Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemática

Título:

"Métodos de la teoría local espectral para los operadores de semi-Fredholm"

Autor: Msc. Fernando Villafañe Duarte

Tutor: PhD. Pietro Aiena

Tesis Doctoral
Presentada ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctor en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, 26/06/2007

Título:
"Métodos de la teoría local espectral para los operadores de semi-Fredholm"

Nombre y Apellido del autor:
Fernando Villafañe Duarte.
UCLA

Año de aprobación: 2007

Integrantes del jurado:

- **Tutor:** Pietro Aiena (Universidad de Palermo, Italia)
- Marisela Domnguez (UCV)
- Maria Luisa Colasante (ULA)
- Stefanía Marcantognini (IVIC)
- Ramón Bruzual (UCV)

Decanato de Ciencias y Tecnología.

Departamento de Matemática.

Índice general

Resumen

Uno de los focos de las teoría de Fredholm es el estudio de diversos conjuntos resolventes que están asociados con los correspondientes espectros. Haciendo uso de algunas equivalencias entre la *propiedad de la extensión univaluada* SVEP en un punto, y ciertas condiciones de rango y de kernel que se han probado en [10], [12], [6] y [9], obtenemos una clasificación de las componentes conexas del resolvente de tipo Kato, $\rho_{kt}(T)$, así como del resolvente de semi-Fredholm $\rho_{sf}(T)$ y del resolvente semi-regular $\rho_{se}(T)$, mencionado en algunos trabajos como el resolvente de Kato.

También se estudian los operadores de Browder y operadores de Weyl. Introducimos la clase de operadores que verifican la propiedad (H) relacionándola con los operadores que satisfacen el teoremas de Weyl y una variante conocida como teorema de a-Weyl que fue introducida por Rakočević en [46]. Específicamente, se prueba que la propiedad (H) verificada por T, implica que el teorema de Weyl vale para T y T^*, y si adicionalmente, T^* tiene la SVEP, el teorema de a-Weyl vale para T y T^*.

Otro resultado relevante es relativo a los multiplicadores definidos sobre un álgebra de Banach, conmutativa, semi-simple para los cuales se cumple la propiedad (H) y en consecuencia vale el teorema de Weyl para T y T^*. Este resultado representa una mejora del Corolario 2.16 de [4].

Así mismo, para un multiplicador sobre un álgebra conmutativa Tauberiana regular y semi-simple, vale el teorema de a-Weyl y si T es descomponible, el teorema de a-Weyl vale para T^*. Vale también el teorema de a-Weyl para un multiplicador y su dual sobre un álgebra de Banach con una base ortogonal. Finalmente, vale el teorema de a-Weyl para multiplicadores con espectro natural, sobre un álgebra de Banach regular semi-simple.

Introducción

En el estudio de la teoría de operadores resulta de una importancia notable el llamado conjunto resolvente de un operador acotado $T \in L(X)$, definido en un espacio de Banach X, constituido por los elementos $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador $(\lambda I - T)$ es invertible, el complemento de este conjunto, llamado el espectro del operador T, se denota por $\sigma(T)$. La teoría espectral se enfoca en estudiar partes distinguidas del espectro. Para diferentes propiedades de "regularidad" de un operador, se tiene la correspondiente definición de la parte del espectro en donde no se cumple dicha propiedad para $(\lambda I - T)$. Así tenemos por ejemplo, el espectro sobreyectivo: los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $(\lambda I - T)$ no es sobreyectivo, el espectro aproximado puntual: los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $(\lambda I - T)$ no es *bounded below* (un operador es *bounded below* si es inyectivo y tiene rango cerrado).

Un operador es *upper semi-Fredholm* o *semi-Fredholm superior* si tiene rango cerrado y la dimensión del núcleo es finita, denotamos este conjunto por $\Phi_+(X)$; por otra parte, decimos que un operador de *lower semi-Fredholm* o *semi-Fredholm inferior*, si la codimensión del rango es finita y se denota por $\Phi_-(X)$. La clase de los operadores de Fredholm es la intersección $\Phi(X) := \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$. Estas clases de operadores motivan la definición de diferentes espectros:
el espectro upper semi-Fredholm superior

$$\sigma_{uf}(T) = \{\lambda : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\},$$

el espectro lower semi-Fredholm

$$\sigma_{lf}(T) = \{\lambda : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\},$$

y el espectro de Fredholm

$$\sigma_f(T) = \{\lambda : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

Otro concepto de regularidad en la teoría espectral, es el concepto de operadores semi-regulares y operadores de tipo Kato. Un operador $T \in L(X)$

se dice *semi-regular* si tiene rango cerrado y el núcleo de T^m está contenido en el rango $T^n(X)$, para naturales cualesquiera n, m. Un operador se dice *de tipo Kato* si existen dos subespacios cerrados M y N, invariantes bajo T, tales que $X = M \oplus N$, $T|M$ es semi-regular y $T|N$ es nilpotente. El espectro de tipo Kato está definido como

$$\sigma_{kt}(T) = \{\lambda : \lambda I - T \text{ no es de tipo Kato}\}.$$

La teoría de los operadores de Fredholm está íntimamente ligada con la teoría espectral y el enlace entre ambas se hace evidente cuando se considera la llamada *propiedad de la extensión univaluada* en un punto o *single-valued extension property* (SVEP). Esta propiedad data de los inicios del desarrollo de la teoría local espectral, fue inicialmente introducida en 1952 por Dunford [26], [27] y recibió un tratamiento sistemático en el clásico libro de Dunford y Schwartz [28], también en el libro de Laursen y Neumann [39] juega un papel central. Se dice que un operador tiene la SVEP en $\lambda \in \mathbb{C}$, si para cualquier vecindad $\mathcal{U}$ de λ, la única función analítica a variable compleja $f : \mathcal{U} \to X$ que satisface la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ es la función nula.

El estudio sistemático de la SVEP localizada, en relación a la teoría de los operadores de Fredholm, se encuentra en la reciente monografía de Aiena [1].

En este trabajo, se hace un estudio de los operadores de Fredholm indagando sobre la naturaleza de algunos espectros que surgen de esta teoría y estudiando las componentes de los conjuntos resolventes asociados. En ese sentido, se presenta una clasificación de las componentes conexas del resolvente de tipo Kato, utilizando las equivalencias existentes entre la propiedad SVEP localizada y algunas condiciones del núcleo y del rango de la iteraciones del operador en el caso de operadores de tipo Kato. Dichas equivalencias, se han estudiado en los trabajos de P. Aiena y O. Monsalve [11]; P. Aiena y E. Rosas [12]; P. Aiena, M.L. Colasante y M. Gonzalez [6] y P. Aiena, T. Miller y M. Neumann [9].

Así mismo, se estudia la constancia, de algunas aplicaciones que asumen valores en ciertos subespacios, sobre las componentes del resolvente de tipo Kato; este tipo de aplicaciones y su constancia sobre las componentes de ciertos conjuntos resolventes, fueron estudiadas por Ó Searcóid y West [51], en cuyo trabajo se extienden resultados de Homer [33], Goldmann y Kračkovskiĭ [30] y de Saphar [48]. El hecho de la constancia de estos mapeos, nos lleva a una clasificación de las componentes del resolvente de tipo Kato, $\rho_{kt}(T)$, de acuerdo a la verificación de la propiedad SVEP para T o T^*, esto se muestra en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3.

El otro tema fundamental de este trabajo, es estudiar los operadores para los cuales se satisface el teorema de Weyl. Por el año 1909 H. Weyl estudió el espectro de las perturbaciones compactas $T+K$ de un operador hermitiano T actuando sobre un espacio de Hilbert, él caracterizó los puntos del espectro de T, que no pertenecen al espectro de alguna perturbación compacta de T, $\sigma(T+K)$, como aquellos puntos aislados del espectro $\sigma(T)$ de T, que son autovalores de multiplicidad finita. En la actualidad, podemos enunciar este resultado de la siguiente forma: un punto espectral de un operador hermitiano T que no pertenece al espectro de Weyl, es exactamente un autovalor con multiplicidad finita y a la vez es un punto aislado del espectro. En años recientes, se ha extendido la validez del Teorema de Weyl, y una de sus variantes, como lo es el teorema de a-Weyl que fue introducida por Rakŏcević [46], a varias clases de operadores definidos sobre espacios de Banach. Sobre esta línea, se introduce la clase de operadores que satisfacen la propiedad (H), es decir, los que para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que la parte quasi-nilpotente de $\lambda I - T$, $H_0(\lambda I - T)$, es igual al núcleo de $\lambda I - T$. Se estudia el teorema de Weyl y su relación con los operadores que satisfacen la propiedad (H).

En particular, se establece en el Teorema 4.3.5 que la propiedad (H) para T, implica el teorema de Weyl para T y T^*. Además, se mostrará que el Teorema de a-Weyl vale para todo operador descomponible que tenga la propiedad (H), (Corolario 4.3.9). Finalmente, se estudia la verificación del teorema de Weyl para multiplicadores definidos sobre álgebras de Banach conmutativas y semi-simples, Teorema 4.5.1. Mientras que en el Teorema 4.5.3, se prueba que si T es un multiplicador sobre un álgebra de Banach Tauberiana, regular y semi-simple, se verifica el teorema de a-Weyl para T, y si T es descomponible, el teorema de a-Weyl vale para T^*. En particular, el teorema de a-Weyl vale para los multiplicadores en el álgebra grupal $L_1(G)$, donde G es un grupo abeliano localmente compacto, es decir, para cualquier operador de convolución T_μ se verifica dicho Teorema. También vale el teorema de a-Weyl para un multiplicador y su dual sobre un álgebra de Banach con una base ortogonal (Teorema 4.5.5). Finalmente, vale el teorema de a-Weyl para multiplicadores con espectro natural, sobre un álgebra de Banach regular semi-simple, (Teorema 4.5.7).

Los resultados aquí expuestos, aparecen reflejados en el capítulo 3 del libro de Pietro Aiena [1], que ha salido publicado en el año 2004; donde también aparecen resultados de los trabajos de varios tesistas de Doctorado y Maestría que el profesor ha dirigido durante varios años en las Universidades Venezolanas UCV, UCLA, UDO y ULA.

El trabajo se ha desarrollado en cuatro capítulos: en el primer capítulo, se enuncian las definiciones básicas de la teoría y algunos resultados útiles y de uso frecuente. En el segundo capítulo se estudia la herramienta que le ha dado un gran impulso a la teoría local espectral y que, en muchos casos simplifica, en buena medida las demostraciones, como lo es la SVEP. En el tercer capítulo se obtiene una clasificación de las componentes conexas del resolvente de tipo Kato. Finalmente, en el cuarto capítulo se estudian clases de operadores que satisfacen el Teorema de Weyl y de a-Weyl y en particular se estudian propiedades espectrales de multiplicadores definidos sobre ciertas álgebras de Banach.

Los resultados presentados en los capítulos 3 y 4 han dado lugar a las siguientes publicaciones:

1. P. Aiena, F. Villafañe.*Components of resolvent set and local spectral theory.* Contemporary Mathematics. **328** (2003). 1-14.

2. P. Aiena, F. Villafañe.*Weyl's theorem for some classes of operators.* Integral Equations and Operators Theory. **53** (2005) 453-466.

3. P. Aiena, M. T. Biondi, F. Villafañe. *Weyl's theorem and Kato spectrum.* Divulgaciones Matemáticas. La Universidad del Zulia. (por aparecer)

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enunciarán los conceptos básicos de la teoría, junto con las propiedades principales. Consideraremos X un espacio vectorial normado complejo.

1.1. El hiper-núcleo y el hiper-rango de un operador

Los núcleos y los rangos de los iterados T^n, con $n \in \mathbb{N}$, de un operador lineal T sobre un espacio vectorial X, son subespacios que satisfacen las siguientes inclusiones:

$$\ker T^0 = \{0\} \subseteq \ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \cdots$$

y

$$T^0(X) = X \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq \cdots$$

En efecto, consideremos un operador T definido sobre X, si $x \in \ker T^k$, entonces $T^k x = 0$, por tanto, $T^{k+1}x = 0$ y así se tiene la relación $\ker T^k \subseteq \ker T^{k+1}$. Análogamente, para $x \in T^{k+1}(X)$, se tiene que existe $y \in X$ tal que $T^{k+1}y = x$, de donde $T^k(Ty) = x$, por tanto $x \in T^k(X)$; luego, tenemos la relación $T^{k+1}(X) \subseteq T^k(X)$. En la siguiente sección consideraremos operadores para los cuales estas cadenas se hacen constantes.

Definición 1.1.1 (Hiper-núcleo) *Sea X un espacio vectorial y T un operador lineal definido sobre X. Se define el* hiper-núcleo *de T como la unión del núcleo de los iterados de T:*

$$\mathcal{N}^\infty(T) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker T^n$$

Definición 1.1.2 (Hiper-rango) *Sea X un espacio vectorial y T un operador lineal definido sobre X. Se define el* hiper-rango *de T como la intersección del rango de los iterados de T:*

$$T^{\infty}(X) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(X)$$

Lema 1.1.1 *Para todo operador lineal T definido sobre un espacio vectorial X se tiene:*

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n \qquad \textit{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Prueba: Si $x \in \ker T^{m+n}$ entonces, $T^m x \in T^m(X)$ y $T^n(T^m x) = 0$, por tanto, $T^m(\ker T^{m+n}) \subseteq T^m(X) \cap \ker T^n$. Recíprocamente, si $y \in T^m(X) \cap \ker T^n$, entonces $y = T^m x$ y $x \in \ker T^{m+n}$ lo que prueba la inclusión opuesta.

∎

En el siguiente resultado se muestran algunas conexiones entre el núcleo y el rango de los iterados de T^n de un operador T sobre un espacio vectorial X, que nos darán pié, posteriormente, para la definición de operador semi-regular.

Teorema 1.1.2 *Para un operador lineal T sobre un espacio vectorial X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(i) $\ker T \subseteq T^m(X)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$*;*
(ii) $\ker T^n \subseteq T(X)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*
(iii) $\ker T^n \subseteq T^m(X)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $m \in \mathbb{N}$*;*
(iv) $\ker T^n = T^m(\ker T^{m+n})$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $m \in \mathbb{N}$*;*
(v) $\ker T \subseteq T^{\infty}(X)$*;*
(vi) $\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq T(X)$*;*
(vii) $\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq T^{\infty}(X)$.

Prueba: Las implicaciones (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) son directas.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si aplicamos la hipótesis (ii) al operador T^m, se obtiene que $\ker T^{mn} \subseteq T^m(X)$ y así $\ker T \subseteq T^m(X)$, ya que $\ker T$ está contenido en $\ker T^{mn}$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Si aplicamos la hipótesis (i) al operador T^n, obtenemos que $\ker T^n \subseteq (T^n)^m(X) \subseteq T^m(X)$. Por el Lema 1.1.1 concluimos que

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n = \ker T^n.$$

También son claras las equivalencias (i) $\Leftrightarrow$ (v), (ii) $\Leftrightarrow$ (vi) y (iii) $\Leftrightarrow$ (vii).

■

El siguiente subespacio fue introducido por Saphar [48] y se define en términos estrictamente algebraicos.

Definición 1.1.3 (Core algebraico) *Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial X. El* core algebraico *$C(T)$ se define como el subespacio T-invariante más grande de X, es decir, si M es un subespacio de X y $T(M) = M$, entonces $M \subseteq C(T)$.*

Obviamente, si T es sobreyectiva, $C(T) = X$. La invarianza de $C(T)$ implica que $C(T) = T^n(C(T)) \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue que $C(T) \subseteq T^\infty(X)$.

El siguiente resultado describe al subespacio $C(T)$, en términos de sucesiones.

Teorema 1.1.3 *Para un operador lineal T definido sobre un espacio vectorial X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *$x \in C(T)$;*

(ii) *existe una sucesión $(u_n)_{n=0}^\infty$ en X tal que $x = u_0$ y $Tu_{n+1} = u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotemos por M el conjunto de los elementos x de X para los cuales existe una sucesión $(u_n)_{n=0}^\infty$ tal que $x = u_0$ y $Tu_{n+1} = u_n$. Veamos primero que $C(T) \subseteq M$.

Sea x en $C(T)$, como $T(C(T)) = C(T)$, existe un elemento u_1 en $C(T)$ tal que $x = Tu_1$. Ya que u_1 está en $C(T)$ la misma invarianza de $C(T)$ nos dice que existe un u_2 en $C(T)$ tal que $u_1 = Tu_2$. Repitiendo inductivamente este proceso, obtenemos la sucesión deseada $(u_n)_{n=0}^\infty$. Luego, $C(T)$ está contenido en M.

Para probar la inclusión opuesta, basta ver que M es un subespacio T-invariante. Si x es un elemento de M, existe una sucesión $(u_n)_{n=0}^\infty$ con $x = u_0$ y $Tu_{n+1} = u_n$. Definimos la sucesión $(w_n)_{n=0}^\infty$ por

$$w_0 := Tx \;\text{ y }\; w_n := u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$w_n = u_{n-1} = Tu_n = Tw_{n+1},$$

así, esta sucesión satisface la definición de M por lo que $w_0 = Tx \in M$, es decir, $T(M) \subseteq M$. Pero también como $x = u_0 = Tu_1$, y u_1 es un elemento para el cual existe la sucesión $(u_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ que cumple la definición de M, esto es, $u_1 = u_{(0+1)}$ y $Tu_{(n+1)+1} = Tu_{n+2} = u_{n+1}$, concluimos que u_1 pertenece a M y en consecuencia, $x \in T(M)$, por lo que $M \subseteq T(M)$.

Es claro que M es un subespacio, pues si $x, y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, existen sucesiones $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ para x y y respectivamente, de donde,

$$x + \lambda y = u_0 + \lambda v_0 \ \text{ y } \ T(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) = Tu_{n+1} + \lambda T v_{n+1} = u_n + \lambda v_n$$

Luego, $x + \lambda y$ pertenece a M mediante la sucesión $(u_n + \lambda v_n)_{n=0}^{\infty}$.

■

Observemos que el hiper-rango de cualquier operador T, es un subespacio que satisface la siguiente inclusión:

$$T(T^{\infty}(X)) \subseteq T^{\infty}(X)$$

ya que

$$T(T^{\infty}(X)) = T\left(\bigcap_{n\geq 1} T^n(X)\right) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} T^{n+1}(X) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} T^n(X) = T^{\infty}(X)$$

En el siguiente resultado se dan condiciones suficientes para que $T^{\infty}(X)$ sea T-invariante, y en consecuencia, que $C(T)$ sea igual a $T^{\infty}(X)$.

Lema 1.1.4 *Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial X. Si existe un número natural m tal que*

$$\ker T \cap T^m(X) = \ker T \cap T^{m+k}(X) \ \ \textit{para todo entero } k \geq 0.$$

Entonces $C(T) = T^{\infty}(X)$.

Prueba: Basta probar que $T^{\infty}(X) \subseteq C(T)$, para esto, se probará que $T^{\infty}(X)$ es T-invariante. Vimos arriba que $T(T^{\infty}(X)) \subseteq T^{\infty}(X)$, por lo que resta probar la inclusión opuesta.

Sea $D := \ker T \cap T^m(X)$ es claro que

$$D = \ker T \cap T^m(X) = \ker T \cap T^{\infty}(X)$$

ya que, primero $T^{\infty}(X) \subseteq T^m(X)$ y por el otro lado $T^m(X) \subseteq T^i(X)$ con $i = 0, \ldots, m$ ésto, junto con la hipótesis nos dice que

$$\ker T \cap T^m(X) \subseteq \ker T \cap T^k(X)\ \forall k.$$

Consideremos ahora un elemento $y \in T^{\infty}(X)$. Entonces y está en el rango de todo iterado de T, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existe x_k en X tal que $y = T^{m+k}x_k$. Si hacemos

$$z_k := T^m x_1 - T^{m+k-1}x_k \ \in T^m(X) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

y ya que

$$Tz_k := T^{m+1}x_1 - T^{m+k}x_k = y - y = 0$$

concluimos que z_k está en $\ker T$, en consecuencia, z_k está en D, en particular, $z \in T^{m+k-1}(X)$, esto implica que

$$T^m x_1 = z_k + T^{m+k-1}x_k \ \in \ T^{m+k-1}(X) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

De esta forma, $T^m x_1$ pertenece al hiper-rango, $T^{\infty}(X)$, de T. Finalmente, como:

$$T(T^m x_1) = T^{m+1}x_1 = y,$$

concluimos que y está en $T(T^{\infty}(X))$, y por tanto, $T^{\infty}(X) \subseteq T(T^{\infty}(X))$, lo que completa la prueba.

■

Otras condiciones suficientes para la igualdad del core-algebraico y del hiper-rango son:
(i) $\dim \ker T < \infty$,
(ii) $\operatorname{codim} T(X) < \infty$ ó
(iii) $\ker T \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
ver el libro de P. Aiena [1, Teorema 1.10] .

1.2. Operadores semi-regulares sobre espacios de Banach

Los conceptos de la sección anterior, se establecieron en un contexto puramente algebraico de operadores lineales actuando sobre espacios vectoriales. El concepto de operador semi-regular, nace de manera natural cuando se consideran operadores actuando sobre espacios de Banach. Denotamos por $L(X)$ el espacio de los operadores acotados definidos sobre un espacio de Banach X.

Definición 1.2.1 (semi-regular) *Dado un espacio de Banach X, un operador acotado T en $L(X)$ se dice* semi-regular*, si tiene rango cerrado y verifica una de las condiciones del Teorema* 1.1.2.

Entre los ejemplos triviales de operadores semi-regulares tenemos los operadores sobreyectivos y los operadores inyectivos que tienen rango cerrado. Otros ejemplos los encontraremos entre los operadores de semi-Fredholm.

Un operador semi-regular tiene rango cerrado, de tal manera que resulta interesante determinar condiciones que caractericen la condición de cerradura de $T(X)$. Para un operador acotado $T : X \to Y$ con X, Y espacios de Banach, la condición de tener T el rango cerrado puede ser caracterizado por medio de la siguiente cantidad asociada con el operador T.

Definición 1.2.2 (módulo minimal) *Si $T \in L(X, Y)$, donde X y Y son espacios de Banach, el* módulo minimal reducido *del operador T se define como:*

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin \ker T} \frac{\|Tx\|}{\operatorname{dist}(x, \ker T)}$$

Si $T = 0$, hacemos $\gamma(T) = \infty$.

Se puede probar que para todo $T \in L(X, Y)$, $\gamma(T) = \gamma(T^*)$ donde $T^* : Y^* \to X^*$ es el operador dual de T, ver el libro de Kato [35].

Teorema 1.2.1 *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador acotado, $T \in L(X, Y)$. Entonces:*
(i) $\gamma(T) > 0$ *si y sólo si $T(X)$ es cerrado;*
(ii) $T(X)$ *es cerrado, si y sólo si $T^*(Y^*)$ es cerrado.*

Prueba: (i) Sean $\widetilde{X} := X/\ker T$ y $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to Y$ la inyección continua correspondiente a T definida por:

$$\widetilde{T}\tilde{x} := Tx \quad \text{para cada } x \in \tilde{x}.$$

Claramente, $\widetilde{T}(\widetilde{X}) = T(X)$. Del Teorema de la Aplicación Abierta se sigue que $\widetilde{T}(\widetilde{X})$ es cerrado si y sólo si $\widetilde{T}$ admite una inversa continua, equivalentemente, existe una constante $\delta > 0$ tal que $\left\|\widetilde{T}\tilde{x}\right\| \geq \delta \|\tilde{x}\|$ para cada $x \in X$. De la igualdad

$$\gamma(T) = \inf_{\tilde{x} \neq \tilde{0}} \frac{\left\|\widetilde{T}\tilde{x}\right\|}{\|\tilde{x}\|}$$

concluimos que $\widetilde{T}(\widetilde{X})$ es cerrado si y sólo si $\gamma(T) > 0$.
(ii) Es obvia a partir de la igualdad $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.

■

Una parte de suma importancia del espectro de un operador, se define a continuación:

Definición 1.2.3 (resolvente y espectro semi-regular) *Dado X un espacio de Banach, el* resolvente semi-regular *de un operador $T \in L(X)$ se define por:*

$$\rho_{se}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \ \ \textit{es semi-regular}\}.$$

El espectro semi-regular *también conocido como el* espectro de Kato*, de T se define como*

$$\sigma_{se} := \mathbb{C} \setminus \rho_{se}(T).$$

Es claro que

$$\sigma_{se}(T) \subseteq \sigma(T) \quad \text{ y } \quad \rho(T) \subseteq \rho_{se}(T).$$

Definición 1.2.4 (acotado por abajo "bounded below")
Un operador $T \in L(X)$ se dice que es acotado por abajo *si es inyectivo y tiene rango cerrado.*

Definición 1.2.5 (Espectro aproximado puntual)
Se define el espectro aproximado puntual *como el conjunto de los valores λ en $\mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ no es acotado por abajo.*

Lema 1.2.2 *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. T es acotado por abajo si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que*

$$K\|x\| \leq \|Tx\| \qquad \textit{para todo } x \in X. \tag{1.1}$$

Prueba: Si $K\|x\| \leq \|Tx\|$ para algún $K > 0$ y todo $x \in X$, entonces $x \in \ker T$ implica que $x = 0$, por lo tanto, T es inyectiva. Por otra parte, si (x_n) es una sucesión en X tal que Tx_n converge a $y \in X$, esto implica, por la hipótesis, que (x_n) es de Cauchy por lo que converge a algún $x \in X$. Ya que T es continuo, $Tx = y$ y así $T(X)$ es cerrado.

Recíprocamente, si T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado entonces, del teorema de la aplicación abierta, se sigue fácilmente que existe un $K > 0$ para el cual la desigualdad (1.1) se cumple.

∎

Es claro que si T es acotado por abajo, es semi-regular.

1.3. Core analítico de un operador

El siguiente subespacio ha sido introducido por Vrbová [53] y es, en un cierto sentido, la contraparte analítica del core algebraico $C(T)$, (Definición 1.1.3).

