0$. En consecuencia, resultaría que ó $u = 0$ ó $u < 0$.

Supongamos que existe $b \in G$ tal que $u(b) > 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $u(b) > \varepsilon > 0$ y consideremos el conjunto $B = \{z \in G : u(z) \geqslant \varepsilon\}$; nótese que $B \neq \varnothing$ pues $b \in B$. Para cada $a \in \partial_\infty G$, por el Teorema A.5, existe δ_a de manera que

$$u(z) \leqslant 0 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon; \text{ para todo } z \in B(a, \delta_a) \cap G. \tag{3.3}$$

Afirmación 1: *Existe $\delta > 0$ tal que si $z \in G$ y $d(z, \partial_\infty G) < \delta$ entonces $u(z) < \varepsilon$.* En efecto, tomemos $X = \partial_\infty G$ y $\alpha = \{B(a, \delta_a) : a \in \partial_\infty G\}$. Por el Teorema A.3 (Lema del Cubrimento de Lebesgue), existe $\delta > 0$ de modo que si $x \in \partial_\infty G$ entonces existe $a \in \partial_\infty G$ que cumple que $B(x, \delta) \subset B(a, \delta_a)$. Ahora bien, sea $z \in G$ con $d(z, \partial_\infty G) < \delta$ y recordando que $\inf\{d(z, y) : y \in \partial_\infty G\} = d(z, \partial_\infty G) < \delta$ se tiene que existe $y \in \partial_\infty G$ tal que $d(z, \partial_\infty G) \leqslant d(z, y) < \delta$. Por tanto, $z \in B(y, \delta)$. Como $y \in \partial_\infty G$ existe $a \in \partial_\infty G$ tal que $B(y, \delta) \subset B(a, \delta_a)$. Así, $z \in B(a, \delta_a) \cap G$ y por (3.3) se tiene que $u(z) < \varepsilon$; con lo cual queda demostrada la afirmación.

Por la *Afirmación 1* concluimos que si $z \in B$ entonces $d(z, \partial_\infty G) \geqslant \delta$. De esta manera, si llamamos $R = \{z \in G : d(z, \partial_\infty G) \geqslant \delta\}$ entonces $B \subset R$.

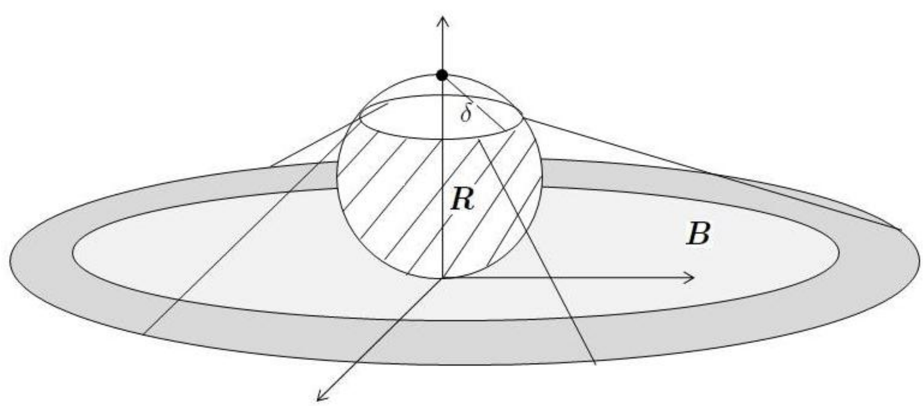

FIGURA 3.3:

Claramente R es un conjunto acotado y cerrado el cual no contiene al punto $(0, 0, 1)$ (como se aprecia en la Figura 3.3) por lo tanto B es un conjunto cerrado y acotado y así por el Teorema A.2 B es un conjunto compacto.

Como B es un conjunto compacto entonces u tiene máximo en B, digamos z_0. Así que $u(z_0) \geqslant u(z)$ para todo $z \in B$. Nótese que si z no pertenece a B entonces $u(z) < \varepsilon < u(b)$; esto quiere decir que u alcanza máximo en G (bien sea z_0 o b). Por la Primera versión del Principio del Máximo se tiene que u es una función constante, mas aún, esta constante es mayor que cero ya que $u(b)$ es mayor que cero. Por lo tanto,

$$0 < u(z) = \limsup_{z \to a} u(z) \leqslant 0,$$

lo cual es una contradicción (que proviene de suponer que existe $b \in G$ tal que $u(b) > 0$). De esta manera, $u(z) \leqslant 0$ para todo $z \in G$.

Ahora estudiemos el caso general.

Por hipótesis, $\limsup_{z\to a} u(z) \leqslant \liminf_{z\to a} v(z)$ para todo $a \in \partial_\infty G$. Sea $a \in \partial_\infty G$ y $G_\delta = G \cap B(a,\delta)$ para cada $\delta > 0$. Si $\limsup_{z\to a} u(z) \leqslant \liminf_{z\to a} v(z)$ entonces $\limsup_{z\to a} u(z) - \liminf_{z\to a} v(z) \leqslant 0$.

Por otro lado, sea $z \in G$. Como $u(z) - v(z) = u(z) + (-v(z))$, entonces

$$\sup\{u(z) - v(z) : z \in G\} \leqslant \sup\{u(z) : z \in G\} + \sup\{-v(z) : z \in G\}. \tag{3.4}$$

Así, por la hipótesis y (3.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \lim_{\delta\to 0}\sup\{u(z) : z \in G_\delta\} - \liminf_{\delta\to 0}\{v(z) : z \in G_\delta\} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\sup\{u(z) : z \in G_\delta\} - \lim_{\delta\to 0}\left[-\sup\{-v(z) : z \in G_\delta\}\right] \\
&= \lim_{\delta\to 0}\sup\{u(z) : z \in G_\delta\} + \lim_{\delta\to 0}\sup\{-v(z) : z \in G_\delta\} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left[\sup\{u(z) : z \in G_\delta\} + \sup\{-v(z) : z \in G_\delta\}\right] \\
&\geqslant \lim_{\delta\to 0}\sup\{u(z) - v(z) : z \in G_\delta\},
\end{aligned}$$

de esta manera,

$$\limsup_{z\to a}[u(z) - v(z)] \leqslant 0 \text{ para todo } a \in \partial_\infty G. \tag{3.5}$$

