Álgebras de Funciones Diferenciables en Variedades Riemannianas

Yenny Carolina Rangel Oliveros

Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de ciencias y tecnología.

Barquisimeto, 2010

Álgebras de Funciones Diferenciables en Variedades Riemannianas

Por

Yenny Carolina Rangel Oliveros

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar a la categoría de Asistente en el escalafón del personal docente e investigación de la UCLA

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de ciencias y tecnología.

Barquisimeto, 2010

Álgebras de Funciones Diferenciables en Variedades Riemannianas

Resumen

La presente Memoria está dedicada fundamentalmente a estudiar dos cuestiones, relacionadas entre sí, en el marco de los espacios de funciones diferenciables en variedades Riemannianas. Por una parte, nos interesamos en un problema de aproximación diferenciable, más concretamente la cuestión de aproximar uniformemente una función Lipschitziana por funciones diferenciables y Lipschitzianas, manteniendo el control sobre las constantes de Lipschitz. Por otro lado, estudiamos un problema de tipo Banach-Stone, más concretamente nos preguntamos si la estructura métrica de una variedad Riemanniana queda determinada por la estructura natural de álgebra de Banach en el espacio de las funciones diferenciables, acotadas y con derivada acotada, definidas sobre la variedad Riemanniana.

Índice general

Introducción

Antecedentes

En el marco clásico de las variedades Riemannianas de dimensión finita, el problema de la regularización y aproximación diferenciable de funciones Lipschitzianas fue estudiado por Greene y Wu en [22], utilizando como herramienta principal la convolución integral con un núcleo adecuado. Este método no puede ser utilizado en variedades de dimensión infinita, ni siquiera en espacios de Hilbert de dimensión infinita, puesto que en este caso no se dispone de una medida adecuada que permita introducir la convolución. Por este motivo, es necesario recurrir a una estrategia diferente, y en concreto nosotros utilizamos la combinación de tres técnicas distintas para obtener el correspondiente resultado de aproximación infinito dimensional. Por una parte, utilizamos las llamadas *convolución infimal y suprimal*, una técnica desarrollada por Lasry y Lions en [29] que permite aproximar uniformemente funciones Lipschitzianas en espacios de Hilbert por funciones de clase C^1 y Lipschitzianas. Este método, sin embargo, no permite obtener mayor regularidad, y en particular no sirve para obtener aproximación por funciones de clase C^2. Para ello, utilizamos un resultado de Moulis [33] en espacios de Hilbert separables, sobre aproximación de funciones C^1 por funciones C^∞ en la *topología fina de primer orden*, es decir, aproximación de la función y la derivada. Finalmente, es necesario utilizar una adecuada partición diferenciable de la unidad para combinar estas aproximaciones locales y obtener el resultado global.

En cuanto a la segunda cuestión, por un teorema de tipo Banach-Stone entendemos un resultado que caracterice la estructura (que puede ser topológica, diferenciable, métrica, etc.) de un cierto espacio X, en términos de determinadas propiedades algebraicas o algebraico-topológicas de la familia $C(X)$ de las funciones reales continuas definidas sobre X, o bien de una subfamilia adecuada de $C(X)$. En este sentido, recordamos que el teorema clásico de Myers-Nakai [[34],[36]] establece que, para una variedad Riemanniana de dimensión finita, la estructura Riemanniana de la variedad queda determinada por la estructura natural de álgebra de Banach en el espacio de las funciones diferenciables, acotadas y con derivada acotada, definidas sobre la variedad. Myers [34] obtuvo este resultado para variedades compactas, y Nakai [36] lo extendió al caso general de variedades de dimensión finita. Una de las principales motivaciones de nuestro trabajo es la extensión de este resultado al caso de variedades Riemannianas de dimensión infinita. Las demostraciones clásicas se basan fuertemente en la compacidad local, y por tanto es necesario desarrollar técnicas diferentes para abordar el problema. Por ello nosotros ponemos el acento en la estructura métrica de la variedad, inducida por la distancia geodésica. En primer lugar, demostramos que esta estructura métrica determina la estructura Riemanniana de la variedad, es decir, obtenemos una extensión del teorema de Myers-Steenrod al caso infinito-dimensional. A continuación, introducimos técnicas semejantes a las desarrolladas por Garrido y Jaramillo en [15] y [16] para el estudio de las álgebras y retículos de funciones Lipschitzianas en espacios métricos, y demostramos que la estructura métrica de la variedad queda determinada por la estructura de álgebra de Banach del correspondiente espacio de funciones.

Estructura de la memoria y aportes originales.

Para poder considerar las correspondientes estructuras métricas, supondremos a lo largo de la Memoria que todas las variedades son conexas (en caso contrario el estudio se reduciría a cada componente conexa).

El contenido de la Memoria es el siguiente. El Capítulo 1 comienza con una breve recopilación de los conceptos y los resultados fundamentales sobre variedades Riemannianas de dimensión infinita que serán utilizados en el trabajo. En ese punto seguimos el libro de Lang [28] como principal referencia. También se incluye en este Capítulo un resultado original, como es la extensión del teorema de Myers-Steenrod al caso infinito-dimensional (Teorema 1.12), que además de su interés propio será utilizado más adelante. El Capítulo 2 está dedicado a la aproximación de funciones Lipschitzianas en variedades Riemannianas. El principal resultado original (Teorema 2.14) asegura en particular que, si M es una variedad Riemanniana separable (posiblemente infinito-dimensional) y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una función infinitamente diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ tal que $|f(p) - g(p)| \leq \epsilon$ para todo $p \in M$ y $Lip(g) \leq Lip(f) + \epsilon$. Como consecuencia de este resultado, obtenemos que toda variedad Riemanniana separable es *uniformemente mesetable* (ver Definición 1.13), un concepto que será fundamental en el capítulo siguiente. En el Capítulo 3 obtenemos la versión infinito-dimensional del teorema de Myers-Nakai (Teorema 3.4): si M es una variedad Riemanniana completa y uniformemente mesetable, entonces la estructura Riemanniana de M está determinada por la estructura natural de álgebra de Banach de $C_b^1(M)$, de las funciones sobre M de clase C^1, acotadas y con derivada acotada.

Publicaciones resultado de la memoria

El capítulo 2 ha sido publicado en la revista Journal of Mathematical Analysis and Applications en el 2007 (ver [6]), y el capítulo 3 ha sido publicado en la revista Bulletin of the London Mathematical Society en el 2009 (ver [17]).

Capítulo 1

Variedades Riemannianas de dimensión infinita

En este capítulo presentamos en primer lugar las definiciones y resultados sobre variedades Riemannianas, básicamente tomadas del libro de Lang [28], que serán utilizadas a lo largo de esta memoria.

En segundo lugar, estableceremos un resultado de Myers-Steenrod [35] para variedades Riemannianas infinito dimensionales. Este resultado liga la estructura Riemanniana de una variedad con su estructura diferenciable, lo cual es de gran importancia para nosotros a la hora de establecer el correspondiente teorema de tipo Banach-Stone para variedades Riemannianas de dimensión infinita.

Finalmente, presentaremos una interesante clase de variedades Riemannianas introducida por Azagra, Ferrera y López-Mesas en [4] las cuales usaremos en los posteriores capítulos; ellas son las denominadas variedades Riemannianas uniformemente mesetables.

Comencemos recordando que una variedad Riemanniana es una variedad diferenciable real en la cual cada espacio tangente se equipa con un producto interior de manera que varíe suavemente punto a punto. Esto permite que se definan varias nociones métricas como longitud de curvas, gradiente de funciones, etc. Formalmente definimos una variedad Riemanniana como sigue,

Definición 1.1. *Diremos que (M, g) es una variedad Riemanniana, si M es una variedad de clase C^∞ modelada sobre un espacio de Hilbert H (posiblemente infinito dimensional), tal que para todo $p \in M$ existe un producto escalar $g(p) = g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente $T_pM \simeq H$ de modo que $\|v\|_p = (\langle v, v \rangle_p)^{\frac{1}{2}}$ define una norma equivalente en T_pM para todo $p \in M$, y la aplicación $p \in M \to g_p \in S^2(M)$ es una sección de clase C^∞ del fibrado $\sigma : S^2(M) \to M$ de las formas bilineales continuas y simétricas.*

Por otro lado, se define el *fibrado tangente* TM de M como la unión disjunta de todos los espacios tangentes con su estructura diferencial natural,

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

Denotaremos a veces los elementos en TM por (p, v) donde $p \in M$ y $v \in T_pM$. Además definimos la *proyección canónica* $\pi : TM \to M$ como $\pi(p, v) = p$.

Si $f : M \to N$ es una función de clase C^1 entre variedades M y N, podemos definir $f_* : TM \to TN$ por $f_*(p, v) = (f(p), df(p)(v))$. Una propiedad interesante es que si $f : M \to N$ y $g : N \to Z$ son funciones diferenciables entre las correspondientes variedades M, N y Z entonces,

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Si una función $f : M \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en $p \in M$, la norma de la diferencial $df(p) \in T_p^*M$ en el punto p se define por

$$\|df(p)\|_p = \sup\{df(p)(v) : v \in T_pM, \|v\|_p \leq 1\}.$$

Dado que $(T_pM, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Hilbert, tenemos una isometría lineal que identifica este espacio y su dual $(T_p^*M, \|\cdot\|_p)$ mediante la aplicación $T_p^*M \ni df(p) \to \nabla f(p) \in T_pM$, donde $df(p)(v) = \langle\nabla f(p), v\rangle_p = g_p(\nabla f(p), v)$, para cada $v \in T_pM$ y $\nabla f(p)$ es llamado el *gradiente* de f en p. Teniéndose además, $\|df(p)\|_p = \|\nabla f(p)\|_p$.

1.1. Líneas geodésicas y función exponencial

Para el estudio de las geodésicas comenzamos con la definición de curva.

Curvas:

Sea M una variedad Riemanniana. Una curva en M será una función $\alpha : J \to M$ de clase C^r (con $r \geq 1$) donde J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Si $\alpha : J \to M$ es una curva entonces su aplicación α_* asociada

$$\alpha_* : TJ = J \times \mathbb{R} \to TM$$

viene dada por $\alpha_*(t, \lambda) = (t, d\alpha(t)(\lambda))$ y se tiene que $\alpha' : J \to TM$ definida por $\alpha'(t) = (t, d\alpha(t)(1))$ es una curva sobre TM. Además si $f : M \to N$ es una función de clase C^1, entonces

$$(f \circ \alpha)' = f_* \circ \alpha'.$$

Sea $\alpha : J \to M$ una curva de clase C^r $(r \geq 1)$. Una *elevación* de α al fibrado tangente TM es cualquier curva diferenciable $\beta : J \to TM$ tal que $\pi \circ \beta = \alpha$, donde $\pi : TM \to M$ denota la proyección canónica de TM sobre M. Esta elevación siempre existe, puesto que al menos la curva α' verifica lo deseado. Es más a la curva α' se le llama la *elevación canónica* de α.

Campos vectoriales:

Un *campo vectorial* sobre M es una función de clase C^1

$$\xi : M \to TM,$$

tal que $\xi(p)$ está en el espacio tangente T_pM para cada $p \in M$, esto es equivalente a decir que $\pi \circ \xi = id$, donde id denota la identidad.

Si ξ es un campo vectorial sobre M y p_0 un punto de M. Una curva integral para el campo vectorial ξ de condición inicial p_0, es una curva

$$\alpha : J \to M,$$

donde J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al cero, tal que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(t) = \xi(\alpha(t))$ para todo $t \in J$. La existencia y unicidad local de estas curvas integrales se garantizan usando una representación local del campo vectorial; la demostración puede verse en detalle en [28] [capítulo IV, pág 65].

Campos vectoriales de segundo orden:

Un campo vectorial de segundo orden sobre M es un campo vectorial G sobre el fibrado tangente TM tal que, si $\pi : TM \to M$ denota la proyección canónica, entonces

$$\pi_* \circ G = id, \quad \text{esto es} \quad \pi_* \circ G(v) = v, \qquad \forall v \in TM,$$

donde $\pi_* : TTM \to TM$ mapea el doble fibrado tangente en el fibrado tangente TM.

Se puede demostrar que un campo vectorial G en M es de segundo orden si, y solamente si, cada curva integral β de G es igual a la elevación canónica de su proyección sobre M, es decir,

$$(\pi \circ \beta)' = \beta.$$

En efecto;

Si G es un campo vectorial de segundo orden y β es una curva integral de G tenemos que

$$(\pi \circ \beta)' = \pi_* \circ \beta' = \pi_* \circ (G \circ \beta) = (\pi_* \circ G) \circ \beta = \beta.$$

Para la otra implicación sea $v \in TM$ y denotemos por β_v la curva integral del campo vectorial G de condición inicial $\beta_v(0) = v$, entonces tenemos que

$$\beta_v = (\pi \circ \beta_v)' = \pi_* \circ \beta_v' = \pi_* \circ (G \circ \beta_v).$$

Luego,

$$v = \beta_v(0) = \pi_*[G \circ \beta_v(0)] = \pi_* \circ G(v),$$

es decir $\pi_* \circ G = id$, por tanto G es un campo vectorial de segundo orden.

