

Una caracterización de sistemas iterados de  
funciones afines hiperbólicos

María Peraza

Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado

Decanato de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Abril, 2010



## Dedicatoria

Al nombre sobre todo nombre “*Jesús*” Dios y hombre verdadero, principio y fin. A María madre de Dios y madre nuestra quien me ayudó y me ayuda siempre en este camino.

*“Cristo y yo mayoría aplastante”.*



## Agradecimientos

A mi padre *Dios todopoderoso*, uno y trino pilar de mi existencia y a mi madre celestial *María*, madre de Dios por llevarme de la mano por el camino del bien.

A mis padres Yelitza y José Gregorio gracias por darme la vida y por acompañarme y animarme siempre. Este y todos los triunfos que vienen son de ustedes... ¡los amo!

A Yhon, por tu amor y apoyo incondicional. “Te amo”.

A mis hermanos Rosanna y José Rafael gracias por estar siempre a mi lado.

A mis sobrinos Jesús Adrian y José Ignacio que desde que llegaron a este mundo me han llenado de alegría.

A mis abuelas Lucila y Francisca, que con sus sabios consejos me guían.

A mis tíos y primos por confiar ciegamente en mí. Eternamente les estaré agradecida.

A mi tutor Neptalí Romero por su paciencia y dedicación, desde que comencé este camino me ha ayudado; “eres el mejor” muchas gracias.

Al profesor Ismael Huerta, que más que un profesor es un guía, que me ha brindado conocimientos durante toda la carrera. Aunque no estemos de acuerdo en muchas cosas lo considero junto al profesor Neptalí “*los mejores*”. Estoy muy agradecida por los conocimientos que me transmite y me sigue transmitiendo.

A Mariú Colina y Rona Borges, por brindarme su amistad sin pedir nada a cambio... Nunca olvidaré tantas cosas que pasamos juntos durante estos últimos semestres de la carrera. Espero que siempre nos una esta amistad.

A María Brito y Olga Rojas, amigas por siempre.

Por último y no menos importante, al presbítero Pedro Loyo y a la comunidad de la parroquia “*Ntra. Sra. del Pilar*” por su apoyo y oraciones en todo momento.

## Resumen

En este Trabajo Especial de Grado se pretende, además de ofrecer una breve introducción a los sistemas iterados de funciones (SIF), presentar de una manera didáctica, y autocontenida, una caracterización de sistemas iterados de funciones afines hiperbólicos, la cual fue empleada recientemente para atender a cuestiones formuladas en torno a la asociación de conjuntos topológicamente autosimilares y sistemas iterados de funciones contractivos.

La monografía que sustentará el Trabajo Especial de Grado está basada en un artículo de Ross Atkins, Michael Barnsley, Andrew Vince y David Wilson, ver [9], en el cual se demuestran dos teoremas donde se encuentra una caracterización de los SIF afines hiperbólicos definidos sobre  $\mathbb{R}^m$ . Una de las motivaciones para realizar este trabajo fué la pregunta de Atsushi Kameyama [1] ¿dado un conjunto topológicamente autosimilar, existe un sistema de funciones contractoras asociadas a este? Los teoremas presentados en el trabajo implican una respuesta afirmativa para conjuntos autosimilares derivados de transformaciones afines sobre  $\mathbb{R}^m$ .

Para llevar a cabo la tarea de la redacción de tal monografía, se consideraron y estudiaron: aspectos generales de la topología de los espacios métricos, particularmente lo referente al espacio de los fractales y la métricas de Hausdorff; además de propiedades fundamentales de los SIF contractivos, SIF hiperbólicos y el operador de Hutchinson, y algunos aspectos de la geometría convexa en especial de la métrica de Minkowski.





# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Espacios métricos . . . . .	3
2.1.1. Topología métrica . . . . .	4
2.1.2. Topologías métricas equivalentes . . . . .	5
2.2. Funciones continuas . . . . .	6
2.3. Completitud y compacidad . . . . .	7
2.4. El espacio de los fractales . . . . .	10
<b>3. Sistemas Iterados de Funciones</b>	<b>15</b>
3.1. Definición y ejemplos . . . . .	15
<b>4. Resultados principales</b>	<b>27</b>
4.1. Un SIF hiperbólico es fibrado por puntos y tiene un atractor . . . . .	27
4.2. Atractores y contracciones topológicas . . . . .	32
4.3. Hiperbolicidad y SIF no antipodales . . . . .	36
4.4. Respuesta a la pregunta de Kameyama . . . . .	39
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>



## Introducción

El propósito de este trabajo especial de grado es probar y explicar de manera muy didáctica dos teoremas que clasifican sistemas iterados de funciones afines hiperbólicos sobre  $\mathbb{R}^m$ . El mismo está sustentado en el artículo de R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince y D. Wilson *A characterization of hyperbolic affine function system*, esto es [9]. Una de las motivaciones fundamentales de los autores de ese artículo está relacionada con la siguiente pregunta: ¿cuándo las transformaciones de un sistema iterado de funciones en  $\mathbb{R}^m$  son contracciones simultáneamente en una métrica equivalente a la métrica euclidiana de este espacio?

Como consecuencia de los principales resultados en [9] se obtiene una respuesta, aunque parcial, a la siguiente pregunta fundamental formulada por Atsushi Kameyama en su artículo: *Distances on Topological Self-Similar Sets*, ver [1]: dado un conjunto topológicamente autosimilar, ¿existe un sistema de funciones contractoras asociado a éste?; es decir, ¿existe un SIF contractivo cuyo atractor sea tal conjunto?. Aunque no se conoce una respuesta global, en el contexto de conjuntos autosimilares derivados de transformaciones afines en  $\mathbb{R}^m$ , la respuesta es afirmativa.

A continuación se presentan los resultados principales que serán relatados a medida que se desarrolle el trabajo, fundamentalmente contenidos en los artículos [5] y [9]:

**Teorema A.** *Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín, entonces son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{F}$  es hiperbólico.*
- ii)  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos.*
- iii)  $\mathcal{F}$  tiene un atractor.*

iv)  $\mathcal{F}$  es una contracción topológica respecto a algún cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^m$ .

v)  $\mathcal{F}$  es no antipodal respecto a algún cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^m$ .

**Teorema B.** Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín con código,  $\pi : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces  $\mathcal{F}$  es hiperbólico sobre la cápsula afín de  $\pi(\Omega_N)$ . En particular, si  $\pi(\Omega_N)$  contiene un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $\mathcal{F}$  es hiperbólico en  $\mathbb{R}^m$ .

El teorema A contiene un recíproco del clásico teorema del punto fijo para contracciones de Banach en el caso que el SIF sea afín. Este mismo teorema ofrece varias equivalencias para la hiperbolicidad de sistemas iterados de funciones en los casos afines; recuerde que el concepto de hiperbolicidad es métrico; no obstante, las equivalencias descritas en los items ii) y iii) son descritas en términos de convergencias, en cuanto que las equivalencias en iv) y v) corresponden a propiedades geométricas. Por último, el teorema B está en relación con la siguiente cuestión: ¿es hiperbólico un SIF afín al considerarlo restringido a su atractor? De hecho, ese resultado responde afirmativamente tal cuestión.