Ahora bien, definamos $w : G \to \mathbb{R}$ como $w(z) = u(z) - v(z)$ para todo $z \in G$. w definida de este modo es una función continua y cumple con la Propiedad del Valor Medio pues tanto u como v son funciones continuas y satisfacen la Propiedad del Valor Medio. Por (3.5) se tiene que

$$\limsup_{z\to a} w(z) \leqslant 0 \text{ para todo } a \in \partial_\infty G,$$

y por el primer caso estudiado ocurre solo una de las siguientes posibilidades:

$$w(z) < 0 \text{ para todo } z \in G \text{ ó } w(z) = 0 \text{ para todo } z \in G,$$

o equivalentemente,

$$u(z) < v(z) \text{ para todo } z \in G \text{ ó } u = v.$$

■

Corolario 3.1. *Sean G una región acotada y $w : G^- \to \mathbb{R}$ una función continua la cual satisface la Propiedad del Valor Medio en G. Si $w(z) = 0$ para todo $z \in \partial G$ entonces $w(z) = 0$ para todo $z \in G$.*

Demostración. Tomemos en la segunda versión del Principio del Máximo $u = w$ y $v = 0$ en G. Como $w = 0$ en ∂G y G es acotado resulta que

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to a} u(z) &= \limsup_{z\to a} w(z)\\ &= 0 \quad (\text{para todo } a \in \partial G)\\ &= \liminf_{z\to a} v(z);\end{aligned}$$

y así, por la segunda versión del Principio del Máximo,

$$\text{ó } w(z) < 0 \text{ ó } w(z) = 0 \text{ para todo } z \in G. \tag{3.6}$$

Ahora, tomemos $u = 0$ y $v = w$ en la segunda versión del Principio del Máximo. Como $w(z) = 0$ para todo $z \in \partial G$ y G es acotado se tiene que

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to a} u(z) &= 0\\ &= \liminf_{z\to a} w(z) \quad (\text{para todo } a \in \partial G)\\ &= \liminf_{z\to a} w(z);\end{aligned}$$

y nuevamente, por la segunda versión del Principio del Máximo,

$$\text{ó } 0 < w(z) \text{ ó } 0 = w(z) \text{ para todo } z \in G. \tag{3.7}$$

Como (3.6) y (3.7) valen para todo $z \in G$, entonces que $w(z) = 0$ para todo $z \in G$. ■

El siguiente Teorema es llamado el Principio del Mínimo y es un análogo al Principio del Máximo. Para su demostración basta considerar la función $w = -u : G \to \mathbb{R}$ y aplicar la primera versión del Principio del Máximo (note que $-u$ es una función continua y conserva la Propiedad del Valor Medio ya que u es continua y tiene la Propiedad del Valor Medio).

Teorema 3.4 (Principio del Mínimo)**.** *Sean G una región y $u : G \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple con la Propiedad del Valor Medio. Si existe un punto $a \in G$ tal que $u(a) \leqslant u(z)$ para todo $z \in G$ entonces u es una función constante.*

§3.4. Estudio local de las funciones armónicas.

Ahora interesa estudiar las funciones armónicas localmente. El estudio local de estas funciones se hará sobre discos. El objetivo es estudiar las funciones armónicas en el disco unitario abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e interpretar los resultados obtenidos para cualquier disco arbitrario.

La siguiente definición, denominada el *núcleo de Poisson* es básica e importante para el desarrollo de esta sección.

Definición 3.4. *Sean $0 \leqslant r < 1$ y $-\infty < \theta < +\infty$. Se define la función*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta},$$

*la cual es llamada **núcleo de Poisson**.*

Notemos lo siguiente: Sea $z = re^{i\theta}$, con $0 \leqslant r < 1$.

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots) = 1+z+z^2+\cdots-z-z^2-\cdots$$

es decir que $(1-z)(1+z+z^2+\cdots) \to 1$. Por lo que

$$\frac{1+z}{1+z} = (1-z)(1+z+z^2+\cdots),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= (1+z)(1+z+z^2+\cdots) \\
&= 1+z+z^2+\cdots+z+z^2+\cdots \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} (re^{i\theta})^n \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n[\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)],
\end{aligned}$$

de acá obtenemos

$$\begin{aligned}
Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) &= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(n\theta) \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\left(\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\right) \\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$P_r(\theta) = 1+\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{in\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} \qquad (3.9)$$

Haciendo un cambio $k=-n$ en la segunda suma del lado derecho de (3.9) se obtiene que

$$P_r(\theta) = 1+\sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{-ik\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta},$$

o lo que es lo mismo:

$$P_r(\theta) = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta}. \qquad (3.10)$$

En consecuencia, de (3.8) y (3.10)

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right). \qquad (3.11)$$

También,

$$\begin{aligned}
\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= \frac{(1+re^{i\theta})\overline{(1-re^{i\theta})}}{(1-re^{i\theta})\overline{(1-re^{i\theta})}} \\
&= \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{|1-re^{i\theta}|^2} \\
&= \frac{1+re^{i\theta}-re^{-i\theta}-r^2e^{i\theta}e^{-i\theta}}{|(1-r\cos\theta)-ir\,\mathrm{sen}\,\theta|^2} \\
&= \frac{1+re^{i\theta}-re^{-i\theta}-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \\
&= \frac{1+re^{i\theta}-re^{-i\theta}-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Así, por (3.11) y (3.12) podemos concluir que

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}. \qquad (3.13)$$

Además de esto, el núcleo de Poisson satisface otras propiedades importantes que citamos a continuación, cuya demostración se basa en calculos sencillos considerando la ecuación (3.13). Para afinar detalles ver [C].

PROPOSICIÓN 3.5. *El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1.$

(b) $P_r(\theta) > 0$ *para todo* θ.

(c) $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$.

(d) $P_r(\theta)$ *es periódica de período* 2π.

(e) $P_r(\theta) < P_r(\delta)$ *si* $0 < \delta < |\theta| \leqslant \pi$.

(f) *Para cada* $\delta > 0$, $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\theta) = 0$ *uniformemente en* θ, *para* $\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

TEOREMA 3.5. *Sea* $f : \partial D \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces existe una función continua* $u : D^- \to \mathbb{R}$ *tal que:*

(a) $u(z) = f(z)$ *para todo* $z \in \partial D$.

(b) u *es una función armónica en* D.