Definición 1.3.1 (core analítico) *Sea X un espacio de Banach y T un operador en $L(X)$. El* core analítico *de T es el conjunto $K(T)$ de todos los puntos x en X para los cuales existe una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ en X y una constante $\delta > 0$ tales que:*
(1) *$x = u_0$, y $Tu_{n+1} = u_n$ para cada $n \geq 0$;*
(2) *$\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ para cada $n \geq 0$.*

En el siguiente resultado se muestran algunas propiedades elementales de $K(T)$, ver Teorema 1.21 del libro de P. Aiena [1] .

Teorema 1.3.1 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces:*
(i) *$K(T)$ es un subespacio lineal de X;*
(ii) *$T(K(T)) = K(T)$;*
(iii) *$K(T) \subseteq C(T)$.*

■

En general, ni $K(T)$ ni $C(T)$ son subespacios cerrados; pero si $C(T)$ es cerrado, entonces los dos subespacios coinciden, ver Teorema 1.22 del libro de P. Aiena [1] .

Teorema 1.3.2 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$.*
(i) *Si F es un subespacio cerrado de X tal que $T(F) = F$, entonces $F \subseteq K(T)$.*
(ii) *Si $C(T)$ es cerrado, entonces $C(T) = K(T)$.*

■

Teorema 1.3.3 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador semi-regular. Entonces $C(T)$ es cerrado y se tiene que*

$$K(T) = C(T) = T^{\infty}(X).$$

Prueba: La semi-regularidad de T implica, por definición, que $\ker T \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la observación hecha después del Lema 1.1.4, tenemos que $T^\infty(X) = C(T)$, en consecuencia, $T^\infty(X)$ es un subespacio T-invariante. Por otra parte, siendo T semi-regular, T^n también lo es por lo que $T^n(X)$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $T^\infty(X)$ es cerrado, por la parte (ii) del Teorema 1.3.2, $C(T) = K(T)$.

■

Definición 1.3.2 (nilpotente) *Un operador T definido sobre un espacio lineal X, se dice que es* nilpotente *si existe algún entero positivo n tal que $T^n = 0$.*

Definición 1.3.3 (quasi-nilpotente) *Un operador T definido sobre un espacio de Banach X se dice* quasi-nilpotente *si para todo $x \in X$ se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0.$$

Definición 1.3.4 (GKD) *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador acotado definido sobre X. Se dice que T admite una* Descomposición Generalizada de Kato (GKD) *si existe un par de subespacios cerrados T-invariantes (M, N) tales que:*

(i) $X = M \oplus N$,

(ii) *la restricción $T|M$ es semi-regular, y*

(iii) *la restricción $T|N$ es quasi-nilpotente.*

Es obvio que todo operador semi-regular admite una GKD, a saber, $M = X$ y $N = \{0\}$, al igual que todo operador quasi-nilpotente con $M = \{0\}$ y $N = X$.

Definición 1.3.5 (operador de tipo Kato de orden d) *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador acotado definido sobre X. Se dice que T es de* tipo Kato de orden d, *o simplemente,* de tipo Kato, *si T admite una* GKD (M, N) *tal que $T|N$ es nilpotente con $(T|N)^d = 0$.*

Definición 1.3.6 (esencialmente semi-regular) *Sean X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador acotado definido sobre X. Se dice que T es* esencialmente semi-regular *si T admite una* GKD (M, N) *tal que N es de dimensión finita.*

Se debe resaltar que si T es esencialmente semi-regular, T es de tipo Kato ya que $T|N$ es quasi-nilpotente y N es de dimensión finita, lo que implica que $T|N$ es nilpotente.

Así tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} T \text{ es semi-regular } &\Rightarrow T \text{ es esencialmente semi-regular} \\ &\Rightarrow T \text{ es de tipo Kato} \\ &\Rightarrow T \text{ admite una GKD .} \end{aligned}$$

Se sabe que si T admite una GKD (M, N), entonces $(N^{\perp}, M^{\perp})$ es una GKD para T^*, más aún, si T es de tipo Kato, T^* también lo es, ver libro de P. Aiena [1, Teorema 1.43] .

Definición 1.3.7 (parte quasi-nilpotente) *Sea X un espacio de Banach y T en $L(X)$. La* parte quasi-nilpotente *de T se define como el conjunto*

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

Definición 1.3.8 (radio espectral) *Sea X un espacio de Banach y T en $L(X)$. El* radio espectral *de T, $r(T)$, se define como*

$$r(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Es conocido que

$$r(T) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

1.4. Operadores semi-Fredholm

Ahora introducimos una importante clase de operadores de la teoría de Fredholm.

Definición 1.4.1 (nulidad, deficiencia) *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador acotado. Definimos*

$$\alpha(T) := \dim \ker T \quad \text{la nulidad de } T,$$

$$\beta(T) := \operatorname{codim} T(X) \quad \text{la deficiencia de } T.$$

Definición 1.4.2 (semi-Fredholm) *Dados dos espacios de Banach X, Y, se define:*

(i) *El conjunto de operadores* semi-Fredholm superior *como el conjunto*

$$\Phi_+(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ cerrado } \}.$$

(ii) *El conjunto de los operadores* semi-Fredholm inferior *como el conjunto*

$$\Phi_-(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \beta(T) < \infty\}.$$

(iii) *El conjunto de los operadores* semi-Fredholm *como el conjunto*

$$\Phi_\pm(X,Y) := \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y).$$

(iv) *La clase $\Phi(X,Y)$ de los operadores de* Fredholm *como*

$$\Phi(X,Y) := \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y).$$

Si $X = Y$, $\Phi_+(X) := \Phi_+(X,X)$ y $\Phi_-(X) := \Phi_-(X,X)$, así mismo, $\Phi(X) := \Phi(X,X)$ y $\Phi_\pm(X) := \Phi_\pm(X,X)$.

Los operadores semi-Fredholm superior e inferior son duales entre si:

$$T \in \Phi_+(X,Y) \Longleftrightarrow T^* \in \Phi_-(Y^*,X^*),$$

y

$$T \in \Phi_-(X,Y) \Longleftrightarrow T^* \in \Phi_+(Y^*,X^*).$$

Más aún, tenemos la siguiente relación:

$$\alpha(T) = \beta(T^*) \quad \text{ y } \quad \beta(T) := \alpha(T^*).$$

Las definiciones anteriores de los operadores semi-Fredholm dan lugar para la definición de los siguientes espectros.

Definición 1.4.3 (espectros semi-Fredholm) *Sea T un operador en $L(X)$, con X un espacio de Banach.*

(i) *Espectro semi-Fredholm superior*

$$\sigma_{uf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\}.$$

(ii) *Espectro semi-Fredholm inferior*

$$\sigma_{lf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

(iii) *Espectro semi-Fredholm*

$$\sigma_{sf}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_\pm(X)\}.$$

(iv) *Espectro de Fredholm*

$$\sigma_f(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

Es claro que

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T) \quad \text{y } \sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T).$$

También por la dualidad observada anteriormente,

$$\sigma_{uf}(T) = \sigma_{lf}(T^*) \quad \text{y} \quad \sigma_{lf}(T) = \sigma_{uf}(T^*).$$

1.5. La propiedad de la extensión univaluada (SVEP)

La importancia básica de la propiedad de la extensión univaluada o *Single Valued Extension Property* (SVEP), surge en conexión con ciertas nociones básicas de la teoría local espectral. Se dará una primera motivación antes de presentar las definiciones.

Es bien conocido que la *función resolvente*, $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$, de un operador acotado T definido sobre un espacio de Banach X, es una función analítica definida sobre el conjunto resolvente $\rho(T)$, tomando valores en el espacio de operadores definidos sobre X, $R(\lambda, T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$.

Definamos $f_x : \rho(T) \to X$ por

$$f_x(\lambda) := R(\lambda, T)x \quad \text{para cualquier } x \in X;$$

f_x es una función analítica a valores vectoriales, que satisface la siguiente ecuación:

$$(\lambda I - T)f_x(\lambda) = x \quad \text{para todo } \lambda \in \rho(T). \tag{1.2}$$

Es posible encontrar soluciones analíticas de (1.2) para algunos (y en ocasiones todos los) valores λ pertenecientes al espectro de T, ver el libro de P. Aiena [1] .

Definición 1.5.1 (SVEP) *Sea X un espacio de Banach complejo y T un operador en $L(X)$. Se dice que el operador T posee la* propiedad de la extensión univaluada (SVEP) *en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ si, para cada disco abierto $\mathbb{D}$ centrado en λ_0, la única función analítica $f : \mathbb{D} \to X$ que satisface la ecuación*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$$

es la función constante nula $f \equiv 0$.

Decimos que el operador T tiene la SVEP si T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Un operador que no tenga la propiedad de la extensión univaluada, encierra en su espectro una patología que no permite la construcción de una teoría espectral satisfactoria. Por esta razón, es necesario determinar las condiciones necesarias y suficientes para asegurar que un operador satisfaga esta propiedad.

El hecho de que T tenga la propiedad SVEP en λ_0, asegura que si $x \in X$, existe un disco abierto $\mathbb{D}$ centrado en λ_0 y una única función analítica $f : \mathbb{D} \to X$ que satisface la ecuación: $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}$.

Definición 1.5.2 (espectro puntual) *Sea X una espacio de Banach y T un operador en $L(X)$. El* espectro puntual *de T es el conjunto:*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \ \textit{ es un autovalor de } T\}$$

Es fácil ver la siguiente implicación:

$$\sigma_p(T) \text{ no se acumula en } \lambda_0 \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0.$$

De hecho, si λ_0 no es un punto de acumulación de $\sigma_p(T)$, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de λ_0 tal que $\lambda I - T$ es inyectiva para todo $\lambda \in \mathcal{U}$, $\lambda \neq \lambda_0$.

Sea $f : \mathcal{V} \to X$ una función analítica definida en otra vecindad $\mathcal{V}$ de λ_0, para la cual la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ se satisface para todo $\lambda \in \mathcal{V}$. Obviamente, podemos asumir que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Entonces, $f(\lambda)$ pertenece a $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ para todo $\lambda \in \mathcal{V}$, $\lambda \neq \lambda_0$, así, $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathcal{V}$, $\lambda \neq \lambda_0$. Por la continuidad de f en λ_0, concluimos que $f(\lambda_0) = 0$. Luego, $f \equiv 0$ en $\mathcal{V}$ y en consecuencia, T tiene la SVEP en λ_0.

Notemos que si λ es un autovalor de T, es decir si $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$, por tanto, $(\lambda I - T)$ no es inyectivo y, en consecuencia, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, ver Definición 1.2.5, y así se tiene que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Luego concluimos también que

$$\sigma_{ap}(T) \text{ no se acumula en } \lambda_0 \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0.$$

Definición 1.5.3 (Proyección espectral) *Si σ es un conjunto espectral (posiblemente vacío), Γ_σ una curva cerrada simple que rodea a σ y $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ es el resolvente de $T \in L(X)$, entonces*

$$P_\sigma := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} R_\lambda \mathrm{d}\lambda$$

es una proyección continua denominada proyección espectral *o* proyección de *Riesz asociada con σ.*

Capítulo 2

La SVEP y la teoría de Fredholm

En este capítulo veremos algunas condiciones relacionadas con la finitud de algunas cantidades asociadas a un operador lineal T. Esas cantidades, definidas en la primera sección, tales como el *ascent* y el *descent* de un operador, así como la nulidad y la deficiencia (cuya diferencia define el índice de un operador), permiten establecer condiciones suficientes y en ciertos casos necesarias para que un operador tenga la propiedad SVEP (Definición 1.5.1). Todos estos conceptos son la piedra fundacional en la construcción de una de las ramas más importantes de la teoría espectral: la teoría de los operadores de Fredholm.

También en este capítulo veremos, para los operadores semi-Fredholm, o más generalmente, para los operadores de tipo Kato, un conjunto de condiciones equivalentes a la SVEP en un punto tanto para un operador T (Teorema 2.2.2), como para el operador dual T^* (Teorema 2.2.3).

El hecho de que un operador tenga la propiedad SVEP tiene importantes implicaciones y constituye una excelente herramienta en el estudio de la teoría espectral, por un lado simplifica en buena medida algunos de los resultados obtenidos por otras vías aportando mayor claridad en desarrollo teórico, por otro lado, la SVEP se erige como una propiedad estructural o unificadora de toda la teoría.

De hecho, muchos resultados clásicos de la teoría de Fredholm pueden ser explicados en términos de la SVEP; por ejemplo, en el próximo capítulo, se expondrá una clasificación de las componentes conexas Ω del resolvente de semi-Fredholm $\rho_{sf}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{sf}(T)$, o más generalmente, el resolvente de tipo Kato $\rho_{kt}(T)$, obtenida como una consecuencia de verificar la SVEP en un punto $\lambda_0 \in \Omega$, implicando la SVEP en todo punto de la componente Ω.

2.1. El ascent, el descent y la SVEP

Recordemos que el hiper-núcleo se define como $\mathcal{N}^\infty(T) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker T^n$ y el hiper-rango como $T^\infty(X) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(X)$.

Definición 2.1.1 (ascent) *Dado un operador T definido sobre un espacio vectorial X, se dice que T tiene* ascent finito *si $\mathcal{N}^\infty(T) = \ker T^k$ para algún entero positivo k. Claramente, en tal caso, existe el entero positivo mas pequeño $p = p(T)$ tal que $\ker T^p = \ker T^{p+1}$. El entero positivo es llamado el* ascent *de T. Si no existiera tal entero colocamos $p(T) = \infty$.*

Análogamente,

Definición 2.1.2 (descent) *Dado un operador T definido sobre un espacio vectorial X, se dice que T tiene* descent finito *si $T^\infty(X) = T^k(X)$ para algún entero positivo k. El entero positivo más pequeño $q = q(T)$, tal que $T^{q+1}(X) = T^q(X)$ es llamado el* descent *de T. Si no existe tal entero, ponemos $q(T) := \infty$.*

Nótese que $p(T) = 0$ si y sólo si T es inyectiva y $q(T) = 0$ si y sólo si T es sobreyectiva. La clásica teoría de Riesz-Schauder asegura que, para cualquier operador compacto T definido sobre un espacio de Banach X, se tiene que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ para cualquier λ distinto de cero, ver [32, Capítulo VI].

Teorema 2.1.1 *Si tanto $p(T)$ como $q(T)$ son finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

Ver [32, Proposición 38.3]

Denotemos por $\Delta(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre el espacio X, para los cuales tanto la nulidad $\alpha(T)(= \dim\ker(T))$ como la deficiencia $\beta(T)(= \operatorname{codim} T(X))$ son finitos. Recordemos que para todo $T \in \Delta(X)$, el índice de T, definido por

$$\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T)$$

satisface el *Teorema del índice*:

$$\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S \text{ para todo } T, S \in \Delta(X),$$

ver el libro de Heuser [32, Teorema 23.1].

El siguiente teorema establece las relaciones básicas entre las cantidades $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $p(T)$ y $q(T)$.

Teorema 2.1.2 *Si T es un operador lineal definido sobre un espacio vectorial X. Entonces valen las siguientes propiedades:*

(i) *si $p(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$;*

(ii) *si $q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$;*

(iii) *si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$ (posiblemente infinitos);*

(iv) *si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y si $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $p(T) = q(T)$.*

Ver el libro de Heuser [32] 38.5 y 38.6.

La finitud de $p(T)$ o $q(T)$ tiene algunas consecuencias notables sobre $T|T^{\infty}(X)$, la restricción de T sobre $T^{\infty}(X)$. Por ejemplo, en esa situación, se tiene que $T|T^{\infty}(X)$ es sobreyectiva, en consecuencia, $T^{\infty}(X)$ es T-invariante y así, coincide con el core analítico $C(T)$, ver el libro de P. Aiena [1, Teorema 3.5] .

La finitud del ascent y del descent de un operador lineal T está relacionado con cierta descomposición de X.

Teorema 2.1.3 *Suponga que T es un operador lineal definido sobre el espacio vectorial X. Si $p = p(T) = q(T) < \infty$ entonces tenemos la descomposición*

$$X = T^p(X) \oplus \ker T^p.$$

Recíprocamente, si para un número natural m tenemos la descomposición $X = T^m(X) \oplus \ker T^m$, entonces, $p = p(T) = q(T) \leq m$. En este caso, $T|T^p(X)$ es biyectiva.

Para la prueba, ver el libro de P. Aiena [1, Teorema 3.6] .

Nota 2.1.4. Las siguientes proposiciones establecen algunas otras relaciones básicas entre el ascent y el descent de un operador acotado $T \in L(X)$ definido sobre un espacio de Banach X, en el caso de operadores de semi-Fredholm, ver Definición 1.4.2.

(a) Si $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces la cadena de longitudes de T y su dual T^* están relacionadas por las igualdades $p(T^*) = q(T)$ y $p(T) = q(T^*)$. Esto se puede ver fácilmente porque si $T \in \Phi_{\pm}(X)$ entonces, $T^n \in \Phi_{\pm}(X)$, y así el rango de T^n es cerrado para todo n. Análogamente, también T^{*n} tiene rango cerrado y de esta forma para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\ker T^{n*} = T^n(X)^{\perp}, \ \ker T^n = {}^{\perp}(T^n)^*(X^*) = {}^{\perp}(T^*)^n(X^*)$$

Obviamente estas igualdades implican que $p(T^*) = q(T)$ y que $p(T) = q(T^*)$. Note que, en el caso de un espacio de Hilbert, estas igualdades se tienen para el operador adjunto T^*.

(b) La longitud de las cadenas de $(\lambda I - T)$ están íntimamente relacionadas con los polos del resolvente $R(\lambda, T)$. En efecto,

$$\lambda_0 \in \sigma(T) \text{ es un polo de } R(\lambda, T) \Leftrightarrow 0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty.$$

Más aún, si $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T)$ entonces, p es el orden del polo, cada polo $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un autovalor de T y si P_0 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$ (ver Definición 1.5.3), entonces

$$P_0(X) = \ker(\lambda_0 I - T)^p, \quad \ker P_0 = (\lambda_0 I - T)^p(X),$$

ver Heuser [32, Proposición 50.2].

(c) Si $\lambda_0 \in \sigma(T)$ entonces, $\lambda_0 I - T$ es un operador de Fredholm que tiene tanto ascent como descent finito si, y sólo si, λ_0 es un punto aislado del espectro de T y la correspondiente proyección espectral P_0 (Definición 1.5.3) es finito-dimensional, ver Heuser [32, Proposición 50.3].

§§§

El siguiente teorema establece una primera relación entre el ascent y el descent de $\lambda_0 I - T$ y la SVEP en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, ver Definición 1.5.1.

Teorema 2.1.5 *Para un operador acotado T definido sobre un espacio de Banach y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, las siguientes implicaciones se tienen:*

$$\begin{aligned} p(\lambda_0 I - T) < \infty &\Rightarrow \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = \{0\} \\ &\Rightarrow T \textit{ tiene la SVEP en } \lambda_0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q(\lambda_0 I - T) < \infty &\Rightarrow X = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) + (\lambda_0 I - T)^\infty(X) \\ &\Rightarrow T^* \textit{ tiene la SVEP en } \lambda_0. \end{aligned}$$

Prueba: No hay pérdida de generalidad si suponemos que $\lambda_0 = 0$.

Asumimos que $p := p(T) < \infty$. Entonces, $\mathcal{N}^\infty(T) = \ker(T^p)$, y de la Proposición 38.1 del libro de Heuser [32] obtenemos que:

$$\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) \subseteq \ker T^p \cap T^p(X) = \{0\}.$$

Del Teorema 2.22 del libro de Aiena [1] concluimos que T tiene la SVEP en 0.

Para probar la segunda cadena de implicaciones, suponga que $q := q(T) < \infty$. Entonces $T^{\infty}(X) = T^{q}(X)$ y

$$\mathcal{N}^{\infty}(T) + T^{\infty}(X) = \mathcal{N}^{\infty}(T) + T^{q}(X) \supseteq \ker T^{q} + T^{q}(X). \tag{2.1}$$

Ahora, la condición $q = q(T) < \infty$ produce que $T^{2q}(X) = T^{q}(X)$, así para todo elemento $x \in X$ existe $y \in T^{q}(X)$ tal que $T^{q}y = T^{q}x$. Obviamente, $x - y \in \ker T^{q}$, y de esta forma, $X = \ker T^{q} + T^{q}(X)$. De la inclusión 2.1 concluimos que $X = \mathcal{N}^{\infty}(T) + T^{\infty}(X)$, y así por Corolario 2.34 de [1], T^{*} tiene la SVEP en 0.

■

El teorema anterior indica que las dos nociones del ascent y el descent son muy útiles para establecer la SVEP para una importante clase de operadores.

Es bien conocido que si T es un operador normal definido sobre un espacio de Hilbert H, entonces,

$$H = \ker(\lambda I - T) \oplus \overline{(\lambda I - T)(H)} \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

(ver Heuser, [32, Proposición 70.3]), así por la Proposición 38.1 del libro de Heuser [32] tenemos que, para esos operadores,

$$p(\lambda I - T) \leq 1 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

Consecuentemente, todo operador normal definido sobre un espacio de Hilbert tiene la SVEP. Posteriormente veremos que la condición (2.2) es satisfecha por todo multiplicador de un álgebra semi-prima.

El siguiente ejemplo muestra que la condición (2.2) es satisfecha por una clase de operadores estrictamente más grande que la clase de todos los operadores normales.

Ejemplo 2.1.6: Un operador acotado T definido sobre un espacio de Banach X se dice *paranormal* si

$$\|Tx\|^{2} \leq \left\|T^{2}x\right\| \|x\| \quad \text{para todo } x \in X.$$

Es fácil ver que todo operador paranormal es *normaloide* en el sentido que $r(T) = \|T\|$, donde $r(T)$ es el radio espectral de T, o, equivalentemente, $\|T^{n}\| = \|T\|^{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obviamente, si T es paranormal, entonces, la restricción de T a todo subespacio cerrado T-invariante es también paranormal, así T es *espectralmente normaloide* en el sentido de Heuser, [32, §54].

Un operador T definido sobre un espacio de Banach X se dice *totalmente paranormal* si $\lambda I - T$ es paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Ejemplos de operadores totalmente paranormales son todos los operadores T definidos sobre un espacio de Hilbert H que son hiponormales. Recordemos que $T \in L(H)$ se dice *hiponormal* si

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\| \quad \text{para todo } x \in H.$$

Ahora, si T es hiponormal, entonces,

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\| \, \|x\| \leq \left\|T^2x\right\| \|x\| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

así T es paranormal. Claramente T es totalmente paranormal, ya que todo operador T es hiponormal si y sólo si $\lambda I - T$ es hiponormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Es inmediato de la definición que todo operador totalmente paranormal tiene ascent $p(\lambda I - T) \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, así que esos operadores tienen la SVEP. La SVEP de un operador totalmente paranormal es también consecuencia del Teorema 2.31 del libro de P. Aiena [1] y del Teorema 2.2.2 más abajo, una vez notado que para esos operadores tenemos:

$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}$$

Para probar esto, observe que si T es totalmente paranormal, entonces para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\|(\lambda I - T)^n x\|^{1/n} \geq \|(\lambda I - T)x\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Si $x \in H_0(\lambda I - T)$ (ver Definición 1.3.7) entonces, $\|(\lambda I - T)^n x\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, y consecuentemente, $(\lambda I - T)x = 0$, así $H_0(\lambda I - T) \subseteq \ker(\lambda I - T)$. Ya que la inclusión recíproca es siempre cierta para todo operador, se sigue que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)$.

$\square$

Como observamos en el Teorema 2.1.5 y el Teorema 2.31 del libro de P. Aiena [1, Capítulo 2] , cada una de las dos condiciones: $p(\lambda_0 I - T) < \infty$ o $H_0(\lambda_0 I - T)$ cerrado, implica la SVEP en λ_0. En general, esas dos condiciones no están relacionadas. En efecto, el operador T definido en el Ejemplo 2.32 de libro de P. Aiena [1, Capítulo 2] , tiene su parte quasi-nilpotente $H_0(T)$ no cerrada mientras que, siendo T inyectiva, $p(T) = 0$.

En el siguiente ejemplo encontramos un operador T que tiene parte quasi-nilpotente cerrada pero ascent $p(T) = \infty$.

Ejemplo 2.1.7: Sea $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definido por

$$Tx := \left(\frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right) \quad , \text{ donde } x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Se ve fácilmente que

$$\left\| T^k \right\| = \frac{1}{(k+1)!} \quad \text{para todo } k = 0, 1, \ldots$$

de esto se sigue que el operador T es quasi-nilpotente y de esta manera, $H_0(T) = \ell^2(\mathbb{N})$ por el Teorema 1.68 del libro de P. Aiena [1, Capítulo 1] . Obviamente $p(T) = \infty$.

Note, que el operador T de arriba muestra que la implicación recíproca de

$$p(\lambda_0 I - T) < \infty \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0,$$

establecida en el Teorema 2.1.5, generalmente no es cierta. De hecho, T tiene la SVEP en 0 ya que T es quasi-nilpotente, y $p(T) = \infty$.

□

2.2. La SVEP para operadores de tipo Kato

En esta sección caracterizaremos la SVEP en el punto $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ en el caso de operadores de tipo Kato.

Recordemos que si $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato (ver Definición 1.3.5) entonces también $\lambda_0 I^* - T^*$ es de tipo Kato. Más precisamente, si el par (M, N) es una GKD para $\lambda_0 I - T$, el par $(N^\perp, M^\perp)$ es una GKD para $\lambda_0 I^* - T^*$ con $(\lambda_0 I^* - T^*)|N^\perp$ semi-regular y $(\lambda_0 I^* - T^*)|M^\perp$ nilpotente.

Lema 2.2.1 *Suponga que $\lambda_0 I - T$ tiene una GKD (M, N), entonces, $(\lambda_0 I - T)|M$ es sobreyectiva si y sólo si $(\lambda_0 I^* - T^*)|N^\perp$ es inyectiva.*

Prueba: Asumimos que $\lambda_0 = 0$. Suponga primero que $T(M) = M$ y considere un elemento arbitrario $x^* \in \ker T^*|N^\perp = \ker T^* \cap N^\perp$. Para todo $m \in M$, entonces, existe $m' \in M$ tal que $Tm' = m$. Entonces tenemos

$$x^*(m) = x^*(Tm') = (T^* x^*)(m') = 0$$

y de esta forma, $x^* \in M^\perp \cap N^\perp = \{0\}$.