El propósito de este capítulo es presentar el marco conceptual sobre el que se ubica el trabajo, introducimos a continuación un conjunto de definiciones y algunas propiedades de los objetos matemáticos que lo sustentan: teoría de espacios métricos y nociones elementales de sistemas iterados de funciones. Gran parte de las demostraciones de los enunciados son obviadas; las mismas pueden encontrarse o en casi cualquier libro de topología de espacios métricos; por ejemplo el libro de Elon Lima [2], o bien el clásico libro de Barnsley sobre geometría fractal [3].

## 2.1. Espacios métricos

**Definición 2.1.** Un *espacio métrico* se define como un par  $(M, d)$  donde  $M$  es un conjunto no vacío y  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, denominada *métrica* en  $M$ , que satisface los siguientes axiomas:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in M$ ;
- (2)  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ ;
- (3)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in M$ ; y
- (4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in M$

Se dice que el axioma (3) es la propiedad de simetría que debe tener cualquier noción de distancia; y el axioma (4) se conoce como desigualdad triangular.

**Ejemplo 2.1.** La métrica euclidiana sobre  $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$  se define como

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

donde  $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ .

**Ejemplo 2.2 (Espacio shift unilateral en  $N$  símbolos).** Este es el conjunto  $\Omega_N$  formado por todas las sucesiones  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1}$ , con  $\sigma_n \in \{1, \dots, N\}$ , y dotado de la topología producto. Es bien conocido que sobre esta estructura topológica,  $\Omega_N$  es un espacio de Cantor; es decir, compacto, perfecto y totalmente desconexo. Es simple verificar que la topología producto en  $\Omega_N$  es equivalente a la topología inducida por la denominada métrica  $d_{\Omega_N}$  de Cantor, la cual es definida, para cada  $\sigma, \omega \in \Omega_N$ , por  $d_{\Omega_N}(\sigma, \omega) = 0$ , si  $\sigma_n = \omega_n$  para todo  $n \geq 1$ ; y  $d_{\Omega_N}(\sigma, \omega) = 2^{-k}$ , si  $\sigma \neq \omega$  y  $k$  es el primer entero en el que  $\sigma$  y  $\omega$  difieren.

Asociado al espacio de Cantor  $\Omega_N$ , también denominado espacio de código en  $N$  símbolos, existe una transformación con un papel muy importante en la teoría de dinámica simbólica; se trata de la transformación shift  $s : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$  definida, para cada  $\sigma \in \Omega_N$ , por  $s(\sigma) = \omega$  con  $\omega_k = \sigma_{k+1}$  para todo  $k \geq 1$ . Para cada  $1 \leq n \leq N$ , sea  $s_n : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$  dada por  $s_n(\sigma) = \omega$ , donde  $\omega_1 = n$  y  $\omega_{k+1} = \sigma_k$  para todo  $k \geq 1$ ; esto es, para cada  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Omega_N$ ;

$$s_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = (n, \sigma_1, \sigma_2, \dots).$$

Es simple verificar que  $(s \circ s_n)(\sigma) = \sigma$  para todo  $\sigma$  en  $\Omega_N$  y cada  $n = 1, \dots, N$ ; de hecho las funciones  $s_1, \dots, s_n$  son las secciones transversales (cross-sections) de  $s$ ; es decir las únicas transformaciones continuas  $u$  de  $\Omega_N$  que satisfacen  $s \circ u = i_{\Omega_N}$  (transformación identidad de  $\Omega_N$ ). Es común denotar  $s_n$  como  $n\sigma$ , pues  $s_n$  antepone a la sucesión  $\sigma$ , cualquiera sea ella, el dígito  $n$ . Observe que el shift  $s$  elimina justo el primer dígito de cada sucesión.

### 2.1.1. Topología métrica

Consideremos un espacio métrico  $(M, d)$ , asociado a la métrica  $d$  existe una estructura topológica conocida como *topología métrica* en  $M$  inducida por  $d$ . Veamos como se define esta estructura matemática. Consideremos  $r > 0$  y  $x \in M$  arbitrarios, al conjunto

$$B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$$

se le denomina *bola cerrada* de centro  $x$  y radio  $r$ ; mientras que a

$$B^0(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$$

se le llama *bola abierta* de centro  $x$  y radio  $r$ . La topología métrica inducida por  $d$  es la topología en  $M$  que tiene como una base a la familia de bolas abiertas. Esto es, los abiertos no vacíos en  $M$  son uniones de bolas abiertas. Recordamos que cualquier unión de subconjuntos abiertos es un conjunto abierto, la intersección finita de abiertos es abierto, cualquier intersección de cerrados es un conjunto cerrado, y la unión finita de cerrados es cerrado; siendo que un conjunto cerrado es el complemento de un conjunto abierto. Es evidente que el conjunto vacío y el propio conjunto  $M$  son al mismo tiempo conjuntos abiertos y cerrados.

**Definición 2.2.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $S$  un subconjunto de  $M$ . Un punto  $x \in M$  es llamado *punto frontera* de  $S$ , si para cada  $\epsilon > 0$  se tiene que la bola  $B^0(x, \epsilon)$  contiene puntos de  $M \setminus S$  y de  $S$ . El conjunto de todos los puntos fronteras de  $S$  se conoce con el nombre de *frontera de  $S$*  y se denota por  $\partial S$ . Un punto  $x \in S$  se llama *punto interior de  $S$* , si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B^0(x, \epsilon) \subset S$ . El conjunto de todos los puntos interiores de  $S$  se llama *interior de  $S$*  y es denotado por  $\text{int}(S)$ . Un punto  $x \in M$  que no es punto frontera de  $S$  y tampoco punto interior se le denomina *punto exterior de  $S$* . Un punto  $x \in M$  se dice punto de acumulación, o punto límite de  $S$ , si para toda bola abierta  $B^0(x, r)$  se tiene  $(B^0(x, r) \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$ . La clausura de  $S$  denotada por  $\text{cla}(S)$ , es la unión de  $S$  y sus puntos de acumulación.

Siempre que se tenga un subconjunto no vacío  $S$  de un espacio métrico  $(M, d)$ , es posible considerar sobre él la misma métrica  $d$ ; así  $(S, d)$  también es un espacio métrico.

### 2.1.2. Topologías métricas equivalentes

Es posible que sobre un mismo conjunto  $M$  existan varias métricas, por tanto es probable también que  $M$  tenga distintas topologías métricas.

**Definición 2.3.** Dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  en un espacio  $M$  se dicen:

- (1) *topológicamente equivalentes* si, y sólo si, las topologías métricas por ellas inducidas son idénticas.
- (2) *equivalentes*, si, y sólo si, existen constantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tales que  $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ .

Es simple verificar que si  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes, entonces son topológicamente equivalentes; el recíproco no es cierto.

## 2.2. Funciones continuas

Dados dos espacios métricos  $(M, d)$ ,  $(N, e)$  y una función  $f : M \rightarrow N$ .

**Definición 2.4.** Se dice que  $f$  es *continua* si, y sólo si, para cada  $x \in M$  y cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $e(f(x), f(y)) < \epsilon$ . Si el número  $\delta$  es independiente de  $x$  entonces se dice que  $f$  es *uniformemente continua*.

Consideremos un espacio métrico  $(M, d)$  y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación cualquiera en  $M$ .