Con estos preliminares procedemos ya a definir las curvas geodésicas.

Geodésicas:

Sea $\alpha : J \to M$ una curva en M, definida sobre el intervalo J. Decimos que α es una geodésica con respecto a un campo vectorial de segundo orden G si la curva

$$\alpha' : J \to TM$$

es una curva integral de G.

Puesto que $\pi \circ \alpha' = \alpha$, podemos expresar la condición de geodésica equivalentemente declarando que α satisface la relación

$$\alpha'' = G(\alpha').$$

Esta relación para curvas α en M es llamada *la ecuación diferencial de segundo orden* para la curva α, determinada por G. Obsérvese que de lo anterior se deduce que, si β es una curva integral de G en TM, entonces $\pi \circ \beta$ es una geodésica para el campo vectorial de segundo orden G. Además, notemos que para cada $p \in M$ y para cada $v \in T_pM$, existe (localmente) una única geodésica α tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$

Sprays:

Sea s un número real y $v \in TM$, entonces para algún $p \in M$, $v \in T_pM$ y también $sv \in T_pM$, puesto que T_pM es un espacio vectorial. Denotamos por s_{TM} la función de TM en TM dada por la multiplicación por este escalar. Ahora si consideramos

$$(s_{TM})_* : TTM \to TTM,$$

entonces nuestra función s_{TM} satisface la propiedad

$$(s_{TM})_* \circ s_{TTM} = s_{TTM} \circ (s_{TM})_*,$$

la cual se sigue de la linealidad de s_{TM} sobre cada fibra.

Un campo vectorial de segundo orden $\mathbf{G}$ sobre TM es llamado un *spray* si

$$\mathbf{G}(sv) = (s_{TM})_* s\mathbf{G}(v), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad v \in TM. \tag{1.1}$$

Para visualizar el concepto localmente, consideremos el dominio de una carta U de M. Entonces $TU \simeq U \times H$ donde H es el espacio de Hilbert, $\pi(p, v) = p$, $TTU \simeq (U \times H) \times (H \times H)$, y $(\pi)_*(p, v, u, w) = (p, u)$. Por lo tanto un campo vectorial de segundo orden $\mathbf{G} : TU \to TTU$ puede ser escrito como

$$\mathbf{G}(p, v) = (p, v, v, f(p, v)),$$

donde $f : U \times H \to H$ es una función diferenciable. La condición del spray (1.1) nos da que

$$\begin{aligned}(p, sv, sv, f(p, sv)) &= (p, sv) = (s_{TM})_* s\mathbf{G}(v) = (s_{TM})_*(p, v, sv, sf(p, v)) = \\ &= (p, sv, sv, s^2 f(p, v)),\end{aligned}$$

la cual significa que la función $f(p, \cdot)$ es cuadrática.

Otra manera de ver los sprays es a través de sus curvas integrales. Es decir, si **G** es un campo vectorial de segundo orden, y para cada $v \in TM$, β_v denota la curva integral de **G** con condición inicial $\beta_v(0) = v$, entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

1. **G** es un spray.

2. Un número t está en el dominio de β_{sv} si, y solamente si, st está en el dominio de β_v y entonces
$$\beta_{sv}(t) = s\beta_v(st).$$

3. Si s y t son números reales, st está en el dominio de β_v si, y solamente si, s está en el dominio de β_{tv}, y entonces
$$\pi \circ \beta_{tv}(s) = \pi \circ \beta_v(st).$$

4. Un número t está en el dominio de β_v si, y solamente si, 1 está en el dominio de β_{tv}, y entonces
$$\pi \circ \beta_v(t) = \pi \circ \beta_{tv}(1).$$

Esta equivalencia puede verse en [[28], capítulo IV].

La función exponencial:

Sea **G** un spray en M, y sea D el conjunto de los $v \in TM$ tal que β_v está definida al menos en $[0, 1]$. Es sabido que D es un abierto no vacío en TM y que la aplicación

$$v \to \beta_v(1)$$

es de clase C^1.

Se define la *función exponencial* $\exp : D \to M$ como,

$$\exp(v) = \pi \circ \beta_v(1).$$

Así exp es una función de clase C^1 sobre D que es llamado el dominio de la aplicación *exponencial asociada a* **G**.

Si $p \in M$ y 0_p denota el vector cero en T_pM, entonces de (1.1) haciendo $s = 0$, vemos que $\mathbf{G}(0_p) = 0$. Por lo tanto
$$\exp(0_p) = p.$$

Así nuestra función exponencial coincide con π en la sección transversal del cero, y por lo tanto induce un difeomorfismo de la sección transversal sobre M.

Denotamos por $\exp_p$ la restricción de exp al espacio tangente T_pM

$$\exp_p : D \cap T_pM \to M.$$

A continuación enunciaremos dos propiedades importantes de la función exponencial y cuya demostración pueden verse en [28], página 106 del capítulo IV.

Proposición 1.2. *Sea M una variedad y* **G** *un spray sobre M. Entonces*

$$\exp_p : D \cap T_pM \to M$$

induce un difeomorfismo de clase C^1 en un entorno de 0_p, además $d(\exp_p)(0_p) = id$.

Proposición 1.3. *Sea M una variedad y* **G** *un spray sobre M. Si $v \in D \cap T_pM$ y definimos para $t \in [0,1]$*

$$\alpha(t) = \exp_p(tv),$$

entonces α es una geodésica tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Inversamente, sea $\alpha : J \to M$ una geodésica de clase C^2 definida sobre el intervalo J que contiene al cero, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $\alpha(t) = \exp_p(tv)$.

Es decir, la función $\exp_p$ lleva segmentos que parten de 0_p, en geodésicas que parten de p.

1.2. Estructura de longitud

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Para cada curva $\alpha : [a, b] \to M$ de clase C^1 definimos su longitud $L(\alpha)$ como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt,$$

(nótese que $\alpha'(t)$ es un elemento del espacio tangente a M en el punto $\alpha(t)$; $\|\cdot\|_{\alpha(t)}$ denota la norma resultante del producto interior dado en ese espacio tangente).

Esta longitud depende solamente de la imagen $\alpha([a, b])$ y no de cómo se mueven los puntos $\alpha(t)$. De forma más concreta, si $\varphi : [0, 1] \to [a, b]$ es una reparametrización (es decir, φ es sobreyectiva y monótona) de α entonces se tiene que $L(\alpha \circ \varphi) = L(\alpha)$. Diremos que la curva α está parametrizada por la longitud del arco, cuando $\alpha : [a, b] \to M$ satisface $\|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} = 1$ para todo t, y en este caso se tiene que

$$L(\alpha|_{[r,s]}) = \int_r^s \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt = s - r,$$

para cada $r, s \in [a, b]$.

Con esta definición de longitud, cada variedad Riemanniana M conexa se convierte en un espacio métrico de un modo natural definiendo la distancia $dist(p, q)$ entre los puntos p y q en M como

$$dist(p, q) = \text{ínf}\{L(\alpha) : \alpha \text{ camino de clase } C^1 \text{ a trozos que une } p \text{ y } q \text{ en } M\}.$$

Notemos que para una variedad diferenciable M es equivalente ser conexa que ser conexa por caminos C^1 a trozos. Para esta métrica denotamos la bola abierta en M de centro p y radio $r > 0$ por $B(p,r) = \{q \in M : dist(p,q) < r\}$ y por $B(0_p, r) = \{q \in T_pM : \|q\|_p < r\}$ la bola abierta en T_pM de centro 0_p y radio r.

Entonces *dist* es una métrica en M (denominada g-distancia o distancia geodésica en M) la cual define la misma topología que la dada en M. Diremos que M es una *variedad completa* cuando M dotada con la distancia geodésica, es un espacio métrico completo. De modo que toda variedad Riemanniana tiene asociada de manera natural lo que se llama una estructura de longitud (ver el libro de Burago-Burago-Ivanov [8]).

1.3. Propiedades locales de la función exponencial

Es importante ver que si (M, g) es una variedad Riemanniana la función g nos permite definir un spray $\mathbf{G} = -dK$, donde K es la función

$$K : TM \to \mathbb{R}$$

definida por $K(v) = \frac{1}{2}\|v\|_p^2$, con $v \in T_pM$ para $p \in M$, conocida como energía cinética. Este spray es llamado *spray canónico* y a su vez nos da las geodésicas que son las que denominaremos *geodésicas Riemannianas* y que son las que utilizaremos a lo largo de esta memoria así como la correspondiente función exponencial.

Para describir más propiedades locales de esta función exponencial en una variedad Riemanniana M es necesario introducir la noción de convexidad.

Definición 1.4. *Diremos que un conjunto abierto U de una variedad Riemanniana M es convexo si para cualquier p y q en U, existe una única geodésica (salvo reparametrización) contenida en U que une p y q, tal que la longitud de la geodésica es igual a $dist(p,q)$.*

Notemos que esta noción coincide con la noción de conjunto convexo en un espacio normado (es decir, para cada p y q en U, el segmento que une p con q está totalmente contenido en U).

El siguiente teorema debido a Whitehead (que puede verse en [28], capítulo VIII) nos dice en parte que toda variedad Riemanniana es localmente convexa.

Teorema 1.5 (Whitehead)**.** *Sea M una variedad Riemanniana. Para cada $p \in M$, existe $r > 0$ tal que para todo δ con $0 < \delta \leq r$, la bola abierta $B(p,\delta) = \exp_p B(0_p, \delta)$ es convexa.*

Este teorema nos dice en particular que localmente las geodésicas minimizan la distancia. A continuación vamos a enunciar un resultado en cierto modo recíproco según el cual si la longitud de un camino C^1 a trozos coincide con la distancia entre los extremos entonces dicho camino es una geodésica (salvo reparametrización). Su demostración se puede ver en [[28], capítulo IV].

Proposición 1.6. *Si $\alpha : [a, b] \to M$ es una curva C^1 a trozos parametrizada por el arco. Si $L(\alpha) = dist(\alpha(a), \alpha(b))$ entonces α es una geodésica, (en particular α sería de clase C^1).*

Vamos a finalizar esta sección con un resultado que nos será útil a lo largo de la memoria y que nos proporciona una importante propiedad de la función exponencial.

Teorema 1.7. *Sea M una variedad Riemanniana, $p \in M$. $\forall \epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < \delta < r$ tenemos que $\exp_p : B(0_p, \delta) \to B(p, \delta)$ es un difeomorfismo $(1 + \epsilon)$-biLipschitz (es decir, las aplicaciones $\exp_p : B(0_p, \delta) \to B(p, \delta)$ y $\exp_p^{-1} : B(p, \delta) \to B(0_p, \delta)$ son $(1 + \epsilon)$-Lipschitz).*

Véase [28] para una demostración.

1.4. Isometrías entre variedades Riemannianas

En esta sección veremos como la estructura métrica y la estructura diferenciable sobre cualquier variedad Riemanniana están íntimamente relacionadas. En particular, extenderemos el conocido resultado de Myers-Steenrod [35] al caso de variedades Riemannianas infinito dimensionales.

Definición 1.8. *Una función $h : M \to N$ entre dos variedades Riemannianas M y N, es llamada isometría Riemanniana si h es un difeomorfismo de clase C^1 satisfaciendo,*

$$\langle dh(p)(v), dh(p)(w) \rangle_{h(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

para todo $p \in M$ y para todo $v, w \in T_pM$.

En particular, cuando $h : M \to N$ es una isometría Riemanniana entonces, para todo $p \in M$, la función diferencial $dh(p) : T_pM \to T_pN$ es una isometría lineal. En efecto, para todo $v \in T_pM$, tenemos que,

$$\|dh(p)(v)\|^2_{h(p)} = \langle dh(p)(v), dh(p)(v) \rangle_{h(p)} = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2_p.$$

De lo anterior, se sigue que toda isometría Riemanniana preserva en particular la longitud de caminos de clase C^1 a trozos, y entonces ésta es una isometría métrica con respecto a las respectivas distancias geodésicas. En lo que sigue, veremos que el recíproco también es cierto, esto es, existe un resultado análogo al de Myers-Steenrod para el caso de variedades infinito dimensionales. Pero, previamente necesitamos establecer algunos resultados.

Proposición 1.9. *Sea M una variedad Riemanniana y sea $\Gamma : [a,b] \to M$ un camino continuo tal que $dist(\Gamma(t),\Gamma(t')) = |t - t'|$, para todo $t,t' \in [a,b]$. Entonces Γ es una geodésica.*

Demostración. Para cada $c \in [a,b]$, sea $p = \Gamma(c)$, y sea $U_p = B(p,r)$ el entorno convexo que existe usando el Teorema 1.5 (Whitehead) de la sección 1.3. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\Gamma([c-\epsilon, c+\epsilon] \cap [a,b]) \subset U_p$. Si $[\alpha,\beta] = [c-\epsilon, c+\epsilon] \cap [a,b]$, $p_1 = \Gamma(\alpha)$ y $p_2 = \Gamma(\beta)$, sea $\gamma : [0, dist(p_1,p_2)] \to M$ la única geodésica (parametrizada por la longitud de arco) en U_p de p_1 a p_2. Ya que $dist(p_1,p_2) = \beta - \alpha$ por una simple traslación, podemos suponer que γ está también definida en el intervalo $[\alpha,\beta]$.