Recíprocamente, suponga que $T|M$ no es sobreyectiva, es decir, $T(M) \subsetneq M$. Por hipótesis, $T(M)$ es cerrado, ya que $T|M$ es semi-regular, y así vía el teorema de Hahn-Banach, existe $z^* \in X^*$ tal que $z^* \in T(M)^\perp$ y $z^* \notin M^\perp$. Ahora, de la descomposición $X^* = N^\perp \oplus M^\perp$ tenemos $z^* = n^* + m^*$ para algún $n^* \in N^\perp$ y $m^* \in M^\perp$. Para cada $m \in M$ obtenemos

$$T^* n^*(m) = n^*(Tm) = z^*(Tm) - m^*(Tm) = 0.$$

Así, $T^* n^* \in N^\perp \cap M^\perp = \{0\}$, de esta forma, $0 \neq n^* \in \ker T^* \cap N^\perp$

∎

El primer resultado muestra que la SVEP en λ_0 de un operador acotado, que admite una GKD (M, N), depende esencialmente del comportamiento de $\lambda_0 I - T$ sobre el primer subespacio M.

Teorema 2.2.2 *Supóngase que $\lambda_0 I - T \in L(X)$ admite una GKD (M, N). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *T tiene la SVEP en λ_0;*
(ii) *$T|M$ tiene la SVEP en λ_0;*
(iii) *$(\lambda_0 I - T)|M$ es inyectiva;*
(iv) *$H_0(\lambda_0 I - T) = N$;*
(v) *$H_0(\lambda_0 I - T)$ es cerrado;*
(vi) *$H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$;*
(vii) *$H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T)$ es cerrado.*
En particular, si $\lambda_0 I - T$ es semi regular, entonces las condiciones (i)-(vii) *son equivalentes a la siguiente proposición:*
(viii) *$H_0(\lambda_0 I - T) = \{0\}$.*

Prueba:
Aquí también consideraremos el caso particular en que $\lambda_0 = 0$.
La implicación (i)⇒ (ii) es clara, ya que la SVEP en 0 de T es heredada por la restricción a cada subespacio cerrado invariante.
(ii)⇒ (iii) $T|M$ es semi-regular, así por el Teorema 2.49 (libro de P. Aiena [1]) $T|M$ tiene la SVEP en 0 si y sólo si $T|M$ es inyectiva.
(iii)⇒ (iv) Si $T|M$ es inyectiva, del Teorema 1.70 [1] la semi-regularidad de $T|M$ implica que $\overline{H_0(T|M)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T|M)} = \{0\}$, y así

$$H_0(T) = H_0(T|M) \oplus H_0(T|N) = \{0\} \oplus N = N.$$

Las implicaciones (iv)⇒(v) y (vi)⇒(vii) son obvias, mientras que las implicaciones (v)⇒(vi) y (vii)⇒(i) han sido probadas en el Teorema 2.31 del libro de P. Aiena [1] .

La última afirmación es claro ya que el par $M := X$ y $N := \{0\}$ es una GKD para cada operador semi-regular.

$\blacksquare$

El siguiente resultado muestra que si el operador $\lambda_0 I - T$ admite una descomposición generalizada de Kato, entonces todas las implicaciones del Teorema 2.33 del libro de P. Aiena [1] son realmente equivalencias.

Teorema 2.2.3 *Suponga que $\lambda_0 I - T \in L(X)$ admite una GKD (M,N). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T^* *tiene la SVEP en* λ_0*;*

(ii) $(\lambda_0 I - T)|M$ *es sobreyectiva;*

(iii) $K(\lambda_0 I - T) = M$*;*

(iv) $X = H_0(\lambda_0 I - T) + K(\lambda_0 I - T)$*;*

(v) $H_0(\lambda_0 I - T) + K(\lambda_0 I - T)$ *es denso en norma en* X.

En particular, si $\lambda_0 I - T$ es semi-regular, entonces, las condiciones (i)-(v) *son equivalentes a la siguiente proposición:*

(vi) $K(\lambda_0 I - T) = X$.

Prueba:

También aquí supondremos que $\lambda_0 = 0$.

(i)$\Leftrightarrow$(ii) Sabemos que el par $(N^{\perp}, M^{\perp})$ es una GKD para T^* y así por Teorema 2.2.2, T^* tiene la SVEP en 0 si, y sólo si, $T^*|N^{\perp}$ es inyectiva. Por el lema 2.2.1, T^* tiene la SVEP en 0 si, y sólo si, $T|M$ es sobreyectiva.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Si $T|M$ es sobreyectiva, entonces $M = K(T|M) = K(T)$ por el Teorema 1.70 [1].

(iii)$\Rightarrow$(iv) Por hipótesis $X = M \oplus N = K(T) \oplus N$, y de esta forma, $X = H_0(T) + K(T)$, ya que $N = H_0(T|N) \subseteq H_0(T)$.

La implicación (iv)$\Rightarrow$(v) es obvia, mientras que (v)$\Rightarrow$(i) ha sido probada en el Teorema 2.33 del libro de P. Aiena [1] .

La última afirmación es obvia ya que $M := X$ y $N := \{0\}$ provee una GKD para T.

$\blacksquare$

Ahora consideraremos el caso en que $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato. En este caso, por Teorema 1.74 del libro de P. Aiena [1] y el teorema anterior, tenemos

$$T \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0 \Longleftrightarrow \mathcal{N}^{\infty}(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^{\infty}(X) = \{0\}.$$

El siguiente resultado muestra que en este caso, a las condiciones equivalentes (i)-(vii) del Teorema 2.2.2 podemos añadir la condición $p(\lambda_0 I - T) < \infty$.

Teorema 2.2.4 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, suponga que $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato. Entonces, las condiciones* (i)-(vii) *del Teorema* 2.2.2 *son equivalentes a las siguientes afirmaciones:*

(viii) $p(\lambda_0 I - T) < \infty$;

(ix) $\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = \{0\}$.

En este caso, si $p := p(\lambda_0 I - T)$, entonces,

$$H_0(\lambda_0 I - T) = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^p. \tag{2.3}$$

Prueba:

Aquí también asumimos que $\lambda_0 = 0$.

Sea (M, N) una GKD para la cual $T|N$ es nilpotente. Supongamos que se verifica una de las proposiciones equivalentes (i)-(vii) del Teorema 2.2.2, por ejemplo la condición $H_0(T) = N$. También tenemos que $\ker T^n \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq H_0(T)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ Por otro lado, de la nilpotencia de $T|N$ sabemos que existe un $k \in \mathbb{N}$. para el cual$(T|N)^k = 0$. Así, $H_0(T) = N \subseteq \ker T^k$ y por lo tanto, $H_0(T) = \mathcal{N}^\infty(T) = \ker T^k$. Obviamente esto implica que $p(T) \leq k$, así las condiciones equivalentes (i)-(vii) del Teorema 2.2.2 implican (vii).

La implicación (viii)$\Rightarrow$(ix) ha sido demostrada en el Teorema 2.1.5. Las igualdades (2.3) son claras porque $\ker T^k = \ker T^p$.

■

Teorema 2.2.5 *Sea X un espacio de Banach, $Y \in L(X)$ y suponga que $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato. Entonces, las condiciones* (i)-(v) *del Teorema* 2.2.3 *son equivalentes a las siguientes condiciones:*

(vi) $q(\lambda_0 I - T) < \infty$;

(vii) $X = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) + (\lambda_0 I - T)^\infty(X)$;

(viii) $\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) + (\lambda_0 I - T)^\infty(X)$ *es denso en norma en X.*

En este caso, si $q := q(\lambda_0 I - T)$ entonces,

$$\lambda_0 I - T^\infty(X) = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^q(X).$$

Prueba:

Asuma que $\lambda = 0$. Ya que T es de tipo Kato, entonces, $K(T) = T^\infty(X)$ por Teorema 1.42 ver libro de P. Aiena [1, Capítulo 1] . Suponga que una de las condiciones equivalentes (i)-(v) del Teorema 2.2.3 se verifique; en particular, suponga que $K(T) = M$. Entonces, $M = T^\infty(X) \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, por la suposición, existe un entero positivo k tal que $(T|N)^k = 0$, así para todo $n \geq k$ tenemos

$$T^n(X) \subseteq T^k(X) = T^k(M) \oplus T^k(N) = T^k(M) \subseteq M,$$

y así $T^n(X) = M$ para todo $n \geq k$. Por lo tanto, $q(T) < \infty$, así (vi) está probada.

La implicación (vii)$\Rightarrow$(viii) es obvia. Finalmente, por Corolario 2.34 del libro de P. Aiena [1] , la condición (viii) implica la SVEP en 0 para T^*, la cual es la condición (i) del Teorema 2.2.3.

La última afirmación es clara ya que $T^q(X) = T^k(X)$.

■

En el siguiente resultado consideraremos el caso en que $\lambda_0 I - T$ es esencialmente semi-regular, a saber, N es finito-dimensional y M es finito-codimensional.

Teorema 2.2.6 *Suponga que* $\lambda_0 I - T \in L(X)$ *es esencialmente semi-regular. Entonces, las condiciones* (i)-(vii) *del Teorema* 2.2.2 *y las condiciones* (viii)-(ix) *del Teorema* 2.2.3 *son equivalentes a la siguiente condición:*

(a) *La parte quasi-nilpotente* $H_0(\lambda_0 I - T)$ *es finito-dimensional.*

En particular, si T *tiene la SVEP en* λ_0 *entonces,* $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$*.*

De nuevo, las condiciones (i)-(v) *del Teorema* 2.2.3 *y las condiciones del Teorema* 2.2.5 *son equivalentes a la siguiente condición:*

(b) *El core analítico* $K(\lambda_0 I - T)$ *es finito-codimensional.*

En particular, si T^* *tiene la SVEP en* λ_0*, entonces,* $\lambda_0 I - T \in \Phi_-(X)$*.*

Prueba: La condición (iv) del Teorema 2.2.2 implica (a) y ésta implica la condición (v) del Teorema 2.2.2. Análogamente, la condición (iii) del Teorema 2.2.3 implica (b); mientras que de (b) se sigue que $(\lambda_0 I - T)^\infty(X) = K(\lambda_0 I - T)$ es finito-codimensional, ver Teorema 1.42 [1]. Ya que, $(\lambda_0 I - T)^\infty(X) \subseteq (\lambda_0 I - T)^q(X)$ para todo $q \in \mathbb{N}$, concluimos que $q(\lambda_0 I - T) < \infty$, la cual es la condición (vi) del Teorema 2.2.5.

Resta por probar que (a) implica que $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$. Claramente, si $H_0(\lambda_0 I - T)$ es finito-dimensional, el subespacio $\ker(\lambda_0 I - T)$ es finito-dimensional. Más aún, si (M, N) es una GKD para $\lambda_0 I - T$ tal que N es finito-dimensional, entonces,

$$(\lambda_0 I - T)(X) = (\lambda_0 I - T)(M) + (\lambda_0 I - T)(N)$$

es cerrado ya que es la suma del subespacio cerrado $(\lambda_0 I - T)(M)$ y un subespacio finito-dimensional de X. Esto prueba que $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$.

Análogamente, de la inclusión $K(\lambda_0 I - T) \subseteq (\lambda_0 I - T)(X)$ se observa que si $K(\lambda_0 I - T)$ es finito-codimensional, entonces también $(\lambda_0 I - T)(X)$ es finito-codimensional, así $\lambda_0 I - T \in \Phi_-(X)$.

■

Corolario 2.2.7 *Sea X un espacio de Banach, $T \in L(X)$ y suponga que $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$. Tenemos:*

(i) *Si T tiene la SVEP en λ_0, entonces,* $\mathrm{ind}(\lambda_0 I - T) \leq 0$*;*

(ii) *Si T^* tiene la SVEP en λ_0, entonces* $\mathrm{ind}(\lambda_0 I - T) \geq 0$.

Consecuentemente, si tanto T como T^* tienen la SVEP en λ_0, entonces, $\lambda_0 I - T$ tiene índice 0.

Prueba: Por el Teorema 2.2.4 si T tiene la SVEP, entonces $p(\lambda_0 I - T) < \infty$, así $\alpha(\lambda_0 I - T) \leq \beta(\lambda_0 I - T)$ por la parte (i) del Teorema 2.1.2. Esto prueba la afirmación (i). La afirmación (ii) se sigue similarmente del Teorema 2.2.5 y la parte (ii)del Teorema 2.1.2. La última afirmación es clara.

∎

El siguiente ejemplo muestra que un operador de Fredholm puede tener índice menor que cero, si no tiene la SVEP en 0.

Ejemplo 2.2.8: Denotemos por R y L el operador *shift* derecho e izquierdo respectivamente, sobre el espacio de Hilbert $H := \ell^2(\mathbb{N})$ definidos por:

$$R(x) := (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{y} \quad L(x) := (x_2, x_3, \dots)$$

para todo $(x) := (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Claramente,

$$\alpha(R) = \beta(L) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(L) = \beta(R) = 1$$

así que L y R son de Fredholm. Sea $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$, donde 1 es el n-ésimo término y todos lo demás son igual a 0. Es fácil ver que $e_{n+1} \in \ker L^{n+1}$ mientras que $e_{n+1} \notin \ker L^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $p(L) = \infty$. Más aún, $p(R) = 0$ siendo R inyectiva, y así, ya que R y S son cada uno el adjunto del otro,

$$p(L) = q(R) = \infty \quad \text{y} \quad q(L) = p(R) = 0.$$

Considere el operador $L \oplus R \in L(H \times H)$ definido por:

$$(L \oplus R)(x, y) := (Lx, Ry) \quad \text{con } x, y \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Se verifica fácilmente que

$$\alpha(L \oplus R) = \alpha(L) = 1, \quad \beta(L \oplus R) = 1 \quad \text{y} \quad p(L \oplus R) = \infty.$$

Análogamente, si $T := L \oplus R \oplus R \in L(H \times H \times H)$, entonces,

$$\beta(T) = 2, \quad \alpha(T) = \alpha(L) = 1 \quad \text{y} \quad p(T) = \infty,$$

así, T es un operador de Fredholm que tiene índice $\mathrm{ind}\, T < 0$, el cual, por el Teorema 2.1.5, no tiene la SVEP en 0.

□

Corolario 2.2.9 *Sea $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y asuma que $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *T y T^* tienen la SVEP en λ_0;*

(ii) *$X = H_0(\lambda_0 I - T) \oplus K(\lambda_0 I - T)$;*

(iii) *$H_0(\lambda_0 I - T)$ es cerrado y $K(\lambda_0 I - T)$ es finito-codimensional;*

(iv) *λ_0 es un polo del resolvente $(\lambda I - T)^{-1}$, equivalentemente, $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$;*

(v) *λ_0 es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$ de T.*

En particular, si cualquiera de las condiciones equivalentes (i)-(v) *se tienen y $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T)$, entonces,*

$$H_0(\lambda_0 I - T) = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^p,$$

y

$$K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = (\lambda_0 I - T)^p(X).$$

Prueba: Las equivalencias (i), (ii), (iii) y (iv) se obtienen por la combinación de todos los resultados previamente establecidos. La implicación (iv)⇒(v) es obvia, mientras que la implicación (v)⇒(i) es inmediata consecuencia del hecho de que tanto T como T^* tienen la SVEP en todo punto aislado del espectro $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

■

Teorema 2.2.10 *Sea X un espacio de Banach, suponga que $\lambda_0 I - T \in L(X)$ es esencialmente semi-regular. Entonces, T tiene la SVEP en λ_0 si, y sólo si, se tiene alguna de las siguientes condiciones:*

(c) *$\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I^* - T^*) + (\lambda_0 I^* - T^*)(X^*)$ es débilmente *-denso en X^*;*

(d) *$H_0(\lambda_0 I^* - T^*) + (\lambda_0 I^* - T^*)(X^*)$ es débilmente *-denso en X^*;*

(e) *$H_0(\lambda_0 I^* - T^*) + K(\lambda_0 I^* - T^*)$ es débilmente *-denso en X^*.*

■

Si $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato, la SVEP en λ_0 es simplemente caracterizada en términos del espectro aproximado puntual (ver Definición 1.2.5), este resultado se debe a P. Aiena y E. Rosas, [12], como sigue:

Teorema 2.2.11 *Sea X un espacio de Banach, suponga que $\lambda_0 I - T$ es un operador de tipo Kato. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *T tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) *$\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en λ_0.*

Prueba: Si $\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en λ_0, entonces, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de λ_0 tal que $\lambda I - T$ es acotada por debajo para todo $\lambda \in \mathcal{U}, \lambda \neq \lambda_0$.

Sea $f : \mathcal{V} \to X$ una función analítica definida en otra vecindad $\mathcal{V}$ de λ_0 sobre la cual se cumple la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$, podemos considerar que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Como $(\lambda I - T)$ es acotada por abajo en $\mathcal{V} \setminus \{\lambda_0\}$ es, en particular, inyectiva y por tanto, $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$, de esta manera, $f(\lambda) = 0$ en $\mathcal{V} \setminus \{\lambda_0\}$, pero como f es continua, $f \equiv 0$ en $\mathcal{V}$. En consecuencia, T tiene SVEP en λ_0.

Así, necesitamos probar solamente, la implicación (i)$\Rightarrow$(ii). Podemos suponer que $\lambda_0 = 0$.

Suponga que T tiene la SVEP en 0 y sea (M, N) una GKD para T. Del Teorema 1.44 del libro de P. Aiena [1] , sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda I - T$ es semi-regular para $0 < |\lambda| < \varepsilon$, y así tiene rango cerrado. Si $\mathbb{D}_\varepsilon$ denota el disco abierto de centro 0 y radio ε, entonces, $\lambda \in (\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{0\}) \cap \sigma_{ap}(T)$ si, y sólo si, λ es un autovalor de T.

Ahora, de la inclusión $\ker(\lambda I - T) \subseteq T^\infty(X)$ para todo $\lambda \neq 0$ inferimos que todo autovalor no nulo de T pertenece al espectro de la restricción $T|T^\infty(X)$.

Finalmente, asuma que 0 es un punto de acumulación de $\sigma_{ap}(T)$. Sea (λ_n) una sucesión de autovalores no nulos que converge a 0. Entonces, $\lambda_n \in \sigma(T|T^\infty(X))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $0 \in \sigma(T|T^\infty(X))$, ya que el espectro de un operador es cerrado. Pero T tiene la SVEP en 0, así por el Teorema 2.2.2 la restricción $T|M$ es inyectiva, y así, $\{0\} = \ker T|M = \ker T \cap T^\infty(X)$ ver [1, Teorema 1.41]. Esto prueba que la restricción $T|T^\infty(X)$ es inyectiva.

Por otro lado, de la igualdad $T(T^\infty(X)) = T^\infty(X)$ sabemos que $T|T^\infty(X)$ es sobreyectiva, así $0 \notin \sigma(T|T^\infty(X))$; lo cual es una contradicción.

■

El resultado del Teorema 2.2.11 es absolutamente útil para establecer la membresía de los puntos de acumulación de algunas partes distinguidas del espectro al espectro de tipo Kato $\sigma_k(T)$.

Una primera aplicación se da a partir del siguiente resultado, que mejora un clásico teorema de Putnam acerca de los puntos no asilados de la frontera del espectro, como un subconjunto del espectro de Fredholm.

Corolario 2.2.12 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, todo punto no aislado de la frontera de $\sigma(T)$ pertenece a $\sigma_{kt}(T)$. En particular, todo punto no aislado de la frontera de $\sigma(T)$, pertenece al espectro de Fredholm $\sigma_f(T)$.*

Prueba: Si $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ es un punto no aislado de $\sigma(T)$, entonces, $\sigma_{ap}(T)$ se acumula en λ_0, pues $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}T)$ ver [1, Teorema 2.42]. Pero T

tiene la SVEP en cada punto de $\partial\sigma(T)$, así por el Teorema 2.2.11 $\lambda_0 I - T$ no es de tipo Kato.

La última afirmación es obvia ya que $\sigma_k(T) \subseteq \sigma_f(T)$.

■

Corolario 2.2.13 *Sea X un espacio de Banach y suponga que $T \in L(X)$ tiene la SVEP. Entonces, todos los puntos de acumulación de $\sigma_{ap}(T)$ pertenece a $\sigma_{kt}(T)$ y en particular a $\sigma_f(T)$.*

Prueba: Suponga que $\lambda_0 \notin \sigma_{kt}(T)$. Ya que T tiene la SVEP, y en particular tiene la SVEP en λ_0, por el Teorema 2.2.11 se sigue que $\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en λ_0

■

El siguiente resultado da una clara descripción de los puntos $\lambda_0 \notin \sigma_{kt}(T)$ que pertenecen a la frontera de $\sigma(T)$.

Teorema 2.2.14 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$; suponga que $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$. Entonces, $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato si, y sólo si, λ_0 es un polo del resolvente $R(\lambda, T)$.*

Prueba: Por el Corolario 2.2.12 si $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato entonces, λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$. Más aún, T y T^* tienen la SVEP en $\lambda_0 \in \partial\sigma(T) = \partial\sigma(T^*)$, así por Teorema 2.2.11 y el Teorema 2.2.9 se sigue que tanto $p(\lambda_0 I - T)$ como $q(\lambda_0 I - T)$ son finitos.

Recíprocamente, suponga que λ_0 es un polo del resolvente $R(\lambda, T)$ o, equivalentemente, que $d := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Sea $M = (\lambda_0 I - T)^d(X)$ y $N = \ker(\lambda_0 I - T)^d$. Entonces, la restricción $(\lambda_0 I - T)|M$ es biyectiva por el Teorema 2.1.3 y así es semi-regular. Obviamente la restricción $(\lambda_0 I - T)|N$ es nilpotente.

■

El siguiente resultado es el dual al establecido en el Teorema 2.2.11.

Teorema 2.2.15 *Suponga que X es un espacio de Banach y $\lambda_0 I - T$ un operador de tipo Kato. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *T^* tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) *$\sigma_{su}(T)$ no se acumula en λ_0.*

Prueba: La equivalencia se sigue inmediatamente del Teorema 2.2.11 ya que $\sigma_{ap}(T^*) = \sigma_{su}(T)$.

$\blacksquare$

Corolario 2.2.16 *Suponga que, para $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, T^* tenga la SVEP. Entonces todos los puntos de acumulación de $\sigma_{su}(T)$ pertenecen a $\sigma_{kt}(T)$.*

Ya que $\sigma_{se}(T)$, $\sigma_{es}(T)$ y $\sigma_{kt}(T)$ son subconjuntos de $\sigma_{ap}(T)$, uno puede preguntarse si T tiene la SVEP en un punto λ_0 cuando uno de esos espectros no se acumula en λ_0. Generalmente esto no es cierto. Para ver esto, basta considerar el caso en que $\sigma_{se}(T)$ no se acumula en λ_0, ya que $\sigma_{es}(T)$ y $\sigma_{kt}(T)$ son subconjuntos de $\sigma_{se}(T)$.

Sea $T \in L(X)$ cualquier operador semi-regular no inyectivo. Entonces 0 es un punto del resolvente semi-regular $\rho_{se}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{se}(T)$. Siendo $\rho_{se}(T)$ un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, esto implica que $\sigma_{se}(T)$ no se acumula en 0. Por otro lado, ya que T no es inyectivo, entonces T no tiene la SVEP en 0.

Teorema 2.2.17 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Si el espectro semi-regular, $\sigma_{se}(T)$, se acumula en λ_0, entonces $\lambda_0 \in \sigma_{sf}(T)$.*

Prueba: Suponga que $\sigma_{se}(T)$ se acumula en λ_0 y que $\lambda_0 I - T \in \Phi_{\pm}(X)$. Entonces $\lambda_0 \in \rho_{sf}(T)$, donde $\rho_{sf} := \mathbb{C} \setminus \sigma_{sf}(T)$ es el resolvente de semi-Fredholm de T. Denotemos por Ω la componente conexa de del conjunto abierto $\rho_{sf}(T)$ que contiene a λ_0. Si hacemos $\Gamma := \Omega \cap \sigma_{se}(T)$, entonces, $\Gamma \subseteq \sigma_{se}(T) \setminus \sigma_{sf}(T)$ y por Teorema 1.65 del libro de P. Aiena [1] , el último conjunto es numerable.

Esto prueba que existe un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda_0)$ centrado en λ_0 tal que $\lambda \notin \sigma_{se}(T) \setminus \sigma_{sf}(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$. Pero $\lambda I - T$ es semi-Fredholm para todo $\lambda \in \Omega$, así que $\lambda \notin \sigma_{se}(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$; una contradicción.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Componentes de algunos conjuntos resolventes

En este capítulo se dará un vistazo más de cerca a las componentes de algunos conjuntos resolventes asociados con varios espectros que provienen de la teoría de operadores de Fredholm.

Como se estudió en capítulos anteriores, se utilizará la constancia de algunas aplicaciones, así como la equivalencia entre la SVEP en un punto y las condiciones de rango y de kernel, para establecer una clasificación de esas componentes.

Uno de los resultados presentados en este capítulo, y que son resultados originales ya publicados en el artículo de P. Aiena y F. Villafañe [13], es el establecimiento de las siguientes igualdades en el caso en que $\lambda I - T$ es de tipo Kato, Teorema 3.2.1:

$$\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T) + (\lambda I - T)^\infty(X) = H_0(\lambda I - T) + K(\lambda I - T)$$

$$\overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)} \cap (\lambda I - T)^\infty(X) = \overline{H_0(\lambda I - T)} \cap K(\lambda I - T)$$

que permiten unificar resultados acerca de ciertos mapeos constantes sobre las componentes del espectro de semi-Fredholm, como los del trabajo de Ó Searcóid y West [51] que, de acuerdo a las igualdades anteriores, están incluidos en el trabajo de Mbekhta y Ouahab [42].

El hecho de la constancia de estos mapeos nos lleva a una clasificación de las componentes del resolvente de tipo Kato, $\rho_{kt}(T)$, de a cuerdo a la verificación de la propiedad SVEP para T o T^*, Teoremas 3.2.2 y 3.2.3.