**Definición 2.5.** Una aplicación  $f : M \rightarrow M$  es *Lipschitziana*, o también *L-Lipschitz*, si existe una constante  $L > 0$  tal que, para todo  $x, y \in M$  vale  $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ . Si  $f$  es *L-Lipschitz* con  $0 < L < 1$ , entonces  $f$  se denomina *contracción*, o *L-contracción*. Si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) = \alpha d(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ , entonces se dice que  $f$  es una  *$\alpha$ -similitud*, o también una *similitud*.

Note que toda aplicación Lipschitziana es una función uniformemente continua.



## 2.3. Completitud y compacidad

Recordemos primero el concepto de completitud en espacios métricos. Para ello consideremos sucesiones de puntos en espacios métricos, y la definición de convergencia de sucesiones.

**Definición 2.6.** Una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  en el espacio métrico  $(M, d)$  se dice de Cauchy si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  siempre que  $n, m \geq N$ .

**Definición 2.7.** Una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  en el espacio métrico  $(M, d)$  se dice que converge al punto  $x \in M$ , si para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x) < \epsilon$ , para todo  $n \geq N$ . El punto  $x$  se conoce como el límite de  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  y se denota por  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , o  $x_n \rightarrow x$ .

Observe que si  $S$  es un subconjunto de un espacio métrico  $(M, d)$ , un punto  $x \in M$  es un punto límite de  $S$  si, y sólo si, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos  $x_n \in S \setminus \{x\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Adicionalmente, una función  $f$  del espacio métrico  $(M, d)$  en el espacio métrico  $(N, e)$  es continua si, y sólo si, para cada  $x \in M$  y cada sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  convergente a  $x$ , se tiene que la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  converge a  $f(x)$ .

**Teorema 2.1.** Si una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  en un espacio métrico  $(M, d)$  es convergente en  $M$ , entonces es de Cauchy.

**Definición 2.8.** Un espacio métrico  $(M, d)$  se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en  $M$ .

A continuación introduciremos el concepto compacidad en espacios métricos y nociones relacionadas.

**Definición 2.9.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $S$  un subconjunto de  $M$ . Se dice que  $S$  es:

- (1) *Compacto*, si cada sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  contenida en  $S$  contiene una subsucesión convergente con límite en  $S$ ;

- (2) *Acotado*, si existen un punto  $a \in M$  y un número positivo  $R$  tales que  $d(a, x) < R$  para todo  $x \in M$ ; y
- (3) *Totalmente acotado*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe un número finito de puntos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$  tales que, para cada  $x \in S$  existe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $d(x, y_i) < \epsilon$ . Este conjunto de puntos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  se le conoce como  $\epsilon$ -red.

**Teorema 2.2.** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1)  $M$  es compacto.
- (2) Todo cubrimiento abierto de  $M$  posee un subcubrimiento finito.
- (3)  $M$  es completo y totalmente acotado.

La compacidad de un espacio métrico está relacionada con la completitud de tal espacio; de hecho la compacidad implica la completitud.

**Proposición 2.1.** *La imagen continua de cualquier conjunto compacto de un espacio métrico es también un conjunto compacto.*

Para cerrar esta sección enunciaremos y demostraremos un importante resultado sobre la existencia de puntos fijos para funciones continuas. Antes recordamos que un punto fijo de una función  $f : M \rightarrow M$ , es cualquier punto  $x \in M$  tal que  $f(x) = x$ .

Aprovechamos para decir que para  $f : M \rightarrow M$  y  $x \in M$ , la órbita positiva de  $x$  es el conjunto de todos los iterados de  $x$  por  $f$ , esto es, al conjunto  $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ , donde  $f^n$  denota la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces, es decir,  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}$

**Teorema 2.3. (Teorema de punto fijo de Banach).** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una contracción. Entonces  $f$  tiene un único punto fijo  $p$ ; y además para cada  $x \in M$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p$ ; esto es,  $p$  es el atractor global de  $f$ .*

**Demostración.** Sea  $0 \leq \alpha < 1$  constante de contracción para  $f$ ; es decir, para cada  $x, y \in M$  se tiene que  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ . Sea  $x \in M$  cualquiera y consideremos la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  formada por su órbita, lo que significa que  $x_n = f^n(x)$  para cada  $n \geq 0$ . Afirmamos que esta sucesión es de Cauchy. Para ello mostraremos primero que se cumple:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1), \text{ para todo } n \geq 0. \quad (2.1)$$

Observe que para  $n = 0$  esta desigualdad se satisface. Para  $n = 1$  también vale, pues:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x), f^2(x)) = d(f(x), f(f(x))) \leq \alpha d(x, f(x)) = \alpha d(x_0, x_1).$$

Si procedemos por inducción sobre  $n \geq 0$ , asumimos como cierto que (2.1) vale para todo  $0 \leq n \leq k$ ; y mostraremos que vale para  $n = k + 1$ . En efecto,

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_{k+2}) &= d(f^{k+1}(x), f^{k+2}(x)) \\ &= d(f(f^k(x)), f(f^{k+1}(x))) \\ &\leq \alpha d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\ &= \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Consideremos enteros positivos  $n, s$  cualesquiera. Luego, por la desigualdad triangular:

$$d(x_n, x_{n+s}) \leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+s-1}) d(x_0, x_1) \leq \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k \right) d(x_0, x_1).$$

Dado que la serie  $\sum_{k \geq 0} \alpha^k$  es convergente, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero  $N > 0$  tal que, para todo  $n \geq N$  se tiene que  $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k < \epsilon$ . Esto implica que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es de Cauchy.

Sea  $p$  el punto límite de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , el cual existe pues  $(M, d)$  es completo. Dado que  $x_n \rightarrow p$ , la continuidad de  $f$  implica que  $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(p)$ ; pero las sucesiones  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  tienen el mismo límite; luego  $f(p) = p$ .

Por último, como toda órbita  $\{x_n = f^n(x)\}_{n \geq 0}$  tiene como límite a un punto fijo de  $f$ , obviamente el conjunto de puntos fijos de  $f$  es no vacío. Veamos que este conjunto es unitario. Supongamos que  $q \in M$  es punto fijo de  $f$ . Entonces:

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q),$$

de donde  $d(p, q) = 0$ , pues  $0 \leq \alpha < 1$ , y por tanto  $p = q$ . Así, todas las órbitas de  $f$  convergen al único punto fijo de  $f$ . Lo cual demuestra el teorema. ■

**Corolario 2.1.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación tal que para algún entero positivo  $K$ , la aplicación  $f^K$  sea una contracción. entonces  $f$  tiene un único punto fijo  $p$ ; y además para cada  $x \in M$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ .

**Corolario 2.2.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación tal que, para constantes  $C \geq 1$  y  $0 \leq \alpha < 1$ , se tiene que  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\alpha^n d(x, y)$  para todo  $n \geq 0$  y  $x, y \in M$ . Entonces se tiene que  $f$  tiene un único punto fijo  $p$ ; y además para cada  $x \in M$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ .

## 2.4. El espacio de los fractales

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas del espacio métrico donde viven los fractales. Primero recordemos que si  $(M, d)$  es un espacio métrico,  $x \in M$  y  $A, B$  subconjuntos no vacíos de  $M$ , las distancias de  $x$  a  $A$ , y la distancia entre  $A$  y  $B$  se definen, respectivamente, como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}, \text{ y}$$

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Sea  $(M, d)$  un espacio métrico, denotamos por  $\mathcal{H}(M)$  a la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos contenidos en  $M$ . Antes de dotar a  $\mathcal{H}(M)$  de una estructura métrica, recordamos :

- (1) la unión finita de elementos de  $\mathcal{H}(M)$  está en  $\mathcal{H}(M)$ ;
- (2) Si  $x \in M$ ,  $K \in \mathcal{H}(M)$  y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es dada por  $f(y) = d(x, y)$ , entonces  $f$  es continua al considerar en  $\mathbb{R}$  la métrica euclidiana y en  $K$  la métrica  $d$ ; además, existe un punto  $y^* \in K$  tal que  $f(y^*) \leq f(y)$  para todo  $y \in K$ . Así que la distancia de un punto a un compacto no vacío es realizada por un punto en el compacto; por lo que  $d(x, K) = \min\{d(x, b) : b \in K\}$ .

Note que la distancia entre conjuntos no es buena para definir una métrica en  $\mathcal{H}(M)$ : dos compactos distintos pueden estar a distancia nula. Por ello se recurre a otras herramientas.

**Definición 2.10.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Para cada  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  se define la distancia de  $A$  hacia  $B$  como

$$D(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\},$$

o equivalentemente

$$D(A, B) = \max\{\min\{d(x, y) : y \in B\} : x \in A\}.$$

Observe que  $D(A, B) \geq d(A, B)$ , y también pueden construirse compactos  $A, B$  de forma que  $D(A, B) \neq D(B, A)$ . Sin embargo mediante esta distancia dirigida se define una importante métrica en  $\mathcal{H}(M)$ . Antes de ello, no es difícil verificar las siguientes propiedades de la distancia entre puntos y conjuntos, y la distancia dirigida  $D$ .

**Proposición 2.2.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.*

- (1) Si  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  con  $A \subset B$ , entonces  $d(x, B) \leq d(x, A)$  para cualquier  $x \in M$ .
- (2) Si  $A, B, C \in \mathcal{H}(M)$ , entonces  $B \subset C$  implica  $D(A, C) \leq D(A, B)$ .
- (3) Si  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  y  $A \neq B$ , entonces  $D(A, B) > 0$ , o  $D(B, A) > 0$ .
- (4) Si  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  y  $A \subset B$ , entonces  $d(a, B) = 0$  para todo  $a \in A$ .

(5) Si  $A, B, C \in \mathcal{H}(M)$ , entonces  $D(A \cap B, C) = D(A, C) \vee D(B, C)$ ; donde  $\alpha \vee \beta$  denota el máximo entre los números reales  $\alpha$  y  $\beta$ .

Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $\mathcal{H}(M)$  como antes. Para cada par de conjuntos  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  se define

$$h(A, B) = D(A, B) \vee D(B, A).$$

**Proposición 2.3.** La función  $h : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow [0, +\infty)$  define una métrica en  $\mathcal{H}(M)$ , la cual es conocida como métrica de Hausdorff.

**Demostración.** Sea  $A, B, C \in \mathcal{H}(M)$ . Claramente

$$h(A, A) = D(A, A) \vee D(A, A) = D(A, A) = \max\{d(x, A) : x \in A\} = 0.$$

Como  $A, B$  son compactos entonces existen  $a$  y  $b$  en  $A$  y  $B$  respectivamente los cuales hacen que  $h(A, B) = d(a, b)$ . De aquí que  $h(A, B)$  es siempre un número no negativo. Si  $A \neq B$ , podemos asumir que existe un  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ . Luego es claro que  $h(A, B) \geq D(A, B) > 0$ . Obviamente  $h(A, B) = h(B, A)$ . Para probar que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$  primero mostraremos que  $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$ . Tenemos para cualquier  $a \in A$

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\}, \text{ para todo } c \in C, \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B\}, \text{ para todo } c \in C, \text{ luego} \\ d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\}, \\ &= d(a, C) + D(C, B), \text{ así} \\ D(A, B) &\leq D(A, C) + D(C, B) \end{aligned}$$

Similarmente se demuestra  $D(B, A) \leq D(B, C) + D(C, A)$ , de donde se deduce la desigualdad triangular para  $h$ . ■

En adelante nos referiremos al par  $(\mathcal{H}(M), h)$  como el espacio donde viven los fractales, o bien el espacio de fractales.

**Definición 2.11.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico,  $A \subset M$  no vacío y  $\epsilon > 0$ . Se conoce como *dilatación* de  $A$  por  $\epsilon$ , al conjunto

$$A + \epsilon = \{x \in M : d(x, a) \leq \epsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

**Teorema 2.4.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  donde  $(M, d)$  es un espacio métrico. Para cada  $\epsilon > 0$  vale

$$h(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \text{ y } B \subset A + \epsilon.$$

Este resultado permite caracterizar la distancia de Hausdorff entre dos compactos  $A, B \in \mathcal{H}(M)$  como

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset B + \epsilon \text{ y } B \subset A + \epsilon\}$$

**Teorema 2.5 (Complejitud de  $\mathcal{H}(M)$ ).** Si  $(M, d)$  un espacio métrico completo, entonces  $(\mathcal{H}(M), h)$  es completo. De hecho, si  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{H}(M), h)$ , entonces su límite en  $h$  es el conjunto  $A$  formado por todos los  $x \in M$  tales que  $x$  es límite de una sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  en  $M$  con  $x_n \in A_n$  para cada  $n \geq 0$ .

**Teorema 2.6 (Compacidad de  $\mathcal{H}(M)$ ).** Si  $(M, d)$  es compacto, entonces  $(\mathcal{H}(M), h)$  también lo es.

Demostraciones de estos teoremas pueden encontrarse en [3].





## Sistemas Iterados de Funciones

En este capítulo recordaremos la noción de *sistema iterado de funciones* y del operador de *Hutchinson*, para ello consideramos cualquier espacio métrico  $(M, d)$  y el correspondiente espacio  $(\mathcal{H}(M), h)$ .

### 3.1. Definición y ejemplos

Sabemos que para cualquier función continua  $f : M \rightarrow M$ , la imagen por  $f$  de cualquier compacto no vacío  $K \subset M$ ,  $f(K)$ , es también un elemento de  $\mathcal{H}(M)$ ; además, para cualquier colección finita de compactos en  $\mathcal{H}(M)$ , su unión es compacta.

**Definición 3.1.** Un *sistema iterado de funciones* (SIF) en  $M$  es cualquier colección finita de funciones continuas  $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow M$ ; ello se denota por  $(M; f_1, \dots, f_n)$ . Si cada una de las funciones es una contracción, se dice que el SIF es *contractivo*; si son Lipschitzianas, entonces el SIF es *Lipschitziano*. Además, si  $M = \mathbb{R}^m$  y cada  $f_i, (i = 1, \dots, n)$  es una función afín, entonces  $(\mathbb{R}^m; f_1, \dots, f_n)$  se denomina SIF *afín*.

Más adelante iremos introduciendo otras categorías de sistemas iterados de funciones.

**Definición 3.2.** Dados un espacio métrico  $(M, d)$  y un SIF  $(M; f_1, \dots, f_n)$ . Al operador  $\mathcal{F} : \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$  definido, para cada  $A \in \mathcal{H}(M)$ , por

$$\mathcal{F}(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_n(A),$$

se le conoce como *operador de Hutchinson* asociado al SIF  $(M; f_1, \dots, f_n)$

Observe que por los comentarios anteriores,  $\mathcal{F}$  está bien definido. Por otro lado, dado que las funciones que generan cualquier SIF son continuas, entonces puede demostrarse que el operador de Hutchinson asociado también lo es.