Ahora, para todo $q \in \Gamma([\alpha,\beta])$, sea γ_1 y γ_2 las correspondientes curvas geodésicas contenida en U_p uniendo p_1 con q, y q con p_2, respectivamente. Entonces, es claro que la unión de γ_1 y γ_2 define un camino de clase C^1 a trozos cuya longitud es la distancia entre p_1 y p_2, y por lo tanto debe coincidir con γ por la Proposición 1.6. Entonces $q \in \gamma([\alpha,\beta])$. En conclusión, hemos probado que el conjunto $\Gamma([\alpha,\beta])$ está contenido en $\gamma([\alpha,\beta])$ y por lo tanto podemos considerar la función $\theta = \gamma^{-1} \circ \Gamma : [\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$. Puesto que θ es una isometría tal que $\theta(\alpha) = \alpha$ y $\theta(\beta) = \beta$, ésta debe ser la identidad, y por lo tanto, $\gamma = \Gamma$ sobre $[\alpha,\beta]$.

Entonces Γ es localmente un camino geodésico y por lo tanto es una geodésica. □

Observación 1.10. Si en el lema anterior suponemos que $dist(\Gamma(t),\Gamma(t')) = C|t-t'|$, para algún $C > 0$, entonces Γ es una geodésica parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco y con velocidad C (llamaremos velocidad de una curva en un punto, a la norma del vector tangente en dicho punto).

Lema 1.11. *Sea M una variedad Riemanniana, sea $p \in M$. Entonces $\forall v,w \in B(0_p,\delta)$ tenemos que*

$$\lim_{(v,w)\to(0_p,0_p)} \frac{dist(\exp_p v, \exp_p w)}{||v-w||_p} = 1$$

Demostración. Por el Teorema 1.7 tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{1+\epsilon}||v-w||_p \leq dist(\exp_p v, \exp_p w) \leq (1+\epsilon)||v-w||_p, \quad \forall v,w \in B(0_p,\delta).$$

Luego tenemos que

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq \frac{dist(\exp_p v, \exp_p w)}{||v-w||_p} \leq 1+\epsilon,$$

lo que significa que

$$\lim_{(v,w)\to(0_p,0_p)} \frac{dist(\exp_p v, \exp_p w)}{||v-w||_p} = 1$$

□

Con estas herramientas podemos ahora enunciar y demostrar la versión infinito dimensional del teorema clásico de Myers-Steenrod [35].

Teorema 1.12. *Sea $h : M \to N$ una biyección entre dos variedades Riemannianas M y N que preserva las correspondientes distancias geodésicas, entonces h es una isometría Riemanniana.*

Demostración. Sea $p \in M$ y $q = h(p) \in N$. Consideremos $r > 0$ tal que $B(p,r)$ y $B(q,r)$ sean entornos convexos de p y q, respectivamente, y tal que las correspondientes funciones exponenciales $\exp_p : B(0_p, r) \to B(p,r)$ y $\exp_q : B(0_q, r) \to B(q,r)$ sean difeomorfismos de clase C^1. Puesto que h preserva las distancias geodésicas, entonces h es una biyección de $B(p,r)$ sobre $B(q,r)$.

Ahora, para todo $v \in T_pM$ con $v \neq 0$, consideremos la geodésica en $B(p,r)$ que pasa por p con velocidad $\|v\|_p$, esto es $\gamma(t) = \exp_p tv$ definida, para $\frac{-r}{\|v\|_p} < t < \frac{r}{\|v\|_p}$. Entonces, el camino continuo $\Gamma(t) = h(\gamma(t))$ está contenido en $B(q,r)$ y satisface

$$dist(\Gamma(t), \Gamma(t')) = dist(\gamma(t), \gamma(t')) = \|v\|_p \cdot |t - t'|,$$

cuando t y t' están en el intervalo $\left(\frac{-r}{\|v\|_p}, \frac{r}{\|v\|_p}\right)$. Ahora por la Observación 1.10, Γ es una geodésica parametrizada proporcionalmente al arco. En particular, Γ es diferenciable.

Para $v \in T_pM$ con $v \neq 0$, sea $v' \in T_qN$ el vector tangente a Γ en el punto q. Note que Γ es la geodésica en pasa por q con velocidad $\|v'\|_q$, y entonces $\Gamma(t) = \exp_q tv'$, cuando $t \in \left(\frac{-r}{\|v'\|_q}, \frac{r}{\|v'\|_q}\right)$. Puesto que h preserva distancias, ambas geodésicas γ y Γ tienen la misma velocidad, esto es $\|v\|_p = \|v'\|_q$.

En este punto, si definimos $h'(0_p) = 0_q$, y $h'(v) = v'$, entonces hemos definido una función $h' : T_pM \to T_qN$, tal que $\|h'(v)\|_q = \|v\|_p$. Además, es fácil ver que h' es también positivamente homogénea, esto es, $h'(\lambda v) = \lambda h'(v)$, para $\lambda > 0$.

Para ver que h' es lineal usaremos el teorema clásico de Mazur-Ulam [31]. Para ello es suficiente ver que h' es una isometría entre espacios de Banach, esto es, $\|h'(v) - h'(w)\|_q = \|v - w\|_p$, para todo $v, w \in T_pM$. En efecto, sean $v, w \in T_pM$ y sea $\lambda > 0$ tal que $\|\lambda v\|_p < r$ y $\|\lambda w\|_p < r$, entonces usando el Lema 1.11 tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{2\langle v, w\rangle_p}{\|v\|_p\|w\|_p} &= \frac{\|v\|_p^2 + \|w\|_p^2}{\|v\|_p\|w\|_p} - \frac{\|\lambda v - \lambda w\|_p^2}{\|\lambda v\|_p\|\lambda w\|_p} = \\ &= \frac{\|v\|_p^2 + \|w\|_p^2}{\|v\|_p\|w\|_p} - \lim_{t\to 0^+} \frac{dist(\exp_p \lambda v, \exp_p \lambda w)^2}{\|\lambda v\|_p\|\lambda w\|_p}. \end{aligned}$$

Observamos que el lado derecho lo preserva h', por lo tanto para todo $v, w \in T_pM$,

$$\langle h'(v), h'(w)\rangle_q = \langle v, w\rangle_p.$$

Entonces h' preserva el producto escalar, y por lo tanto es una isometría lineal de clase C^1. Finalmente, sobre $B(p,r)$ tenemos que $h = exp_q \circ h' \circ exp_p^{-1}$, y como h' es un difeomorfismo entre T_pM y T_qM, luego h es diferenciable en el punto p, y en efecto $dh(p) = h'$. Lo mismo se hace para h^{-1}. □

1.5. Variedades Uniformemente Mesetables

En esta sección veremos una definición establecida por Azagra, Ferrera y López-Mesas, ver [4], que será utilizada a lo largo de la memoria.

Definición 1.13. *Una variedad Riemanniana M es* uniformemente mesetable *cuando existen dos números reales $R > 1$ (posiblemente grande) y $r > 0$ (posiblemente pequeño) tales que para todo $p \in M$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que:*

1. $b(p) = 1$
2. $b(q) = 0$ *si* $dist(q, p) \geq \delta$
3. $||\nabla b||_\infty \leq R/\delta$.

Ejemplos de variedades Riemannianas uniformemente mesetables son las variedades compactas (ver [4]) y las variedades finito-dimensionales (ver [22]).

Observación 1.14. Es fácil ver que toda variedad Riemanniana M es mesetable, en el sentido de que para todo $p \in M$ y $\delta > 0$, existe una función meseta $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1, con $b(p) = 1$, $b(q) = 0$ para $q \notin B(p, \delta)$ y $||\nabla b||_\infty < \infty$. Sin embargo no está claramente determinado cuáles son las variedades Riemannianas uniformemente mesetables. Se sabe que un espacio de Hilbert es uniformemente mesetable ver [4], y existen muchos ejemplos naturales de variedades Riemannianas que también lo son. De hecho no se conoce ningún ejemplo de variedad Riemanniana que no sea uniformemente mesetable.

El teorema que viene a continuación nos da dos caracterizaciones importantes de las variedades unifomemente mesetables.

Teorema 1.15. *Sea M una variedad Riemanniana. Consideramos las siguientes condiciones:*

1. *Existe una constante $r > 0$ tal que para todo $p \in M$ la aplicación $\exp_p$ está definida en $B(0_p, r) \subset T_pM$, $\exp_p : B(0_p, r) \to B(p, r)$ es un difeomorfismo de clase C^∞, y la función distancia está dada por la expresión*

$$dist(q, p) = || \exp_p^{-1}(q)||_p, \quad \forall q \in B(p, r).$$

2. *Existe una constante $r > 0$ tal que para todo $p \in M$ la función distancia a p, es decir, $q \in M \to dist(q, p)$, es de clase C^∞ en $B(p, r) - \{p\}$.*

3. *M es uniformemente mesetable.*

Entonces (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) En la hipótesis tenemos que $\exp_p^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ de $B(p,r)$ en $B(0_p,r)$, y $\|\cdot\|_p$ es de clase C^∞ en $T_pM - \{0_p\}$, y como $dist(q,p) = \|\exp_p^{-1}(q)\|_p$ para todo $q \in B(p,r)$, tenemos lo deseado.
(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que la función distancia $q \to dist(q,p)$ es C^∞ en $B(p,r)-\{p\}$. Sea $\theta : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de clase C^∞ y Lipschitz tal que $\theta^{-1}(1) = (-\infty, \frac{1}{3}]$ y $\theta^{-1}(0) = [1,\infty)$. Para un punto dado $p \in M$ y un número $\delta \in (0,r)$, definimos $b : M \to [0,1]$ por

$$b(q) = \theta\Big(\frac{1}{\delta} dist(q,p)\Big).$$

Teniendo en consideración el hecho de que la función distancia $q \to dist(q,p)$ es 1-Lipschitz y que la norma de su derivada está acotada por 1 en todos los puntos ver [[4], Proposición 2.15], es fácil comprobar que b satisface las condiciones 1-2-3 de la definición 1.13, para una constante $R = \|\theta'\|_\infty > 1$ que solo depende de la función θ, pero no del punto $p \in M$. □

Podemos observar que si hacemos $b(q) = 1 - \frac{1}{\delta} dist(q, B^c(p,\delta))$, para un punto $p \in M$ dado y un número $\delta \in (0,r)$, donde $B^c(p,\delta)$ denota el complemento de la bola, tenemos que ésta es una función $\frac{1}{\delta}$-Lipschitz. Es decir, en toda variedad Riemanniana podemos construir de manera uniforme funciones meseta que son Lipschitzianas con la misma constante, pero que en general no serán diferenciables. En consecuencia, en aquellas variedades donde podamos aproximar las funciones Lipschitz por funciones de clase C^∞ conservando aproximadamente la constante de Lipschitz, podremos garantizar que éstas son uniformemente mesetables. En el siguiente capítulo veremos que este tipo de aproximación puede realizarse en las variedades separables con lo que podremos deducir que toda variedad separable es en particular uniformemente mesetable.

Capítulo 2

Aproximación diferenciable de funciones Lipschitz sobre variedades Riemannianas

En este capítulo mostraremos que para toda función Lipschitz f definida sobre una variedad Riemanniana separable M (posiblemente de dimensión infinita), para toda función continua $\epsilon : M \to (0, +\infty)$, y para todo número positivo $r > 0$, existe una función Lipschitz $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(p) - g(p)| \leq \epsilon(p)$ para todo $p \in M$, y $Lip(g) \leq Lip(f) + r$, donde $Lip(f)$ y $Lip(g)$ son las constantes de Lipschitz de f y g respectivamente. Con este resultado podemos garantizar que toda variedad Riemanniana separable es uniformemente mesetable. Es importante hacer notar que para demostrar este resultado de aproximación, es necesario previamente establecerlo en el caso particular en el que M es un espacio de Hilbert separable. Debemos señalar que no conocemos si un resultado similar se cumple para espacios de Banach separables infinito-dimensionales que admitan funciones mesetas de clase C^∞.

2.1. Algunos métodos de aproximación

En esta sección vamos a presentar algunas de las herramientas que nos serán de utilidad para obtener los deseados resultados de aproximación.

Convolución integral:

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define la convolución integral de f con g como la función:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Por otro lado, si para una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definimos la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ por

$$f_k(x) = f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_k(x - y)dy,$$

donde las funciones $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^∞, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$ y $sop(\varphi_k) \subset B(0, \frac{1}{k})$ (estas funciones φ_k se conocen con el nombre de *núcleos de convolución*) tenemos que, dado $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $k \geq N$.

Este método de aproximación diferenciable tiene muchas ventajas sobre otros procedimientos, puesto que la convolución integral preserva muchas de las propiedades geométricas que f pueda tener, tal como convexidad o la Lipschitzianidad. Es decir, si f es K-Lipschitz entonces f_k es K-Lipschitz también.

Para variedades Riemannianas finito-dimensionales, Greene y Wu [22] usaron un refinamiento de este procedimiento de convolución integral para obtener resultados muy útiles sobre aproximación diferenciable de funciones Lipschitz o convexas definidas sobre una variedad Riemanniana. Desafortunadamente, el método de convolución integral falla en dimensión infinita, debido a la falta de una medida adecuada como la de Lebesgue, y en su lugar han sido empleados otros métodos.