Otro de los resultados publicados en el mismo artículo [13], es la caracterización de cuándo el espectro de tipo Kato es vacío, esto ocurre si y sólo si el descent de $\lambda I - T$ es finito para cualquier λ en $\mathbb{C}$, más aún, si y sólo si, se tiene esa misma condición para todo λ en la frontera del espectro de T, también es equivalente a que el espectro de T sea un conjunto finito de polos del resolvente de T, $R(\lambda, T)$, lo cual equivale, a su vez, a que T sea un operador algebraico.

Finalmente, en el Teorema 3.2.5 se muestra una clasificación de las componentes conexas del espectro semi-Fredholm en función de que T o T^* cumplan la propiedad SVEP.

3.1. La SVEP sobre las componentes del resolvente de tipo Kato

Recordemos que un operador T en $L(X)$ se dice que admite una Descomposición Generalizada de Kato (GKD), ver Definición 1.3.4, si existe un par de subespacios cerrados T-invariantes (M, N) tales que, $X = M \oplus N$, $T|M$ es semi-regular (ver Definición 1.2.1) y $T|N$ es quasi-nilpotente, (ver Definición 1.3.3). Si $T|N$ es nilpotente, es decir, si existe d en $\mathbb{N}$ tal que $(T|N)^d = 0$ decimos que T es de tipo Kato (de orden d), ver Definición 1.3.5.

Definición 3.1.1 (Resolvente de tipo Kato) *El* resolvente de tipo Kato *es el conjunto de los λ en $\mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ es de tipo Kato (de un cierto orden); se denota por $\rho_{kt}(T)$.*

El complemento del resolvente es el espectro de tipo Kato:

Definición 3.1.2 (Espectro de tipo Kato) *El espectro de tipo Kato es el conjunto de los λ en $\mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ no es de tipo Kato; se denota por $\sigma_{kt}(T)$.*

En el siguiente lema se establecen importantes propiedades de la parte quasi-nilpotente de T, $H_0(T)$ (Definición 1.3.7) y del core analítico $K(T)$ (Definición 1.3.1), ver libro de P. Aiena [1, Teoremas 1.41 y 1.70] .

Lema 3.1.1 *Sea $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach. Entonces*

(i) *$H_0(T) \subseteq K(T^*)$ y $K(T) \subseteq^{\perp} H_0(T)$.*

(ii) *Si T es un operador de tipo Kato y el par (M, N) es una GKD para T, entonces*

$$K(T) = K(T|M) = K(T) \cap M,$$

y

$$H_0(T) = H_0(T|M) \oplus H_0(T|N) = H_0(T|M) \oplus N. \tag{3.1}$$

(iii) *Si T es esencialmente semi-regular entonces*

$$\overline{H_0(T)} = \overline{T^\infty(X)} = {}^\perp K(T^*) \text{ y } K(T) = {}^\perp H_0(T^*). \tag{3.2}$$

(iv) *Si T es semi-regular entonces $\overline{H_0(T)} \subseteq K(T)$.*

■

Ya hemos observado que un operador $T \in L(X)$ tiene la SVEP en λ_0 precisamente cuando $\ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$. De la inclusión

$$\ker(\lambda_0 I - T) \subseteq \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T)$$

se sigue que la condición

$$H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$$

implica que T tiene la SVEP en λ_0. El Ejemplo 2.5 de [9] muestra que la SVEP en un punto no necesariamente implica que $H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$. En [11] se probó también que la condición $\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = \{0\}$ implica la SVEP en λ_0 para T.

Recordemos que el *espectro aproximado puntual* está definido por

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es acotado por abajo}\}.$$

Si $\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en λ_0 entonces T tiene la SVEP en λ_0.

Por otra parte, el espectro sobreyectivo se define por:

$$\sigma_{su}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Si $\sigma_{su}(T)$ no se acumula en λ_0, entonces T^* tiene la SVEP en λ_0.

3.2. Componentes de otros tipos de resolventes

Para un operador $T \in L(X)$, recordemos la definición de las siguientes partes del espectro ordinario:

El espectro semi-regular (algunas veces referido como espectro de Kato):

$$\sigma_{se}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es semi-regular}\},$$

ver Definición 1.2.3.

El resolvente semi-regular: $\rho_{se}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{se}(T)$.

El espectro esencialmente semi-regular (ver Definición 1.3.6):

Definición 3.2.1 (Espectro esencialmente semi-regular) *También llamado* espectro esencial de Kato *($\sigma_{ke}(T)$), se define por*

$$\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \textit{ no es esencialmente semi-regular}\};$$

y el resolvente esencialmente semi-regular,

$$\rho_{es}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{es}(T)$$

Se sabe que los tres conjuntos $\sigma_{se}(T)$, $\sigma_{kt}(T)$ y $\sigma_{es}(T)$ son cerrados, esto se puede ver en [39, Proposición 3.16] para $\sigma_{se}(T)$, para los otros dos espectros se puede ver [8, Corolario 1]. Más aún, $\sigma_{se}(T)$ y $\sigma_{kt}(T)$ son no vacíos ya que el primer espectro contiene a la frontera de $\sigma(T)$, como se puede ver en [39, Proposición 3.1.6], mientras que el segundo espectro contiene la frontera del *espectro de Fredholm* $\sigma_f(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es de Fredholm}\}$, ver Müller [43, Teorema 3.8]. Posteriormente probaremos que $\sigma_{kt}(T)$ es no vacío precisamente cuando $\sigma(T)$ no es un conjunto finito de polos.

Dado que los conjuntos $\rho_{se}(T)$, $\rho_{es}(T)$ y $\rho_{kt}(T)$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, pueden ser descompuestos en componentes conexas, disjuntas, abiertas y no vacías.

Es claro que,

$$\rho_{se}(T) \subseteq \rho_{es}(T) \subseteq \rho_{kt}(T). \tag{3.3}$$

ya que si $\lambda \in \rho_{se}(T)$, $\lambda I - T$ es semi-regular, por tanto, también es esencialmente semi-regular ($\lambda \in \rho_{es}(T)$) lo cual implica que $\lambda I - T$ es de tipo Kato, ver observación que sigue a la Definición 1.3.6.

Note que para todo $T \in L(X)$ tenemos que $\rho_{se}(T) = \rho_{se}(T^*)$ y $\rho_{es}(T) = \rho_{es}(T^*)$.

En [51] Ó Searcóid y West demostraron la constancia de los mapeos

$$\lambda \mapsto \mathcal{N}^\infty(\lambda I - T) + (\lambda I - T)^\infty(X), \lambda \mapsto \overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)} \cap (\lambda I - T)^\infty(X) \tag{3.4}$$

sobre las componentes del resolvente de semi-Fredholm $\rho_{sf}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{sf}(T)$ ver Definición 1.4.3 para la definición del espectro de semi-Fredholm, $\sigma_{sf}(T)$.

De la descomposición de Kato para operadores de semi-Fredholm, obtenemos las inclusiones siguientes, ver libro de P. Aiena [1, Teorema 1.62]

$$\rho_{sf}(T) \subseteq \rho_{es}(T) \subseteq \rho_{kt}(T). \tag{3.5}$$

El trabajo de Ó Searcóid y West [51] extiende los resultados previos obtenidos por Homer [33], por Goldmann y Kračkovskiĭ [29], [30], y por Saphar [48], quien ha establecido la constancia de las funciones

$$\lambda \mapsto \overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)}, \quad \lambda \mapsto (\lambda I - T)^\infty(X)$$

sobre una componente del resolvente de semi-Fredholm $\rho_{sf}(T)$, excepto para el conjunto discreto de puntos para los cuales $\lambda I - T$ es semi-regular.

Sobre la misma veta, Förster [24] demostró que los mapeos

$$\lambda \mapsto K(\lambda I - T) = (\lambda I - T)^\infty(X), \ \ \lambda \mapsto \overline{H_0(\lambda I - T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)}$$

son constantes cuando λ recorre una componente del resolvente de Kato, $\rho_k(T)$.

Este tipo de mapeos constantes también han sido estudiados por Mbekhta y Ouahab [42] quienes mostraron la constancia de los mapeos

$$\lambda \mapsto H_0(\lambda I - T) + K(\lambda I - T), \ \ \lambda \mapsto \overline{H_0(\lambda I - T)} \cap K(\lambda I - T) \tag{3.6}$$

sobre las componentes de $\rho_{kt}(T)$.

En el siguiente resultado se mostrará que los mapeos (3.4) y (3.6) coinciden, respectivamente, sobre las componentes del resolvente de tipo Kato $\rho_{kt}(T)$, así que el resultado de Mbekhta y Ouahab extiende el resultado previo de Ó Searcóid y West. Éste es uno de los resultados originales de la tesis que ha sido publicado en [13].

Teorema 3.2.1 (Aiena - Villafañe) *Sea $\lambda I - T$ de tipo Kato. Entonces*
(i) $\overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)} + (\lambda I - T)^\infty(X) = \overline{H_0(\lambda I - T)} + K(\lambda I - T)$.
(ii)$\overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)} \cap (\lambda I - T)^\infty(X) = \overline{H_0(\lambda I - T)} \cap K(\lambda I - T)$.

Prueba: (i)No se pierde generalidad si asumimos que $\lambda = 0$. Sea (M, N) una GKD para T tal que $(T|N)^d = 0$ para algún entero $d \in \mathbb{N}$. Por la parte (ii) del Lema 3.1.1 sabemos que $K(T) = K(T|M) = K(T) \cap M$. Además por la parte (iv) del Lema 3.1.1, la semi-regularidad de $T|M$ implica que $H_0(T|M) \subseteq K(T|M) = K(T)$. De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} H_0(T) \cap K(T) =& H_0(T) \cap (K(T) \cap M) = (H_0(T) \cap M) \cap K(T) \\ =& H_0(T|M) \cap K(T) = H_0(T|M) \end{aligned}$$

y así, $H_0(T) \cap K(T) = H_0(T|M)$.

Afirmamos que $H_0(T) + K(T) = N \oplus K(T)$. Como $N \subseteq \ker T^d \subseteq H_0(T)$ obtenemos que $N \oplus K(T) \subseteq H_0(T) + K(T)$.

Recíprocamente, de la parte (ii) del Lema 3.6 tenemos

$$H_0(T) = N \oplus H_0(T|M) = N \oplus (H_0(T) \cap K(T)) \subseteq N \oplus K(T),$$

así que

$$H_0(T) + K(T) \subseteq (N \oplus K(T)) + K(T) \subseteq N \oplus K(T),$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Ya que $K(T) = T^\infty(X)$ para cada operador de tipo Kato, obtenemos, de la inclusión $N \subseteq \ker T^d \subseteq \mathcal{N}^\infty(T)$, que

$$H_0(T) + K(T) = N \oplus K(T) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X) \subseteq H_0(T) + K(T),$$

así, la igualdad $\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X) = H_0(T) + K(T)$ queda probada.

(ii) Suponga nuevamente que $\lambda = 0$. Sea (M, N) un GKD para T tal que para algún $d \in \mathbb{N}$, tenemos $(T|N)^d = 0$. Entonces, $\ker T^n = \ker(T|M)^n$ para todo natural $n \geq d$. Ya que $\ker T^n \subseteq \ker T^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\mathcal{N}^\infty(T) = \bigcup_{n \geq d}^{\infty} \ker T^n = \bigcup_{n \geq d}^{\infty} \ker(T|M)^d = \mathcal{N}^\infty(T|M).$$

La semi-regularidad de $T|M$ implica, por la parte (iii) del Lema 3.6, que

$$\overline{\mathcal{N}^\infty(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T|M)} = \overline{H_0(T|M)} = \overline{H_0(T) \cap M}. \tag{3.7}$$

Ahora, mostramos que vale la igualdad $\overline{H_0(T) \cap M} = \overline{H_0(T)} \cap M$. La inclusión $\overline{H_0(T) \cap M} \subseteq \overline{H_0(T)} \cap M$ es evidente. Recíprocamente, suponga que $x \in \overline{H_0(T)} \cap M$. Entonces existe una sucesión (x_n) en $H_0(T)$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Sea P la proyección de X sobre M a lo largo de N. Entonces, $Px_n \to Px = x$ y $Px_n \in H_0(T) \cap M$. De esta forma, x pertenece a $\overline{H_0(T) \cap M}$.

Finalmente, de (3.7), y tomando en cuenta que $K(T) \cap M = K(T) = T^\infty(X)$, obtenemos

$$\overline{\mathcal{N}^\infty(T)} \cap T^\infty(X) = \overline{H_0 \cap M} \cap K(T) = \overline{H_0(T)} \cap (M \cap K(T)) = \overline{H_0(T)} \cap K(T),$$

lo que completa la prueba.

∎

A partir de la constancia de los mapeos $\lambda \mapsto \overline{H_0(\lambda I - T)} \cap K(\lambda I - T)$, o, lo que es lo mismo, del mapeo $\lambda \mapsto \overline{\mathcal{N}^\infty(\lambda I - T)} \cap (\lambda I - T)^\infty(X)$, sobre las componentes de $\rho_{kt}(T)$ y con el resultado obtenido en el capítulo previo Teorema 2.2.4, obtenemos otro de los resultados originales de este trabajo publicado en [13], que consiste en la siguiente clasificación de las componentes del resolvente de tipo Kato:

Teorema 3.2.2 (Aiena - Villafañe) *Sea T un operador acotado definido sobre el espacio de Banach X y Ω una componente de $\rho_{kt}(T)$. Entonces se tienen las siguientes alternativas excluyentes:*

(i) *T tiene SVEP para todo punto de Ω. En este caso, $p(\lambda I - T)$ es finito para todo $\lambda \in \Omega$. Mas aún, $\sigma_{ap}(T)$ no tiene puntos límites en Ω; todo punto de Ω, excepto posiblemente una cantidad numerable de puntos aislados, no es un autovalor de T.*

(ii) *En ningún punto de Ω T tiene la SVEP. En este caso, $p(\lambda I - T) = \infty$ para todo $\lambda \in \Omega$. Todo punto de Ω es un autovalor de T.*

Prueba: (i) Suponga que T tiene la SVEP en λ_0. Entonces, por el Teorema 2.2.2, $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado y

$$H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \overline{H_0(\lambda_0 I - T)} \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}.$$

Como el mapeo $\lambda \mapsto \overline{H_0(\lambda_0 I - T)} \cap K(\lambda I - T)$ es constante, sobre la componente Ω, entonces $\overline{H_0(\lambda I - T)} \cap K(\lambda I - T) = \{0\}$ para todo $\lambda \in \Omega$. Esto es equivalente, también por el Teorema 2.2.2, a decir que $p(\lambda I - T) < \infty$ para todo $\lambda \in \Omega$. Más aún, del Teorema 2.2.11, $\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en Ω y, consecuentemente, todo punto de Ω no es un autovalor de T, excepto para un subconjunto de Ω que consiste a lo más, en una cantidad numerable de puntos aislados.

(ii) Esta es clara, nuevamente por el Teorema 2.2.2.

∎

Recordemos que se dice que λ es un *valor de deficiencia* si $(\lambda I - T)$ no es sobreyectiva, equivalentemente si λ pertenece al *espectro sobreyectivo*:

$$\sigma_{su}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ no es sobreyectiva } \}$$

En relación al operador dual de T, tenemos la siguiente clasificación, también publicada en [13]

Teorema 3.2.3 (Aiena - Villafañe) *Sea T un operador acotado definido sobre X y Ω una componente de $\rho_{kt}(T)$. Entonces, se tienen las siguientes alternativas excluyentes:*

(i) *T^* tiene SVEP para todo punto de Ω. En este caso, $q(\lambda I - T)$ es finito para todo λ en Ω. Más aún, $\sigma_{su}(T)$ no tiene puntos límites en Ω; todo punto de Ω, excepto posiblemente una cantidad numerable de puntos aislados, no es un valor de deficiencia de T.*

(ii) *En ningún punto de Ω T^* tiene la SVEP. En este caso, $q(\lambda I - T) = \infty$ para todo λ en Ω y todo λ en Ω es un valor de deficiencia de T.*

Prueba: Procedamos como en la prueba del Teorema 3.2.2, combinando la constancia sobre las componentes de $\rho_{kt}(T)$ del mapeo $\lambda \in \Omega \mapsto K(\lambda I - T) + H_0(\lambda I - T)$ o equivalentemente, la constancia del mapeo $\lambda \in \Omega \mapsto \mathcal{N}^\infty(\lambda I - T) + (\lambda I - T)^\infty(X)$, con el Teorema 2.2.5 y el Teorema 2.2.3.

■

El resultado anterior apunta a una descripción precisa de los operadores cuyo espectro de tipo Kato $\sigma_{kt}(T)$ es vacío. Más de los resultados del siguiente teorema, pueden ser hallados en Mbekhta [41] en el contexto de espacios de Hilbert. Sin embargo, nuestras pruebas utilizando la teoría local espectral, son considerablemente más simples y son demostradas en el contexto más general de operadores que actúan sobre espacios de Banach.

Recordemos que un operador acotado T definido sobre X se dice *algebraico* si existe un polinomio no trivial h tal que $h(T) = 0$.

Teorema 3.2.4 (Aiena - Villafañe) *Para un operador acotado T definido sobre el espacio de Banach X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *$\sigma_{kt}(T)$ es vacío;*

(ii) *$\lambda I - T$ tiene descent finito para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;*

(iii) *$\lambda I - T$ tiene descent finito para todo $\lambda \in \partial\sigma(T)$, donde $\partial\sigma(T)$ es la frontera topológica de $\sigma(T)$;*

(iv) *$\sigma(T)$ es un número finito de polos de $R(\lambda, T)$;*

(v) *T es algebraico.*

Prueba: (i)⇒(ii) Suponga que $\sigma_{kt}(T) = \varnothing$. Entonces $\rho_{kt}(T)$ tiene una única componente $\Omega = \mathbb{C}$ y por tanto, por Teorema 3.2.2, T tiene la SVEP en todo punto de $\mathbb{C}$, ya que T tiene SVEP en todo punto del resolvente $\rho(T)$. Por otro lado, si $\lambda I - T$ es de tipo Kato, entonces también $\lambda I^* - T^*$ es de tipo Kato, ver [8, Proposición 1]. Por tanto, $\mathbb{C} = \rho_{kt}(T) = \rho_{kt}(T^*)$ y en consecuencia, por el Teorema 3.2.3, también T^* tiene la SVEP. Ya que $(\lambda I - T)$ es de tipo Kato, por el Teorema 3.15 y 3.16 del libro de P. Aiena [1] , concluimos que $q(\lambda I - T) < \infty$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii)⇒(iii) Obvio.

(iii)⇒(iv) Ya que T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \partial\sigma(T)$ entonces la condición $q(\lambda I - T) < \infty$ obliga que cada $\lambda \in \partial\sigma(T)$ es un polo de $R(\lambda, T)$, ver Corolario 1 de [49], y así, un punto aislado de $\sigma(T)$. Claramente, esto implica que $\sigma(T) = \partial\sigma(T)$ así $\sigma(T)$ es un número finito de polos.

(iv)⇒(i) Basta probar que $\lambda I - T$ es de tipo Kato para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Suponga que $\sigma(T)$ es un conjunto finito de polos de $R(\lambda, T)$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, sea

P la proyección espectral asociada con en conjunto unitario $\{\lambda\}$ (Definición 1.5.3). Entonces, $X = M \oplus N$, donde $M := K(\lambda I - T) = \ker P$ y $N := H_0(\lambda I - T) = P(X)$, ver la prueba del Teorema 1.6 de [40] o también en el Teorema 1 de [49]. Ya que λ es un polo de $R(\lambda, T)$, por la proposición 50.2 del libro de H. Heuser [32], $\lambda I - T$ tiene ascent y descent positivo y finito, y si $p := p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T)$, entonces, $N = \ker(\lambda I - T)^p$. Del clásico cálculo funcional de Riesz sabemos que $\sigma(T|M) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$, Heuser [32, Teorema 49.1], así $(\lambda I - T)|M$ es biyectiva, mientras que $((\lambda I - T)|N)^p = 0$. Luego, $\lambda I - T$ es de tipo Kato para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iv)$\Rightarrow$(v) Supongamos que $\sigma(T)$ está constituido por un número finito de polos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, donde para cada $i = 1, \ldots, n$ p_i es el orden de λ_i. Sea $h(\lambda) := (\lambda_1 - \lambda)^{p_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{p_n}$. Entonces

$$h(T)(X) = \bigcap_{i=1}^{n} (\lambda_i - T)^{p_i}(X) = \bigcap_{i=1}^{n} K(\lambda_i - T),$$

ver Lema 3.1.15 de [39]; la última igualdad se sigue ya que T tiene la SVEP y $\lambda_i I - T$ es de tipo Kato, ver Teorema 2.9 de [6]. Pero la última intersección es $\{0\}$, ya que, por la caracterización local espectral del core analítico

$$K(T) = X_T(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{x \in X : 0 \notin \sigma_T(x)\},$$

si $x \in K(\lambda_i I - T) \cap K(\lambda_j I - T)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces, $\sigma_T(x) \subseteq \{\lambda_i\} \cap \{\lambda_j\} = \varnothing$ así $x = 0$, ya que T tiene la SVEP. Luego, $h(T) = 0$.

(v)$\Rightarrow$(i) Como en la prueba de (iv)$\Rightarrow$(i) basta probar que $\lambda I - T$ es de tipo Kato para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Sea h un polinomio tal que $h(T) = 0$. Del teorema del mapeo espectral tenemos que $h(\sigma(T)) = \sigma(h(T)) = \sigma(\mathbf{0}) = \{0\}$ por tanto, $\sigma(T)$ es el conjunto finito $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de los ceros con multiplicidades $k_1, \ldots, k_n$ respectivamente. Así que $h(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{k_n}$ y así

$$X = \ker h(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(\lambda_i - T)^{k_i},$$

ver el Lema 3.1.15 de [39].

Ahora supongamos que $\lambda = \lambda_j$ para algún j y definamos

$$h_0(\lambda) := \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda)^{k_i}.$$

Tenemos que

$$M := \ker h_0(T) = \bigoplus_{i \neq j} \ker(\lambda_i - T)^{k_i}$$

y si $N := \ker(\lambda_j I - T)^{k_j}$ entonces $X = M \oplus N$ y M,N son invariantes bajo $\lambda_j I - T$. De la inclusión

$$\ker(\lambda_j I - T) \subseteq \ker(\lambda_j - T)^{k_j} = N$$

esto implica que la restricción de $\lambda_j I - T$ a M es inyectiva.

Podemos ver fácilmente que

$$(\lambda_j I - T)(\ker(\lambda_i - T)) = \ker(\lambda_i - T)^{k_i}, \;\; i \neq j,$$

así que $(\lambda_j I - T)(M) = M$. Por tanto, la restricción de $\lambda_j I - T$ a M es también sobreyectiva y en consecuencia biyectiva. Obviamente, $((\lambda_j I - T)|N)^{k_j} = 0$ así que $\lambda_j I - T$ es de tipo Kato como se deseaba.

∎

Un operador acotado definido sobre un espacio de Banach X se dice que satisface una *condición de crecimiento polinomial* si existe una constante K y $\delta > 0$ para los cuales

$$\|\exp(i\lambda T)\| \leq K(1 + |\lambda|^{\delta}) \;\; \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos de operadores que satisfacen una condición de crecimiento polinomial son los operadores hermitianos definidos sobre espacios de Hilbert, operadores nilpotentes, proyecciones, operadores algebraicos con espectro real, ver Barnes [17]. En Laursen y Neumann [39, Teorema 1.5.19] se muestra que la clase $\mathcal{P}(X)$ de los operadores que satisfacen una condición de crecimiento polinomial, coincide con la clase de los operadores *escalar generalizado* que tienen espectro real. Como fue notado en Barnes [17], si $T \in \mathcal{P}(X)$ y $\lambda_0 I - T$ tiene rango cerrado para algún $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, entonces, $q(\lambda_0 I - T)$ es finito. Del Teorema 3.2.4, se sigue que si $T \in \mathcal{P}(X)$, entonces la condición de que el rango de $\lambda I - T$ sea cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ implica que $\sigma_{kt}(T) = \varnothing$. Otras clases de operadores para los cuales $\sigma_{kt}(T) = \varnothing$ se pueden encontrar en [41].

La clasificación de las componentes de $\rho_{es}(T)$ se obtiene fácilmente del Teorema 3.2.2 y el Teorema 3.2.3, una vez que ha sido observado que los dos conjuntos $\rho_{es}(T)$ y $\rho_{kt}(T)$ pueden diferir solamente por un conjunto numerable, vea por ejemplo el Corolario 1 de [8].

Miraremos ahora las componentes del resolvente de semi-Fredholm $\rho_{sf}(T)$. Recordemos que para un operador semi-Fredholm $T \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$, podemos considerar el índice de T definido por $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \operatorname{codim} T(X)$ Claramente, del Teorema 3.2.2 y el Teorema 3.2.3, T, así como T^*, tienen la SVEP o para todo punto o para ningún punto de una componente Ω de $\rho_{sf}(T)$.

Podemos clasificar las componentes de $\rho_{sf}(T)$ de la manera siguiente:

Teorema 3.2.5 *Sea T un operador acotado definido sobre el espacio de Banach X y Ω una componente de $\rho_{sf}(T)$. Para la SVEP, el índice, el ascent y el descent sobre Ω hay exactamente las siguientes cuatro posibilidades:*

(i) *Tanto T como T^* tienen la SVEP en todo punto de Ω. En este caso,* $\mathrm{ind}(\lambda I - T) = 0$ *y* $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ *para todo λ en Ω. Los autovalores y valores de deficiencia no tienen punto límite en Ω. Este caso ocurre exactamente cuando Ω intersecta al resolvente de T, $\rho(T)$.*

(ii) *T tiene la SVEP en los puntos de Ω, mientras que T^* no tiene la SVEP en los puntos de Ω. En este caso, tenemos que* $\mathrm{ind}(\lambda I - T) < 0$, $p(\lambda I - T) < \infty$ *y* $q(\lambda I - T) = \infty$ *para todo $\lambda \in \Omega$. Los autovalores no tienen punto límite en Ω y todo punto de Ω es un valor de deficiencia.*

(iii) *T^* tiene la SVEP en los puntos de Ω, mientras que T no tiene la SVEP en los puntos de Ω. En este caso, tenemos que* $\mathrm{ind}(\lambda I - T) > 0$, $p(\lambda I - T) = \infty$ *y* $q(\lambda I - T) < \infty$ *para todo $\lambda \in \Omega$. Los valores de deficiencia no tienen punto límite en Ω, mientras que todo punto de Ω es un autovalor.*

(iv) *Ni T ni T^* tienen la SVEP en los puntos de Ω. En este caso, tenemos $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = \infty$ para todo $\lambda \in \Omega$. El índice puede asumir cualquier valor en $\mathbb{Z}$; todos los puntos de Ω son autovalores y valores de deficiencia.*

Prueba: El caso (i) es claro a partir de los resultados obtenidos más arriba en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3. El índice $\mathrm{ind}(\lambda I - T) = 0$ por el Teorema 2.1.2. En el caso (ii) la condición $p(\lambda I - T) < \infty$ implica que $\lambda I - T$ tiene índice menor o igual cero, mientras que la condición $q(\lambda I - T) = \infty$ excluye que el índice $\mathrm{ind}(\lambda I - T) = 0$, ver Proposición 38.5 de [32].