El siguiente teorema es fundamental para varios propósitos, su demostración requiere del lema a continuación, cuya demostración es simple y puede encontrarse en [3].

**Lema 3.1.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $\mathcal{H}(M)$  dotado de la métrica de Hausdorff  $h$ . Entonces:

- (1) Para cada  $A, B, C \in \mathcal{H}(M)$ , con  $B \subset C$ , vale  $h(A, C) \leq h(A, B)$ .
- (2) Para todo  $n \geq 2$  y cada  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{H}(M)$  se satisface:

$$h(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_n) \leq \max\{h(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n\}.$$

**Teorema 3.1.** Si  $(M; f_1, \dots, f_n)$  es Lipschitziano, entonces el operador de Hutchinson asociado es Lipschitz.

**Demostración.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(M)$ , entonces vale:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) &= h(f_1(A) \cup \dots \cup f_n(A), f_1(B) \cup \dots \cup f_n(B)) \\ &\leq \max\{h(f_i(A), f_i(B)) : i = 1, \dots, n\} \\ &\leq \max\{L_i h(A, B) : i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

donde  $L_i$  es la constante de Lipschitz de  $f_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

De donde  $h(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) \leq Lh(A, B)$ , siendo  $L = \max\{L_1, \dots, L_n\}$ . ■

Una consecuencia clara del teorema anterior es:

**Corolario 3.1.** Si el SIF  $(M; f_1, \dots, f_n)$  es contractivo, entonces, el operador de Hutchinson asociado al SIF es una contracción.

**Definición 3.3. (Atractor para un SIF)** Un conjunto  $A^* \in \mathcal{H}(M)$  es llamado *atractor* del SIF  $\mathcal{F} = (M; f_1, \dots, f_n)$  si

$$A^* = \mathcal{F}(A^*) \tag{3.1}$$

y

$$A^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}^k(B), \tag{3.2}$$

es el límite con respecto a la métrica de Hausdorff, para todo  $B \in \mathcal{H}(M)$ .

Note que cuando decimos que un SIF tiene un atractor  $A$ , en realidad lo que significa es que el operador de Hutchinson correspondiente admite un único punto fijo que es el atractor global del sistema dinámico definido por ese operador. Observe que si  $(M, d)$  es completo y si el SIF es contractivo entonces, el operador de Hutchinson  $\mathcal{F}$  asociado al SIF es una contracción; luego por el teorema de punto fijo de Banach, existe un compacto  $A^* \in \mathcal{H}(M)$  que es el único punto fijo de  $\mathcal{F}$ . Además, para cada  $B \in \mathcal{H}(M)$  se cumple que la órbita de  $B$  por  $\mathcal{F}$ ,  $\{\mathcal{F}^k(B)\}_{k \geq 0}$ , converge a  $A^*$  en la métrica de Hausdorff; este compacto  $A^*$  es el *atractor global* del SIF.

A continuación introduciremos una categoría de SIF en espacios métricos completos, cuyos operadores de Hutchinson asociados también tienen un único punto fijo que es atractor global del SIF.

**Definición 3.4. (SIF hiperbólicos).** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Un SIF  $\mathcal{F} = (M; f_1, \dots, f_N)$  es llamado *hiperbólico* si existe una métrica  $d'$  sobre  $M$  equivalente a la métrica dada y tal que cada  $f_i, i = 1, \dots, N$  es una contracción.

En realidad los SIF hiperbólicos admiten una caracterización en términos de decrecimientos subexponenciales. Más explícitamente:

**Definición 3.5.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. Una función  $f : M \rightarrow M$  para la cual existen constantes  $C \geq 1$  y  $0 < \alpha < 1$  tales que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\alpha^n d(x, y), \text{ para cada } n \geq 0 \quad (3.3)$$

se dice con *decrecimiento subexponencial*.

Note que si  $C = 1$  en (3.3) entonces  $f$  es una contracción. Además, del corolario 2.2, sigue que, si  $(M, d)$  es completo entonces toda función con decrecimiento subexponencial tienen un único punto fijo como atractor global.

**Lema 3.2.** Sea  $(M, d)$  espacio métrico. Una función  $f : M \rightarrow M$  tiene decrecimiento subexponencial si, y sólo si, existe una métrica  $d'$  en  $M$ , equivalente a  $d$ , en la cual  $f$  es contracción.

**Demostración.** Suponga que  $C \geq 1$  y  $0 < \alpha < 1$  son tales que se cumple (3.3). Sea  $N \geq 1$  el primer entero tal que  $C\alpha^N < 1$ , definimos:

$$d'(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} d(f^n(x), f^n(y)), \quad x, y \in M.$$

Es muy fácil verificar que  $d'$  es una métrica sobre  $M$  y que además satisface

$$d(x, y) \leq d'(x, y) \leq ad(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in M,$$

donde  $a = 1 + C\alpha + \dots + C\alpha^{N-1}$ . Sigue por tanto que

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &= \sum_{n=0}^{N-1} d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) \\ &= \sum_{n=1}^N d(f^n(x), f^n(y)) = d'(x, y) + d(f^N(x), f^N(y)) - d(x, y) \\ &\leq d'(x, y) + (C\alpha^N - 1)d(x, y) \leq C\alpha^N d'(x, y), \end{aligned}$$

con lo cual  $f$  es una contracción en  $d'$ .

Recíprocamente, supongamos que  $d$  y  $d'$  son métricas equivalentes en  $M$ ; de hecho sean  $0 < a < b$  tales que , para cada  $x, y \in M$  vale

$$ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq bd(x, y).$$

Sea  $0 < \beta < 1$  tal que  $d'(f(x), f(y)) \leq \beta d'(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ . Entonces, para  $n \geq 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(y)) &\leq \frac{1}{a} d'(f^n(x), f^n(y)) \\ &\leq \frac{1}{a} \beta^n d'(x, y) \\ &\leq \frac{b}{a} \beta^n d'(x, y). \end{aligned}$$

De donde  $f$  tiene decrecimiento subexponencial. ■

De este lema es inmediato el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.** *Dado un espacio métrico  $(M, d)$ , un SIF  $(M; f_1, \dots, f_n)$  es hiperbólico si, y sólo si, existe una métrica  $d'$  equivalente a  $d$  tal que cada  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tiene decrecimiento subexponencial.*

De acá que, como consecuencia del corolario 2.2, se tiene:

**Corolario 3.2.** *Si  $(M, d)$  es completo y  $(M; f_1, \dots, f_n)$  es un SIF hiperbólico, entonces existe un único  $A^* \in \mathcal{H}(M)$  tal que  $\{\mathcal{F}^k(A)\}_{k \geq 0}$  converge a  $A^*$  para todo  $A \in \mathcal{H}(M)$ , siendo que  $A^*$  es el único punto fijo de  $\mathcal{F}$ .*