Convolución infimal:

A continuación vamos a dar la definición y algunas propiedades básicas de la convolución infimal de dos funciones las cuales pueden verse en detalle en el trabajo de D. Azagra [2].

Definición 2.1. *Sean $f, g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, donde E es un espacio normado. Se define la convolución infimal o suma epigráfica, de f y g por*

$$f *_{\text{ínf}} g(v) = \text{ínf}\{f(w) + g(v - w) : w \in E\}, \quad \forall v \in E.$$

Análogamente, si $f, g : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, se define la suma hipográfica de f y g por

$$f *_{hip} g(v) = \text{ínf}\ \{f(w) - g(v - w) : w \in E\}, \quad \forall w \in E.$$

Para una función $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se define el epigrafo de f por

$$epi\ f = \{(v, t) \in E \times (-\infty, \infty] : t \geq f(v)\}$$

y el epigrafo estricto de f por

$$epi_s\ f = \{(v, t) \in E \times (-\infty, \infty] : t > f(v)\}.$$

Por otro lado si $C, D \subset E$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ se denotan por

$$C + D = \{v + w : v \in C, w \in D\} \ \ y \quad \lambda C = \{\lambda v : v \in C\}.$$

Para una función $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se define el *argumento mínimo* como

$$argmin(f) = \{v \in E : f(v) = \text{ínf}\ \ f(E)\}.$$

Observaciones 2.2. Recordemos lo siguiente:

1) $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es convexa si $f(tv + (1-t)w) \leq tf(v) + (1-t)f(w)$, para todo $v, w \in E$ y para todo $t \in [0,1]$.

2) $f : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es cóncava si $-f$ es convexa.

3) f es afín si f es cóncava y convexa a la vez, es decir, $f(tv+(1-t)w) = tf(v)+(1-t)f(w)$ para todo $v, w \in E$, y para todo $t \in [0,1]$.

4) f es convexa si, y solamente si, el conjunto *epi* f es convexo.

A continuación enunciaremos las propiedades más elementales de la convolución infimal de dos funciones.

Proposición 2.3. *Sean $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, entonces:*

(1) $(f *_{\text{ínf}} g) *_{\text{ínf}} h = f *_{\text{ínf}} (g *_{\text{ínf}} h)$.

(2) $f *_{\text{ínf}} g = g *_{\text{ínf}} f$.

(3) $epi_s\,(f *_{\text{ínf}} g) = epi_s\, f + epi_s\, g$.

(4) argmin f + argmin $g \subset$ argmin $(f *_{\text{ínf}} g)$, es decir, si v minimiza a f en E y w minimiza a g en E, entonces $v + w$ minimiza $f *_{\text{ínf}} g$.

(5) Si f y g son convexas, entonces $f *_{\text{ínf}} g$ es convexa.

(6) Si f es cóncava, entonces $f *_{\text{ínf}} g$ es cóncava para toda g.

(7) Si f es afín y g es convexa, entonces $f *_{\text{ínf}} g$ es afín.

Demostración. Comenzamos con (1):

$$\begin{aligned}
(f *_{\text{ínf}} g) *_{\text{ínf}} h(v) &= \inf_{u\in E}\{f *_{\text{ínf}} g(u) + h(v-u)\} \\
&= \inf_{u\in E}\Big\{ \inf_{w\in E}\{f(w) + g(u-w)\} + h(v-u)\Big\} \\
&= \inf_{u\in E}\Big\{ \inf_{w\in E}\{f(w) + g(u-w) + h(v-u)\}\Big\} \\
&= \inf_{u,w\in E}\Big\{f(w) + g(u-w) + h(v-u)\Big\} \\
&= \inf_{w\in E}\Big\{ \inf_{u\in E}\{f(w) + g(u-w) + h(v-u)\}\Big\} \\
&= \inf_{w\in E}\Big\{f(w) + \inf_{u\in E}\{g(u) + h(v-u-w)\}\Big\} \\
&= \inf_{w\in E}\Big\{f(w) + (g *_{\text{ínf}} h)(v-w)\Big\} \\
&= f *_{\text{ínf}} (g *_{\text{ínf}} h)(v).
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar (2):

$$\begin{aligned}
f *_{\text{ínf}} g(v) &= \inf_{w\in E}\{f(w) + g(v-w)\} \\
&= \inf_{w\in E}\{g(w) + f(v-w)\} \\
&= g *_{\text{ínf}} f(v)
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar (3):
Primero vamos a demostrar que $epi_s\,(f *_{\text{ínf}} g) \subset epi_s\, f + epi_s\, g$. Sea $(v,t) \in epi_s\,(f *_{\text{ínf}} g)$ entonces $t > (f *_{\text{ínf}} g)(v)$, por lo tanto existe t' tal que $t > t' > m = \text{ínf}_{u\in E}\{f(u) + g(v-u)\}$. Así, existe $u \in E$ tal que $m \leq f(u) + g(v-u) < t' < t$. Entonces

$$(v,t) = (u, t' - g(v-u)) + (v-u, g(v-u) + t - t'),$$

donde $(u, t' - g(v-u)) \in epi_s\, f$ (puesto que $f(u) < t' - g(v-u)$) y $(v-u, g(v-u)+t-t') \in epi_s\, g$ (puesto que $t > t'$), luego $(v,t) \in epi_s\, f + epi_s\, g$.

Para demostrar que $epi_s\, f + epi_s\, g \subset epi_s\,(f *_{\text{ínf}} g)$. Sea $(v,t) \in epi_s\, f + epi_s\, g$ entonces $(v,t) = (v_1,t_1) + (v_2,t_2)$ donde $f(v_1) < t_1,\ g(v_2) < t_2,\ t = t_1 + t_2,\ v = v_1 + v_2$; luego

$$t = t_1 + t_2 > f(v_1) + g(v_2) = f(v_1) + g(v - v_1) \geq \inf_{u\in E}\{f(u) + g(v-u)\} = f *_{\text{ínf}} g(v).$$

Entonces, $t > f *_{\text{ínf}} g(v)$ y por lo tanto $(v,t) \in epi_s\,(f *_{\text{ínf}} g)$.

Vamos a demostrar (4):
Si v minimiza f en E y w minimiza g en E, entonces para todo $v_1, v_2 \in E$ tenemos que $f(v) + g(w) \leq f(v_1) + g(v_2)$, luego para todo $u \in E$ se tiene

$$\begin{aligned}
f *_{\text{ínf}} g(v+w) &= \text{ínf}\{f(v_1) + g(v_2) : v_1 + v_2 = v + w\} \\
&\leq f(v) + g(w) \leq \text{ínf}\{f(v_1) + g(v_2) : v_1 + v_2 = u\} \\
&= f *_{\text{ínf}} g(u),
\end{aligned}$$

es decir, $v_1 + v_2$ minimiza a $f *_{\text{ínf}} g$ en E.

Vamos a demostrar (5):
Para ello necesitamos el siguiente lema,

Lema 2.4. *Sea E un espacio normado, y sea $G : E\times E \to \mathbb{R}$ convexa en $E\times E$; definamos $\psi : E \to \mathbb{R}$ por $\psi(v) = \text{ínf}_{u\in E}\ G(v,u)$. Entonces ψ es convexa en E.*

Demostración. Sean $v, w \in E$ y sea $\epsilon > 0$. Elijamos $v_1, w_1 \in E$ tales que $\psi(v) + \epsilon \geq G(v, v_1)$ y $\psi(w) + \epsilon \geq H(w, w_1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(tv + (1-t)w) &= \inf_{u\in E} G(tv + (1-t)w, u) \\
&\leq G(tv + (1-t)w, tv_1 + (1-t)w_1) \\
&\leq tG(v, v_1) + (1-t)G(w, w_1) \\
&\leq t(\psi(v) + \epsilon) + (1-t)(\psi(w) + \epsilon) \\
&= t\psi(v) + (1-t)\psi(w) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, $\psi(tv + (1-t)w) \leq t\psi(v) + (1-t)\psi(w)$; y esto es válido para todo $v, w \in E$ y para todo $t \in [0, 1]$. Por lo tanto ψ es convexa. □

Siguiendo ahora con la demostración de (5), consideremos $G : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $G(v, w) = f(w) + g(v - w)$. G es convexa en $E \times E$ puesto que

$$\begin{aligned}
G[t(v, w) &+ (1-t)(v_1, w_1)] = G[tv + (1-t)v_1, tw + (1-t)w_1] \\
&= f(tw + (1-t)w_1) + g(tv + (1-t)v_1 - tw - (1-t)w_1) \\
&= f(tw + (1-t)w_1) + g(t(v - w) + (1-t)(v_1 - w_1)) \\
&\leq tf(w) + (1-t)f(w_1) + tg(v - w) + (1-t)g(v_1 - w_1) \\
&= t[f(w) + g(v - w)] + (1-t)[f(w_1) + g(v_1 - w_1)] \\
&= tG(v, w) + (1-t)G(v_1, w_1).
\end{aligned}$$

Entonces por el lema anterior tenemos que $f *_{\text{ínf}} g(v) = \text{ínf}_{w\in E}\, G(v, w)$ es convexa en E.

Vamos a demostrar (6):
Supongamos que f es cóncava y g es cualquier función. Entonces, para cada $u \in E$, la función $v \to G_u(v) = g(u) + f(v - u)$ es cóncava (por serlo f), y como el ínfimo de una familia de funciones cóncavas es una función cóncava, obtenemos que la función $v \to f *_{\text{ínf}} g(v) = \text{ínf}_{u\in E}\, G_u(v)$ es cóncava.

Vamos a demostrar (7):
Si f es afín y g es cóncava entonces, por (5) $f *_{\text{ínf}} g$ es convexa, y por (6) $f *_{\text{ínf}} g$ es cóncava. Luego, $f *_{\text{ínf}} g$ es cóncava y a la vez convexa, es decir, $f *_{\text{ínf}} g$ es afín. □

Observación 2.5. Naturalmente, pueden demostrarse enunciados análogos para la suma hipográfica de dos funciones. Téngase en cuenta que $f *_{\text{hip}} g = -(-f) *_{\text{ínf}} (-g)$.

La propiedad (3) anterior revela el significado geométrico de la convolución infimal de dos funciones: intuitivamente convolucionar dos funciones f y g equivale a sumar sus epigrafos, $epi_s\, f$ y $epi_s\, g$, para obtener el epigrafo de la convolución $f *_{\text{ínf}} g$; la "corteza" inferior de este conjunto suma $epi_s\, f + epi_s\, g$ es precisamente la gráfica de $f *_{\text{ínf}} g$. Teniendo en cuenta esta propiedad y haciendo unos cuantos dibujos uno puede convencerse de que si f es una función cualquiera y g es una función suave con la forma de una norma al cuadrado, entonces $f *_{\text{ínf}} g$ es una función más o menos aproximada a f pero con la propiedad de que no tiene picos apuntando hacia abajo. Es decir, la convolución infimal de una función con otra que es una norma al cuadrado tiene un efecto *regularizador inferiormente* sobre la primera, a la cual se aproxima. Si esta función *regularizada inferiormente* se suma hipográficamente ahora con una función que sea la opuesta de una norma al cuadrado, obtenemos una función que está *regularizada superiormente* (es decir, no tiene "picos"que apuntan hacia arriba) y, cabe esperar, mantiene esa regularidad superior de su progenitora; a la vez que sigue estando más o menos aproximada a la función f original.

Las propiedades (5), (6) y (7) (conservación de la convexidad y de la concavidad por $*_{\text{ínf}}$) hacen de la convolución infimal una herramienta particularmente interesante en el análisis convexo. La propiedad (4), junto con el ya señalado efecto regularizador de la convolución infimal, hacen que la misma tenga gran utilidad en problemas de minimización y optimización.

A continuación vamos a dar la siguiente definición la cual se usa para establecer el teorema de Lasry y Lions que es de gran utilidad para poder establecer la aproximación de una función Lipschitz definida en un espacio de Hilbert por otra función Lipschitz de clase C^∞ de constantes de Lipschitz aproximadamente iguales.

Definición 2.6. *Sea $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, donde E es un espacio normado. Se dice que f está minorada cuadráticamente si existe $c > 0$ tal que $f(v) \geq -\frac{c}{2}\left(1 + \|v\|^2\right)$.*

Definición 2.7. *Sean E un espacio normado, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\lambda > 0$. Se define la regularización Moreau-Yosida de f por*

$$f_\lambda(v) = inf_{u \in E}\Big\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v - u\|^2\Big\}, \forall v \in E.$$

Es decir, $f_\lambda = f *_{\text{ínf}} \frac{1}{2\lambda}\| \cdot \|^2$. Análogamente, suponiendo $f : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $\mu > 0$ se define la regularización hipográfica Moreau-Yosida de f por

$$f^\mu(v) = sup_{u \in E}\Big\{f(u) - \frac{1}{2\mu}\|v - u\|^2\Big\}, \forall v \in E.$$

Es decir, $f^\mu = f *_{\text{hip}} \left(-\frac{1}{2\mu}\| \cdot \|^2\right)$.