Un argumento similar muestra que en el caso (iii) $\mathrm{ind}(\lambda I - T) > 0$.

La proposición (iv) es clara.

∎

El siguiente corolario establece que una muy simple clasificación de las componentes del resolvente semi-Fredholm se puede obtener en el caso en que T o T^* tenga la SVEP. Recordemos que esta condición de que T y T^* tengan la SVEP, se tiene en particular para los operadores descomponibles.

Corolario 3.2.6 *Sea T un operador acotado definido sobre el espacio de Banach X y sea Ω cualquier componente del resolvente semi-Fredholm $\rho_{sf}(T)$. Si T tiene la SVEP entonces sólo los casos* (i) *y* (ii) *del Teorema 3.2.5 son* *posibles, mientras que si T^* tiene la SVEP sólo los casos* (i) *y* (iii) *son posibles. Finalmente, si ambas T y T^* tienen la SVEP entonces sólo el caso* (i) *es posible.*

■

En el siguiente resultado consideramos las componentes de $\rho_{se}(T)$ (Definición 1.2.3), que es el conjunto resolvente más pequeño que hemos considerado.

Teorema 3.2.7 *Sea T un operador acotado definido sobre el espacio de Banach X y sea Ω cualquier componente de $\rho_{se}(T)$. Entonces una de las siguientes posibilidades ocurre:*

(i) *Tanto T como T^* tienen la SVEP en todo punto de Ω. En este caso, tenemos $\Omega \subseteq \rho(T)$;*

(ii) *T tiene la SVEP en los puntos de Ω, mientras que T^* falla en tener la SVEP en todo punto de Ω. En este caso, tenemos $\Omega \cap \sigma_{ap}(T) = \varnothing$ y $\Omega \subseteq \sigma_{su}(T)$;*

(iii) *T^* tiene la SVEP en todo punto de Ω, mientras que T falla en tener la SVEP en los puntos de Ω. En este caso, tenemos que $\Omega \cap \sigma_{su}(T) = \varnothing$ y $\Omega \subseteq \sigma_{ap}(T)$;*

(iv) *Ni T ni T^* tienen la SVEP en los puntos de Ω. En este caso, tenemos $\Omega \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)$.*

Prueba: (i) Sea $\lambda_0 \in \Omega$. Los subespacios $M := X$ y $N := \{0\}$ constituyen una GKD para T y los subespacios ${}^{\perp}N = X$ y ${}^{\perp}M = \{0\}$ constituyen una GKD para T^*. Ver los Teoremas 3.14, 3.15 3.16 y 3.17 del libro de P. Aiena [1] : si T tiene la SVEP en λ_0 entonces $H_0(\lambda_0 I - T) = N = \{0\}$ y si T^* tiene SVEP en λ_0 entonces $K(\lambda_0 I - T) = M = X$. Así $\lambda_0 \in \rho(T)$.

(ii) En este caso $H_0(\lambda I - T) = \{0\}$ y $\lambda I - T$ tiene rango cerrado para todo $\lambda \in \Omega$. Si $\lambda \notin \sigma_{su}(T)$ entonces $\lambda \in \rho(T) = \rho(T^*)$ y esto es imposible, ya que T^* no tiene la SVEP en λ.

(iii) En este caso $K(\lambda I - T) = X$ para todo $\lambda \in \Omega$, así $\lambda \notin \sigma_{su}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ entonces $\lambda \in \rho(T)$ y esto es imposible, ya que T no tiene la SVEP en el punto λ.

(iv) Se usa el mismo argumento que en las partes (ii) y (iii).

■

Capítulo 4

Operadores de Browder y operadores de Weyl

El matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955), por el año 1909 estudió el espectro de todas la perturbaciones compactas de un operador Hermitiano T, definido sobre un espacio de Hilbert [54] y demostró que los puntos espectrales que no están en el espectro de alguna perturbación compacta de T, son puntos aislados de multiplicidad finita. Utilizando la terminología de hoy, ese resultado se puede enunciar diciendo que los puntos espectrales de un operador hermitiano T que no están en el espectro de Weyl son los puntos aislados del espectro que son autovalores de multiplicidad finita. En épocas más recientes, diversos autores han extendido este resultado, ahora conocido como Teorema de Weyl, a operadores definidos sobre espacios de Banach. También se ha extendido a algunas variantes de este teorema que estudiaremos en este trabajo.

En este capítulo haremos uso una vez más de la propiedad de la extensión univaluada SVEP como una especie de instrumento óptico que nos revela importantes propiedades de diversas clases de operadores. En primer término, se exponen un conjunto de resultados y propiedades de los espectros de Fredholm y de Browder, que constituyen la base referencial para los resultados obtenidos en relación al Teorema de Weyl.

Se definen ciertas partes relevantes del espectro como son: el conjunto $p_{00}(T)$ como los puntos del espectro tales que $\lambda I - T$ es de Browder y el conjunto $\pi_{00}(T)$ como el conjunto de puntos aislados del espectro tales que la nulidad de $\lambda I - T$ es positiva y finita.

Una de las propiedades destacadas, relacionada con la SVEP y con el Teorema de Weyl, es la llamada propiedad (H) que constituye otro de los aportes originales de este trabajo junto con varios resultados que relacionan esta propiedad con los Teoremas de Weyl y de a-Weyl. Un operador posee la propiedad (H) si para cualquier λ en $\mathbb{C}$ la parte quasi-nilpotente de $\lambda I - T$ coincide con su kernel.

Relacionados con la propiedad (H), tenemos los siguientes resultados: la propiedad (H) es preservada por las transformaciones quasi-afines Teorema 4.3.3; la propiedad (H) implica la SVEP Teorema 4.3.4; se establece en el Teorema 4.3.5 que la propiedad (H) para T, implica el Teorema de Weyl para T y T^*. Si T tiene la propiedad (H) y T^* tiene la SVEP, entonces para cualquier función analítica f definida en una vecindad abierta del espectro de T, se tiene que $f(T)$ satisface el Teorema de a-Weyl, Teorema 4.3.7.

Finalmente, se estudia la verificación del Teorema de Weyl para multiplicadores definidos sobre álgebras de Banach conmutativas y semi-simples, Teorema 4.5.1. Mientras que en el Teorema 4.5.3 se prueba que si T es un multiplicador sobre un álgebra de Banach Tauberiana, regular y semi-simple, verifica el Teorema de a-Weyl para T, y si T es descomponible, el Teorema de a-Weyl vale para T^*. Caso particular: los operadores de convolución.

Todos estos resultados son resultados originales que han sido publicados en [14].

4.1. Los espectros de Fredholm, de Weyl y de Browder

Dos importantes clases de operadores en la teoría de Fredholm están dadas por las clases de operadores de semi-Fredholm que poseen ascent finito o descent finito. Distinguiremos dos clases de operadores.

La clase del los operadores *semi-Browder superior* (upper semi-Browder) sobre un espacio de Banach X que está definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_+(X) :=& \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\} \\ =& \{T \in L(X) : \alpha < \infty, T(X) \text{ cerrado y } p(T) < \infty\},\end{aligned}$$

y la clase de los operadores *semi-Browder inferior* (lower semi-Browder), que está definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_-(X) :=& \{T \in \Phi_-(X) : q(T) < \infty\} \\ =& \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty \text{ y } q(T) < \infty\}\end{aligned}$$

La clase de los *operadores de Browder* (conocidos en la literatura también como *operadores de Riesz-Schauder*) está definida por

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}_+(X) \cap \mathcal{B}_-(X) = \{T \in \Phi(X) : p(T), q(T) < \infty\}.$$

Claramente, de la parte (i) y parte (ii) del Teorema 2.1.2 tenemos

$$T \in \mathcal{B}_+(X) \Rightarrow \operatorname{ind} T \leq 0,$$

y

$$T \in \mathcal{B}_-(X) \Rightarrow \operatorname{ind} T \geq 0,$$

así que

$$T \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \operatorname{ind} T = 0.$$

De la Nota 2.1, obtenemos también que

$$T \in \mathcal{B}_+(X) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{B}_-(X^*)$$

y, análogamente,

$$T \in \mathcal{B}_-(X) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{B}_+(X^*).$$

Definición 4.1.1 (Operador de Weyl) *Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice que es un operador de Weyl si T es un operador de Fredholm con índice 0. Se denota por $\mathcal{W}(X)$ la clase de los operadores de Weyl.*

$$\mathcal{W}(X) := \{T \in \Phi(X) : \alpha(T) = \beta(T)\}$$

Obviamente, $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{W}(X)$ y la inclusión es estricta, vea el operador $L \oplus R$ del Ejemplo 2.2. Combinando el Teorema 2.2.4, el Teorema 2.2.5 y el Teorema 2.1.2, obtenemos fácilmente que, para un operador de Weyl T, vale la siguiente equivalencia:

$$T \text{ tiene la SVEP en } 0 \;\Leftrightarrow T^* \text{ tiene la SVEP en } 0.$$

Más aún, si T o T^* tienen la SVEP en 0, del Teorema 2.1.2 deducimos que

$$T \text{ es de Weyl } \;\Leftrightarrow T \text{ es de Browder.}$$

Note que por la parte (c) de la Nota 2.1 si $0 \in \sigma(T)$ y T es de Browder, entonces 0 es un punto aislado del espectro de T, $\sigma(T)$. Además, del Teorema 2.2.4 y el Teorema 2.2.5 se sigue que

$$X = \mathcal{N}^\infty(T) \oplus T^\infty(X) = H_0(T) \oplus K(T) = \ker T^p \oplus T^p(X),$$

donde $p := p(T) = q(T)$.

La clase de los operadores definidos arriba motiva la definición de varios espectros.

Definición 4.1.2 (espectro de Browder) *El espectro* semi-Browder superior *de $T \in L(X)$ se define por*

$$\sigma_{ub}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathcal{B}_+(X)\},$$

el espectro semi-Browder inferior *de $T \in L(X)$ se define por*

$$\sigma_{lb}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathcal{B}_-(X)\},$$

mientras el espectro de Browder *de $T \in L(X)$ se define por*

$$\sigma_b(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathcal{B}(X)\}.$$

Claramente,

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ub} \cup \sigma_{lb}(T).$$

Definición 4.1.3 (espectro de Weyl) *El espectro de Weyl de $T \in L(X)$ está definido por*

$$\sigma_w(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathcal{W}(X)\}.$$

Obviamente,

$$\sigma_f(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) \tag{4.1}$$

Más aún, dado que X es de dimensión infinita, entonces $\sigma_f(T)$ es no vacío; consecuentemente, también $\sigma_w(T)$ y $\sigma_b(T)$ son no vacíos.

Es claro que,

$$\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T),$$

y que

$$\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lb} \subseteq \sigma_b(T).$$

Es fácil ver que en general, las inclusiones (4.1) son propias. Por ejemplo, para el operador *shift* derecho R sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ del Ejemplo 2.2, tenemos que $0 \in \sigma_w(T)$, mientras que $0 \notin \sigma_f(T)$. Además, si $T := L \oplus R$, entonces, $0 \notin \sigma_w(T)$, mientras que $0 \in \sigma_b(T)$.

Nota 4.1.1. Denotamos por $F(X)$ el ideal en $L(X)$ de todos los operadores finito-dimensionales. Un resultado básico de la teoría de operadores establece que todo operador finito-dimensional $T \in L(X)$ puede siempre ser representado en la forma

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k,$$

donde los vectores $x_1, \dots, x_n$ de X y los vectores $f_1, \dots, f_n$ de X^* son linealmente independientes, ver Heuser [32, p. 81]. Claramente, $T(X)$ está contenido en el subespacio Y generado por los vectores $x_1, \dots, x_n$.

Recíprocamente, si $y := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ es un elemento arbitrario de Y, podemos escoger $z_1, \dots, z_n$ en X tal que $f_i(z_j) = \delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ denota la delta de Kronecker (tal selección es posible, ver Heuser [32, Proposición 15.1]. Si definimos $z := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$ entonces,

$$Tz = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) x_k = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = y$$

Esto muestra que el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ forma una base para el subespacio $T(X)$.

§§§

Teorema 4.1.2 (libro de P. Aiena [1, Teorema 3.39]) *Para un operador acotado T definido sobre un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\lambda_0 I - T$ es un operador de Weyl;*

(ii) *existe un operador de dimensión finita $K \in F(X)$ tal que $\lambda_0 \notin \sigma(T + K)$;*

(iii) *existe un operador compacto $K \in K(X)$ tal que $\lambda_0 \notin \sigma(T + K)$.*

Nota 4.1.3. Por medio de una modesta modificación de la prueba del Teorema 4.1.2 obtenemos fácilmente la siguiente equivalencia:

(a) *El operador $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$ tiene índice* $\operatorname{ind}(\lambda_0 I - T) \leq 0$ *precisamente cuando $\lambda_0 \notin \sigma_{ap}(T + K)$ para algún $K \in K(X)$.*

Para probar esta equivalencia, tome $m := \alpha(T)$ y proceda como en la prueba del Teorema 4.1.2. El operador $S = T + K$ es entonces inyectivo y tiene rango cerrado, ya que $T + K \in \Phi_+(X)$.

Análogamente tenemos:

(b)*El operador $\lambda_0 I - T \in \Phi_-(X)$ tiene índice* $\operatorname{ind}(\lambda_0 I - T) \geq 0$ *precisamente cuando $\lambda_0 \notin \sigma_{su}(T + K)$ para algún $K \in K(X)$.*

La prueba de la equivalencia (b) se obtiene fácilmente tomando $m := \beta(T)$ y procediendo como en el Teorema 4.1.2.

§§§

Recordemos que $F(X)$ denota el ideal en $L(X)$ de los operadores finito-dimensionales y que $K(X)$ el ideal en $L(X)$ de los operadores compactos. El teorema anterior nos permite una descripción más precisa del espectro de Weyl que se manifiesta en el siguiente corolario:

Corolario 4.1.4 (libro de P. Aiena [1, Corolario 3.41]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$.*
Entonces $\sigma_w(T)$ es cerrado y

$$\sigma_w(T) = \bigcap_{K \in F(X)} \sigma(T+K) = \bigcap_{K \in K(X)} \sigma(T+K). \tag{4.2}$$

∎

Ahora damos una caracterización de los operadores semi-Browder por medio de la SVEP.

Teorema 4.1.5 (libro de P. Aiena [1, Teorema 3.44]) *Sea X un espacio de Banach, para un operador $T \in L(X)$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *$\lambda_0 I - T$ es esencialmente semi-regular y T tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) *existe un operador finito-dimensional $K \in L(X)$ tal que $TK = KT$ y $\lambda_0 \notin \sigma_{ap}(T+K)$;*

(iii) *existe un operador compacto $K \in L(X)$ tal que $TK = KT$ y $\lambda_0 \notin \sigma_{ap}(T+K)$;*

(iv)*$\lambda_0 I - T \in \mathcal{B}_+(X)$.*

Corolario 4.1.6 (libro de P. Aiena [1, Corolario 3.45]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces, $\sigma_{ub}(T)$ es cerrado y*

$$\sigma_{ub}(T) = \bigcap_{K \in F(X), KT=TK} \sigma_{ap}(T+K) = \bigcap_{K \in K(X), KT=TK} \sigma_{ap}(T+K). \tag{4.3}$$

Posteriormente, veremos que el espectro de Browder $\sigma_b(T)$ es la intersección de todos los espectros de perturbaciones de T mediante operadores compactos que conmutan con T. Por esta razón $\sigma_{ub}(T)$ es llamado algunas veces el *espectro de Browder puntual aproximado esencial* de $T \in L(X)$.

El siguiente resultado es dual al dado en el Teorema 4.1.5.

Teorema 4.1.7 ([5]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *$\lambda_0 I - T$ es esencialmente semi-regular y T^* tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) *existe un operador finito-dimensional* $K \in L(X)$ *tal que* $TK = KT$ *y* $\lambda_0 \notin \sigma_{su}(T+K)$*;*

(iii) *existe un operador compacto* $K \in L(X)$ *tal que* $TK = KT$ *y* $\lambda_0 \notin \sigma_{su}(T+K)$*;*

(iv) $\lambda_0 I - T \in \mathcal{B}_-(X)$

Corolario 4.1.8 (libro de P. Aiena [1, Corolario 3.47]) *Sea* X *un espacio de Banach y* $T \in L(X)$*. Entonces,* $\sigma_{lb}(T)$ *es cerrado y*

$$\sigma_{lb}(T) = \bigcap_{K \in F(X), KT=TK} \sigma_{su}(T+K) = \bigcap_{K \in K(X), KT=TK} \sigma_{su}(T+K). \quad (4.4)$$

El espectro $\sigma_{lb}(T)$ es llamado algunas veces el *espectro de Browder defecto aproximado esencial de* $T \in L(X)$.

Combinando el Teorema 4.1.5 y el Teorema 4.1.7 y recordando que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{su}(T)$ fácilmente obtenemos las siguientes caracterizaciones de los Operadores de Browder.

Teorema 4.1.9 (libro de P. Aiena [1, Teorema 3.48]) *Sea* X *un espacio de Banach y* $T \in L(X)$*. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $\lambda_0 I - T$ *es esencialmente semi-regular,* T *y* T^* *tienen la SVEP en* λ_0*;*

(ii) *existe un operador finito-dimensional* $K \in L(X)$ *tal que* $TK = KT$ *y* $\lambda_0 \notin \sigma(T+K)$*;*

(iii) *existe un operador compacto* K *tal que* $TK = KT$ *y* $\lambda_0 \notin \sigma(T+K)$*;*

(iv) $\lambda_0 I - T \in \mathcal{B}(X)$.

A partir de las caracterizaciones precedentes para los operadores de Browder obtenemos fácilmente la siguiente caracterización del espectro de Browder.

Corolario 4.1.10 (libro de P. Aiena [1, Corolario 3.49]) *Sea* X *un espacio de Banach y* $T \in L(X)$*. Entonces, el espectro de Browder* $\sigma_b(T)$ *es cerrado y*

$$\sigma_b(T) = \bigcap_{K \in F(X), KT=TK} \sigma(T+K) = \bigcap_{K \in K(X), KT=TK} \sigma(T+K).$$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.9, una vez que se observa que tanto T como T^* tienen la SVEP en todo punto de la frontera de $\sigma(T)$.

Corolario 4.1.11 ([5]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, y suponga que $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$. Entonces, $\lambda_0 I - T$ es esencialmente semi-regular si y sólo si $\lambda_0 I - T$ es semi-Fredholm, y en este caso, si y sólo si $\lambda_0 I - T$ es Browder.*

Es inmediato del Corolario 4.1.9 que si T es semi-Fredholm ($T \in \Phi_{\pm}(X)$) y tanto T como T^* tienen la SVEP en 0, entonces T es un operador de Browder.

Para un operador arbitrario, $T \in L(X)$, consideremos el siguiente conjunto:

$$\Xi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ no tiene la SVEP en } \lambda\}.$$

El siguiente teorema describe las relaciones entre el espectro de semi-Browder, el espectro esencialmente semi-regular $\sigma_{es}(T)$ y los puntos donde T ó T^* no tienen la SVEP.

Teorema 4.1.12 ([5]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces*

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{es}(T) \cup \Xi(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \Xi(T) \tag{4.5}$$

y

$$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{es}(T) \cup \Xi(T^*). \tag{4.6}$$

Más aún

$$\sigma_{b}(T) = \sigma_{w}(T) \cup \Xi(T) = \sigma_{w}(T) \cup \Xi(T^*). \tag{4.7}$$

También

$$\sigma_{b}(T) = \sigma_{w}(T) \cup \Xi(T) \cup \Xi(T^*) \tag{4.8}$$

y

$$\sigma_{b}(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \Xi(T^*) = \sigma_{lb}(T) \cup \Xi(T). \tag{4.9}$$

Una útil consecuencia del resultado precedente es que, bajo la suposición de la SVEP para T o T^*, varios de los espectros considerados arriba se unen. Esto también generaliza algunos resultados clásicos sobre el espectro de operadores normales definidos sobre espacios de Hilbert a operadores que tienen la SVEP.

Corolario 4.1.13 ([5]) *Suponga que X es un espacio de Banach y que $T \in L(X)$. Tenemos que*

(i) *si T tiene la SVEP, entonces*

$$\sigma_{es}(T) = \sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) = \sigma_{ub}(T), \tag{4.10}$$

y

$$\sigma_{lb} = \sigma_b(T) = \sigma_w(T); \tag{4.11}$$

(ii) *si T^* tiene la SVEP, entonces*

$$\sigma_{es}(T) = \sigma_{sf}(T) = \sigma_{lf}(T) = \sigma_{lb}(T), \tag{4.12}$$

y

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T); \tag{4.13}$$

(iii) *si tanto T como T^* tienen la SVEP, entonces todos los espectros en* (4.10), (4.11),(4.12) y (4.13) *coinciden y son iguales al espectro de Fredholm* $\sigma_f(T)$.

Prueba: (i) Para cada operador acotado $T \in L(X)$ tenemos

$$\sigma_{es}(T) \subseteq \sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T).$$

Si T tiene la SVEP, entonces, $\boldsymbol{\Xi}(T) = \varnothing$, y así de la igualdad (4.5) obtenemos $\sigma_{es}(T) = \sigma_{ub}(T)$. Las igualdades (4.11) son obvias a partir de (4.7) y (4.9) del Teorema 4.1.12.

(ii) la prueba de (4.12) y (4.13) es similar a la prueba de (4.10) y (4.11) de la parte (i).

(iii) Claramente, todos los espectros en (4.10),(4.11), (4.12) coinciden por la parte (i) y (ii). Más aún, esos espectros coinciden con $\sigma_f(T)$ ya que $\sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T)$.

∎

La prueba del siguiente resultado es similar a la prueba del Corolario 2.2.2, tomando en cuenta la igualdad (4.12) del Corolario 4.1.13, y que T^* tiene la SVEP en λ_0 cuando $\sigma_{su}(T)$ no se acumula en λ_0.

Corolario 4.1.14 ([5]) *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador para el cual $\sigma_{su}(T) = \partial\sigma(T)$ y todo $\lambda \in \partial\sigma(T)$ no es aislado en $\sigma(T)$. Entonces T^* tiene la SVEP y*

$$\sigma_{su}(T) = \sigma_{kt}(T) = \sigma_{se}(T) = \sigma_{es}(T).$$

Más aún, esos espectros coinciden con todos los espectros de (4.12) *del Corolario* 4.1.13.

∎

Definición 4.1.4 (Espectro aproximado puntual de Weyl) *Sea T un operador acotado en $L(X)$, el espectro aproximado puntual de Weyl $\sigma_{wa}(T)$ es el complemento de los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $\lambda I - T$ es semi-Fredholm superior y el índice* $\operatorname{ind}(\lambda I - T) \leq 0$*, es decir,*

$$\sigma_{wa}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \notin \Phi_+(X) \text{ ó } \operatorname{ind}(\lambda I - T) > 0\}$$

Se puede probar que $\sigma_{wa}(T)$ es la intersección de todos los espectros aproximados puntuales $\sigma_a(T+K)$ de perturbaciones compactas K de T, ver Rakočević [46], esto es,

$$\sigma_{wa}(T) := \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{ap}(T+K),$$

mientras que el *espectro sobreyectivo de Weyl* se define por

$$\sigma_{ws}(T) := \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_{su}(T+K).$$

Esas denominaciones son motivadas por el Corolario 4.1.4 y el Corolario 4.1.8.

En el siguiente resultado mostraremos algunas propiedades básicas de $\sigma_{wa}(T)$ y $\sigma_{ws}(T)$. Denotemos por $\operatorname{acc}(\sigma)$ el conjunto de todos los puntos de acumulación de $\sigma \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 4.1.15 *Sea X un espacio de Banach, para un operador acotado $T \in L(X)$, se tienen las siguientes proposiciones:*

(i) *$\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$ si y sólo si $\lambda I - T \in \Phi_-(X)$ e $\operatorname{ind}(\lambda I - T) \leq 0$. Dualmente, $\lambda \notin \sigma_{ws}(T)$ si y sólo si $\lambda I - T \in \Phi_-(X)$ e $\operatorname{ind}(\lambda I - T) \geq 0$.*

(ii) *$\sigma_{wa}(T) = \sigma_{ws}(T^*)$, $\sigma_{ws}(T) = \sigma_{wa}(T^*)$ y*

$$\sigma_w(T) = \sigma_{wa}(T) \cup \sigma_{ws}(T).$$

(iii) *$\sigma_{wa}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{ws}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T)$.*

(iv) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un punto aislado de $\sigma_{ap}(T)$ y $p(\lambda I - T) = \infty$, entonces $\lambda \in \sigma_{wa}(T)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un punto aislado de $\sigma_{su}(T)$ y $q(\lambda I - T) = \infty$, entonces $\lambda \in \sigma_{ws}(T)$.*

(v) *Tenemos que*

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{wa}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma_{ap}(T); \tag{4.14}$$

$$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ws}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma_{su}(T); \tag{4.15}$$

$$\sigma_b(T) = \sigma_w(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T). \tag{4.16}$$

Prueba: (i) Ver la Nota 4.1.