Más aún, u *es única y está definida por la fórmula*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt;\ \text{para } 0 \leqslant r < 1 \text{ y } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Demostración. Definamos la función $u : D^- \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt, & \text{si } 0 \leqslant r < 1; \\ f(e^{i\theta}), & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Es claro que $u = f$ en ∂D. Sólo resta demostrar que u es una función continua en D^- y armónica en D, además de su unicidad. Verifiquemos que u es armónica en D. Sea $0 \leqslant r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\right) f(e^{it})dt \\ &= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}dt\right) \\ &= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}dt\right). \end{aligned}$$

Ahora definamos la siguiente función, $g : D \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt. \tag{3.14}$$

Nótese que $u = Re(g)$ y así basta demostrar que g es analítica en D. En (3.14) hagamos $w = e^{it}$, entonces $dw = ie^{it}dt$ y en consecuencia $dt = \dfrac{dw}{ie^{it}} = \dfrac{dw}{iw}$. Además, sea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; esto implica que

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{2\pi i w} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) dw.$$

Definamos ahora la función $\varphi : \gamma \times D \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(w, z) = \frac{f(w)}{2\pi i w} \left(\frac{w+z}{w-z} \right).$$

Haciendo uso del Teorema A.6 obtenemos que g es continua. También nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) &= \frac{f(w)}{2\pi i w} \left[\frac{(w-z) + (w+z)}{(w-z)^2} \right] \\
&= \frac{f(w)}{2\pi i w} \left[\frac{2w}{(w-z)^2} \right] \\
&= \frac{f(w)}{\pi i (w-z)^2},
\end{aligned}$$

y como f es continua entonces $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe y es continua. Luego, también por el Teorema A.6 g es analítica.

Ahora probemos que u es continua en $\bar{D}$. Como u es armónica en D entonces u es continua en D. La siguiente afirmación junto con la continuidad de la función f en ∂D demuestra que la función u efectivamente es continua en $D \cup \partial D = D^-$.

Afirmación 2: *Dado $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y $\varepsilon > 0$ existe $0 < \rho < 1$, y un arco A_1 de ∂D alrededor de $e^{i\alpha}$ tal que para $\rho < r < 1$ y $e^{i\theta} \in A_1$ resulta que*

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \varepsilon.$$

Probemos para $\alpha = 0$, el caso general se obtiene de este por una rotación de variables. Consideremos $\varepsilon > 0$, como f es una función continua en la frontera del disco unitario existe $\delta > 0$ de manera que

$$|f(e^{i\theta}) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \text{ si } |\theta| < \delta. \tag{3.15}$$

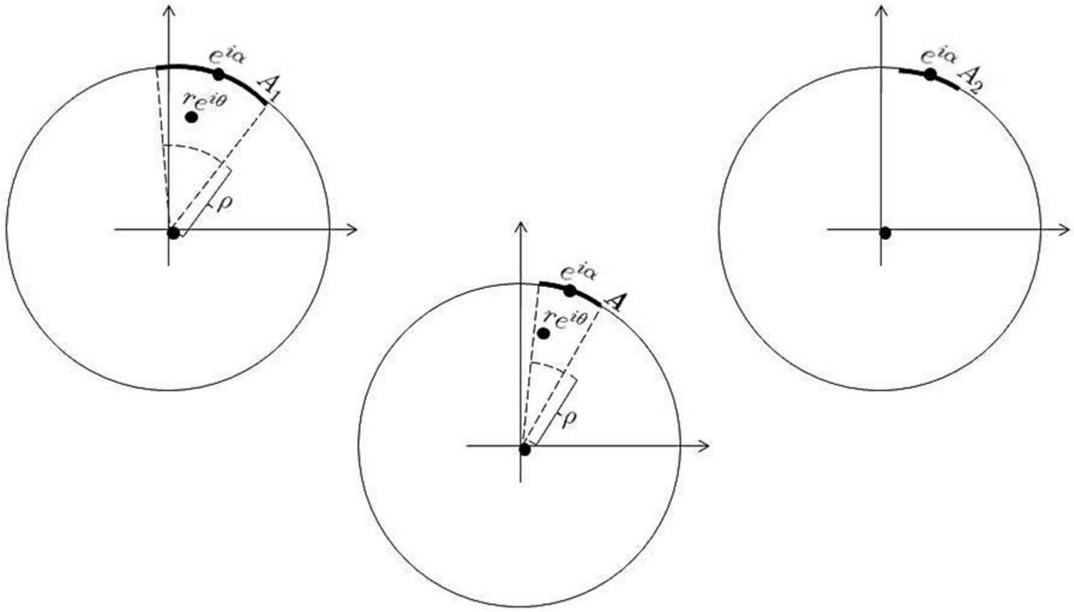

FIGURA 3.4:

Por otro lado, sea $M = \text{máx}\{|f(e^{i\theta})| : |\theta| \leqslant \pi\}$ ($M > 0$ existe ya que f es continua en el conjunto compacto $[-\pi,\pi]$). Por la Proposición 3.5 parte (f), $\text{lím}_{r\to 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en θ, siempre que $\frac{\delta}{2} \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

Para $\dfrac{\varepsilon}{3M}$ existe $0 < \delta_1 < 1$ tal que si $0 < 1 - r < \delta_1$ entonces $P_r(\theta) < \dfrac{\varepsilon}{3M}$. Nótese que,

$$\begin{aligned} 0 < 1 - r < \delta_1 &\Rightarrow -\delta_1 < r - 1 < 0 \\ &\Rightarrow 1 - \delta_1 < r < 1. \end{aligned}$$

Tomemos $\rho = 1 - \delta_1 > 0$, con lo cual se asegura que $0 < \rho < 1$ de modo que

$$P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3M} \text{ para } \rho < r < 1 \text{ y } \frac{\delta}{2} \leqslant |\theta| < \pi. \tag{3.16}$$

Sea A el arco $\left\{e^{i\theta} : |\theta| < \frac{\delta}{2}\right\}$. Entonces, si $e^{i\theta} \in A$ y $\rho < r < 1$,

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) - f(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt - f(1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(1)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)[f(e^{it}) - f(1)]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)[f(e^{it}) - f(1)]dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} P_r(\theta - t)[f(e^{it}) - f(1)]dt.
\end{aligned}$$

Pero notemos que si $|t| \geqslant \delta$ y $|\theta| \leqslant \frac{\delta}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}
|t - \theta| &\geqslant |t| - |\theta| \\
&\geqslant \delta - \frac{\delta}{2} \\
&= \frac{\delta}{2}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De esta manera, juntando la última igualdad con lo obtenido en (3.15), (3.16) y (3.17) podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - f(1)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)|f(e^{it}) - f(1)|dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} P_r(\theta - t)|f(e^{it}) - f(1)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)\frac{\varepsilon}{3}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{\varepsilon}{3M}2Mdt \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\pi\varepsilon}{3\pi} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, queda demostrada la afirmación para $\alpha = 0$.