Más general, dados un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, $p \in [1, +\infty)$ y $\lambda > 0$ puede definirse la *epi-regularización de índice p* de una función $f : E \to (-\infty, +\infty]$ por $f *_{\text{ínf}} \frac{1}{\lambda p}\|\cdot\|^p$, y también la correspondiente *hipo-regularización de índice p* para una función $f : E \to [-\infty, +\infty)$ por $f *_{\text{hip}} \left(-\frac{1}{\lambda p}\|\cdot\|^p\right)$. Las propiedades generales de estas funciones son análogas para todo $p \in (1, +\infty)$, y un poco diferentes para $p = 1$, aquí solo veremos las propiedades para $p = 2$.

Proposición 2.8. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado, y sea* $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Entonces:*
(1) $f_\lambda \leq f$, *para todo* $\lambda > 0$.

(2) Si $0 < \lambda' < \lambda$ *entonces* $f_\lambda \leq f_{\lambda'} \leq f$.

(3) $f^\mu = -(-f_\mu)$, *para todo* $\mu > 0$.

(4) $\text{ínf}_{v \in E} f_\lambda(v) = \text{ínf}_{v \in E} f(v)$. *De hecho, cualquier mínimo de* f *es mínimo de* f_λ*; y si* f *es semicontinua inferiormente, entonces cualquier mínimo de* f_λ *es también mínimo de* f*; es decir,*

$$\text{argmin}\, f_\lambda = \text{argmin}\, f,$$

si f *es semicontinua inferiormente.*

(5) $(f_\lambda)_\mu = f_{\lambda+\mu}$, *si* $\lambda > 0$ *y* $\mu < \frac{1}{2}$.

(6) Si f *es convexa, entonces* f_λ *es convexa.*

(7) Si f *es cóncava, entonces* f_λ *es cóncava.*

(8) Si f *es afín, entonces* f_λ *es afín.*

(9) Si f *es invariante por un conjunto de isometrías de E, entonces* f_λ *también lo es. Es decir, si* $\{T_i : i \in I\}$ *es un conjunto de isometrías de E tal que* $f(T_i v) = f(v)$ *para todo* $i \in I$, *entonces* $f_\lambda(T_i v) = f_\lambda(v)$ *para todo* $i \in I$.

Demostración. (1), (2) y (3) son inmediatas. Vamos a demostrar (4):

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\inf_{v\in E} f_\lambda(v) &= \inf_{v\in E}\inf_{u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\right\} = \inf_{v,u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\right\} = \\
&= \inf_{u\in E}\inf_{v\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\right\} = \inf_{u\in E} f(u),
\end{aligned}$$

luego $\text{ínf}_{v \in E} f_\lambda(v) = \text{ínf}_{v \in E} f(v)$. Sea v mínimo de f; como 0 es un mínimo de $g = \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2$, la Proposición 2.3 (4) nos dice que $v+0 = v$ es mínimo de $f *_{\text{ínf}} g = f_\lambda$. Luego, *argmin* $f \subset$ *argmin* f_λ.

Supongamos además que f es semicontinua inferiormente, y sea v un mínimo de f_λ; veamos que v es también mínimo de f. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $f(u_n) + \frac{1}{2\lambda}\|v - u_n\|^2 \leq f_\lambda(v) + \frac{1}{n}$; entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\lambda}\|v - u_n\|^2 &\leq f_\lambda(v) + \frac{1}{n} - f(u_n) \\ &\leq f_\lambda(v) + \frac{1}{n} - \inf f = \frac{1}{n} \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$; luego, $u_n \to v$ y como f es semicontinua inferiormente obtenemos que

$$\begin{aligned} f(v) &\leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(f_\lambda(v) + \frac{1}{n}\right) \\ &= f_\lambda(v) = \inf f_\lambda = \inf f. \end{aligned}$$

Entonces, $f(v) \leq \inf f$ implica que $f(v) = \inf f$, por lo tanto v es un mínimo de f. Así *argmin* $f_\lambda \subset$ *argmin* f, si f es semicontinua inferiormente, y en consecuencia *argmin* $f_\lambda =$ *argmin* f en este caso.

Vamos a demostrar (5):

$$\begin{aligned} (f_\lambda)_\mu(v) &= \inf_{w\in E}\left\{\frac{1}{2\mu}\|v - w\|^2 + \inf_{u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w - u\|^2\right\}\right\} \\ &= \inf_{w\in E}\inf_{u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\mu}\|v - w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w - u\|^2\right\} \\ &= \inf_{u\in E}\inf_{w\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\mu}\|v - w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w - u\|^2\right\} \\ &= \inf_{u\in E}\left\{f(u) + \inf_{w\in E}\left\{\frac{1}{2\mu}\|v - w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w - u\|^2\right\}\right\} \\ &= \inf_{u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\mu}\|v - \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v)\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v) - u\|^2\right\} \\ &= \inf_{u\in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\|v - u\|^2\right\} \\ &= f_{\lambda+\mu}(v), \end{aligned}$$

ya que el ínfimo $\inf_{w\in E}\left\{\frac{1}{2\mu}\|v - w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w - u\|^2\right\}$ se alcanza en el punto $y = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v)$.

(6), (7) y (8) son consecuencia de (5), (6) y (7) de la Proposición 2.3, teniendo en cuenta que $g = \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2$ es convexa y que $f *_{\inf} g = f_\lambda$.

Vamos a demostrar (9):

$$\begin{aligned}
f_\lambda(T_i v) &= \inf_{u\in E}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|T_i v-u\|^2\right\}\\
&= \inf_{u\in E}\left\{f(T_i u)+\frac{1}{2\lambda}\|T_i(v-u)\|^2\right\}\\
&= \inf_{u\in E}\left\{f(T_i u)+\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\right\}\\
&= \inf_{u\in E}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\right\}\\
&= f_\lambda(v).
\end{aligned}$$

□

Es importante notar que si f es K-Lipschitz entonces f_λ es K-Lipschitz (análogamente para f^μ). Esto es una consecuencia inmediata del hecho que las operaciones de las convoluciones inf- y sup- (con la norma al cuadrado o con cualquier otro núcleo) preservan las constantes de Lipschitz de las funciones a ser regularizadas En efecto,

Proposición 2.9. *Sea E un espacio normado y $\lambda > 0$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es K-Lipschitz sobre E entonces la función*

$$f_\lambda(v) = \inf_{w\in E}\{f(w)+\frac{1}{2\lambda}\|v-w\|^2\}$$

es K-Lipschitz sobre E.

Demostración. Note que

$$\inf_{w\in E}\{f(w)+\frac{1}{2\lambda}\|v-w\|^2\} = \inf_{w\in E}\{f(v-w)+\frac{1}{2\lambda}\|w\|^2\},$$

entonces la función f_λ puede ser redefinida como

$$f_\lambda(v') = \inf_{w\in E}\{f(v'-w)+\frac{1}{2\lambda}\|w\|^2\}. \tag{2.1}$$

La función f_λ es en la formula (2.1) un ínfimo de funciones continuas K-Lipschitz, entonces esta es continua y K-Lipschitz. □

Obviamente, el resultado anterior es cierto para la función f^μ con $\mu > 0$ definida por

$$f^\mu(v) = \sup_{u\in E}\{h(u)-\frac{1}{2\mu}\|v-u\|^2\}.$$

2.2. Aproximación de funciones Lipschitz definidas en un espacio de Hilbert

Habiendo estudiado en la sección anterior las propiedades de la regularización de Moreau-Yosida procedemos a introducir ahora la regularización de Lasry y Lions. Esta técnica de regularización es un método explícito que conserva la convexidad, concavidad o afinidad de las funciones que se pretenden regularizar.

El resultado clave es que para cualquier función f minorada cuadráticamente, su sup-inf convolución con normas al cuadrado $(f_\lambda)^\mu$ es una función de clase $C^{1,1}$. Recordemos que una función se dice de clase $C^{1,1}$ cuando es de clase C^1 y su derivada es Lipschitziana.

A continuación enunciamos el teorema de Lasry y Lions cuya demostración puede verse en [29].

Teorema 2.10 (Lasry y Lions)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que existe $c > 0$ con $f(v) \geq -\frac{c}{2}(1 + \|v\|^2)$ para todo $v \in H$. Entonces la función $(f_\lambda)^\mu : H \to \mathbb{R}$ definida por*

$$(f_\lambda)^\mu(v) = sup_{w \in H} inf_{u \in H}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\}$$

verifica que $(f_\lambda)^\mu \in C^{1,1}(H)$, para $0 < \mu < \lambda < \frac{1}{c}$. Además si f es uniformemente continua y acotada en H, se tiene que $(f_\lambda)^\mu$ converge uniformemente a f cuando $0 < \mu < \lambda \to 0$.

Es importante notar que por la Proposición 2.9 tenemos que si f es K-Lipschitz entonces $(f_\lambda)^\mu$ es también K-Lipschitz sobre H.

A continuación vamos a demostrar nuestro resultado de aproximación de una función Lipschitz y acotada definida en un espacio de Hilbert separable. Este resultado lo demostraremos combinando la técnica de regularización de Lasry y Lions de convoluciones sup-inf que acabamos de ver, con el siguiente resultado de Moulis cuya demostración puede verse en [33].

Teorema 2.11 (Moulis)**.** *Sea U un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert separable H. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, y sea $\epsilon : U \to (0, +\infty)$ una función continua. Entonces existe una función $g : U \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(v) - g(v)| \leq \epsilon(v)$ y $\|df(v) - dg(v)\| \leq \epsilon(v)$ para todo $v \in U$.*

Ahora procedemos a enunciar y demostrar el resultado central de esta sección.

Teorema 2.12. *Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert separable, sea $f : H \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y acotada, y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una función $g : H \to \mathbb{R}$ Lipschitz de clase C^∞ tal que $|f(v) - g(v)| \leq \epsilon$ para todo $v \in H$, y $Lip(g) \leq Lip(f) + \epsilon$.*

Demostración. Denotemos $K = Lip(f)$. Puesto que f es Lipschitz y acotada sobre H (en particular está minorada cuadráticamente), por el Teorema 2.10, las funciones

$$v \mapsto (f_\lambda)^\mu(v) := \sup_{w\in H} \inf_{u\in H} \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2 \right\}$$

son de clase $C^{1,1}$ sobre H y convergen a f uniformemente sobre H cuando $0 < \mu < \lambda \to 0$. Entonces escojamos λ y μ suficientemente pequeños con $0 < \mu < \lambda$ tal que

$$|(f_\lambda)^\mu(v) - f(v)| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.2}$$

para todo $v \in H$.

Es importante observar que por la Proposición 2.9 tenemos que $(f_\lambda)^\mu$ es K-Lipschitz. Por otro lado, puesto que $(f_\lambda)^\mu$ es de clase C^1, podemos usar el Teorema 2.11 para encontrar una función $g : H \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$|g(v) - (f_\lambda)^\mu(v)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \|dg(v) - d(f_\lambda)^\mu(v)\| \leq \epsilon \tag{2.3}$$

para todo $v \in H$. Combinando (2.2) y (2.3) obtenemos que $|f(v) - g(v)| \leq \epsilon$ y además

$$\mathrm{Lip}(g) = \sup_{v\in H} \|dg(v)\| \leq \sup_{v\in H} \|d(f_\lambda)^\mu)(v)\| + \epsilon \leq K + \epsilon = \mathrm{Lip}(f) + \epsilon.$$

□

2.3. Aproximación de funciones Lipschitz definidas en una variedad Riemanniana separable

Ahora establecemos el resultado principal de este capítulo, cuya demostración combina los métodos de aproximación más importantes que conocemos hasta ahora, convoluciones integrales, convoluciones infimales y particiones de la unidad. Recordemos que una partición de la unidad sobre una variedad M consiste en un cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de M y una familia de funciones $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ satisfaciendo lo siguiente:

1. Para todo $p \in M$ tenemos que $\psi_i(p) \geq 0$.

2. El soporte de ψ_i está contenido en U_i.

3. El cubrimiento $\{U_i\}$ es localmente finito.

4. Para cada punto $p \in M$ tenemos que $\sum \psi_i(p) = 1$.

Además haremos uso del hecho que una función localmente K-Lipschitz definida sobre una variedad Riemanniana M es globalmente K-Lipschitz. En efecto,

Lema 2.13. *Sea M una variedad Riemanniana. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es K-Lipschitz si y solamente si f es localmente K-Lipschitz, es decir, para cada punto $p \in M$ existe un entorno U_p de p tal que para todo $p_1, p_2 \in U_p$*

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq Kdist(p_1, p_2).$$

Demostración. Es claro que una función globalmente K-Lipschitz lo es localmente. Para mostrar el inverso, recuerde que para cualquier $p_1, p_2 \in M$ tenemos que $dist(p_1, p_2) = \text{ínf}_\alpha L(\alpha)$, donde $\alpha : [0, 1] \to M$ es un camino de clase C^1 a trozos con $\alpha(0) = p_1$ y $\alpha(1) = p_2$. Así para establecer la Lipschitzianidad global de f de constante de Lipschitz K necesitamos probar que para cualquier camino α en M se tiene que $|f(p_1) - f(p_2)| \leq K \cdot L(\alpha)$.