(ii) Es claro, por la parte (i).

(iii) Es obvio, a partir del Teorema 4.1.5 y del Teorema 4.1.7.

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un punto aislado de $\sigma_{ap}(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ, por el Teorema 2.2.11. Suponga que $p(\lambda I - T) = \infty$ y $\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$. Entonces $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$ y así, por el Teorema 2.2.4, $p(\lambda I - T)$ es finito, lo que contradice la hipótesis. La segunda proposición se prueba de forma similar.

(v) Si $\lambda \notin \sigma_{wa}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma_{ap}(T)$ entonces λ es un punto aislado de $\sigma_{ap}(T)$ y $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$, por la parte (i). De la parte (iv) tenemos también que $p(\lambda I - T)$ es finito y así $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \operatorname{acc} \sigma_{ap}(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_{wa}(T)$ o $\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$. En el primer caso $\lambda \in \sigma_{ub}(T)$, ya que $\sigma_{wa}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$. En el segundo caso $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$, así por el Teorema 2.2.11 no tiene la SVEP en λ, y por tanto, $p(\lambda I - T) = \infty$ por el Teorema 2.2.4. De esto concluimos que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$. De esta forma, la igualdad (4.14) queda probada. La prueba de la igualdad (4.15) es similar. La igualdad (4.16) se sigue combinando (4.14) con (4.15) y tomando en cuenta que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{su}(T)$.

■

Teorema 4.1.16 *Suponga que para $T \in L(X)$, T o T^* tiene la SVEP. Entonces*

$$\sigma_{wa}(T) = \sigma_{ub}(T) \quad \text{y} \quad \sigma_{ws}(T) = \sigma_{lb}(T).$$

Prueba: Suponga primero que T tiene la SVEP. Por la parte (iv) del Teorema 4.1.15, para probar que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{wa}(T)$, basta probar que $\operatorname{acc} \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma_{wa}(T)$. Suponga que $\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$. Entonces, $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$ y la SVEP en λ asegura que $\sigma_{ap}(T)$ no se acumula en λ, por el Teorema 2.2.11. Así $\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_{ap}(T)$.

Para probar la igualdad $\sigma_{lb} = \sigma_{ws}(T)$, es suficiente probar que $\sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_{ws}(T)$. Suponga que $\lambda \notin \sigma_{ws}(T)$. Entonces, $\lambda I - T \in \Phi_-(X)$ con $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T)$. De nuevo, la SVEP en λ da que $p(\lambda I - T)$ es finito y así, por la parte (i) del Teorema 2.1.2, $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T)$. En este punto la finitud de $p(\lambda I - T)$ implica, por la parte (iv) del Teorema 2.1.2, que también $q(\lambda I - T)$ es finito. Así $\lambda \notin \sigma_{lb}$. Luego, $\sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_{ws}(T)$, y la prueba de la segunda igualdad está completa en el caso de que T tenga la SVEP.

Suponga ahora que T^* tenga la SVEP. Entonces por la primera parte,

$$\sigma_{ub}(T^*) = \sigma_{wa}(T^*) \text{ y } \sigma_{lb}(T^*) = \sigma_{ws}(T^*).$$

Por dualidad, se sigue que $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ws}(T)$ y $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{wa}(T)$.

■

Suponga que un espacio de Banach X es la suma directa $X = M \oplus N$, donde los subespacios cerrados M y N son T-invariantes, y denotemos por P_M la proyección de X sobre M a lo largo de N. Claramente, P_M conmuta con T y

$$p(T) < \infty \Leftrightarrow p(T|M) < \infty, \;\; p(T|N) < \infty$$

y

$$\ker T = \ker T|M \oplus \ker T|N, \quad T(X) = T(M) \oplus T(N).$$

Además, $T(X)$ es cerrado si y sólo si $T(M)$ es cerrado en M y $T(N)$ es cerrado en N. Combinando todas esas propiedades obtenemos

$$T \in \mathcal{B}_+(X) \Leftrightarrow T|M \in \mathcal{B}_+(M) \text{ y } T|N \in \mathcal{B}_+(N),$$

y así,

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T|M) \cup \sigma_{ub}(T|N).$$

Similares equivalencias se pueden establecer para $\mathcal{B}_-(X)$ y $\mathcal{B}(X)$, así

$$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lb}(T|M) \cup \sigma_{lb}(T|N), \;\; \text{y} \;\; \sigma_b(T) = \sigma_b(T|M) \cup \sigma_b(T|N).$$

En la prueba del siguiente resultado usaremos Teoremas de Mapeo Espectral para $\sigma_{ap}(T)$. Hemos visto que para esos espectros el Teorema de Mapeo Espectral se tiene solo en los casos en que la función analítica f no es constante sobre las componentes conexas de su dominio de definición. Por esta razón, consideraremos la prueba en dos casos distintos.

Teorema 4.1.17 ([2]) *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado sobre un espacio de Banach X y f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al espectro de T, $\sigma(T)$. Entonces*

$$\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T)) \quad y \quad \sigma_{lb}(f(T)) = f(\sigma_{lb}(T). \tag{4.17}$$

■

Ahora establecemos el Teorema de Mapeo Espectral para el espectro de Browder.

Teorema 4.1.18 ([2]) *Sea T un operador acotado sobre un espacio de Banach X y f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al espectro de T, $\sigma(T)$. Entonces*

$$\sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T))$$

■

El Teorema de Mapeo Espectral para el espectro de Browder puede ser probado en forma diferente, mostrando que el espectro de Browder $\sigma_b(T)$ es el espectro ordinario de un elemento de una adecuada álgebra de Banach. En efecto, como fue notado por Gramsch y Lay en [31], ver también Teorema 4.1.9, si $\mathcal{A}$ es la subálgebra conmutativa maximal de $L(X)$ conteniendo a T y $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap K(X)$ es el homomorfismo cociente canónico, entonces $\sigma_b(T) = \sigma(\pi(T))$. Además, para toda función analítica definida sobre un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a $\sigma(T)$ tenemos $\sigma(\pi(f(T))) = f(\pi(T))$ y $f(T) \in \mathcal{A}$, así el resultado se sigue del Teorema de Mapeo Espectral usual en $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap K(X)$. El Teorema de Mapeo Espectral para el espectro $\sigma_b(T)$, $\sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{lb}(T)$ puede ser probado usando diferentes métodos. Por ejemplo, Oberai [44] probó este resultado mostrando primero que el mapeo $T \mapsto \sigma_b(T)$ es semi continuo superior. El Teorema de Mapeo Espectral para el espectro semi-Browder superior $\sigma_{ub}(T)$ ha sido probado por Rakočević [45], por medio de un argumento similar, probando que el mapeo $T \mapsto \sigma_{ub}(T)$ es semi continuo superior. Otra prueba puede ser también encontrada en Schmoeger [50].

Teorema 4.1.19 *Sea T un operador acotado definido sobre un espacio de Banach X y f una función holomorfa definida sobre un abierto que contiene a $\sigma(T)$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces*

$$\sigma_{wa}(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T)), \quad \sigma_{ws}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T)), \tag{4.18}$$

y

$$\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)). \tag{4.19}$$

Prueba: Suponga primero que T tiene la SVEP. Entonces $f(T)$ tiene la SVEP por el Teorema 2.40 de libro de P. Aiena [1] así, las igualdades de (4.18) se siguen del Teorema 4.1.16.

La prueba en el caso en que T^* tiene la SVEP se sigue por dualidad y el Teorema 4.1.17. En efecto, $f(T^*)$ tiene la SVEP así, de la primera parte de la prueba, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_{wa}(f(T)) &= \sigma_{ws}(f(T)^*) = \sigma_{ws}(f(T^*)) = \sigma_{lb}(f(T^*)) \\ &= f(\sigma_{lb}(T^*)) = f(\sigma_{lb}(T^*)) = f(\sigma_{ub}(T)) = \sigma_{ub}(f(T)).\end{aligned}$$

La prueba de la igualdad $\sigma_{ws}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T))$ es análoga. Finalmente,

$$\begin{aligned}\sigma_w(f(T)) &= \sigma_{wa}(f(T)) \cup \sigma_{ws}(f(T)) \\ &= \sigma_{ub}(f(T)) \cup \sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_b(f(T)),\end{aligned}$$

así también (4.19) está probada.

■

Para cualquier operador T definido sobre un espacio de Banach y f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al espectro de T, $\sigma(T)$, se tienen válidas las siguientes inclusiones:

$$\sigma_{wa}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{wa}(T))$$

$$\sigma_{ws}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{ws}(T))$$

en el siguiente resultado se tiene la igualdad, en caso que T o T^* tenga la SVEP.

Teorema 4.1.20 *Si T o T^* tiene la SVEP y f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al espectro de T,$\sigma(T)$, entonces*

$$f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T)).$$

Igualdades análogas se tienen para $\sigma_{wa}(T)$ y $\sigma_{ws}(T)$. Más aún,

$$\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = f(\sigma_w(T)) = f(\sigma_b(T)).$$

Prueba: Por el Teorema 4.1.19 y el Teorema 4.1.18 tenemos $\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T))$ y $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$, por Corolario 4.1.13.

Las afirmaciones para $\sigma_{wa}(T)$ y $\sigma_{ws}(T)$ se siguen en forma similar.

■

Definición 4.1.5 (Operador que satisface Browder) *Un operador acotado $T \in L(X)$ definido sobre un espacio de Banach, se dice que cumple el* Teorema de Browder *si se verifica la siguiente igualdad:*

$$\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$$

Definición 4.1.6 (Operador que satisface a-Browder) *Para un operador $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach X, decimos que se satisface el* Teorema de a-Browder *si se verifica la siguiente igualdad:*

$$\sigma_{wa}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

Note que si T satisface el Teorema de a-Browder, entonces $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. En efecto, si $\sigma_{wa}(T) = \sigma_{ub}(T)$ y $\lambda \notin \sigma_w(T)$, de la inclusión $\sigma_{wa}(T) \subseteq \sigma_w(T)$ se sigue que $\lambda \notin \sigma_{wa}(T) = \sigma_{ub}(T)$, y así $p(\lambda I - T) < \infty$. Pero $\lambda I - T$ es de Weyl, así por Teorema 2.1.2 $q(\lambda I - T)$ es también finito y, consecuentemente, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Esto muestra que $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$, y ya que la inclusión opuesta siempre se verifica, concluimos que $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$.

Tomando en cuenta que $\sigma_{wa}(T^*) = \sigma_{ws}(T)$ y $\sigma_{ub}(T^*) = \sigma_{lb}(T)$, del Teorema 4.1.19 obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 4.1.21 *Sea $T \in L(X)$ un operador acotado definido sobre un espacio de Banach X y f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al espectro de T, $\sigma(T)$. Si T o T^* tienen la SVEP entonces tanto $f(T)$ como $f(T^*)$ cumplen el Teorema de a-Browder. En particular, T y T^* cumplen el Teorema de a-Browder.*

4.2. Puntos aislados del espectro

En esta sección miraremos más de cerca los puntos aislados del espectro. Recordemos que a partir del cálculo funcional, si λ_0 es un punto aislado del espectro y P_0 es la proyección espectral asociada con el conjunto espectral $\{\lambda_0\}$ (ver Definición 1.5.3), entonces, los subespacios $P_0(X)$ y $\ker P_0$ son invariantes bajo T y $\sigma(T|P_0(X)) = \{\lambda_0\}$, mientras $\sigma(T|\ker P_0) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$.

El primer resultado de esta sección muestra que para un punto aislado del espectro λ_0 de $\sigma(T)$ la parte quasi-nilpotente $H_0(\lambda_0 I - T)$ y el core analítico $K(\lambda_0 I - T)$ pueden ser descritos de manera precisa como un rango o un kernel de una proyección.

Teorema 4.2.1 *Sea $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach, y suponga que λ_0 es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$. Si P_0 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$, entonces:*

(i) *$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T)$;*

(ii) *$\ker P_0 = K(\lambda_0 I - T)$.*

En particular, si λ_0 es un polo del resolvente, o equivalentemente $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces

$$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^p,$$

y

$$\ker P_0 = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X).$$

Prueba:

(i) Ya que λ_0 es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$ existe un círculo positivamente orientado $\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$ el cual separa a λ_0 del resto del espectro. Tenemos

$$(\lambda_0 I - T)^n P_0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda \text{ para todo } n = 0, 1, \ldots$$

Ahora, suponga que $x \in P_0(X)$. Tenemos $P_0 x = x$ y es fácil verificar el siguiente estimado:

$$\|(\lambda_0 I - T)^n x\| = \|(\lambda_0 I - T)^n P_0 x\| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta^{n+1} \max_{\lambda \in \Gamma} \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \|x\|.$$

Obviamente este estimado se tiene también para algún $\delta_0 < \delta$ y consecuentemente

$$\limsup \|(\lambda_0 I - T)^n x\|^{1/n} < \delta \tag{4.20}$$

Esto prueba la inclusión $P_0(X) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T)$.

Recíprocamente, suponga que $x \in H_0(\lambda_0 I - T)$ y así que la igualdad (4.20) se cumple. Se denota por $S \in L(X)$ el operador

$$S := \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}(\lambda_0 I - T).$$

Evidentemente la serie de Neumann

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}(\lambda_0 I - T)\right)^n x$$

converge para todo $\lambda \in \Gamma$. Si y_λ denota esta suma para cada $\lambda \in \Gamma$, mediante un típico argumento de análisis funcional, obtenemos que $(I - S)y_\lambda = x$. Un cálculo simple también muestra que

$$y_\lambda = (\lambda - \lambda_0)(\lambda I - T)^{-1} x$$

y por lo tanto

$$(\lambda I - T)^{-1} x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 I - T)^n x}{(\lambda_0 - \lambda)^{n+1}} \text{ para todo } \lambda \in \Gamma.$$

Integrando término a término se obtiene

$$P_0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda)} x d\lambda = x,$$

y esto prueba la inclusión $H_0(\lambda_0 I - T) \subseteq P_0(X)$. Esto completa la prueba de la igualdad (i).

(ii) No hay pérdida de generalidad si asumimos que $\lambda_0 = 0$. Tenemos $\sigma(T|P_0(X)) = \{0\}$, y $0 \in \rho(T|\ker P_0)$. De la igualdad $T(\ker P_0) = \ker P_0$ obtenemos $\ker P_0 \subseteq K(T)$, pues todo subespacio cerrado invariante está contenido en el core analítico.

Resta probar la inclusión recíproca $K(T) \subseteq \ker P_0$. Para ver esto, primero se muestra que $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$. Esto es claro porque $H_0(T) \cap K(T) = K(T|H_0(T))$, y el último subespacio es $\{0\}$ ya que la restricción de T sobre el espacio de Banach $H_0(T)$ es un operador quasi-nilpotente,y aplicamos el Corolario 2.28 del libro de P. Aiena [1] . Así, $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$. A partir de esto se sigue que

$$\begin{aligned} K(T) \subseteq K(T) \cap X &= K(T) \cap (\ker P_0 \oplus P_0(X)) \\ &= \ker P_0 + K(T) \cap H_0(T) = \ker P_0, \end{aligned}$$

así la inclusión deseada queda probada.

La última afirmación es clara a partir de la Nota 2.1, parte (b).

■

Teorema 4.2.2 *Sea λ_0 un punto aislado del espectro de T, $\sigma(T)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$;*

(ii) *$\lambda_0 I - T$ es de Browder;*

(iii) *$H_0(\lambda_0 I - T)$ es de dimensión finita;*

(iv) *$K(\lambda_0 I - T)$ es de codimensión finita.*

Prueba: La equivalencia (i)$\Leftrightarrow$(ii) se siguen del Corolario 4.1.11. La implicación (ii)$\Rightarrow$(iii) es clara a partir del Teorema 2.2.6, ya que T tiene SVEP en todo punto aislado de $\sigma(T)$. La implicación (iii)$\Rightarrow$(iv) es clara, pues como se observó arriba, $X = H_0(\lambda_0 I - T) \oplus K(\lambda_0 I - T)$.

(iv)$\Rightarrow$(i) Tenemos $K(\lambda_0 I - T) \subseteq (\lambda_0 I - T)^\infty(X) \subseteq (\lambda_0 - T)(X)$ es de codimensión finita y así $\lambda_0 I - T \in \Phi_-(X)$.

■

Por el Teorema 2.2.4, si $\lambda_0 I - T$ es de tipo Kato, un operador semi-Fredholm T tiene la SVEP en λ_0 precisamente cuando $p(\lambda_0 I - T)$ es finito. El siguiente resultado muestra que esta equivalencia se tiene bajo la hipótesis de que $q(\lambda_0 I - T)$ sea finito.

Teorema 4.2.3 *Sea T un operador acotado definido sobre el espacio de Banach X. Suponga que $q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *T tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) *$p(\lambda_0 I - T) < \infty$;*

(iii) *λ_0 es un polo del resolvente.*

(iv) *λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$.*

Prueba: No se pierde generalidad si suponemos que $\lambda_0 = 0$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Sea $q := q(T)$ y $Y := T^q(X)$. Consideremos la aplicación $\widehat{T}$, $\widehat{T} : (X/\ker(T^q) \to Y$ definida por $\widehat{T}(\widehat{x}) := Tx$ donde $x \in \widehat{x}$. Claramente, ya que $\widehat{T}$ es continua y biyectiva podemos definir en Y una nueva norma:

$$\|y\|_1 := \text{ínf}\{\|x\| : T^q(x) = y\},$$

para la cual $(Y, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Más aún, si $y = T^q(x)$, del estimado

$$\|y\| = \|T^q\| \, \|x\|$$

deducimos que Y puede ser inmerso continuamente en X. Ya que $T^q(T(X)) = T^{q+1}(X)$, se puede probar que $\ker T \cap T^q(X) = \{0\}$ y así, por el Lema 3.80 del libro de P. Aiena [1] , $p(T) < \infty$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) si $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$ entonces, λ_0 es un polo de orden p, ver Nota 2.1, parte (c).

(iii)$\Rightarrow$(iv) Obvio.

(iv)$\Rightarrow$(i) Esto fue observado arriba.

$\blacksquare$

El resultado anterior es una reminiscencia de las equivalencias establecidas en el Corolario 2.2.9 bajo la suposición de que $\lambda_0 I - T$ es semi-Fredholm.

Teorema 4.2.4 *Para un operador acotado $T \in L(X)$, siendo X un espacio de Banach, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *λ_0 es un polo del resolvente de T;*

(ii) *Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(\lambda_0 I - T)^p = H_0(\lambda_0 I - T)$ y $(\lambda_0 I - T)^p(X) = K(\lambda_0 I - T)$.*

Prueba: Suponga que $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un polo del resolvente de T. Entonces, $p(\lambda_0 I - T)$ y $q(\lambda_0 I - T)$ son finitos y así, iguales (ver Nota 2.1 y el Teorema 2.1.1).

Recíprocamente, suponga que (ii) está verificada. Mostremos que el ascent y el descent de $\lambda_0 I - T$ son finitos. A partir de

$$\ker(\lambda_0 I - T)^{p+1} \subseteq H_0(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^p$$

obtenemos que $\ker(\lambda_0 I - T)^{p+1} = \ker(\lambda_0 I - T)^p$, así $p(T) \leq p$.

De la inclusión

$$(\lambda_0 I - T)^{p+1}(X) \supseteq (\lambda_0 I - T)^{\infty}(X) \supseteq K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^p(X),$$

concluimos que $(\lambda_0 I - T)^{p+1}(X) = (\lambda_0 I - T)^p(X)$, así también $q(T)$ es finito. Luego, λ_0 es un polo de $R(\lambda, T)$.

■

4.3. Teorema de Weyl y a-Weyl

En esta sección relacionaremos el Teorema de Weyl con la propiedad de la extensión univaluada SVEP. Enfatizaremos el rol de la parte quasi-nilpotente $H_0(\lambda I - T)$ y veremos que la razón por la cual el Teorema de Weyl se tiene para muchas clases de operadores, depende esencialmente de la forma en que se asumen los espacios $H_0(\lambda I - T)$ en cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

El primer resultado establece varias equivalencias para operadores acotados definidos sobre espacios de Banach. Para un operador acotado $T \in L(X)$ definimos

$$p_{00}(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \text{ es de Browder}\},$$

y

$$\pi_{00}(T) := \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$$

Por la parte (b) de la Nota 2.1, tenemos

$$p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \quad \text{para todo } T \in L(X). \tag{4.21}$$

Siguiendo a Coburn [20] tenemos la siguiente definición de los operadores que satisfacen el Teorema de Weyl:

Definición 4.3.1 (Teorema de Weyl) *Se dice que un operador T en $L(X)$ satisface el Teorema de Weyl si*

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

Notemos que si T satisface el Teorema de Weyl, entonces

$$\sigma_b(T) = \sigma_w(T).$$

En efecto, primero recordemos que para todo operador T en $L(X)$ se tiene que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$; por otra parte, si $\lambda \in \sigma(T)$ no está en $\sigma_w(T)$, entonces, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$; ya que $\lambda I - T \in \Phi(X)$, la SVEP en λ de T y T^* asegura que tanto $p(\lambda I - T)$ como $q(\lambda I - T)$ son ambos finitos, por los Teoremas 2.2.4 y 2.2.5, luego $\lambda \notin \sigma_b(T)$, por lo que se tiene que $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$.

Definición 4.3.2 (Módulo minimal) *Sea T un operador no nulo en $L(X)$, el módulo minimal de T se define por:*

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin \ker(T)} \frac{\|Tx\|}{d(x, \ker T)}.$$

Teorema 4.3.1 *Para un operador acotado $T \in L(X)$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(i) $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$;
(ii) $\sigma_w(T) \cap \pi_{00}(T) = \varnothing$;
(iii) $\sigma_{sf}(T) \cap \pi_{00}(T) = \varnothing$;
(iv) $(\lambda I - T)(X)$ *es cerrado para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(v) $H_0(\lambda I - T)$ *es de dimensión finita para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(vi) $K(\lambda I - T)$ *es de codimensión finita para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(vii) $(\lambda I - T)^{\infty}(X)$ *es de codimensión finita para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(viii) $\beta(\lambda I - T) < \infty$ *para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(ix) $q(\lambda I - T) < \infty$ *para todo* λ *en* $\pi_{00}(T)$;
(x) *el mapeo* $\lambda \mapsto \gamma(\lambda I - T)$ *es discontinuo en cada* λ *en* $\pi_{00}(T)$.

Prueba:
(i)$\Rightarrow$(ii) Evidentemente $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, así

$$p_{00}(T) \cap \sigma_b(T) = \pi_{00}(T) = \varnothing,$$

y ya que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$, se concluye que $\sigma_w(T) \cap \pi_{00}(T) = \varnothing$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Obvio, ya que $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_w(T)$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda I - T$ es un operador semi-Fredholm, así $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado.

(iv)$\Rightarrow$(v) Si $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$. Ya que T tiene la SVEP en todo punto aislado de $\sigma(T)$, por el Teorema 2.2.6, se sigue que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.

(v)⇒(vi) Si λ es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces la descomposición $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$ se tiene por el Teorema 4.2.1. Consecuentemente si $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita, entonces $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita.

(vi)⇒(vii) Inmediata, ya que $K(\lambda I - T) \subseteq (\lambda I - T)^{\infty}(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(vii)⇒(viii) Es obvio ya que $(\lambda I - T)^{\infty}(X) \subseteq (\lambda I - T)(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(viii)⇒(i) Para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$ tenemos que $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, así, si $\beta(\lambda I - T) < \infty$, entonces $\lambda I - T$ es de Fredholm. Ya que λ es un punto aislado del espectro de T, la SVEP de T y T^* en λ asegura que $p(\lambda I - T)$ y $q(\lambda I - T)$ son ambos finitos por los Teoremas 2.2.4 y 2.2.5. Luego, $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$ y como la inclusión opuesta vale para todo operador, se sigue que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

(i)⇒(ix) Para cada λ en $\pi_{00}(T)$, $\lambda \in p_{00}(T)$ por tanto λ no pertenece al espectro de Browder $\sigma_b(T)$, en consecuencia $\lambda I - T$ es de Browder, por tanto, $p(\lambda I - T) < \infty$ y $q(\lambda I - T) < \infty$, luego se tiene (ix).

(ix)⇒(viii) Por el Teorema 2.1.2 si $q(\lambda I - T) < \infty$ entonces $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T) < \infty$ para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$.

(iv)⇔(x) Observemos primero que si $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$ entonces existe un disco agujereado $\mathbb{D}_0$ centrado en λ_0 tal que

$$\gamma(\lambda I - T) \leq |\lambda - \lambda_0| \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{D}_0 \tag{4.22}$$

De hecho, si λ_0 es un punto aislado del espectro, entonces $\lambda I - T$ es invertible y así, tiene rango cerrado en un disco agujereado $\mathbb{D}$ centrado en λ_0. Tomemos $0 \neq x \in \ker(\lambda_0 I - T)$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda I - T) &\leq \frac{\|(\lambda I - T)x\|}{d(x, \ker(\lambda I - T))} = \frac{\|(\lambda I - T)x\|}{\|x\|} \\ &= \frac{\|(\lambda I - T)x - (\lambda_0 I - T)x\|}{\|x\|} = |\lambda - \lambda_0|.\end{aligned}$$

Claramente, del estimado (4.22) se sigue que $\gamma(\lambda I - T) \to 0$ cuando $\lambda \to \lambda_0$, así el mapeo $\lambda \mapsto \gamma(\lambda I - T)$ no es continuo en $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$ precisamente cuando $\gamma(\lambda_0 I - T) > 0$, o , equivalentemente, cuando $(\lambda_0 I - T)(X)$ es cerrado. De esta forma la condición (iv) es equivalente a la condición (x).

■

En los trabajos de Curto y Han [23] y de Aiena y Carpintero [4] se muestra que si T o T^* tiene la SVEP, las proposiciones (iii) y (v) del Teorema 4.3.1 son equivalentes a que T satisfaga el Teorema de Weyl.