Finalmente, probemos que la función u es única. Supongamos que existe una función continua $v : D^- \to \mathbb{R}$ la cual es armónica en D y además cumple que

$v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ para todo θ. Entonces $u - v$ es armónica en D y también se cumple que $(u - v)(z) = 0$ para cualquier $z \in \partial D$. Por el Corolario 3.1 resulta que $u - v \equiv 0$ en D^-, o equivalentemente que $u = v$ en D^-. Luego, u es única. ■

Corolario 3.2. *Si $u : D^- \to \mathbb{R}$ es una función continua y armónica en D, entonces*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt; \text{ para } 0 \leqslant r < 1 \text{ y todo } \theta.$$

Más aún, u es la parte real de la función analítica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})dt.$$

Demostración. Ya que en el Teorema anterior la función u es única, inmediatamente se obtiene que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt.$$

Por otro lado, por el Teorema A.6 se tiene que f es analítica. Además, recordemos que por (3.13)

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right);$$

por lo que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) u(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) u(e^{it})dt \\ &= Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} u(e^{it})dt\right] \\ &= Re\left(f(z)\right). \end{aligned}$$

Por tanto, u es la parte real de la función analítica f. ■

Corolario 3.3. *Sean $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ y $h : \{z : |z - a| = \rho\} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función continua $w : \bar{B}(a, \rho) \to \mathbb{R}$ tal que w es armónica en $B(a, \rho)$ y $w(z) = h(z)$ para $|z - a| = \rho$.*

Demostración. Consideremos la función $f : \partial D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(e^{i\theta}) = h(a + \rho e^{i\theta}).$$

Como h es una función continua entonces f es una función continua. Hagamos uso del Teorema 3.5. Sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ la función continua, armónica en D, con $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Ahora definamos la función $w : \bar{B}(a, \rho) \to \mathbb{R}$ dada por

$$w(z) = u\left(\frac{z-a}{\rho}\right).$$

Nótese que, como $z \in \bar{B}(a, \rho)$ entonces $z = a + Re^{i\theta}$ con $0 < R \leqslant \rho$. Por lo que

$$\frac{z-a}{\rho} = \frac{a + Re^{i\theta} - a}{\rho} = \frac{R}{\rho}e^{i\theta},$$

y de esta manera puntos de la forma $\dfrac{z-a}{\rho}$, con $z \in \bar{B}(a, \rho)$, están en el dominio de u ya que $\frac{R}{\rho} \leqslant 1$.

Así, como u es continua entonces w es una función continua en $\bar{B}(a, \rho)$ y también, teniendo en cuenta que u es armónica en D, notemos que: ea $z \in B(a, \rho)$, con $x + iy = z = a + Re^{i\theta}$ y $0 < R < \rho$.

$$\begin{aligned}
w_{xx}(z) + w_{yy}(z) &= u_{xx}\left(\frac{z-a}{\rho}\right) + u_{yy}\left(\frac{z-a}{\rho}\right) \\
&= u_{xx}\left(\frac{R}{\rho}e^{i\theta}\right) + u_{yy}\left(\frac{R}{\rho}e^{i\theta}\right) \\
&= 0 \left(\text{pues } \frac{R}{\rho}e^{i\theta} \in D \text{ ya que } \frac{R}{\rho} < 1\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, w es armónica en $B(a, \rho)$.
Ahora probemos que $w(z) = h(z)$ para todo z tal que $|z - a| = \rho$.
Sea $z = a + \rho e^{i\theta} \in \partial B(a, \rho)$,

$$\begin{aligned}
w(z) &= u\left(\frac{z-a}{\rho}\right) \\
&= u(e^{i\theta}) \\
&= f(e^{i\theta}) \\
&= h(a + \rho e^{i\theta}) \\
&= h(z).
\end{aligned}$$

Finalmente, para demostrar la unicidad de la función w se procede de manera similar a la demostración de la unicidad de la función u en el Teorema 3.5. ■

Los Corolarios 3.2 y 3.3 resultan de gran importancia porque nos dicen que con sólo conocer el valor de una función armónica en la frontera de un disco se puede conocer el valor de la función en todo el disco, este hecho resulta de gran utilidad en las aplicaciones de la matemática como por ejemplo en la Física (ver [D] y [W]).

El siguiente Teorema representa "una espacie de recíproco" del Teorema del Valor Medio.

Teorema 3.6. *Sean G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $u : G \to \mathbb{R}$ una función continua la cual tiene la Propiedad del Valor Medio. Entonces u es armónica.*

Demostración. Sea $a \in G$. Dado que G es un conjunto abierto, tomemos $\rho > 0$ de modo que $\bar{B}(a, \rho) \subset G$. Ya que a es cualquier punto en G, es suficiente demostrar que u es armónica en $B(a, \rho)$.

Como u es una función continua en $\{z : |z - a| = \rho\}$ entonces, por el Corolario 3.3, existe una función continua $w : \bar{B}(a, \rho) \to \mathbb{R}$ la cual es armónica en $B(a, \rho)$ y además $w(a + \rho e^{i\theta}) = u(a + \rho e^{i\theta})$ para cualquier θ.

Por otro lado, como w es armónica en $B(a, \rho)$ entonces w tiene la Propiedad del Valor Medio. Además, por hipótesis, u también tiene la Propiedad del Valor Medio en $B(a, \rho)$, por lo que $u - w$ tiene la Propiedad del Valor Medio en $B(a, \rho)$. Ya que tanto u como w son funciones continuas en $\bar{B}(a, \rho)$ entonces resulta que $u - w$ es una función continua en $\bar{B}(a, \rho)$.