Observemos que en cualquier caso, si un SIF  $(M; f_1, \dots, f_N)$  es tal que el operador de Hutchinson  $\mathcal{F}$  asociado tiene un punto fijo  $A^*$  que es el atractor global del sistema dinámico en  $\mathcal{H}(M)$  dado por  $\mathcal{F}$ . Así pues para obtener el atractor  $A^*$  podemos tomar cualquier compacto  $B \in \mathcal{H}(M)$  y calcular el límite de la sucesión  $\{\mathcal{F}^m(B)\}_{m \geq 0}$  en la métrica  $h$ . Entonces es necesario conocer cómo se expresa  $\mathcal{F}^m(B)$  (una aproximación de  $A^*$ ) para cualquier entero  $m \geq 1$ . En primer lugar, se sabe por definición del operador de Hutchinson que  $\mathcal{F}(B) = f_1(B) \cup \dots \cup f_N(B)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2(B) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}(B)) = f_1(\mathcal{F}(B)) \cup \dots \cup f_N(\mathcal{F}(B)) \\ &= \bigcup_{j=1}^N f_j(f_1(B) \cup \dots \cup f_N(B)) \\ &= \bigcup_{j=1}^N (f_j \circ f_1(B) \cup \dots \cup f_j \circ f_N(B)) = \bigcup_{i,j=1}^N f_j \circ f_i(B). \end{aligned}$$

Por recurrencia se obtiene la expresión  $\mathcal{F}^m(B) = \bigcup_{J_m} (f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_m}(B))$ , donde  $J_m, m \geq 1$ , denota el conjunto de todos los  $m$ -índices  $i_1, \dots, i_m$  con cada  $i_k \in \{1, \dots, N\}$  para todo  $k = 1, \dots, m$ . Esto es  $\mathcal{F}^m(B)$  es la unión de los  $N^m$  compactos  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_m}(B), i_1 \dots i_m \in J_m$ .

Esta descripción de  $\mathcal{F}^m(B)$  implica las siguientes afirmaciones:

- (1) para todo  $i = 1, \dots, N$ ,  $f_i(A^*) \subset A^*$ ; y
- (2) si  $p_i \in M$  es el punto fijo de  $f_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), entonces  $p_i \in A^*$ .

La demostración de (1), sigue del hecho que

$$\mathcal{F}(A^*) = A^* = f_1(A^*) \cup \cdots \cup f_N(A^*).$$

Para verificar (2) tomemos el compacto  $B = \{p_1, \dots, p_N\}$ . Para cada  $m \geq 1$  y cada  $i \in \{1, \dots, N\}$  consideremos el  $m$ -índice  $i \cdots i$ . Luego

$$p_i \in f_i \circ \cdots \circ f_i(B) = f_i^m(B) = \{f_i^m(p_1), \dots, f_i^m(p_i), \dots, f_i^m(p_N)\},$$

de donde  $p_i \in \mathcal{F}^m(B)$ . Esto implica (2). Pues la sucesión  $\{x_m\}_{m \geq 1}$  con  $x_m = p_i$  para todo  $m \geq 1$ , es tal que  $x_m \in \mathcal{F}(B)$  y  $x_m \rightarrow p_i$ .

Pasamos a introducir el concepto de *SIF fibrado por puntos*, para ello es requerida la noción de código de un SIF.

**Definición 3.6.** Una función continua  $\pi : \Omega_N \rightarrow M$  : es llamada *código* para el sistema iterado de funciones  $\mathcal{F} = (M; f_1, \dots, f_N)$  si, y sólo si, para cada  $n = 1, 2, \dots, N$  el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_N & \xrightarrow{s_n} & \Omega_N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f_n} & M \end{array} \quad (3.4)$$

Donde el símbolo  $s_n : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ , denota la sección transversal  $n$ -ésima.

**Definición 3.7. (SIF Fibrado por puntos)** Un SIF  $\mathcal{F} = (M; f_1, \dots, f_N)$ , es *fibrado por puntos* si, y sólo si, para cada  $\sigma = \{\sigma_n\}_{n \geq 1} \in \Omega_N$  el límite

$$\pi(\sigma) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \cdots \circ f_{\sigma_k}(x) \quad (3.5)$$

existe y es independiente de  $x \in M$  para cada  $\sigma \in \Omega_N$ .

Si  $\mathcal{F} = (M; f_1, \dots, f_N)$  es un SIF fibrado por puntos, entonces es simple verificar que la función  $\pi$  arriba definida es un código; de hecho, es el único del SIF.

En el siguiente capítulo mostraremos la primera parte del teorema A; es decir, todo SIF hiperbólico es un SIF fibrado por puntos, y en todo SIF fibrado

por puntos el correspondiente operador de Hutchinson tiene un punto fijo como atractor global.

A continuación mostraremos algunos ejemplos ilustrativos sobre sistemas iterados de funciones.

**Ejemplo 3.1 (Triángulo de Sierpinski).** Waclaw Sierpinski nació en Varsovia (antiguo Imperio Ruso) en 1882 y muere en la misma ciudad (actual Polonia) en 1969. Las principales contribuciones matemáticas de Sierpinski fueron en las áreas de Teoría de Conjuntos, Topología y Teoría de Números. Publicó más de 700 artículos y 50 libros.

El triángulo de Sierpinski es una estructura fractal que puede ser obtenida a través de diferentes SIF, conocidos como SIF afines. Waclaw Sierpinski fue quien describió algunas de sus interesantes propiedades en 1916; entre ellas, su carácter fractal y auto-similar. Originalmente el triángulo de Sierpinski fue producido a partir de un triángulo equilátero y sustrayendo el triángulo equilátero central; ver la figura abajo.

Acá emplearemos el siguiente SIF afín  $(\mathbb{R}^2, f_1, f_2, f_3)$  el cual fácilmente se puede verificar, es contractivo y donde cada una de las funciones viene dada por:

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es simple verificar que el cuadrado  $B = [0, 1] \times [0, 1]$  es invariante por estas transformaciones afines; esto es,  $f_i(B) \subset B$  para todo  $i = 1, 2, 3$ . De hecho,  $B$  es transformado por  $f_1, f_2, f_3$ , respectivamente en los cuadrados  $f_1(B) = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ ,  $f_2(B) = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  y  $f_3(B) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Equivalentemente:

$$\mathcal{F}(B) = ([0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]) \cup ([0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \cup ([\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]),$$

al repetir este procedimiento una vez más, obtenemos  $\mathcal{F}^2(B)$  que es la unión de 9 cuadrados: cada uno de los cuadrados del paso anterior generan 3 subcuadrados; ver la figura que se muestra a continuación. Al proseguir un elevado número de veces, obtendremos una aproximación del triángulo de Sierpinski, tal y como se muestra a continuación.

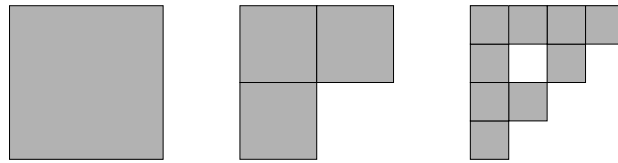


Figura 3.1: Estas gráficas muestran a  $B$ ,  $F(B)$  y  $F^2(B)$  respectivamente.

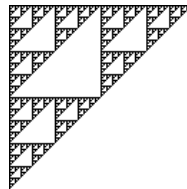


Figura 3.2:  $F^m(B)$  para  $m$  suficientemente grande.