Por el lema de Lebesgue elijamos una partición de $[0, 1]$ por puntos $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_m = 1$ tal que para todo $i = 0, ..., m - 1$, $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ está contenida en un entorno U_p para algún $p \in M$ y

$$|f(\alpha(t_i)) - f(\alpha(t_{i+1}))| \leq Kdist(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$

Tal elección es posible porque los U_p forman un cubrimiento abierto de M. Entonces

$$\begin{aligned} |f(p_1) - f(p_2)| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |f(\alpha(t_i)) - f(\alpha(t_{i+1}))| \\ &\leq K \sum_{i=0}^{m-1} dist(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})) \leq KL(\alpha). \end{aligned}$$

□

A continuación enunciamos y demostramos el teorema central de este capítulo cuyo esquema de la demostración es el siguiente. Primero obtendremos usando cartas exponenciales y convoluciones infimales, aproximaciones locales de f por funciones Lipschitz de clase C^1. Luego, regularizaremos estas aproximaciones locales recurriendo a un resultado de Moulis [33] y finalmente pegaremos todas las aproximaciones con la ayuda de una partición de la unidad especialmente construída.

Teorema 2.14. *Sea M una variedad Riemanniana separable, sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, sea $\epsilon : M \to (0, +\infty)$ una función continua, y $r > 0$ un número positivo. Entonces existe una función Lipschitz $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(p) - g(p)| \leq \epsilon(p)$ para todo $p \in M$, y $Lip(g) \leq Lip(f) + r$.*

Demostración. Denotaremos $K = Lip(f)$ para simplificar notación.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon(p) \leq r/2$ para todo $p \in M$ (si reemplazamos ϵ con la función continua $p \mapsto \text{mín}\{\epsilon(p), r/2\}$). Además, fijemos cualquier número $\epsilon'(p) = \epsilon' > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$(K(1+\epsilon') + \epsilon')(1+\epsilon') < K + \frac{r}{2}.$$

Ahora, para todo $p \in M$, elegimos $\delta_p > 0$ suficientemente pequeño tal que la función exponencial sea un difeomorfismo $(1+\epsilon')$-biLipschitz de clase C^∞ de la bola $B(0_p, 3\delta_p) \subset T_pM$ sobre la bola $B(p, 3\delta_p) \subset M$ (ver Teorema 1.7). Por otro lado, por la continuidad de f y ϵ, podemos suponer que δ_p también es suficientemente pequeña tal que $\epsilon(q) \geq \epsilon(p)/2$ y $|f(q) - f(p)| \leq \epsilon(p)/2$ para todo $q \in B(p, 3\delta_p)$.

Puesto que M es separable podemos tomar una sucesión (p_n) de puntos en M tal que

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(p_n, \delta_n),$$

donde denotamos $\delta_n = \delta_{p_n}$, y también $\epsilon_n = \epsilon(p_n)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos una función $f_n : B(0_{p_n}, 3\delta_n) \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(v) = f(\exp_{p_n}(v)),$$

el cual es $K(1+\epsilon')$-Lipschitz. Podemos extender f_n a todo $T_{p_n}M$ definiendo

$$\hat{f}_n(v) = \inf_{w \in B(0_{p_n}, 3\delta_{p_n})} \{f_n(w) + K(1+\epsilon')\|v - w\|_p\}.$$

Luego, $\hat{f}_n$ es una extensión Lipschitz de f_n a todo $T_{p_n}M$, con la misma constante de Lipschitz $K(1+\epsilon')$. La función $\hat{f}_n$ es acotada sobre conjuntos acotados (porque es Lipschitz) pero no es acotada en todo $T_{p_n}M$. Sin embargo podemos modificar $\hat{f}_n$ fuera de la bola $B(0_{p_n}, 4\delta_n)$ de manera que esta sea acotada en todo $T_{p_n}M$. Para ello, sea $C = \sup\{|\hat{f}_n(v)| + 1 : v \in B(0_{p_n}, 4\delta_n)\}$, y definamos $\tilde{f}_n : T_{p_n}M \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}_n(v) = \begin{cases} -C & \text{si } \hat{f}_n(v) \leq -C, \\ \hat{f}_n(v) & \text{si } -C \leq \hat{f}_n(v) \leq C, \\ +C & \text{si } C \leq \hat{f}_n(v). \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{f}_n$ es acotada en todo $T_{p_n}M$ y tiene la misma constante de Lipschitz de $\hat{f}_n$, el cual es menor o igual a $K(1+\epsilon')$. Esto es, $\tilde{f}_n$ es una extensión acotada $K(1+\epsilon')$-Lipschitz de f_n en $T_{p_n}M$.

En lo que sigue vamos a construir una partición de la unidad diferenciable de clase C^∞ subordinada al cubrimiento $\{B(p_n, 2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M y a estimar las constantes de Lipschitz de cada una de las funciones de esta partición. Tomemos una función diferenciable $\theta_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que $\theta_n = 1$ sobre $(-\infty, \delta_n]$ y $\theta_n = 0$ sobre $[2\delta_n, +\infty)$, y definamos

$$\varphi_n(p) = \begin{cases} \theta_n(\|\exp_{p_n}^{-1}(p)\|_{p_n}), & \text{si } p \in B(p_n, 3\delta_n); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que cada una de las funciones $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ son de clase C^∞ y Lipschitz, y satisface que $\varphi_n = 1$ sobre la bola $B(p_n, \delta_n)$, y $\varphi_n = 0$ sobre $M \setminus B(p_n, 2\delta_n)$.

Definamos las funciones $\psi_k =: M \to [0,1]$ por

$$\psi_k = \varphi_k \prod_{j<k} (1 - \varphi_j).$$

Es claro que ψ_k is C_k-Lipschitz, donde

$$C_k := \sum_{j \leq k} \mathrm{Lip}(\varphi_j),$$

y es fácil ver que

1. Para cada $p \in M$, si $k = k(p) = \min\{j : p \in B(p_j, \delta_j)\}$ entonces, como $1 - \psi_k = 0$ sobre $B(p_k, \delta_k)$, tenemos que $B(p_k, \delta_k)$ es un entorno de p que intersecta una cantidad finita de los soportes de las funciones ψ_ℓ. Es decir, $\mathrm{sop}(\psi_\ell) \cap B(p_k, \delta_k) = \emptyset$ para todo $\ell > k$, y $\mathrm{sop}(\psi_k) \subset B(p_k, 2\delta_k)$;

2. $\sum_k \psi_k = 1$;

Esto es, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición diferenciable de la unidad de clase C^∞ subordinada al cubrimiento $\{B(p_n, 2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M.

Ahora, por el Teorema 2.12 podemos encontrar una función diferenciable $g_n : T_{p_n}M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$|g_n(v) - \tilde{f}_n(v)| \leq \frac{\epsilon_n}{2^{n+2}(C_n + 1)}, \tag{2.4}$$

para todo $v \in T_{p_n}M$, y

$$\mathrm{Lip}(g_n) \leq \mathrm{Lip}(\tilde{f}_n) + \epsilon' \leq K(1 + \epsilon') + \epsilon'. \tag{2.5}$$

Estamos listos para definir nuestra aproximación $g : M \to \mathbb{R}$ por

$$g(p) = \sum_n \psi_n(p) g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$$

para cualquier $p \in M$. Observe que si $p \in B(p_n, 3\delta_n)$, entonces como la exponencial $\exp_{p_n}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ de $B(0_{p_n}, 3\delta_n)$ sobre $B(p_n, 3\delta_n)$, la expresión $\psi_n(p) g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ está bien definida y es diferenciable de clase C^∞ sobre $B(p_n, 3\delta_n)$. Además, si $p \notin B(p_n, 2\delta_n) \supset \mathrm{sop}(\psi_n)$ entonces $\psi_n(p) = 0$. Luego, para cualquier $p \notin B(p_n, 3\delta_n)$, supondremos que las expresiones $\psi_n(p) g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ y $g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ se anulan. Por lo tanto, g está bien definida y es diferenciable de clase C^∞ sobre M.

Veamos que g y $\mathrm{Lip}(g)$ aproxima a f y a $\mathrm{Lip}(f)$, respectivamente, como es requerido.

Fijemos cualquier $p \in M$, y sea $k = k(p) = \text{mín}\{j : p \in B(p_j, \delta_j)\}$, entonces tenemos que $\psi_\ell = 0$ sobre $B(p_k, \delta_k)$ para todo $\ell > k$, y estimemos $|f - g|$. Para simplificar notación denotemos $v_m = \exp_{p_m}^{-1}(p) \in T_{p_m}M$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
|g(p) - f(p)| &= \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p) g_m(\exp_{p_m}^{-1}(p)) - f(p)\right| \\
&= \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p)\left[g_m(v_m) - f(p)\right]\right| = \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p)\left[g_m(v_m) - \tilde{f}_m(v_m)\right]\right| \\
&\leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p) \frac{\epsilon_m}{2^{m+2}(C_m + 1)} \leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)\frac{\epsilon_m}{2} \leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)\epsilon(p) \\
&= \sum_{m} \psi_m(p)\epsilon(p) = \epsilon(p).
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\text{Lip}(g) \leq K + r$. Como g está definida sobre una variedad Riemanniana, por el Lema 2.13 es suficiente mostrar que g es localmente $(K + r)$-Lipschitz. Tomemos un punto $a \in M$, y definamos $k = k(a) = \text{mín}\{j : a \in B(p_j, \delta_j)\}$, tal que $\text{sop}(\psi_\ell) \cap B(p_k, \delta_k) = \emptyset$ para todo $\ell > k$. Sea también

$$\delta_a = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_k, \delta_k - d(a, p_k)\},$$

y

$$F_{p,q} = \{m \in \{1, ..., k\} : B(p_m, 2\delta_m) \cap \{p, q\} \neq \emptyset\}.$$

Es fácil ver que si $p, q \in B(a, \delta_a)$, entonces:

(i) Para todo $m \in \{1, ..., k\}$, tenemos que $p \in B(p_m, 3\delta_m)$ si $q \in B(p_m, 2\delta_m)$; y simétricamente $q \in B(p_m, 3\delta_m)$ si $p \in B(p_m, 2\delta_m)$. Consecuentemente, para todo $m \in F_{p,q}$ tenemos que $p, q \in B(p_m, 3\delta_m)$; en particular, si $m \in F_{p,q}$, entonces $v_m := \exp_{p_m}^{-1}(p)$ y $w_m := \exp_{p_m}^{-1}(q)$ están bien definidos, y tenemos que

$$|g_m(v_m) - g_m(w_m)| \leq (K + r/2)d(p, q) \tag{2.6}$$

De hecho, usando (2.5) y la elección de ϵ' se tiene que,

$$\begin{aligned}
|g_m(v_m) - g_m(w_m)| &\leq (K(1 + \epsilon') + \epsilon')\| \exp_{p_m}^{-1}(p) - \exp_{p_m}^{-1}(q)\|_{p_m} \\
&\leq (K(1 + \epsilon') + \epsilon')(1 + \epsilon')d(p, q) \\
&\leq (K + r/2)d(p, q).
\end{aligned}$$

(ii) Si $m \in \mathbb{N} \setminus F_{p,q}$ entonces $\psi_m(p) = 0 = \psi_m(q)$ (porque $\text{sop}(\psi_m) \subset B(p_m, 2\delta_m)$ y $\text{sop}(\psi_\ell) \cap B(p_k, \delta_k) = \emptyset$ para todo $\ell > k$).

Por lo tanto, para $p, q \in B(a, \delta_a)$ (con la notación $v_m = \exp_{p_m}^{-1}(p)$ y $w_m = \exp_{p_m}^{-1}(q)$) se sigue que,

- $g(p) = \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p), \quad g(q) = \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q),$
- $1 = \sum_{m \in F_{p,q}} \psi_m(p) = \sum_{m \in F_{p,q}} \psi_m(q)$, y
- $|g_m(v_m) - g_m(w_m)| \le (K(1+\epsilon') + \epsilon')(1+\epsilon')d(p,q)$, si $m \in F_{p,q}$.