Dado que $u(z) = w(z)$ para todo $z \in \partial B(a, \rho)$ se tiene que $(u - w)(z) = 0$ para todo $z \in \partial B(a, \rho)$. De esta manera, por el Corolario 3.1, $(u - w)(z) = 0$ para todo $z \in B(a, \rho)$, o equivalentemente $u(z) = w(z)$ para todo $z \in B(a, \rho)$.

Como w es armónica en $B(a, \rho)$ entonces u es armónica en $B(a, \rho)$. ■

Capítulo 4

El Teorema de Harnack.

En este capítulo se enuncia el Teorema de Harnack y se presenta una demostración de este Teorema como lo expone [C], además se presenta una demostración alternativa, la cual involucra El Teorema de Dini y un conocido Teorema del Análisis Real como lo es El Teorema de la Convergencia Monótona.

Para realizar la demostración de este Teorema es fundamental el siguiente resultado, el cual se denomina *la Desigualdad de Harnack*.

§4.1. La desigualdad de Harnack.

Lema 4.1 (Desigualdad de Harnack). *Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Si $u : \bar{B}(a, R) \to \mathbb{R}$ es una función continua, armónica en $B(a, R)$ y $u \geqslant 0$ entonces para $0 \leqslant r \leqslant R$ y todo θ se cumple que*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leqslant u(a + re^{i\theta}) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u(a). \tag{4.1}$$

Demostración. Escojamos $0 \leqslant r < 1$ con $r < R$ y $-\infty < \theta < +\infty$. Entonces recordemos (por las caracterizaciones del núcleo de Poisson presentadas en la ecuación (3.13)) que:

$$Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Como $0 \leqslant r < R$, entonces $\dfrac{r}{R} < 1$ y nótese que

$$\begin{aligned} P_{\frac{r}{R}}(\theta) &= \frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \frac{r^2}{R^2}} \\ &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Teorema 3.5 y los detalles de la demostración del Corolario 3.3 se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
u(a+re^{i\theta}) &= u\left(\frac{a+re^{i\theta}-a}{R}\right)\\
&= u\left(\frac{r}{R}e^{i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r}{R}}(\theta-t)u(a+Re^{it})dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado, también recordemos que

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2},$$

por lo que

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}.$$

Si en la última igualdad cambiamos r por $\dfrac{r}{R}$ resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} &= \frac{1-\dfrac{r^2}{R^2}}{|1-\dfrac{r}{R}e^{i(\theta-t)}|^2}\\
&= \frac{\dfrac{R^2-r^2}{R^2}}{|R-re^{i(\theta-t)}|^2}\\
&= \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{it}e^{i(\theta-t)}|^2}\\
&= \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2}.
\end{aligned}$$

Además, por la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
R-r &= |Re^{it}|-|re^{i\theta}|\\
&\leqslant |Re^{it}-re^{i\theta}|\\
&\leqslant |Re^{it}|+|re^{i\theta}|\\
&= R+r.
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
(R-r)^2 \leqslant |Re^{it}-re^{i\theta}|^2 \leqslant (R+r)^2 &\Rightarrow \frac{R^2-r^2}{(R+r)^2} \leqslant \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}+re^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}\\
&\Rightarrow \frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} \leqslant \frac{R+r}{R-r}.
\end{aligned}$$

Como u es armónica entonces, por el Teorema 3.1 (Teorema del Valor Medio), se tiene que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})dt.$$

Si multiplicamos por $\dfrac{1}{2\pi}u(a+re^{it})$ e integramos desde $-\pi$ hasta π con respecto a t en

$$\frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} \leqslant \frac{R+r}{R-r}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})dt &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\right]u(a+re^{it})dt \\ &\leqslant \left(\frac{R+r}{R-r}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})dt\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leqslant u(a+re^{i\theta}) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u(a).$$

■

§4.2. El Teorema de Harnack.

Teorema 4.1 (Teorema de Harnack)**.** *Sean G una región y ρ la métrica definida como en* (2.1)*. Entonces*

(a) *El espacio métrico $(Har(G), \rho)$ es completo.*

(b) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $Har(G)$, entonces ó $u_n(z) \to +\infty$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de G ó (u_n) converge en $Har(G)$ a una función armónica.*

Demostración. **(a)** Debido a que $(\mathcal{C}(G,\mathbb{R}), \rho)$ es un espacio métrico completo, es suficiente demostrar que $Har(G)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(G,\mathbb{R})$. Sea $u : G \to \mathbb{R}$ una función y (u_n) una sucesión en $Har(G)$ tal que $u_n \to u$. Demostremos que u satisface la Propiedad del Valor Medio.

Sea $a \in G$ y consideremos $r > 0$ tal que $\bar{B}(a,r) \subset G$. Como $\bar{B}(a,r)$ es compacto entonces, por la Proposición 2.3, (u_n) converge a u uniformemente en $\bar{B}(a,r)$. De esta manera, haciendo uso de los Teoremas 3.1 y A.7

$$\begin{aligned} u(a) &= \lim_{n\to\infty} u_n(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(a+re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

Es decir, la función continua u posee la Propiedad del Valor Medio. En conclusión, u es armónica.

(b) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_1 \geqslant 0$, pues en caso contrario para realizar la demostración se considera la sucesión $(u_n - u_1)_{n\in\mathbb{N}}$. Así $u_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $u : G \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por $u(z) = \sup\{u_n(z) : n \geqslant 1\}$ para cada $z \in G$, entonces por ser (u_n) una sucesión creciente tenemos que $u_n(z) \to u(z)$ puntualmente. Por lo tanto, para cada $z \in G$ ocurre una, y solo una, de las siguientes posibilidades: $u(z) = \infty$ ó $u(z) \in \mathbb{R}$.

Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{z \in G : u(z) = \infty\}.$$

$$B = \{z \in G : u(z) < \infty\};$$

entonces $G = A \cup B$ y $A \cap B = \varnothing$. A continuación, mostraremos que tanto A como B son conjuntos abiertos.

Sea a cualquier punto en G y escojamos $R > 0$ de modo que $\bar{B}(a,R) \subset G$. Por la desigualdad de Harnack, resulta que

$$\frac{R-|z-a|}{R+|z-a|}\,u_n(a) \leqslant u_n(z) \leqslant \frac{R+|z-a|}{R-|z-a|}\,u_n(a), \tag{4.2}$$

para todo $z \in B(a,R)$ y para cada $n \geqslant 1$.