**Ejemplo 3.2 (Alfombra de Sierpinski).** Esta es otra figura fractal atribuida a W. Sierpinski, ésta se obtiene como el atractor de un SIF definido mediante ocho transformaciones afines en  $\mathbb{R}^2$ . A continuación definimos estas



transformaciones; primero sea  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, f_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ f_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, f_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ y} \\ f_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El operador de Hutchinson  $\mathcal{F}$  asociado a  $\{f_1, \dots, f_8\}$  transforma el cuadrado unitario  $B$  en ocho cuadrados,  $f_i(B)$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), de lado  $3^{-1}$  cuyo vértice inferior izquierdo están ubicados, respectivamente, en los puntos de  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ . Al aplicar nuevamente  $\mathcal{F}$  sobre cada uno de estos ocho cuadrados obtenemos  $8^2$  cuadrados de lado  $3^{-2}$ ; al repetir el proceso un determinado número de veces estaremos observando una aproximación de esta alfombra fractal.

La siguiente figura muestra varios iterados de  $B$  mediante el operador de Hutchinson de este SIF.

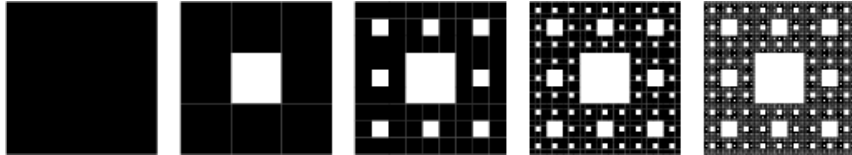


Figura 3.3: Obtención de la alfombra de Sierpinski por SIF

**Ejemplo 3.3 (Caja Fractal).** Este es otro fractal que se obtiene como atractor del SIF cuyas contracciones son las transformaciones afines:

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, f_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

El proceso de obtención de una aproximación al atractor del SIF es como antes. La siguiente figura muestra varios iterados del cuadrado unitario mediante el operador de Hutchinson  $F$  asociado al SIF.



Figura 3.4: Iterados del cuadrado unitario por el operador de Hutchinson del SIF del ejemplo 3.3 cuyo atractor se conoce como Caja Fractal.

**Ejemplo 3.4.** Consideremos por ejemplo la hoja de helecho de la figura anexa. Esta figura podemos aproximarla mediante el atractor de cuatro contracciones afines:

$$f_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq 4,$$

donde la tabla de valores de los coeficientes de las contracciones es:

$f_i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$
1	0	0	0	0.16	0	0
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44



**Ejemplo 3.5 (Un SIF afín no hiperbólico).** Sea  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^2; f_0, f_1)$ , donde

$$f_0(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1, x_2\right), \quad f_1(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}, x_2\right).$$

Es fácil verificar que  $\pi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$  con  $\Omega_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  y  $\pi(\sigma) = (\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_n}{2^n}, 0)$  es un código para  $\mathcal{F}$ . No obstante, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_{\sigma_k}(x_1, x_2) = (0, \sigma, x_2)$$

depende de la escogencia del punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , este SIF no puede ser fibrado por puntos. Aunque del enunciado del teorema A sigue que  $\mathcal{F}$  no es hiperbólico; esto se puede deducir inmediatamente del hecho que las funciones  $f_0$  y  $f_1$  son afines y la matriz correspondiente a ambas es la misma,  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la cual tiene como un autovalor a  $\lambda = 1$ . Esto hace imposible que ambas funciones tengan decrecimiento subexponencial. Por otra parte, dado que  $\pi(\Omega_2) = [0, 1] \times \{0\}$ , su cápsula afín es el eje  $x_1$ ; es decir  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , que es el menor subespacio afín de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $\pi(\Omega_2)$ . En este caso es obvio que  $\mathcal{F}$  restricto a  $\mathbb{R} \times \{0\}$  es hiperbólico con atractor  $\pi(\Omega_2)$ . Esto ilustra el teorema B.

**Ejemplo 3.6. (Un SIF fibrado por puntos, no contractivo)**

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por la matriz

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $f$  define un SIF afín en  $\mathbb{R}^2$ . Como la matriz tiene autovalores  $\pm \frac{1}{2}$  entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esto significa que el SIF es fibrado por puntos; no obstante, no es contractivo pues

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El teorema A, sin embargo garantiza que podemos reparametrizar  $\mathbb{R}^2$  con una métrica equivalente a la usual tal que  $f$  sea una contracción.



## Resultados principales

Este capítulo, contiene la demostración de los dos teoremas principales, las cuales se realizarán por partes. Antes recordemos sus enunciados.

**Teorema A.** Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín, entonces son equivalentes:

- i)  $\mathcal{F}$  es hiperbólico.
- ii)  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos.
- iii)  $\mathcal{F}$  tiene un atractor.
- iv)  $\mathcal{F}$  es una contracción topológica respecto a algún cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^m$ .
- v)  $\mathcal{F}$  es no antipodal respecto a algún cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^m$ .

**Teorema B.** Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín con código,  $\pi : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces  $\mathcal{F}$  es hiperbólico sobre la cápsula afín de  $\pi(\Omega_N)$ . En particular, si  $\pi(\Omega_N)$  contiene un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $\mathcal{F}$  es hiperbólico en  $\mathbb{R}^m$ .

### 4.1. Un SIF hiperbólico es fibrado por puntos y tiene un atractor

En esta sección se presentan las demostraciones de las implicaciones: (1)  $\Rightarrow$  (2) y (2)  $\Rightarrow$  (3) del teorema A. También introducimos la notación

$$f_{\sigma|k}(x) = f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(x).$$

Note que para  $k \geq 1$  fijo,  $f_{\sigma|k}(x)$  es una función de  $x$  y  $\sigma$ .

**Teorema 4.1.** *Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un SIF hiperbólico, entonces  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos.*

**Demostración.** Dado que el SIF  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es hiperbólico, escogemos una métrica  $d$  equivalente a la euclidiana en  $\mathbb{R}^m$  en la cual cada una de las funciones del SIF son contracciones; tomemos  $0 < \alpha < 1$  tal que para cada  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^m$  se cumple

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

En primer lugar por inducción probemos que

$$d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k+1}(x)) \leq \alpha^k a_x, \quad (4.1)$$

donde  $a_x = \max\{d(x, f_1(x)), \dots, d(x, f_N(x))\}$ . En efecto, si  $k = 1$  entonces,

$$\begin{aligned} d(f_{\sigma|1}(x), f_{\sigma|2}(x)) &= d(f_{\sigma_1}(x), f_{\sigma_1}(f_{\sigma_2}(x))) \leq \alpha d(x, f_{\sigma_2}(x)) \\ &\leq \alpha a_x. \end{aligned}$$

Para  $k = 2$  tenemos,

$$\begin{aligned} d(f_{\sigma|2}(x), f_{\sigma|3}(x)) &= d(f_{\sigma_1}(f_{\sigma_2}(x)), f_{\sigma_1}(f_{\sigma_2}(f_{\sigma_3}(x)))) \\ &\leq \alpha d(f_{\sigma_2}(x), f_{\sigma_2}(f_{\sigma_3}(x))) \\ &\leq \alpha^2 d(x, f_{\sigma_3}(x)) \\ &\leq \alpha^2 a_x. \end{aligned}$$

Suponga que se cumple 4.1 para  $k = r$  es decir

$$d(f_{\sigma|r}(x), f_{\sigma|r+1}(x)) \leq \alpha^r a_x$$

y demostraremos que se cumple para  $k = r + 1$

$$\begin{aligned} d(f_{\sigma|r+1}(x), f_{\sigma|r+2}(x)) &= d(f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_{r+1}}(x), f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_{r+2}}(x)) \\ &= d(f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_r}(f_{\sigma_{r+1}}(x)), f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_{r+1}}(f_{\sigma_{r+2}}(x))) \\ &= d(f_{\sigma|r}(f_{\sigma_{r+1}}(x)), f_{\sigma|r+1}(f_{\sigma_{r+2}}(x))) \\ &\leq \alpha^k d(f_{\sigma_{r+1}}(x), f_{\sigma_{r+2}}(x)) \\ &\leq \alpha^{r+1} d(x, f_{\sigma_{r+2}}(x)) \\ &\leq \alpha^{r+1} a_x \end{aligned}$$

Así queda demostrado (4.1).