Fijemos $p, q \in B(a, \delta_a)$. Puesto que $\sum_{m \in F_{p,q}} f(p)(\psi_m(p) - \psi_m(q)) = 0$, tenemos

$$g(p) - g(q) = \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p) - \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q) =$$
$$\sum_{m \in F_{p,q}} (g_m(v_m) - f(p))(\psi_m(p) - \psi_m(q)) + \sum_{m \in F_{p,q}} (g_m(v_m) - g_m(w_m))\psi_m(q)$$

Por lo tanto, usando (2.4), (2.6), y el hecho de que ψ_m es C_m-Lipschitz, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|g(p) - g(q)\right| \le \\
&\sum_{m \in F_{p,q}} \left|g_m(v_m) - f(p)\right| . \left|\psi_m(p) - \psi_m(q)\right| + \sum_{m \in F_{p,q}} \left|g_m(v_m) - g_m(w_m)\right|\psi_m(q) \le \\
&\sum_{m \le k} \frac{\epsilon_m}{2^{m+2}(C_m + 1)} C_m d(p,q) + \sum_{m \le k} (K + r/2) d(p,q)\psi_m(q) \le \\
&\sum_{m \le k} \frac{\epsilon(a)}{2^{m+1}} d(p,q) + (K + r/2)d(p,q) \le (K + r)d(p,q),
\end{aligned}$$

porque $\sum_{m \le k} \frac{\epsilon(a)}{2^{m+1}} \le \epsilon(a) \le r/2$. Esto muestra que g es localmente ($\mathrm{Lip}(f) + r$)-Lipschitz lo cual concluye la demostración. □

Una consecuencia inmediata de este teorema y que tiene gran interés en el estudio de las variedades Riemannianas uniformemente mesetables que hemos definido en el capítulo 1 es la siguiente:

Corolario 2.15. *Toda variedad Riemanniana separable es uniformemente mesetable.*

Demostración. Sean $R > 1$, $0 < \delta < r$, y $p \in M$ dados, y consideremos la función $f : M \to [0, 1]$ definida por

$$f(q) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta} dist(q, p), & \text{si } dist(q, p) \le \delta; \\ 0, & \text{si } dist(q, p) \ge \delta. \end{cases}$$

Es claro que f es $\frac{1}{\delta}$-Lipschitz y satisface que $f(p) = 1$, y $f = 0$ fuera de $B(p, \delta)$. Por el Teorema 2.14, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una función $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|g(q) - f(q)| \leq \epsilon$ para todo $q \in M$ y $\mathrm{Lip}(g) \leq \frac{1}{\delta} + \epsilon$. Ahora tomemos una función $\theta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de clase C^∞ tal que

(i) $\theta(t) = 0$ para $t \leq \epsilon$;

(ii) $\theta(t) = 1$ para $t \geq 1 - \epsilon$, y

(iii) $\mathrm{Lip}(\theta) \leq \frac{1+\epsilon}{1-2\epsilon}$,

y definamos $b(q) = \theta(g(q))$ para todo $q \in M$. Entonces es claro que $b(p) = 1$, $b(q) = 0$ si $d(q, p) \geq \delta$, y

$$\sup_{q \in M} \|db(q)\|_q = \mathrm{Lip}(b) \leq \mathrm{Lip}(\theta)\mathrm{Lip}(g) \leq \frac{1+\epsilon}{1-2\epsilon}\left(\frac{1}{\delta} + \epsilon\right) \leq \frac{R}{\delta}$$

si ϵ es elegido suficientemente pequeño. □

Capítulo 3

Álgebras de funciones diferenciables en variedades Riemannianas

El objetivo de este capítulo es obtener un teorema del tipo Banach-Stone para variedades Riemannianas (infinito dimensionales). Esto es, un resultado donde la estructura Riemanniana de una variedad M pueda ser caracterizada de la estructura topológica y algebráica de la familia de funciones reales $C_b^1(M)$.

3.1. El espacio de Estructura del álgebra $C_b^1(M)$

Sea $C_b^1(M)$ el álgebra de todas las funciones acotadas de clase C^1 sobre M que tienen derivada acotada, esto es, $||\nabla f||_\infty = \sup_{p\in M} ||\nabla f(p)||_p < \infty$. No es difícil verificar (ver [4]) que $C_b^1(M)$ es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$||f||_{C_b^1} = \sup\{||f||_\infty, ||\nabla f||_\infty\}.$$

Con esta norma, se tiene la desigualdad:

$$||f \cdot g||_{C_b^1} \leq 2||f||_{C_b^1} \cdot ||g||_{C_b^1}.$$

Por lo tanto, obtenemos que $C_b^1(M)$ es un *álgebra de Banach* si lo dotamos de la norma $2|| \cdot ||_{C_b^1}$.

Además, puesto que toda $f \in C_b^1(M)$ tiene derivada acotada entonces, del teorema del valor medio en variedades Riemannianas infinito dimensionales (ver [4]), se sigue que f es una función Lipschitz con respecto a la distancia geodésica. Inversamente, si $f \in C^1(M)$ es Lipschitz, entonces $f \in C_b^1(M)$ (ver Teorema 2.14 y Proposición 2.15 en [4]). También se sigue que si $f \in C_b^1(M)$ entonces $||\nabla f||_\infty = Lip(f)$, donde $Lip(f)$ denota como es habitual la constante de Lipschitz de f.

En esta sección construiremos el espacio de estructura asociado al álgebra $C_b^1(M)$, en un camino análogo como en Isbell [25] que está hecho para álgebras de funciones continuas, o en Garrido y Jaramillo [15] que esta hecho para reticulos de funciones continuas.

Comencemos haciendo notar que $C^1_b(M)$ es un álgebra con unidad que separa puntos y conjuntos cerrados de M, y esto implica, en particular, que M está dotada con la topología débil dada por $C^1_b(M)$. Por otro lado, $C^1_b(M)$ es cerrada bajo inversión acotada, es decir, si $f \in C^1_b(M)$ y $f \geq 1$, entonces $\frac{1}{f} \in C^1_b(M)$.

Diremos que $\varphi : C^1_b(M) \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebras si satisface:

1. $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$,

2. $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$,

para todo $f, g \in C^1_b(M)$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Note que un homomorfismo de álgebra φ es no nulo si, y solamente si, $\varphi(1) = 1$. Además, todo homomorfismo de álgebra φ es *positivo*, esto es, $\varphi(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$. En efecto, cuando f y $\frac{1}{f}$ están en $C^1_b(M)$, entonces $\varphi(f \cdot (\frac{1}{f})) = 1$ lo que implica que $\varphi(f) \neq 0$ y $\varphi(\frac{1}{f}) = \frac{1}{\varphi(f)}$. Así, si suponemos que φ no es positivo, entonces existe $f \geq 0$ con $\varphi(f) < 0$. La función $g = f - \varphi(f) \geq -\varphi(f) > 0$, satisface $g \in C^1_b(M)$, $\frac{1}{g} \in C^1_b(M)$ y $\varphi(g) = 0$, lo que es una contradicción.

Definimos el espacio de estructura $H(C^1_b(M))$ como el conjunto de todos los homomorfismos de álgebras $\varphi : C^1_b(M) \to \mathbb{R}$, considerado como un subespacio topológico del producto $\mathbb{R}^{C^1_b(M)}$. Fácilmente se puede verificar que $H(C^1_b(M))$ es cerrado en $\mathbb{R}^{C^1_b(M)}$. Además, como todas las funciones sobre $C^1_b(M)$ son acotadas, $H(C^1_b(M))$ es en particular un espacio compacto.

Ahora, consideremos la función natural δ, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta \quad : \quad & M \to H(C^1_b(M)) \\ & p \rightsquigarrow \delta(p) = \delta_p, \end{aligned}$$

donde δ_p es el homomorfismo definido por:

$$\begin{aligned} \delta_p \quad : \quad & C^1_b(M) \to \mathbb{R} \\ & f \rightsquigarrow \delta_p(f) = f(p). \end{aligned}$$

Claramente, δ es una función continua. Y se tiene además que el subespacio $\delta(M)$ es denso en $H(C^1_b(M))$. En efecto, dados $\varphi \in H(C^1_b(M))$, $f_1, ..., f_n \in C^1_b(M)$, y $\epsilon > 0$, existe algún $p \in M$ tal que $|\delta_p(f_i) - \varphi(f_i)| < \epsilon$, para todo $i = 1, ..., n$. De lo contrario la función $g = \sum_{i=1}^{n}(f_i - \varphi(f_i))^2 \in C^1_b(M)$ satisface $g \geq \epsilon$ y $\varphi(g) = 0$, y esto es imposible ya que φ es positivo.

Finalmente del hecho de que $C^1_b(M)$ separa puntos y conjuntos cerrados de M, se sigue que δ es una aplicación abierta en su imagen, por lo que podemos decir que δ es una inmersión topológica, y en consecuencia $H(C^1_b(M))$ puede ser considerado como una compactificación de M. Además, esta compactificación tiene la propiedad de que toda $f \in C^1_b(M)$ admite una extensión continua a $H(C^1_b(M))$, sin más que definir $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$, para toda $\varphi \in H(C^1_b(M))$. Note que esta extensión $\hat{f}$ coincide sobre $H(C^1_b(M))$ con la correspondiente función proyección $\pi_f : \mathbb{R}^{C^1_b(M)} \to \mathbb{R}$.

La siguiente proposición nos muestra que para una clase especial de variedades Riemannianas M, aquellas que son completas y uniformemente mesetables, los puntos de M pueden ser topológicamente distinguidos en $H(C_b^1(M))$.

Teorema 3.1. *Sea M una variedad Riemanniana completa uniformemente mesetable, y sea $\varphi \in H(C_b^1(M))$. Entonces φ tiene una base de entornos numerable en $H(C_b^1(M))$ si, y sólo si, $\varphi \in M$.*

Demostración. Primero supongamos que $\varphi \in H(C_b^1(M)) - M$ tiene una base de entornos numerable. Ya que M es denso en $H(C_b^1(M))$ existe una sucesión (p_n) en M convergiendo a φ. Puesto que $\varphi \notin M$, la completitud de M implica que (p_n) no tiene ninguna subsucesión de Cauchy y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión (p_{n_k}) de (p_n) tal que $dist(p_{n_k}, p_{n_j}) \geq \epsilon, \quad \forall k \neq j$.

Puesto que M es uniformemente mesetable existe $R > 1$ tal que, para algún $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$, podemos construir una sucesión $(b_k)_k$ de funciones mesetas de clase C^1 satisfaciendo para cada $k \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones

1. $b_k(p_{n_{2k}}) = 1$.
2. $b_k(q) = 0$ si $dist(q, p_{n_{2k}}) \geq \delta$.
3. $\|\nabla b_k\|_\infty \leq \frac{R}{\delta}$.

Ahora, tomando $f = \sum_n b_{2n}$ tenemos que $f \in C_b^1(M),\ \ f(p_{n_{2k}}) = 1$ y $f(p_{n_{2k+1}}) = 0$, para todo k. Por lo tanto la función extensión $\hat{f}$ definida en todo $H(C_b^1(M))$ toma los valores 1 sobre $\mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}A$ y 0 sobre $\mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}B$, siendo $A = \{p_{n_{2k}} : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{p_{n_{2k+1}} : k \in \mathbb{N}\}$ y donde $\mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}$ denota la clausura en $H(C_b^1(M))$. Pero esto es una contradicción ya que $\varphi \in \mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}A \cap \mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}B$.

Para el recíproco, si $\varphi \in M$, considere la bola abierta B_n en M con centro en φ y radio $\frac{1}{n}$. Entonces, es fácil ver que la familia $\{\mathrm{cl}_{H(C_b^1(M))}B_n\}$ es la base de entornos numerable requerida. □

3.2. Un teorema de Banach-Stone para variedades Riemannianas

En esta sección veremos como la estructura de álgebra normada de $C_b^1(M)$ determina la estructura de variedad Riemanniana de M. En este camino probaremos un teorema del tipo Banach-Stone en el contexto de variedades Riemannianas infinito dimensionales que, en particular, generaliza el correspondiente resultado dado por Myers en [34] para variedades compactas, así como el resultado de Nakai en [36] para variedades Riemannianas finito dimensionales.

Para demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.2. *Sea H un espacio de Hilbert y $r > 0$. Para todo $\epsilon > 0$, existe una funcion $\Phi : H \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\Phi(0) = r$
2. $sop\,(\Phi) \subset B(0, r)$
3. $||\Phi||_\infty \leq r$
4. $Lip\,(\Phi) \leq 1 + \epsilon$
5. $\Phi \in C^1_b(H)$
6. $||v|| \leq r - \Phi(v) + \epsilon$, *cuando* $v \in B(0, r)$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, consideremos una función $\theta : \mathbb{R} \to [0, r]$ de clase C^∞ tal que:

(i) $\theta = 0$ sobre un entorno del intervalo $(-\infty, 0]$

(ii) $\theta = r$ sobre un entorno del intervalo $[r, +\infty)$

(iii) $|t - \theta(t)| \leq \epsilon$ para todo $t \in [0, r]$

(iv) $|\theta'(t)| \leq 1 + \epsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Entonces, es suficiente definir $\Phi(v) = r - \theta(||v||)$, para $v \in H$. □

El siguiente resultado nos muestra que si un operador de composición de $C^1_b(N)$ a $C^1_b(M)$ es una isometría lineal, entonces este es inducido por una isometría métrica de M a N.

Teorema 3.3. *Sean M y N variedades Riemannianas y $h : M \to N$ una aplicación tal que el homomorfismo $T : C^1_b(N) \to C^1_b(M)$ dado por $T(f) = f \circ h$ es continuo. Entonces h es $||T||$-Lipschitz para las correspondientes distancias geodésicas.*

Demostración. Primero, notemos que h es continua puesto que M y N están dotadas de la topología débil dada por $C^1_b(M)$ y $C^1_b(N)$, respectivamente, (ver Sección 3.1). Ahora para ver que h es Lipschitz, sean $q_1, q_2 \in M$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $\sigma : [0, 1] \to M$ una curva C^1 a trozos en M de q_1 a q_2, con $L(\sigma) \leq dist(q_1, q_2) + \epsilon$. Puesto que h es continua entonces $\hat{\sigma} = h \circ \sigma : [0, 1] \to N$ es una curva continua en N, de $h(p_1)$ a $h(p_2)$. Entonces, para todo $p \in \hat{\sigma}([0, 1])$, sea $0 < r_p < 1$ tal que $exp_p : B(0_p, r_p) \to B(p, r_p)$ es un difeomorfismo $(1 + \epsilon)$ bi-Lipschitz.