Si $a \in A$ entonces $u_n(a) \to \infty$, así considerando la primera desigualdad en (4.2) y tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos que para cada $z \in B(a,R)$

$$\infty = \frac{R-|z-a|}{R+|z-a|}\lim_{n\to\infty} u_n(a) \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z),$$

esto es, $B(a,R) \subset A$ y por tanto A es abierto.

Ahora supongamos que $a \in B$, entonces haciendo uso del lado derecho de (4.2) y razonando similarmente al caso anterior resulta

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) \leqslant \frac{R+|z-a|}{R-|z-a|}\lim_{n\to\infty} u_n(a) = \frac{R+|z-a|}{R-|z-a|}\,u(a) < \infty,$$

para todo $z \in B(a, R)$. Es decir, $B(a, R) \subset B$ lo que demuestra que B es abierto.

De esta manera, por la conexidad de G tenemos que o $A = G$ ó $B = G$. Supongamos que $A = G$, esto es $u \equiv \infty$. Nuevamente, si $\bar{B}(a, R) \subset G$ y $0 < r_1 < R$, entonces para $M = (R - r_1)(R + r_1)^{-1}(> 0)$, por (4.2), se tiene que $Mu_n(a) \leqslant u_n(z)$ en $|z - a| \leqslant r_1$. De aquí, $u_n(z) \to \infty$ uniformemente sobre $\bar{B}(a, r_1)$.
Entonces, para cada $a \in G$ existe $r > 0$ tal que $u_n(z) \to \infty$ uniformemente en $|z - a| \leqslant r$, lo cual equivale a demostrar, según la Proposición 2.3, que $u_n \to \infty$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de G.

Supongamos ahora que $B = G$, entonces $u(z) < \infty$ para todo $z \in G$. Si $r_2 < R$ entonces, como antes, existe una constante N (la cual depende solo de a y de r_2) de modo que $Mu_n(a) \leqslant u_n(z) \leqslant Nu_n(a)$ para $|z - a| \leqslant r_2$. De esta manera, si $m \leqslant n$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_n(z) - u_m(z) \\ &\leqslant Nu_n(a) - Mu_m(a) \\ &\leqslant C[u_n(a) - u_m(a)], \end{aligned}$$

para alguna constante C. Esto es, $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniforme de Cauchy en $\bar{B}(a, r_2)$. Así, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $Har(G)$ (el cual por parte **(a)** es completo) y en consecuencia converge a una función armónica. Ya que $u_n(z) \to u(z)$ se tiene que u es una función armónica. ∎

Vamos a presentar una demostración alternativa de la parte **(b)** del Teorema de Harnack. Para esta demostración se define la función u y los conjuntos A y B como antes y de igual manera se demuestra que estos son abiertos. Nuevamente se tiene que ó $A = G$ ó $B = G$.

Demostremos que u es continua. Sea $R > 0$ con $\bar{B}(a, R) \subset G$. Entonces por (4.2), tomando límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que $u_n(z) \to u(z)$ (puntualmente) para todo z, obtenemos

$$\frac{R - |z - a|}{R + |z - a|}\, u(a) \leqslant u(z) \leqslant \frac{R + |z - a|}{R - |z - a|}\, u(a).$$

Sumando $-u(a)$ se obtiene lo siguiente

$$\frac{-2|z - a|}{R + |z - a|}\, u(a) \leqslant u(z) - u(a) \leqslant \frac{2|z - a|}{R - |z - a|}\, u(a),$$

o equivalentemente,

$$|u(z) - u(a)| \leqslant \frac{2|z - a|}{R - |z - a|}\, u(a) \ \text{ para todo } z \in B(a, R).$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \min\left\{R, \dfrac{\varepsilon R}{2u(a)+\varepsilon}\right\} > 0$ (es mayor que cero porque ε y R lo son, además el denominador no altera el signo puesto que $u \geqslant 0$ ya que en un principio se partió del hecho que la sucesión de funciones es no negativa), entonces se verifica que si $z \in B(a,\delta)$ se obtiene que $u(z) \in B(u(a),\varepsilon)$.
Por tanto, u es continua en a y como a es un punto arbitrario de G se concluye que u es continua en G.

Ahora bien, supongamos que $A = G$. De esta manera, $u \equiv \infty$. De esto tenemos que $u \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R})$ y (u_n) es una sucesión en $\mathcal{C}(G,\mathbb{R})$ monótona creciente tal que $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$ para todo $z \in G$ (esto es el límite puntual), por consiguiente aplicando el Teorema A.4 (Teorema de Dini) obtenemos que (u_n) converge a u en $\mathcal{C}(G,\mathbb{R})$. La Proposición 2.3 garantiza que (u_n) converge a $u \equiv \infty$ uniformemente sobre todos los subconjuntos compactos de G.

Ahora, supongamos que $B = G$, es decir, $u(z) < \infty$ para todo $z \in G$. Probemos que u tiene la Propiedad del Valor Medio (como u es continua se obtiene que u es una función armónica).

Nótese que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones medibles (ya que $u_n \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$) con $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \sup\{u_n(z) : n \geqslant 1\}$ entonces por el Teorema A.8 (Teorema de la Convergencia Monótona) se tiene

$$\int_{\partial \bar{B}(a,R)} u(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial \bar{B}(a,R)} u_n(z)dz, \tag{4.3}$$

para todo $a \in G$ y $R > 0$ tal que $\bar{B}(a,R) \subset G$. Por el Teorema 3.1 y la ecuación (4.3), se tiene que

$$\begin{aligned} u(a) &= \lim_{n\to\infty} u_n(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(a+Re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

Por tanto, u posee la Propiedad del Valor Medio y como u es continua, por el Teorema 3.6, se obtiene que u es armónica. ■

Capítulo 5

Funciones Subarmónicas y Superarmónicas.

En el capítulo 3 se obtuvo una caracterización importante para determinar cuando una función continua u, definida en un subconjunto abierto G de $\mathbb{C}$, es armónica. Dicha caracterización exige que la función, además de ser continua, debe cumplir con la Propiedad del Valor Medio. Esto es, cuando $\bar{B}(a,r) \subset G$ resulta que
$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$.

Pensando en esto, la terminología usada en la siguiente definición esta relacionada con esta caracterización y así podemos decir que es la adecuada.