Como se vio en la sección 4.1, el espectro aproximado de Weyl $\sigma_{wa}(T)$ (Definición 4.1.4) es la intersección de todos los espectros aproximados puntuales $\sigma_a(T+K)$ de perturbaciones compactas K de T, ver Rakočević [46]. Del mismo autor en [46] tenemos la siguiente definición:

Definición 4.3.3 (Teorema de a-Weyl) *Sea T un operador acotado en $L(X)$, se dice que el Teorema de a-Weyl se cumple para T si*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{wa}(T) = \pi_{00}^{a}(T)$$

donde

$$\pi_{00}^{a}(T) := \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_{ap}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$$

Es claro que

$$\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^{a}(T) \quad \text{para todo } T \in L(X).$$

Se sabe de [46] que

$$\text{el Teorema de a-Weyl} \implies \text{el Teorema de Weyl}$$

Teorema 4.3.2 ([23],[4]) *Si $T \in L(X)$ y T o T^* tiene la SVEP, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(i) $\sigma_{uf}(T) \cap \pi_{00}^{a}(T) = \varnothing$;
(ii) *T satisface el Teorema de a-Weyl.*

■

Introducimos la clase de los operadores que satisfacen la llamada *Propiedad* (H), que tiene implicaciones con respecto al Teorema de Weyl y el Teorema de a-Weyl.

Definición 4.3.4 (Propiedad (H)) *Sea T un operador acotado en $L(X)$. Se dice que T tiene la propiedad (H) si*

$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T) \quad \textit{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Aunque la condición (H) se ve un tanto fuerte, la clase de operadores que la satisfacen es considerablemente grande. En lo que sigue, listamos algunas clases importantes de operadores que satisfacen esta propiedad.

(a) Recordemos (Ejemplo 2.1) que $T \in L(X)$ se dice *paranormal* si $\|Tx\| \leq \|T^2x\| \, \|x\|$ para todo $x \in X$. T es llamado *totalmente paranormal* si

$\lambda I - T$ es paranormal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Todo operador totalmente paranormal tiene la propiedad (H), ver Laursen [37]. Un operador acotado T definido en un espacio de Hilbert H, se dice *hiponormal* si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ para todo x de H. Se ve fácilmente que todo operador hiponormal es totalmente paranormal. La clase de los operadores totalmente paranormales incluye también a los operadores subnormales y a los operadores quasi-normales, ya que esos operadores son hiponormales, ver [22].

(c) Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice *transaloide* si el radio espectral $r(\lambda I - T)$ es igual a $\|\lambda I - T\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Todo operador transaloide tiene al propiedad (H), ver los Lemas 2.3 y 2.4 de [23].

Definición 4.3.5 (transformada quasi-afín) *Un operador $S \in L(X)$ se dice que es una* transformada quasi-afín *de $T \in L(X)$, denotado por $S \prec T$, si existe $U \in L(X)$ inyectiva con rango denso tal que $TU = US$. Si tanto $S \prec T$ como $T \prec S$, entonces se dice que T y S son* quasi-similares.

El siguiente resultado muestra que la propiedad (H) se preserva por las transformaciones quasi-afines, ver [14].

Teorema 4.3.3 (Aiena - Villafañe) *Suponga que $T \in L(X)$ tiene la propiedad (H) y $S \prec T$. Entonces S tiene la propiedad (H).*

Prueba: Suponga que $TU = US$, con U inyectiva, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in H_0(\lambda I - S)$. Entonces,

$$\|(\lambda I - T)^n Ux\|^{1/n} = \|U(\lambda I - S)^n x\|^{1/n} \leq \|U\|^{1/n} \|(\lambda I - S)^n x\|^{1/n},$$

De lo cual se sigue que $Ux \in H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)$. Así, $U(\lambda I - S)x = (\lambda I - T)Ux = 0$ y, ya que U es inyectiva, esto implica que $(\lambda I - S)x = 0$, i.e. $x \in \ker(\lambda I - S)$. Así, $H_0(\lambda I - S) = \ker(\lambda I - S)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

∎

Como consecuencia del Teorema 4.3.3 obtenemos otra importante clase de operadores que tienen la propiedad (H). Para ver esto, consideremos un operador $T \in L(H)$, con H un espacio complejo de Hilbert, sea $T = W|T|$ la descomposición polar de T. Entonces, a $R := |T|^{1/2} W |T|^{1/2}$ se le llama la *transformada de Aluthge* de T. Si $R = V|R|$ es la descomposición polar de R, se define $\widetilde{T} := |R|^{1/2} V |R|^{1/2}$.

Definición 4.3.6 (operador positivo) *Sea T un operador acotado definido sobre un espacio complejo de Hilbert. Se dice que T es positivo ($T \geq 0$) si*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \qquad \text{para todo } x \in H$$

para $T_1, T_2 \in L(H)$ se escribe $T_2 \geq T_1$ si $T_2 - T_1 \geq 0$.

(d) Un operador $T \in L(H)$se dice que es *log-hiponormal* si T es invertible y satisface $\log(T^*T) \geq \log(TT^*)$. Si T es log-hiponormal entonces existe $\widetilde{T}$ hiponormal, tal que $T = K\widetilde{T}K^{-1}$, donde $K := |R|^{1/2}|T|^{1/2}$, ver [52], [19]. Así T es quasi-similar a un operador hiponormal y por tanto, tiene la propiedad (H).

(e) Un operador $T \in L(H)$ se dice que es *p-hiponormal*, con $0 < p \leq 1$ si $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$. Todo operador p-hiponormal invertible es quasi-similar a un operador log-hiponormal y, consecuentemente, tiene la propiedad (H) ver [15],[25].

Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice que es *isoloid* si todo punto aislado de $\sigma(T)$ es un autovalor de T.

Se dice que un operador es *relativamente regular* si existe $S \in L(X)$ tal que $TST = T$.

Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice *reguloid* si para todo punto aislado λ de $\sigma(T)$, $\lambda I - T$ es relativamente regular, es decir, existe $S_\lambda \in L(X)$ tal que

$$(\lambda I - T)S_\lambda(\lambda I - T) = \lambda I - T.$$

Es bien conocido que $T \in L(X)$ es un operador relativamente regular si y solo si $\ker T$ y $T(X)$ son complementados. Obviamente, si T es reguloid entonces T es isoloid.

Teorema 4.3.4 *Suponga que un operador $T \in L(X)$ tiene la propiedad (H). Entonces T tiene la SVEP y $p(\lambda I - T) \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Además,tanto T como T^* son reguloid.*

Prueba: La SVEP puede ser probada en varias formas. Por ejemplo, la SVEP se sigue del Teorema 1.6 de [6], una vez observado que $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Más aún de la inclusión

$$\ker(\lambda I - T)^n \subseteq H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

obtenemos que $p(\lambda I - T) \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para probar que T es reguloid, probamos que todo punto aislado del espectro $\sigma(T)$ es un polo simple del resolvente. No se pierde generalidad si suponemos que $\lambda = 0$. Denotemos por P la proyección espectral asociada con el conjunto espectral $\{0\}$,

$$P := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

donde Γ es el círculo centrado en 0 y radio $\varepsilon > 0$ que separa a 0 del resto del espectro. Tenemos que $P(X) = H_0(T) = \ker T$, ver Proposición 49.1 de Heuser [32], así que $TP = 0$. Ahora, ya que 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$, es una singularidad no removible de $(\lambda I - T)^{-1}$, así admite la expansión de Laurent

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{\lambda^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Q_n$$

para todo λ tal que $0 < |\lambda| < \varepsilon$, con $P_n, Q_n \in L(X)$. Ya que $P_1 = P$ y $P_n = T^{n-1}P$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ (ver [32, p. 209]), obtenemos de $TP = 0$, que $P_n = 0$ para $n \geq 2$. Luego 0 es un polo simple del resolvente $(\lambda I - T)^{-1}$. Esto implica, por proposición 50.2 de [32], que $p(T) = q(T) = 1$ y 0 es un autovalor de T. Más aún, nuevamente por la proposición 50.2 de [32], $\ker P = K(T) = T(X)$, por tanto, este $\ker T$ y $T(X)$ son complementados y, consecuentemente, T es relativamente regular. Luego, T es reguloid.

Para probar que T^* es reguloid, sea λ_0 un punto aislado de $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Por la primera parte de la prueba sabemos que λ_0 es un polo simple de $(\lambda I - T)^{-1}$. Como arriba, tenemos que $X = \ker(\lambda_0 I - T) \oplus (\lambda_0 I - T)(X)$, por lo que

$$X^* = \ker(\lambda_0 I - T)^{\perp} \oplus (\lambda_0 I - T)(X)^{\perp}$$

donde $M^{\perp}$ denota el anulador de M. Ya que $(\lambda_0 I - T)(X)$ es cerrado, también $(\lambda_0 I^* - T^*)(X^*)$ es cerrado y de las igualdades bien conocidas

$$(\lambda_0 I^* - T^*)(X^*) = \ker(\lambda_0 I - T)^{\perp} \ , \ \ker(\lambda_0 I^* - T^*) = (\lambda_0 I - T)(X)^{\perp},$$

concluimos que tanto $(\lambda_0 I^* - T^*)(X^*)$ como $\ker(\lambda_0 I^* - T^*)$ son complementados y así T^* es relativamente regular. De esta forma, T^* es reguloid.

■

Teorema 4.3.5 *Suponga que $T \in L(X)$ tiene la propiedad (H). Entonces el Teorema de Weyl se tiene para T y T^*. Si además, T^* tiene la SVEP entonces el Teorema a-Weyl se tiene para T y T^*.*

Prueba: La primera proposición es clara: la propiedad (H) implica la SVEP por el Teorema 4.3.4, y por definición de $\pi_{00}(T)$ obtenemos que

$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Ya que T es reguloid y así isoloid, por el Teorema 2.4 de [4] se sigue que el Teorema de Weyl se tiene para T^*, observemos primero que ya que T tiene la SVEP entonces

$$\sigma_w(T) = \sigma_w(T^*) = \sigma_b(T) = \sigma_b(T^*),$$

ver Corolario 2.12 de [11]. Así

$$\sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*) = \sigma(T^*) \setminus \sigma_b(T^*) = p_{00}(T^*),$$

y para probar el Teorema de Weyl para T^*, es suficiente probar la igualdad

$$p_{00}(T^*) = \pi_{00}(T^*).$$

La inclusión $p_{00}(T^*) \subseteq \pi_{00}(T^*)$ se verifica para todo $T \in L(X)$. Para probar la inclusión opuesta, sea $\lambda_0 \in \pi_{00}(T^*)$. Ya que T^* es reguloid, por el Teorema 4.3.4, $\lambda_0 I^* - T^*$ tiene rango cerrado. De $\alpha(\lambda_0 I^* - T^*) < \infty$ se sigue que $\lambda_0 I^*$ es semi-Fredholm superior y ya que T^* tiene la SVEP en todo punto aislado de $\sigma(T^*)$, esto implica que $p(\lambda_0 I^* - T^*) < \infty$, por el Corolario 2.7 de [6].

Por otra parte, por dualidad $\lambda_0 I - T \in \Phi_-(X)$ y la condición $p(\lambda_0 I^* - T^*) < \infty$ implica que $\alpha(\lambda_0 I - T) = \beta(\lambda_0 I - T) < \infty$, por la Proposición 38.6 del libro de Heuser [32], así $\lambda_0 I - T \in \Phi(X)$. De la proposición 39.2 del mismo libro [32] se sigue que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I^* - T^*) < \infty$, y, por el Teorema 4.3.4 la finitud de $p(\lambda I^* - T^*)$ y $q(\lambda I^* - T^*)$ implica que $\beta(\lambda I^* - T^*) < \infty$, ver proposición 38.6 de [32]. Luego, $\lambda_0 I^* - T^*$ es de Browder, i.e. $\lambda_0 \in p_{00}(T^*)$. De esta forma queda probada la igualdad $p_{00}(T^*) = \pi_{00}(T^*)$.

Finalmente, asumamos que T^* tiene la SVEP. Por [4, Teorema 2.13] se sigue que el Teorema de a-Weyl se tiene para T. Para probar que también T^* cumple el Teorema de a-Weyl, observemos primero que ya que T tiene la SVEP, entonces $\sigma_s(T) = \sigma(T)$, por la Proposición 1.3.2 de [39] y así, por dualidad $\sigma_a(T^*) = \sigma(T^*)$. Luego, $\pi_{00}^a(T^*) = \pi_{00}(T^*)$. Sea $\lambda_0 \in \pi_{00}^a(T^*) = \pi_{00}(T^*)$. Entonces, $\alpha(\lambda I^* - T^*) < \infty$ y ya que T^* es reguloid entonces $\lambda I^* - T^*$ tiene rango cerrado. Así $\lambda I^* - T^* \in \Phi_+(X^*)$, de modo que $\sigma_{uf}(T^*) \cap \pi_{00}^a(T^*) = \varnothing$. Ya que, por hipótesis, T^* tiene la SVEP entonces el Teorema de a-Weyl se cumple para T^*, por el Teorema 4.3.2.

■

Corolario 4.3.6 *Suponga que T es cualquier operador como en los ejemplos* (a)-(e). *Entonces, el Teorema de Weyl se cumple para T y T^*.*

■

Teorema 4.3.7 *Suponga que T tiene la propiedad (H) y T^* la SVEP. Si f es una función holomorfa definida sobre un abierto que contiene a $\sigma(T)$, entonces el Teorema de a-Weyl se cumple para $f(T)$.*

Prueba: Sabemos, por el Teorema 2.4 de [4], que el Teorema de Weyl se tiene para $f(T)$. Más aún, ya que T^* tiene la SVEP, $f(T^*) = f(T)^*$ tiene la SVEP por el Teorema 3.3.6 de [39]. Por [4, Teorema 2.13], concluimos que el Teorema de a-Weyl se tiene para $f(T)$.

■

Ejemplo 4.3.8: En general, no podemos esperar que el Teorema de a-Weyl se cumpla para un operador descomponible. Por ejemplo, si $T \in L(\ell^2)$ se define por

$$T(x_0, x_1, \cdots) := \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \cdots\right) \quad \text{para toda } (x_n) \in \ell^2,$$

entonces T es quasi-nilpotente y así, descomponible. Pero T no satisface el Teorema de a-Weyl, ya que $\sigma_a(T) = \sigma_{wa}(T) = \{0\}$ y $\pi_{00}^a(T) = \{0\}$

□

Sin embargo, como inmediata consecuencia del Teorema 4.3.7 tenemos que el Teorema de a-Weyl se tiene si asumimos que el operador descomponible tiene la propiedad (H).

Corolario 4.3.9 *Suponga que $T \in L(X)$ es descomponible y tiene la propiedad (H). Si f es una función holomorfa definida sobre un abierto que contiene a $\sigma(T)$, entonces $f(T)$ satisface el Teorema de a-Weyl.*

4.4. Propiedades espectrales de los multiplicadores

Una consecuencia inmediata del Corolario 4.3.9, es que para todo operador normal T definido sobre un espacio de Hilbert, el Teorema a-Weyl se tiene para $f(T)$ ya que todo operador normal es descomponible. La clase de todos los multiplicadores de un álgebra semi-simple presenta una teoría de Fredholm similar a la de los operadores normales. Estableceremos algunas otras analogías.

Los multiplicadores aparecen primero en análisis armónico en conexión con la teoría de sumabilidad para series de Fourier, pero subsecuentemente esta noción ha sido empleada en muchos otros contextos entre los cuales encontramos el estudio de la transformada de Fourier, la investigación de álgebras grupales, módulos de Banach y la teoría general de álgebras de Banach.

El concepto de multiplicador extiende el de un operador de multiplicación sobre álgebras de Banach conmutativas, pero una de las razones del interés en esta clase de operadores, es que proporciona un marco abstracto para estudiar otra importante clase de operadores que surgen del análisis armónico: la clase de todos los operadores de convolución de grupos algebraicos. De hecho, un estudio completo de los multiplicadores en álgebras de Banach conmutativas, requiere el conocimiento de las herramientas básicas de la teoría de álgebras de Banach, y, en particular, de la maquinaria de la teoría de representación de Gelfand en álgebras de Banach conmutativas.

Definición 4.4.1 (Multiplicador) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Una aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se dice que es un multiplicador de $\mathcal{A}$ si*

$$x(Ty) = (Tx)y \quad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{A}$$

El conjunto de multiplicadores de $\mathcal{A}$ se denota por M(A).

Una subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ se dice que es *cerrada bajo el inverso* si para todo elemento $x \in \mathcal{B}$ que posea un inverso $x^{-1} \in \mathcal{A}$, cumple que $x^{-1} \in \mathcal{B}$.

Un ejemplo de multiplicador en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es dado por el operador multiplicación por un elemento a que conmuta con todo elemento $x \in \mathcal{A}$, $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dado por $x \mapsto ax$.

Cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, el concepto de multiplicador se reduce, trivialmente, al operador multiplicación por un elemento de $\mathcal{A}$. Para ver esto, consideremos un multiplicador $T \in M(\mathcal{A})$ y $x \in \mathcal{A}$,

$$Tx = 1(Tx) = (T1)x = L_{(T1)}x$$

luego, $T = L_{(T1)}$. En este caso se puede identificar $\mathcal{A}$ con $M(\mathcal{A})$.

Dado un conjunto no vacío B de $\mathcal{A}$, definimos el *anulador izquierdo* $lan(B)$ y el *anulador derecho* $ran(B)$ por

$$lan(B) := \{x \in \mathcal{A} : xB = \{0\}\},$$

$$ran(B) := \{x \in \mathcal{A} : Bx = \{0\}\}.$$

Las propiedades básicas de los multiplicadores que tratamos son generalmente presentadas en el marco de una clase muy grande de álgebras de Banach:

Definición 4.4.2 (álgebra faithful) *Decimos que un álgebra de Banach es* faithful *si* $ran(\mathcal{A}) = \{0\}$ *ó* $lan(\mathcal{A}) = \{0\}$.

En la definición de álgebra de Banach faithful hemos seguido la terminología de Johnson [34] y del libro de Laursen y Neumann [39].

Las álgebras faithful fueron llamadas *propias* por Ambrose [16] y *sin orden* en el libro de Larsen [36] entre otros autores. Trivialmente, cualquier álgebra de Banach con una identidad es faithful.

Definición 4.4.3 (semi-prima) *Un álgebra* $\mathcal{A}$ *se dice semi-prima si* $\{0\}$ *es el único ideal bilateral con* $J^2 = \{0\}$.

Definición 4.4.4 (regular) *Un ideal por la izquierda* J *de un álgebra de Banach se dice* regular izquierdo *(o también* modular*) si existe un elemento* $v \in \mathcal{A}$ *tal que* $\mathcal{A}(1 - v) \subseteq J$*, donde*

$$\mathcal{A}(1 - v) := \{x - xv : x \in \mathcal{A}\}$$

De manera análoga se definen ideales regulares derechos *e* ideales regulares

Observemos que si $\mathcal{A}$ tiene unidad, entonces todo ideal, derecho, izquierdo o bilateral, es regular.

Definición 4.4.5 (primitivo) *Un ideal bilateral* J *de* $\mathcal{A}$ *es llamado* primitivo *si existe un ideal izquierdo regular maximal* L *de* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$J = \{x \in \mathcal{A} : x\mathcal{A} \subseteq L\}$$

Definición 4.4.6 (radical) *El* radical *de un álgebra* $\mathcal{A}$*,* $rad\mathcal{A}$*, es la intersección de los ideales primitivos de* $\mathcal{A}$*, o equivalentemente, la intersección de los ideales izquierdos (derechos) regulares maximales de* $\mathcal{A}$*, ver* [18, Proposición 24.14]

Si $\mathcal{A} = rad\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{A}$ se dice que es un *álgebra radical.*

Definición 4.4.7 (álgebra semi-simple) *Un álgebra se dice* semi-simple *si su radical* $rad\mathcal{A}$ *es igual a* $\{0\}$

Como es usual, denotamos por $L(\mathcal{A})$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados definidos sobre $\mathcal{A}$. Nótese que en la definición de multiplicadores no se asume la linealidad ni la continuidad. En el siguiente resultado se muestra que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach faithful la linealidad y la continuidad son consecuencias de la Definición 4.4.2. Observemos primero que si $\mathcal{A}$ es faithful y $x, y, z \in \mathcal{A}$, para cada multiplicador $T \in M(A)$ tenemos:

$$z[x(Ty)] = z[(Tx)y] = (Tz)(xy) = zT(xy),$$

así,

$$[x(Ty) - T(xy)] \in ran(A) = \{0\}$$

y de esta forma, las igualdades siguientes se tienen para cada $x, y \in \mathcal{A}$:

$$x(Ty) = (Tx)y = T(xy). \tag{4.23}$$

Teorema 4.4.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach faithful. Entonces:*

(i) *Todo multiplicador es un operador lineal acotado sobre $\mathcal{A}$. El álgebra de multiplicadores $M(\mathcal{A})$, es una subálgebra conmutativa cerrada de $L(\mathcal{A})$ que contiene la identidad I de $L(A)$.*

(ii) *Para todo $T \in M(\mathcal{A})$, $T(\mathcal{A})$ es un ideal bilateral en $\mathcal{A}$,*

(iii) *Si el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es conmutativa, entonces todo operador multiplicación por $a \in \mathcal{A}$, L_a $(x \mapsto ax)$, es un multiplicador de $\mathcal{A}$. El mapeo $a \in \mathcal{A} \mapsto L_a \in M(\mathcal{A})$ es un isomorfismo continuo del álgebra $\mathcal{A}$ sobreyectivamente en el ideal $\{L_a : a \in \mathcal{A}\}$ de $M(\mathcal{A})$.*

Prueba: (i) Primero probemos que cualquier $T \in M(A)$ es lineal. Para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} z[T(\lambda x + \mu y)] &= (Tz)(\lambda x + \mu y) = \lambda(Tz)x + \mu(Tz)y \\ &= \lambda z(Tx) + \mu z(Ty) = z[\lambda Tx + \mu Ty], \end{aligned}$$

así para todo z, $z[T(\lambda x + \mu y) - (\lambda Tx + \mu Ty)] = 0$ y como $\mathcal{A}$ es faithful, $ran(A) = \{0\}$, por tanto,
$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$.

Para probar que T es acotada sean $y, z \in \mathcal{A}$ y $(y_n) \subset \mathcal{A}$ una sucesión para la cual $\|y_n - y\| \to 0$ y $\|Ty_n - z\| \to 0$. Para cada $x \in \mathcal{A}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|xz - x(Ty)\| &\leq \|x\| \, \|z - Ty_n\| + \|(Tx)y_n - (Tx)y\| \\ &\leq \|x\| \, \|z - Ty_n\| + \|Tx\| \, \|y_n - y\| \to 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $(z - Ty) \in ran(\mathcal{A})$. Luego, $z = Ty$ y por el Teorema del Gráfico Cerrado, concluimos que T es un operador acotado.

Ahora, mostraremos que $M(\mathcal{A})$ es un subálgebra conmutativa de $L(\mathcal{A})$. Es fácil verificar que la suma de multiplicadores es un multiplicador. Más aún, si $T, S \in M(\mathcal{A})$ y $x, y \in \mathcal{A}$ tenemos por la igualdad (4.23),

$$[(TS)x]y = [T(Sx)]y = T[(Sx)y] = T[x(Sy)] = x[TS(y)],$$

así, $TS \in M(\mathcal{A})$. Además también aplicando 4.23 al producto TS se obtiene que

$$\begin{aligned} x[(TS)y] = (TS)(xy) = T[S(xy)] = T[x(sy)] = x[TS(y)] \\ (Sx)(Ty) = x[(ST)y] \end{aligned}$$

por lo que, para todo $y \in \mathcal{A}$, $(TS)y = (ST)y$. Luego, $M(\mathcal{A})$ es un álgebra conmutativa.

Consideremos ahora una sucesión $(T_n) \subset M(\mathcal{A})$ que converge a $T \in L(\mathcal{A})$. Entonces para todo $x, y \in \mathcal{A}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|(Tx)y - x(Ty)\| &\leq \|(Tx)y - (T_n x)\| + \|(T_n x)y - x(Ty)\| \\ &\leq 2\,\|T - T_n\|\,\|x\|\,\|y\|\,, \end{aligned}$$

y esto implica que $(Tx)y = x(Ty)$. En consecuencia $M(\mathcal{A})$ es cerrado.

(ii) Es claro que, si $T \in M(\mathcal{A})$ las igualdades 4.23 implican, ya que T es lineal, que $T(\mathcal{A})$ es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$.

(iii) Sea $a, x, y \in \mathcal{A}$ entonces,

$$x(L_a y) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = (L_a x)y$$

por lo que L_a es un multiplicador de $\mathcal{A}$. Por otra parte, para $a, b, y \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\|L_a y - L_b y\| = \|ay - by\| = \|a - b\|\,\|y\|$$

esto implica la continuidad del mapeo $a \mapsto L_a$ obviamente sobreyectivo. Veamos que $L = \{L_a : a \in \mathcal{A}\}$ es un ideal: en efecto, sean $a, x, y \in \mathcal{A}$ xL_a es un elemento de xL,

$$(xL_a)y = x(L_a y) = x(ay) = (xa)y = L_{xa}y$$

de donde $xL \subseteq L$. (ideal bilateral por la conmutatividad).

$\blacksquare$

Denotemos por $\mathcal{A}$ cualquier álgebra de Banach con elemento unidad 1. El espectro de un elemento $x \in \mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{A}$ se define, en forma canónica por:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

En el caso del espectro de un operador acotado T con respecto al álgebra de Banach $L(\mathcal{A})$, se denota de manera usual, es decir, $\sigma(T)$.

Teorema 4.4.2 *Si $\mathcal{A}$ es cualquier álgebra de Banach faithful, se tienen las siguientes proposiciones:*

(i) *$M(\mathcal{A})$ en una subálgebra de $L(\mathcal{A})$, cerrada bajo el inverso;*

(ii) *$\sigma(T) = \sigma_{M(\mathcal{A})}(T)$ para cada $T \in M(\mathcal{A})$.*

Prueba: (i) Supongamos que $T \in M(\mathcal{A})$ admite una inversa T^{-1} en $L(\mathcal{A})$ para cada $x, y \in \mathcal{A}$ tenemos

$$\begin{aligned}(T^{-1}x)y &= T^{-1}T[(T^{-1}x)y] = T^{-1}[(TT^{-1}x)y] = T^{-1}(xy) \\ &= T^{-1}[x(TT^{-1}y)] = T^{-1}T[x(T^{-1}y)] = x(T^{-1}y),\end{aligned}$$

luego, T^{-1} es un multiplicador y de esta manera, el álgebra de multiplicadores es una subálgebra de $L(\mathcal{A})$ cerrada bajo el inverso.