A continuación, para cada $t \in [0, 1]$ consideremos un intervalo abierto I_t (en $[0, 1]$) conteniendo a t y tal que $\hat{\sigma}(I_t) \subset B(\hat{\sigma}(t), r_{\hat{\sigma}(t)})$. Usando un argumento de conexidad podemos extraer del cubrimiento abierto $\{I_t\}_{t\in[0,1]}$ una *cadena simple* que conecta al 0 con el

1, esto es, una sucesión finita $I_{t_1},...,I_{t_m}$ tal que $0 = t_1 < ... < t_m = 1$, y $I_{t_j} \cap I_{t_k} \neq \emptyset$ si, y solamente si, $|j-k| \leq 1$. Note que $I_{t_1} \cup ... \cup I_{t_m} = [0,1]$. Es fácil ver que, para cada $i = 1, ..., (m-1)$, podemos elegir un punto $s_i \in I_{t_i} \cap I_{t_{i+1}}$, con $t_i < s_i < t_{i+1}$.

Ahora aplicamos el Lema 3.2 para cada r_p y con el mismo $\frac{\epsilon}{2m}$, obteniendo las correspondientes funciones $\Phi \in C_b^1(H)$. Si definimos la función $f_p = \Phi_p \circ exp_p^{-1}$ sobre $B(p, r_p)$ y $f_p = 0$ sobre $N \setminus B(p, r_p)$, entonces tenemos que:

1. $f_p \in C_b^1(N)$.
2. $f_p(p) = r_p$.
3. $\|f_p\|_\infty \leq r_p \leq 1$.
4. $Lip\,(f_p) \leq (1+\epsilon)^2$.
5. $dist(p,z) \leq f_p(p) - f_p(z) + \frac{\epsilon}{2m}$, siempre y cuando $z \in B(p, r_p)$.

Además, de la continuidad del operador T, se sigue que,

$$Lip\,(f_p \circ h) \leq \|f_p \circ h\|_{C_b^1(M)} = \|T(f_p)\|_{C_b^1(M)} \leq \|T\| \cdot \|f_p\|_{C_b^1(N)} \leq \|T\| \cdot (1+\epsilon)^2.$$

Finalmente, si denotamos $p_i = h(\sigma(t_i))$ para $i = 1, ..., m$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
dist(h(q_1), h(q_2)) &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \{dist(h(\sigma(t_i)), h(\sigma(s_i))) + dist(h(\sigma(s_i)), h(\sigma(t_{i+1})))\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \Big\{f_{p_i}(p_i) - f_{p_i}(h(\sigma(s_i))) + f_{p_{i+1}}(p_{i+1}) - f_{p_{i+1}}(h(\sigma(s_i))) + \frac{\epsilon}{m}\Big\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \Big\{Lip\,(f_{p_i} \circ h) \cdot dist(\sigma(t_i), \sigma(s_i)) \\
&\quad + Lip\,(f_{p_{i+1}} \circ h) \cdot dist(\sigma(t_{i+1}), \sigma(s_i)) + \frac{\epsilon}{m}\Big\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \|T\|(1+\epsilon)^2 \Big\{dist(\sigma(t_i), \sigma(s_i)) + dist(\sigma(s_i), \sigma(t_{i+1}))\Big\} + \epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \|T\|(1+\epsilon)^2 \cdot L(\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}) + \epsilon \\
&= \|T\|(1+\epsilon)^2 \cdot L(\sigma) + \epsilon \\
&\leq \|T\|(1+\epsilon)^2 \cdot (dist(q_1, q_2) + \epsilon) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Y, por lo tanto h es $\|T\|$-Lipschitz. □

Con estas herramientas estamos en condiciones de demostrar el resultado central de esta sección. Recordemos que dos álgebras normadas $(A, \|\cdot\|_A)$ y $(B, \|\cdot\|_B)$ se dicen equivalentes si existe un isomorfismo de álgebras $T : A \to B$ que es una isometría, es decir, $\|T(a)\|_B = \|a\|_A$, para todo $a \in A$.

Teorema 3.4. *Sean M y N variedades Riemannianas completas (posiblemente infinito dimensionales) uniformemente mesetables. Entonces M y N son equivalentes como variedades Riemannianas, si y solamente si, $C_b^1(N)$ y $C_b^1(M)$ son equivalentes como álgebras normadas. Además, todo isomorfismo isométrico $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ es de la forma $T(f) = f \circ h$ donde $h : M \to N$ es una isometría Riemanniana.*

Demostración. **Primera implicación:** Supongamos que h es una isometría Riemanniana. Entonces es fácil comprobar que $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ definida por $T(f) = f \circ h$ es una isometría de álgebras normadas, por lo tanto, $C_b^1(N)$ y $C_b^1(M)$ son equivalentes como álgebras normadas.

Segunda implicación: Supongamos que $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ es una isometría entre álgebras normadas. Entonces, considere la función $h : H(C_b^1(M)) \to H(C_b^1(N))$ entre los espacios de estructura dada por $h(\varphi) = \varphi \circ T$, para todo $\varphi \in H(C_b^1(M))$. Entonces h es una biyección y en efecto h es un homeomorfismo ya que $\pi_f \circ h = \pi_{T(f)}$, para todo $f \in C_b^1(M)$, donde π_f y $\pi_{T(f)}$ denotan las funciones proyección sobre los correspondientes espacios productos.

Ahora, aplicando el Teorema 3.1, obtenemos que un punto $\varphi \in H(C_b^1(M))$ tiene una base numerable en $H(C_b^1(M))$ si, y solamente si, $\varphi \in M$ y lo mismo se cumple en la variedad completa N. Por lo tanto el homeomorfismo h lleva M sobre N.

Además, para todo $p \in M$ y todo $f \in C_b^1(N)$ tenemos que

$$T(f)(p) = \delta_p(T(f)) = (\delta_p \circ T)(f) = h(\delta_p)(f) = h(f(p)) = (h \circ f)(p)$$

y entonces se sigue que $T(f) = h \circ f$. Ahora, por el Teorema 3.3 podemos deducir que $h : M \to N$ es $\|T\|$-Lipschitz con respecto a la distancia geodésica. Puesto que T es una isometría, entonces $\|T\| = 1$, y por lo tanto h es 1-Lipschitz. Ahora haciendo lo mismo con h^{-1}, tenemos que h^{-1} también es 1-Lipschitz, y por lo tanto h es una isometría métrica. Finalmente, del Teorema 1.12, h es en efecto una isometría Riemanniana, es decir, M y N son equivalentes como variedades Riemannianas.

□

Problemas abiertos

En el análisis de los problemas estudiados a lo largo de la memoria, surgen de manera natural una serie de cuestiones que pretendemos abordar en un futuro próximo.

1. Una estructura de Finsler finito dimensional determina una geometría que en general no es “infinitesimalmente euclídea”. Este tipo de estructura ya fue sugerida por el propio Riemann en su Tesis de Habilitación “Über die Hypotheser welche der geometric zugrund liegen”(1854), pero no fue estudiada en detalle hasta más tarde por P. Finsler en su Tesis “Über kurven und Flächen in allgeneinen Räumen”(1918), de quien toma el nombre. Con más precisión, una estructura de Finsler en una variedad consiste en la asignación en cada punto de la variedad de lo que se llama una *norma de Minkowski* (véase definición 4.1), que es una función positivamente homogénea con buenas propiedades de diferenciabilidad y convexidad, pero que en general no es una norma en el sentido usual. Esta estructura permite definir la longitud de caminos sobre la variedad de la manera habitual y de este modo introducir la *distancia geodésica* sobre la variedad, que en general será una *distancia no simétrica*. En este contexto, queremos abordar un resultado general de aproximación de funciones Lipschitzianas por funciones diferenciables y Lipschitzianas, para lo cual combinamos el uso de la convolución integral (ahora estamos en el caso finito-dimensional) junto con una modificación del tipo de particiones de la unidad desarrolladas anteriormente, adaptadas al caso de una distancia no simétrica.

2. Como aplicación, queremos obtener una caracterización funcional de la completitud en variedades Finsler para una clase bastante amplia denominada *variedades casi-simétricas*.

3. En el capítulo 3 se estudió el teorema clásico de Myers-Nakai para variedades Riemannianas de dimensión infinita. Nosotros a través de discuciones intuímos que este teorema no se verifica en general para variedades que no sean absolutamente homogéneas, y por ello pretendemos estudiar este contexto para obtener, si es posible, una extensión de este teorema en el marco de las variedades de Finsler absolutamente homogéneas.

Bibliografía

[1] Akbar-Zadeh, H., *Sur les espaces de Finsler à courbures sectionnelles constantes*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci, 74(5) (1988) 281-322.

[2] Azagra, D., *Cálculo subdiferencial, convolución infimal y regularización de funciones en espacios de Banach*, Tesina de Licenciatura, Universidad Complutense de Madrid, (1996).

[3] Azagra, D. and Ferrera, J., *Inf-convolution and regularization of convex function on Riemannian manifolds of nonpositive curvature*, Rev. Mat. Complut, 19(2) (2006) 323-345.

[4] Azagra, D., Ferrera, J. and López-Mesas, F., *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 220 (2005) 304-361.

[5] Azagra, D., Fry, R., Gómez, J., Jaramillo, J. and Lovo, M., *C^1-fine approximation of functions on Banach spaces with unconditional basis* , Quart. J. Math. 56(1) (2005) 13-20.

[6] Azagra, D., Ferrera, J., López-Mesas F. and Rangel, Y., *Smooth approximation of Lipschitz function on Riemannian manifolds*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 1370-1378.

[7] Bao, D., Chern, S. and Shen, Z., *An introducction to Riemannian-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, MR 2001.

[8] Burago, D., Burago, Y. and Ivanov, S. *A course in metric geometry*, AMS Graduate Studies in Mathematics, volumen 33.

[9] Busemann, H. and Mayer, W., *On the foundations of the calculus of variations*, Trans. AMS. 49 (1941) 173-198.

[10] Chern, S. and Shen, Z., *Riemann-Finsler Geometry*, World Scientific, 2004.

[11] Deng, S. and Hou, Z., *The group of isometries of a Finsler space*, Pac. J. Math. 207(1) (2002) 149-155.

[12] Egloff, D, *Uniform Finsler Hadamar manifolds*, Annales de l' I.H.P section A, tome 66. (3) (1997) 323-357.

[13] Ekeland, I., *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geom. 13(2) (1978) 287-301.

[14] Gaffney, M., *The conservation property of the heat equation on Riemannian manifolds*, Comm. Pure. Appl. Math. XII (1959) 1-11.

[15] Garrido, M. and Jaramillo, J., *Homomorphisms on Function Lattices*, Monatsh. Math. 141 (2004) 127-146.

[16] Garrido, M. and Jaramillo, J., *A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions*, Monatsh. Math. 131 (2001) 189-192.

[17] Garrido, Isabel, Jaramillo, Jesús and Rangel, Yenny, *Algebras of differentiable functions on Riemannian manifolds*, Bull. London Math. Soc. 41 (2009) 993-1001.

[18] Gordon, W., *An analytical criterion for the completeness of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 37(1) (1973) 221-225.

[19] Gordon, W., *Corrections to An analytical criterion for the completeness of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1) (1974) 130-131.

[20] Greene, R. and Wu, H., *On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions*, Indiana Uni. Math. J. 22 (1972/1973) 641-653.

[21] Greene, R. and Wu. H., *C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta. Math. J. 137(3-4) (1976) 209-245.

[22] Greene, R. and Wu, H., *C^∞ Approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions*, Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (4)12(1) (1979) 47-84.

[23] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1978.

[24] Hermann, R., *Differential Geometry and the calculus of variations*, Math.in Sci. and Engineering, vol. 49, Academic Press, New York, 1968.

[25] Isbell, J., *Algebras of uniformly continuous functions*,Annals of mathematics. 69, n1(1958), 96-125.

[26] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, Vol. 1, Interscience, New York, 1963.

[27] Kobayashi, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[28] Lang, S., *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[29] Lasry, J. and Lions, P., *A remark on regularization in Hilbert spaces*, Israel J. Math. 55(3) (1986) 257-266.

[30] Llavona, J. G., *Approximation methods by regular functions*, Mediterr. J. Math. 3 (2)(2006) 259-271.

[31] Mazur, S. and Ulam, S., *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris. 194 (1932) 946-948.

[32] Milnor, J., *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies, Princenton university Press, Princeton, 1963.

[33] Moulis, N., *Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 21(4) (1971) 293-345.

[34] Myers, S., *Algebras of differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 917-922.

[35] Myers, S. and Steenrod, N., *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. 40 (1939) 400-416.

[36] Nakai, M., *Algebras of some differentiable functions on Riemannian manifolds*, Japan. J. Math. 29 (1959) 60-67.

[37] Palais, R., *On the differentiability of isometries*, Proc. Math. AMS. 8 (1957) 805-807.

[38] Shen, Z., *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, 2001.