Definición 5.1. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función continua. φ es una función* ***subarmónica*** *si cuando $\bar{B}(a,r) \subset G$ sucede que*

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})d\theta.$$

φ es una función ***superarmónica*** *si cuando $\bar{B}(a,r) \subset G$ sucede que*

$$\varphi(a) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})d\theta.$$

Al conjunto de las funciones subarmónicas definidas sobre G lo denotaremos por ***Subhar(G)*** *y al conjunto de las funciones superarmónicas definidas en G lo denotaremos por* ***Superhar(G)****.*

Ejemplo 5.1. *Sean n cualquier número natural y $G \subset \mathbb{C}$ una región. Consideremos la función $\varphi : G \to \mathbb{R}$ definida como $\varphi(x,y) = n(x^2 + y^2)$ para todo (x,y) en G. Tomemos $a = (a_1, a_2)$ en G y $R > 0$ de manera que $\bar{B}(a,R) \subset G$. Nótese que*

$$\varphi(a) = \varphi(a_1, a_2) = n(a_1^2 + a_2^2). \tag{5.1}$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a+Re^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a_1+R\cos\theta, a_2+R\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left[(a_1+R\cos\theta)^2+(a_2+R\operatorname{sen}\theta))^2\right]d\theta \\
&= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_1^2+a_2^2+R^2)d\theta+\int_0^{2\pi}2R(a_1\cos\theta+a_2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= na_1^2+na_2^2+nR^2+0 \\
&= n(a_1^2+a_2^2)+nR^2. \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

De esta manera, de (5.1) *y* (5.2) *se concluye que*

$$\varphi(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a+Re^{i\theta})d\theta.$$

Por tanto, φ es una función subarmónica.

Observación 5.1. **(a)** *Nótese que una función φ es superarmónica si, y sólo si, $-\varphi$ es subarmónica.*

(b) *Si una función φ es subarmónica entonces $-\varphi$ es subarmónica solo si φ es armónica.*

(c) *De acuerdo a la caracterización para las funciones armónicas obtenida en el Teorema* 3.6 *podemos concluir que las funciones armónicas son, tanto subarmónicas como superarmónicas.*

En lo sucesivo se estudiarán solo a las funciones subarmónicas, ya que por la Observación anterior parte **(a)** el estudio para las funciones superarmónicas es análogo al estudio para las funciones subarmónicas.

Proposición 5.1. *Sean φ_1 y φ_2 funciones subarmónicas y $a_1, a_2 \geqslant 0$. Entonces $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2$ es una función subarmónica.*

Es de interés estudiar cuales de los resultados obtenidos para funciones armónicas también son válidos para funciones subarmónicas. Uno de los más importantes es el Principio del Máximo, el cual se enuncia a continuación y cuya demostración se omitirá pues es similar a la expuesta en la primera versión del Principio del Máximo.

Teorema 5.1 (Principio del Máximo. Tercera versión)**.** *Sean G una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si existe $a \in G$ de manera que $\varphi(a) \geqslant \varphi(z)$ para todo $z \in G$ entonces φ es una función constante.*

Observación 5.2. *Nótese que el Principio del Mínimo solo es válido para funciones superarmónicas.*

También es posible extender la segunda versión del Principio del Máximo, pero en esta nueva versión se utilizarán tanto a las funciones subarmónicas como a las superarmónicas. Nuevamente, la demostración del siguiente Teorema se omitirá por ser similar a la presentada en la segunda versión del Principio del Máximo.

Teorema 5.2 (Principio del Máximo. Cuarta versión)**.** *Sean G una región, $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función subarmónica y $\psi : G \to \mathbb{R}$ una función superarmónica. Si para cada $a \in \partial_\infty G$ sucede que*

$$\limsup_{z\to a} \varphi(z) \leqslant \liminf_{z\to a} \psi(z),$$

entonces ó $\varphi(z) \leqslant \psi(z)$ para todo $z \in G$ ó $\varphi = \psi$ y φ es armónica.

Observación 5.3. *Al igual que $Har(G)$, los espacios $Subhar(G)$ y $Superhar(G)$ son completos con la métrica ρ definida en (2.1) y la demostración de ello es similar a la expuesta para funciones armónicas.*

El Teorema que sigue a continuación aporta una manera de caracterizar a las funciones subarmónicas.

Teorema 5.3. *Sean G una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces φ es subarmónica si, y sólo si, para cada región $G_1 \subset G$ y para cada función armónica u_1 definida en G_1 ocurre que $\varphi - u_1$ satisface la tercera versión del Principio del Máximo en G_1.*

Demostración. Supongamos que φ es subarmónica. Sean $G_1 \subset G$ una región y $u_1 : G \to \mathbb{R}$ una función armónica. Es claro que $\varphi - u_1 : G_1 \to \mathbb{R}$ es una función subarmónica y que satisface la tercera versión del Principio del Máximo (la demostración de esto último es similar a la realizada en la primera versión del Principio del Máximo).

Recíprocamente, supongamos que para cada región $G_1 \subset G$ y cada función armónica u_1 definida en G_1, $\varphi - u_1$ satisface la tercera versión del Principio del Máximo. Sean a un punto cualquiera en G y $r > 0$ tales que $\bar{B}(a,r) \subset G$. Como φ es continua en $\{z : |z-a| = r\}$ entonces por el Corolario 3.3 existe una única función continua $w : \bar{B}(a,r) \to \mathbb{R}$ la cual es armónica en $B(a,r)$ y $w(z) = \varphi(z)$ para $|z-a| = r$.