(ii)

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow \lambda I - T \text{ es invertible y } (\lambda I - T)^{-1} \in M(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_{M(\mathcal{A})}(T)\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado establece propiedades elementales de un multiplicador desde el punto de vista del la teoría local espectral. En particular, se muestra que todo multiplicador de un álgebra de Banach semi-prima, no necesariamente conmutativa, tiene la SVEP.

Teorema 4.4.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach semi-prima y $T \in M(\mathcal{A})$, entonces:*

(i) *$p(T) \leq 1$. Más aún, $\ker T \cap T(\mathcal{A}) = \{0\}$;*

(ii) *T tiene la SVEP;*

(iii) *$\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$ y $\sigma_{se}(T) = \sigma_{ap}(T)$.*

Prueba: (i) Dado que $\ker T \subseteq \ker T^2$ se tiene para todo operador, basta probar la otra inclusión.

Sea $x \in \ker T^2$ y sea $z := Tx$ (se quiere probar que $z = 0$). Obviamente $z \in \ker T$ y

$$zaz = (Tx)az = T((xa)z) = xaTz = xa0 = 0 \text{ para todo } a \in \mathcal{A}$$

De esto se sigue que $z\mathcal{A}z\mathcal{A} = (z\mathcal{A})^2 = \{0\}$, y como $\mathcal{A}$ es semi-prima, $z\mathcal{A} = 0$, por tanto, $z = Tx = 0$ y así $\ker T^2 \subseteq \ker T$.

La igualdad $\ker T \cap T(\mathcal{A}) = \{0\}$ se tiene en el libro de Heuser [32, 38.1]

(ii) Ya que $\lambda I - T \in M(\mathcal{A})$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, por la parte (i) tenemos que $p(\lambda I - T) \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta condición asegura, por el Teorema 2.1.5, que T tiene la SVEP en todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) Esta es una consecuencia de la SVEP, por el Corolario 2.45 del libro de P. Aiena [1] .

■

El siguiente resultado muestra que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach semi-simple, todo multiplicador $T \in M(\mathcal{A})$ tiene la propiedad (H).

Teorema 4.4.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach semi-simple y $T \in M(\mathcal{A})$. Entonces,*

$$H_0(\lambda T - T) = \ker(\lambda I - T) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Prueba: Sabemos que $\ker T \subseteq H_0(T)$, solo falta probar la inclusión recíproca.

Supongamos que $x \in H_0(T)$. Por un sencillo argumento inductivo,tenemos que

$$(Ty)^n = (T^n y)y^{n-1} \quad \text{para todo } y \in \mathcal{A} \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

De aquí se sigue que

$$\|(aTx)^n\| = \|(Tax)^n\| = \left\|T^n(ax)(ax)^{n-1}\right\| \leq \|a\| \, \|T^n x\| \, \|ax\|^{n-1}$$

para cada $a \in \mathcal{A}$, así el radio espectral del elemento aTx es

$$r(aTx)^n = \lim_{n\to\infty} \|(aTx)^n\|^{1/n} = 0 \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}$$

Esto implica que $Tx \in rad\mathcal{A}$. Ya que $\mathcal{A}$ es semi-simple, $Tx = 0$, así $x \in \ker T$ y consecuentemente, $H_0(T) \subseteq \ker T$ lo que concluye la prueba.

■

Corolario 4.4.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach semi-simple y $T \in M(\mathcal{A})$. Entonces T es quasi-nilpotente si y sólo si $T = 0$.*

Prueba: Supongamos que $T \in M(\mathcal{A})$ es quasi-nilpotente. Combinando el Teorema 1.68 del libro de P. Aiena [1] tenemos $\mathcal{A} = H_0(T) = \ker T$ y así $T = 0$

■

4.5. Teoremas de Weyl para multiplicadores

Para un álgebra de Banach conmutativa semi-simple A, denotemos por $M(A)$ el álgebra de Banach conmutativa de todos lo multiplicadores. El siguiente resultado es claro, ya que ha sido observado en la sección anterior, todo multiplicador sobre un álgebra de Banach semi-simple tiene la propiedad (H).

Teorema 4.5.1 (Aiena - Villafañe [14]) *Suponga que $T \in M(A)$, A un álgebra de Banach conmutativa semi-simple. Entonces el Teorema de Weyl se cumple para T y T^*. Si T^* tiene la SVEP, entonces el Teorema a-Weyl se tiene para T y T^*. En particular si T es descomponible, entonces el Teorema a-Weyl se cumple para T y T^*.*

■

El resultado previo mejora el Corolario 2.16 de [4].

Nota 4.5.2. Note que la suposición de la semi-simplicidad en el Corolario 4.5.1 es crucial, ya que, en general, un multiplicador de un álgebra de Banach no semi-simple, también semi-prima, no satisface la propiedad (H). Para ver esto, sea $\omega := (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia con la propiedad que $0 < \omega_{m+n} \leq \omega_m\omega_n$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, y denotemos por $\ell^1(\omega)$ el espacio de todas las sucesiones complejas $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las cuales

$$\|x\|_\omega := \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |x_n| < \infty.$$

El espacio de Banach $\ell^1(\omega)$ dotado de convolución como multiplicación

$$(x \star y)_n := \sum_{n=0}^{n} x_{n-j}\, y_j$$

es un álgebra conmutativa de Banach. Denotemos por A_ω el ideal maximal de $\ell^1(\omega)$ definido por

$$A_\omega := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\omega) : x_0 = 0\}.$$

El álgebra de Banach A_ω es un dominio integral y así, es semi-prima. Suponga ahora que la sucesión con peso ω satisface la condición

$$\rho_\omega := \lim_{n\to\infty} \omega_n^{1/n} = 0$$

Entonces A_ω es un álgebra radical ([39, Ejemplo 4.1.9]), i.e. coincide con su radical, y así no es semi-simple.

Para todo $a \in A_\omega$ no nulo, sea $T_a(x) := a \star x$, $x \in A_\omega$ el operador de multiplicación por el elemento a. Se ve fácilmente que T_a es quasi-nilpotente, así $H_0(T_a) = A_\omega$. Por otro lado, A_ω es un dominio integral de modo que $\ker T_a = \{0\}$. Luego, T_a no verifica la propiedad (H).

Observe que, $\sigma_a(T_a) = \sigma(T_a) = \{0\}$ y $\pi_{00}^a(T_a) = \varnothing$, de lo cual se ve que T_a satisface el Teorema a-Weyl. Este ejemplo también muestra que en el Corolario 4.5.1 la hipótesis de la semi-simplicidad no es necesaria.

§§§

Recordemos ahora algunos elementos básicos de la clásica teoría de Gelfand de álgebras de Banach conmutativas. Se puede hallar más profundidad al respecto en el libro de Bonsall y Duncan [18]. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa denotemos por $\Delta(A)$ el espacio de todos los ideales regulares maximales de $\mathcal{A}$.

Un *funcional lineal multiplicativo* sobre un álgebra de Banach complejo, es un elemento no nulo m del dual de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, tal que

$$m(xy) = m(x)m(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A},$$

es decir, que m es un homomorfismo no nulo de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$. Se sabe que si $\mathcal{A}$ es conmutativa, los ideales regulares maximales, son precisamente los núcleos de funcionales lineales multiplicativos. De esta forma, $\Delta(\mathcal{A})$ puede ser identificado con el conjunto de las bolas unitarias de $\mathcal{A}^*$ consistentes en los funcionales lineales multiplicativos definidos sobre $\mathcal{A}$. En consecuencia, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa, entonces

$$rad\mathcal{A} = \bigcup_{m \in \Delta(\mathcal{A})} \ker m$$

y de esto, se sigue que $rad\mathcal{A}$ coincide con el conjunto de todos los elementos quasi-nilpotentes de $\mathcal{A}$, ver [18, Corolario 17.7].

En $\Delta(\mathcal{A})$ es posible considerar la llamada *topología de Gelfand*, que es la topología débil* (weak*-topology) sobre la bola unitaria del espacio dual restringido a $\Delta(\mathcal{A})$. El conjunto $\Delta(\mathcal{A})$ dotado de esta topología es un espacio localmente compacto de Hausdorff llamado el *espacio maximal regular* de $\mathcal{A}$. Note que $\Delta(\mathcal{A})$ es compacto con la topología de Gelfand, si el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ tiene unidad, ver Bonsall y Duncan [18, §17].

Consideremos ahora la *transformada de Gelfand* $\widehat{x}$ de $x \in A$, definida por:

$$\widehat{x}(m) := m(x) \quad \text{para cada } m \in \Delta(\mathcal{A}),$$

Un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ se dice *regular*, si para todo subconjunto cerrado E de $\Delta(\mathcal{A})$ en la topología de Gelfand y para todo $m_0 \in \Delta(\mathcal{A}) \setminus E$, existe un $x \in \mathcal{A}$ tal que $\widehat{x}(m_0) = 1$ y $\widehat{x} \equiv 0$ sobre E. Un álgebra conmutativa regular $\mathcal{A}$ se dice que es *Tauberiana*, si el conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ con soporte compacto, es denso (en norma) en $\mathcal{A}$, donde como es usual, el soporte de un elemento $x \in \mathcal{A}$ se define como la clausura en $\Delta(\mathcal{A})$ del conjunto $\{m \in \Delta(\mathcal{A}) : \widehat{x}(m) \neq 0\}$. Note que el grupo algebraico $L^1(G)$, donde G es un grupo Abeliano localmente compacto, es regular y Tauberiana. Otros ejemplos importantes de álgebras de Banach regular y Tauberiana son $L^p(G)$, con $1 \leq p < \infty$ y G un grupo Abeliano compacto, y $C_0(\Omega)$, el álgebra de Banach de las funciones continuas a valores complejos sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto Ω que se anula en infinito, ver Rudin [47].

Teorema 4.5.3 (Aiena - Villafañe [14]) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach Tauberiana regular y semi-simple y $T \in M(\mathcal{A})$. Entonces, el Teorema a-Weyl se tiene para T. Si T es descomponible entonces el Teorema a-Weyl se tiene para T^*.*

Prueba: Si $\mathcal{A}$ es regular y Tauberiana, entonces un multiplicador $T \in M(\mathcal{A})$ con rango cerrado es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo, ver [7, Corolario 4.4], así que $\sigma_a(T) = \sigma(T)$. De esto se sigue que $\pi^a_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Para probar que el Teorema a-Weyl se tiene para T, supongamos que $\sigma_{uf}(T) \cap \pi^a_{00}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \pi_{00}(T) \neq \varnothing$. Sea $\lambda \in \sigma_{uf}(T) \cap \pi^a_{00}(T)$. De la definición de $\pi^a_{00}(T)$ sabemos que $H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)$ es de dimensión finita y así, ya que λ es un punto aislado de $\sigma(T)$, del Teorema 4.2.2 se sigue que $\lambda I - T$ es semi-Fredholm. Por el Teorema 4.3.4 $p(\lambda I - T) < \infty$, de lo cual se obtiene $\alpha(\lambda I - T) \leq \beta(\lambda I - T)$, nuevamente por la proposición 38.5 del libro de Heuser [32]. La última desigualdad, obviamente implica que $\lambda I - T$ es semi-Fredholm superior, lo cual es una contradicción.

De esta forma, $\sigma_{uf}(T) \cap \pi^a_{00}(T) = \varnothing$, así del Teorema 4.3.2, podemos concluir que el Teorema a-Weyl se cumple para T.

La última proposición es clara a partir del Teorema 4.5.1.

■

Debemos notar que la primera parte del Teorema 4.5.3 no pude ser deducida del Corolario 4.5.1, ya que un multiplicador de un álgebra de Banach

Tauberiana regular semi-simple no necesariamente es descomponible. Además, ya que $M(\mathcal{A})$ es una subálgebra cerrada inversa de $L(\mathcal{A})$ entonces,

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda \ \in M(\mathcal{A})$$

para toda f holomorfa definida sobre un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a $\sigma(T)$.

Así, el Teorema 4.5.3 también se aplica para $f(T)$, i.e. el Teorema de a-Weyl se cumple para $f(T)$.

Un ejemplo muy importante de multiplicador es el caso cuando $\mathcal{A}$ es el álgebra de Banach semi-simple $L^1(G)$, el álgebra grupal de un grupo Abeliano localmente compacto G, con la convolución como multiplicación. En efecto, en este caso a cualquier medida de Borel μ sobre G le corresponde un multiplicador T_μ definido por

$$T_\mu(f) := \mu \star f \ \text{ para todo } f \in L^1(G),$$

donde

$$(\mu \star f)(t) := \int_G f(t-s) d\mu(s).$$

Notar que T_μ es, en efecto, un endomorfismo en $L^1(G)$ porque, por el Teorema de Radon-Nikodym, $L^1(G)$ es un ideal del álgebra de Banach $M(G)$ de todas la medidas de Borel regulares a valores complejos y con masa total finita.

El clásico Teorema Helson-Wendel muestra que cada multiplicador es un operador de convolución y el álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A} := L^1(G)$ puede ser identificada con el álgebra de medidas $M(G)$, ver [36, Capítulo 0]. Ya que $L^1(G)$ es regular y Tauberiana, del Teorema 4.5.3, obtenemos el siguiente Corolario:

Corolario 4.5.4 (Aiena - Villafañe [14]) *Sea G un grupo Abeliano localmente compacto y $\mu \in M(G)$. Si T_μ es un operador de convolución sobre el grupo algebraico $L^1(G)$, entonces el Teorema a-Weyl se tiene para T_μ.*

∎

Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se dice que tiene una *base ortogonal* si existe una base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ tal que $e_n e_m = \delta_{nm} e_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Note que, si $\mathcal{A}$ tiene una base ortogonal, entonces $\mathcal{A}$ es conmutativa y semi-simple, ver Proposición 4.8.10 de [39]. Ejemplos de álgebras de Banach con base ortogonal, son las álgebras de sucesiones c_0 y ℓ^p para $1 < p < \infty$, como es usual, dotado del álgebra de operaciones por componentes; el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$, para un p arbitrario $1 < p < \infty$, sobre el grupo círculo $\mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Un ejemplo menos obvio es, para cualquier $1 < p < \infty$ el clásico espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sobre el disco abierto unitario $\mathbb{D}$, de todas las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ para las cuales las integrales $\int_{\mathbb{T}} |f(rt)|^p dm(t)$ son acotadas para $0 < r < 1$, donde m denota la medida de Lebesgue normalizada sobre el círculo unitario. $H^p(\mathbb{D})$ viene a ser un álgebra de Banach con una base ortogonal con respecto al producto

$$(f \star g)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} f(\lambda) g(z\lambda^{-1}) \lambda^{-1} d\lambda, \quad f, g \in H^p(\mathbb{D}),\ |z| < r < 1,$$

donde Γ_r es la frontera de un disco cerrado $\mathbb{D}(0, r)$. Una base ortogonal está dada por una sucesión de polinomios (e_n) definidos por $e_n(z) := z^n$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $n \geq 0$. Ya que esta base es incondicional, entonces el álgebra de multiplicadores de $H^p(\mathbb{D})$ puede ser identificada con ℓ^∞, ver Ejemplo 4.8.9 de [39].

Teorema 4.5.5 (Aiena - Villafañe [14]) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con una base ortogonal y $T \in M(\mathcal{A})$. Entonces el Teorema de a-Weyl se tiene tanto para T como para T^*.*

Prueba: Tenemos $\sigma_a(T) = \sigma(T)$, cf. Proposición 4.8.11 de [39], y razonando como en la prueba del Teorema 4.5.3, se sigue que el Teorema de a-Weyl se cumple para T y T^*. El hecho de que se tenga el Teorema de a-Weyl para T^* se sigue del Corolario 4.5.1, ya que todo multiplicador de un álgebra de Banach con base ortogonal es descomponible, ver Proposición 4.8.11 de [39].

■

Teorema 4.5.6 (Aiena - Villafañe [14]) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $T \in M(\mathcal{A})$ entonces el Teorema de a-Weyl se cumple para T.*

Prueba: Es bien conocido que un álgebra C^* es semi-simple. También en este caso para $T \in M(\mathcal{A})$ tenemos $\sigma_a(T) = \sigma(T)$, ver [38, Corolario 14], y así, razonando como en la prueba del Teorema 4.5.3, se sigue que el Teorema de a-Weyl se tiene para T.

■

Podría ser interesante saber hasta qué punto la condición de ser Tauberiana, puede ser debilitada en el Teorema 4.5.3. En el siguiente resultado vemos que esta condición puede ser relajada bajo ciertas suposiciones adicionales sobre el multiplicador. Observe primero que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach semi-simple conmutativa, todo multiplicador de $\mathcal{A}$ puede ser representado como una función compleja continua y acotada definida sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto $\Delta(\mathcal{A})$. De hecho, ver Proposición 4.3.9 de [39], para todo $T \in M(\mathcal{A})$ existe una única función continua acotada $\widehat{T}$ definida sobre $\Delta(\mathcal{A})$ tal que la ecuación

$$\widehat{Tx}(m) = \widehat{T}(m)\hat{x}(m)$$

se cumple para todo $x \in \mathcal{A}$ y todo $m \in \Delta(\mathcal{A})$. Tomando prestado un término del análisis armónico, un multiplicador T de un álgebra de Banach semi-simple conmutativa, se dice que tiene *espectro natural* si $\sigma(T) = \overline{\widehat{T}(\Delta(\mathcal{A}))}$ (para información sobre estos operadores se puede ver [39, §4.6]).

Teorema 4.5.7 (Aiena - Villafañe [14]) *Suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach semi-simple regular. Entonces, para todo multiplicador $T \in M(\mathcal{A})$ con espectro natural, se cumple el Teorema de a-Weyl.*

Prueba: Es suficiente probar que $\sigma_a(T) = \sigma(T)$ y proceder como en la prueba del Teorema 4.5.3. Note primero que, ya que T tiene la SVEP entonces $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(T) = \sigma_s(T)$, ver proposición 1.3.2 de [39].

Para probar la inclusión opuesta, suponga que $\lambda \notin \sigma_a(T)$. Entonces $\lambda I - T$ es inyectiva y tiene rango cerrado. Trivialmente, $T(\mathcal{A}) \oplus \ker T = T(\mathcal{A})$ es cerrado y así, por Teorema 4.10.15 de [39], $\mathcal{A} = T(\mathcal{A})$, i.e. $\lambda \notin \sigma_s(T) = \sigma(T)$. Luego, $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.

■

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory with applications to multipliers.* Klawer Acad. Publishers. (2004).

[2] P. Aiena, M. T. Biondi, *Some spectral mapping theorem for semi-Browder spectra through local spectral theory.* Rend. Circ. Mat. Palermo. **53** (2004) 165-184.

[3] P. Aiena, M. T. Biondi, F. Villafañe. *Weyl's theorem and Kato spectrum.* Divulgaciones Matemáticas. La Universidad del Zulia. (por aparecer)

[4] P. Aiena, C. Carpintero, *Weyl's theorem, a-Weyl's theorem and single-valued extension property*, (2003). Extracta Math. **20** (2005) no. 1, 25-41.

[5] P. Aiena, C. Carpintero, *Single-valued extension property and semi-Browder spectra*, Acta Sci. Math. (Szeged) **70** (2004), 265-278.

[6] P. Aiena, M. L. Colasante, M. Gonzalez. *Operators which have a closed quasi-nilpotent part*, Proc. Amer. Math. Soc. **130**, (2002) 2701-2710

[7] P. Aiena, K. B. Laursen, *Multipliers with closed range on regular commutative Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 1039-48.

[8] P. Aiena, M. Mbekhta, *Characterization of some classes of operators by means of the Kato decomposition.*, Boll. Un. Mat. It. (1996) **10-A**, 609-21.

[9] P. Aiena, T. L. Miller, M. M. Neumann,(2003). *On the localized single valued extension property*, Math. Proc. Roy. Irish Acad. **104A** (2004) no.1, 17-34.

[10] P. Aiena, O. Monsalve, *Operators which do not have the single valued extension property.* J. Math. Anal. Appl. **250**, (2000), 435-448.

[11] P. Aiena, O. Monsalve,(2001). *The single valued extension property and the generalized Kato decomposition.*, Acta Sci. Math. (Szeged) **201**, 467-77.

[12] P. Aiena, E. Rosas, *The single valued extension property at the points of the aproximate point espectrum.* J. Math. Anal. Appl. **1**, (2003). 180-188.

[13] P. Aiena, F. Villafañe, (2003) *Components of resolvents sets and local spectral theory*, Contemporary Mathematics, **328**, 1-14.

[14] P. Aiena, F. Villafañe, (2005) *Weyl's theorems for some classes of operators*, Integral Equations and Operator Theory, **53**, 453-466.

[15] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for 0<p<1*, Integral Equation Operator Theory. **13**, (1990), 307-315.

[16] W. Ambrose, *Structure theorems for a special class of Banach algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 364-86.

[17] B.A. Barnes, (1989). *Operators which satisfy polynomial growth conditions*, Pacific J. Math. **138**, 209-19.

[18] F. F. Bonsall, J. Duncan, (1973). *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, Berlin.

[19] M. Chō, I. H. Jeon, J. I. Lee, *Spectral and structural properties of log-hyponormal operators.* Glasgow Math. J. **42** (2000), 345-350.

[20] L. A. Coburn. *Weyl's Theorem for nonnormal operators.* Michigan Math. J. **20** (1970), 529-544.

[21] I. Colojoară , C. Foiaş. *Theory of generalized spectral operators.*, Gordonand Breach, New York.

[22] J. B. Conway, *Subnormal operators*, Michigan Math. J. **20** (1970), 529-544.

[23] R. E. Curto, Y. M. Han, *Weyl's theorem, a-Weyl theorem, and local spectral theory*, (2002), J. London Math. Soc. (2) **67** (2003), 499-509.

[24] K. H. Förster. *Über die invarianz eineger räume, die zum operator $T - \lambda A$ gehören.* Arch. Math.**17** (1966), 56-64.

[25] B. P. Duggal, *Quasi-similar p-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory **26**, (1996), 338-345.

[26] N. Dunford. *Spectral theory I. Resolution of the identity.* Pacific J. Math. **2** (1952), 559-614.

[27] N. Dunford. *Spectral operators.* Pacific J. Math. **4** (1954), 321-354.

[28] N. Dunford, J.T. Schwartz. *Linear operators.*, Part I (1967), Part II (1967), Part III (1971), Wiley, New York.

[29] M. A. Goldman, S. N. Kračkovskiĭ. *Invariance of certain subspaces associated with $A - \lambda I$.* Soviet Math. Doklady **5**,(1964), 102-4.

[30] M. A. Goldman, S. N. Kračkovskiĭ. *Behaviour of the space of zero elements with finite-dimensional salient on the zero kernel under perturbations of the operator.* Soviet Math. Doklady **16**, (1975), 370-3.

[31] B. Gramsch, D.C. Lay. *Spectral mapping Theorems for essential spectra.*, Math. Ann. (1971) **192**, 17-32.

[32] H. Heuser, *Functional Analysis.*, Wiley Interscience, Chichester (1982).

[33] R. H. Homer. *Regular extensions and the solubility of operator equations.* Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 415-18.

[34] B. E. Johnson. *An introduction to the theory of centraliziers.* Proc. London Math. Soc. (1964) **14** 299-320.

[35] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag New York (1966).

[36] R. Larsen, *An introduction to the theory of multipliers*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[37] K.B. Laursen, *Operators with finite ascent.*, Pacific J. Math. (1992) **152**, 323-36.

[38] K.B. Laursen, M. Mbekhta, *Closed range multipliers and generalized inverses*, Studia Math. **107** (1993), 127-35.

[39] K.B. Laursen, M.M. Neumann, *An introduction to local spectral theory*, London Math. Soc. Monographs 20, Clarendon Press, Oxford.(2000).

[40] M. Mbekhta. *Sur l'unicité de la décomposition de Kato géneraliseé.* Acta Sci. Math. Soc. **110** (1990), 621-631.

[41] M. Mbekhta. *Ascent, descent et spectre essential quasi-Fredholm*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo (**2**), 46,(1997), 175-196.

[42] M. Mbektha, A. Ouahab. *Perturbation des opérateur s-regulier.* Topics in operator theory, operator algebras and applications, Timisoara (1994). Rom. Acad. Bucharest, 239-249.

[43] V. Müller. *On the regular spectrum.* J. Operator Theory. **31** (1994), 363-380.

[44] K.K. Oberai. *Spectral mapping theorem for essential spectra.*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XXV (1980) **3** 365-73.

[45] V. Rakočević. *Approximate point spectrum and commuting compact perturbations.*, Glasgow Math. J. (1986) **28**, 193-8.

[46] V. Rakočević. *Operators obeying a-Weyl's theorem.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **34** (1989), no. 10, 915-919.

[47] W. Rudin, *Fourier Analysis on groups.* Intrscience Publishers, New York, 1962.

[48] P. Saphar, *Contribution á l'étude des applications linéaries dans un espace de Banach.* Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 363-84.

[49] C. Schmoeger, *On isolated points of the spectrum of a bounded operator.* Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 715-19.

[50] C. Schmoeger. *The spectral mapping theorem for the essential approximate point spectrum.* Colloq. Math. (1997) **74**, 2, 167-76.

[51] M. Ó Searcóid, T. T. West. *Continuity of the generalized kernel and range for semi-Fredholm operators.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**105**, (1989), 513-522.

[52] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators.* Integral Equations Operqator Theory. **34**, (1999) 364-372.

[53] P. Vrbová (1973). *On local spectral properties of operators in Banach spaces.* Czechoslovak Math. J. **23**(98), 483-92.

[54] H. Weyl. *Uber beschrankte quadratiche Formen, deren Differenz vollsteig ist.*, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (1909) **27**, 373-92.

[55] J. Zemánek, *Compressions and the Weyl and Browder spectra.* Proc. Roy. Ir. Acad. (1986) **86A**, 57-62.