Por hipótesis, $\varphi - w$ satisface la tercera versión del Principio del Máximo. Dado que la función $\varphi - w$ es continua en el conjunto compacto $\bar{B}(a,r)$ (esto garantiza la existencia de $x \in B(a,r)$ tal que $(\varphi - w)(x) \geqslant (\varphi - w)(z)$ para todo $z \in B(a,r)$) se tiene que, por la tercera versión del Principio del Máximo, $\varphi - w$ es constante en $B(a,r)$. Más aún, se verifica que $\varphi - w$ es constante en $\bar{B}(a,r)$ (la condición de ser G abierto lo garantiza), pero como $(\varphi - w)(z) = 0$ para $|z-a| = r$ entonces $\varphi - w \equiv 0$ en $\bar{B}(a,r)$.
De esta manera,

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &\leqslant w(a) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(a+re^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a+re^{i\theta})d\theta.
\end{aligned}$$

Por tanto, φ es subarmónica. ■

Corolario 5.1. *Sean G una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces φ es subarmónica si, y sólo si, para cada región acotada G_1 tal que $G_1^- \subset G$ y para cada función continua $u_1 : G_1^- \to \mathbb{R}$ que sea armónica en G_1 y satisfaga que $\varphi(z) \leqslant u_1(z)$ para $z \in \partial G_1$, ocurre que $\varphi(z) \leqslant u_1(z)$ para $z \in G_1$.*

Corolario 5.2. *Sean G una región y tanto $\varphi_1 : G \to \mathbb{R}$ como $\varphi_2 : G \to \mathbb{R}$ funciones subarmónicas. Si $\varphi(z) = \max\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$ para cada $z \in G$ entonces φ es una función subarmónica.*

La Observación 5.3 nos permite concluir que las funciones subarmónicas cumplen con la parte **(a)** del Teorema de Harnack. Sin embargo no es cierto que el Teorema de Harnack es válido para funciones subarmónicas, para demostrar esto veamos el siguiente ejemplo en el cual se tiene una sucesión creciente en $Subhar(G)$ que no cumple con la parte **(b)** del Teorema de Harnack.

Ejemplo 5.2. *Consideremos la sucesión de funciones* (u_n)*, donde para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *y esta definida por* $u_n(x, y) = n(x^2 + y^2)$*. Se sabe que para cada* $n \in \mathbb{N}$*, por el Ejemplo* 5.1*,* u_n *es una función subarmónica. Además, es claro que*

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots$$

Ahora bien, si $x \neq 0$ *o* $y \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x, y) = \lim_{n \to +\infty} n(x^2 + y^2) = +\infty.$$

Por otro lado, si $x = 0 = y$ *entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n(x, y) &= \lim_{n \to +\infty} u_n(0, 0) \\ &= \lim_{n \to +\infty} n(0^2 + 0^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nótese para cualquier conjunto compacto de $\mathbb{C}$ *que contenga al punto* $(0, 0)$ *no se cumple que* $u_n(z) \to +\infty$ *uniformemente y tampoco se cumple que* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en Subhar*$(\mathbb{C})$ *a una función subarmónica.*

Apéndice A
Notas Finales.

En este apéndice se enuncian algunas definiciones y resultados pertenecientes al análisis matemático, análisis real y análisis complejo que fueron utilizados en el desarrollo de este trabajo.

Definición A.1 (Conjunto Convexo). *Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se llama **convexo** si para todo par de puntos $p, q \in A$, se cumple que $[p, q] \subset A$, donde*

$$[p, q] = \{z \in \mathbb{C} : x = (1 - \lambda)p + \lambda q;\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

Definición A.2 (Curva de Jordan). *Una **curva de Jordan** es la imagen de $z = f(t)$ sobre un intervalo $I = [\alpha, \beta]$, tal que f es inyectiva en el interior de I, f' existe y es continua en I y $f(\alpha) = f(\beta)$.*

Definición A.3 (Índice). *Sea Γ la imagen de $z = f(t)$ sobre un intervalo $I = [\alpha, \beta]$, donde f' existe y es continua en I y $f(\alpha) = f(\beta)$. Sea $z_0 \notin \Gamma$, se define el **índice** de Γ en z_0, denotado por $Ind(\Gamma, z_0)$, como*

$$Ind(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Teorema A.1 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sea Ω un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω, entonces para cualquier curva de Jordan Γ incluida en el interior de Ω se cumple*

$$f(z)Ind(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

para $z \notin \Gamma$.

Teorema A.2 (Heine-Borel). *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$. Entonces K es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.*

TEOREMA A.3 (Lema del cubrimiento de Lebesgue)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto y $\mathscr{G}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si x está en X, existe un conjunto G en $\mathscr{G}$ de manera que $B(x, \varepsilon) \subset G$.*

TEOREMA A.4 (Teorema de Dini)**.** *Sean (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ monótona creciente y f una función en $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ tal que $\lim f_n(z) = f(z)$ para todo z en G. Entonces $f_n \to f$.*

TEOREMA A.5. *Sean $y \in \mathbb{R}$ y f una función a valores reales (o a los reales extendidos) definida en un intervalo que contiene a y. Entonces $\limsup_{x \to y} f(x) \leqslant A$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x que cumpla que $0 < |x - y| < \delta$ se tiene que $f(x) \leqslant A + \varepsilon$.*

TEOREMA A.6. *Sean G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y γ una curva rectificable en G. Suponga que $\varphi : \{\gamma\} \times G \to \mathbb{C}$ es una función continua y defina $g : G \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera*

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z) dw.$$

Entonces g es continua. Además, si $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe para cada (w, z) en $\{\gamma\} \times G$ y es continua entonces g es analítica y

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) dw.$$

TEOREMA A.7. *Sean γ una curva rectificable en $\mathbb{C}$ y tanto f_n como f funciones continuas definidas sobre $\{\gamma\}$. Si (f_n) converge uniformemente a f en $\{\gamma\}$ entonces*

$$\int_\gamma f = \lim \int_\gamma f_n.$$

TEOREMA A.8 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** *Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y E un conjunto medible en $\mathbb{C}$, donde $f_n : E \to \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$ entonces $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) = \sup\{f_n(z) : n \geqslant 1\}$ es una función medible y además*

$$\int_E f(z) dz = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(z) dz.$$

Referencias bibliográficas.

[C] J. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlarg. 1978.

[D] W. Derrick. *Variable Compleja con Aplicaciones.* Grupo editorial Iberoamérica. México, 1987.

[G] Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function Theory of One Complex Variable.* Board. 2000.

[L] S. Lang. *Complex Analysis.* Springer-Verlag, 1999.

[P] L. Pennisi. *Elements of Complex Variables.* Holt, Rinehart and Winston. New York, 1969.

[RH] H. Royden. *Real Analysis, Second Edition.* Macmillan Publishing. New York, 1963.

[RW] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill. 1999.

[V] M. Vivas. *Análisis en una Variable Compleja, Primera Edición.* Editorial Horizonte. Barquisimeto, 2009.

[W] D. Wunchs. *Variable Compleja con Aplicaciones, segunda edición.* Pearson Educación. 2004.