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k+p}(x)) &\leq d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k+1}(x)) + \cdots + d(f_{\sigma|k+p-1}(x), f_{\sigma|k+p}(x)) \\
 &\leq \alpha^k a_x + \cdots + C\alpha^{k+p-1} a_x \\
 &= \alpha^k \sum_{j=0}^{p-1} \alpha^j \\
 &\leq a_x \alpha^k \sum_{j \geq 0} \alpha^j = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} a_x.
 \end{aligned}$$

De acá tenemos que para  $k$  suficientemente grande, los términos de la sucesión  $\{f_{\sigma|k}\}_{k \geq 1}$  están cercanos; en otras palabras  $\{f_{\sigma|k}\}_{k \geq 1}$  es de Cauchy. Por lo tanto, esta es una sucesión convergente. Sea  $\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x)$ , debemos demostrar que para todo  $y \in \mathbb{R}^m$   $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(y) = \hat{x}$ .

Sea  $y \in \mathbb{R}^m$  y suponga que existe  $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$   $\hat{y} \neq \hat{x}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(y) = \hat{y}$ . Ahora bien, para cada  $k \geq 1$  vale:

$$0 < d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k}(y)) \leq \alpha^k d(x, y).$$

Por lo tanto,  $\hat{x} = \hat{y}$ . Así  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x)$  no depende de  $x$ . Por otra parte, es fácil ver que, para cada  $n = 1, 2, \dots, N$ , el diagrama (3.4) conmuta. Sólo nos queda probar que  $\pi$  es continua. Para  $\sigma, \tau \in \Omega_N$  y cualquier  $x \in \mathbb{R}^m$ , vale

$$\begin{aligned}
 d(\pi(\sigma), \pi(\tau)) &= d(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x), \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\tau|k}(x)) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_{\sigma|k}(x), f_{\tau|k}(x)).
 \end{aligned}$$

Sea  $\epsilon > 0$ , por ser  $\{f_{\sigma|k}(x)\}_{k \geq 1}$  y  $\{f_{\tau|k}(x)\}_{k \geq 1}$  sucesiones de Cauchy, podemos escoger  $M \geq 1$  tal que si  $p \geq 1$ , entonces

$$d(f_{\sigma|M}(x), f_{\sigma|M+p}(x)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } d(f_{\tau|M}(x), f_{\tau|M+p}(x)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, para todo  $\sigma, \tau \in \Omega_N$  tal que  $\sigma_j = \tau_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  se cumplen

$$d(f_{\sigma|M}(x), f_{\sigma|M+p}(x)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } d(f_{\tau|M}(x), f_{\tau|M+p}(x)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, para todo  $k \geq M$  se tiene

$$\begin{aligned} d(f_{\sigma|k}(x), f_{\tau|k}(x)) &\leq d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|M}(x)) + d(f_{\sigma|M}(x), f_{\tau|k}(x)) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que  $d(\pi(\sigma), \pi(\tau)) < \epsilon$ , siempre que  $\sigma$  y  $\tau$  coincidan entre 0 y  $M$ . Por tanto  $\pi$  es continua; en consecuencia  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos. ■

Note que en el enunciado del teorema anterior se puede sustituir  $\mathbb{R}^m$  por cualquier espacio métrico completo sin alterar la conclusión.

**Lema 4.1.** *Sea  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  un SIF afín fibrado por puntos con código  $\pi : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$  es compacto, entonces la convergencia en el límite  $\pi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x)$  es uniforme en  $\sigma \in \Omega_N$  y  $x \in \mathcal{B}$  simultáneamente; esto es, para cada  $\sigma \in \Omega_N$ ,  $x \in \mathcal{B}$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \geq 1$  tal que, para todo  $k \geq k_0$  se cumple*

$$d(f_{\sigma|k}(x), \pi(\sigma)) < \epsilon.$$

**Demostración.** Observe que sólo la uniformidad requiere ser demostrada. Antes es importante hacer notar que del hecho de ser  $\Omega_N$  compacto,  $\pi$  continua y definida, independientemente de  $x \in \mathbb{R}^m$ , por  $\pi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{\sigma|k}(x)$ , sigue que para cualquier  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \geq 1$  tal que, si  $k \geq k_0$  y  $\sigma \in \Omega_N$ , entonces  $\|f_{\sigma|k}(x) - \pi(\sigma)\|_2 < \epsilon$ , donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^m$ .

Procedamos ahora con la demostración de la uniformidad, para ello hagamos  $f_n(x) = L_n(x) + a_n$ , donde  $L_n$  es una transformación lineal y  $a_n$  es un vector constante.

Tomemos cualquier  $\sigma \in \Omega_N$  y  $x \in \mathcal{B}$ . Claramente

$$f_{\sigma|1}(x) = f_{\sigma_1}(x) = L_{\sigma_1}(x) + a_{\sigma_1};$$

además,

$$\begin{aligned} f_{\sigma|2}(x) &= f_{\sigma_1}(f_{\sigma_2}(x)) \\ &= L_{\sigma_1}(L_{\sigma_2}(x) + a_{\sigma_2}) + a_{\sigma_1} \\ &= L_{\sigma|2}(x) + L_{\sigma_1}(a_{\sigma_2}) + a_{\sigma_1} \\ &= L_{\sigma|2}(x) + f_{\sigma|2}(0). \end{aligned}$$



Usando recurrencia, tenemos para cada entero  $k \geq 1$ :

$$f_{\sigma|k}(x) = L_{\sigma|k}(x) + f_{\sigma|k}(0). \quad (4.2)$$

Por otro lado, de la identidad (4.2) se sigue que para todo  $x, y \in \mathcal{B}$  vale:

$$d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k}(y)) = \|L_{\sigma|k}(x - y)\|_2.$$

Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  es una base de  $\mathbb{R}^m$ , entonces al escribir  $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$  e  $y = \sum_{i=1}^m \beta_i e_i$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|L_{\sigma|k}(x - y)\|_2 &\leq \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i L_{\sigma|k}(e_i) \right\|_2 + \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i L_{\sigma|k}(e_i) \right\|_2 \\ &= \sum_{i=1}^m (|\alpha_i| + |\beta_i|) \|L_{\sigma|k}(e_i)\|_2 \\ &\leq \sup \left\{ 2 \sum_{i=1}^m |c_i| \|L_{\sigma|k}(e_i)\|_2 : \sum_{i=1}^m c_i e_i \in \mathcal{B} \right\} \\ &\leq c \max_i \{ \|f_{\sigma|k}(e_i) - f_{\sigma|k}(0)\|_2 : i = 1, \dots, m \}, \end{aligned}$$

donde  $c = 2m \sup \{ \max_{1 \leq j \leq m} |c_j| : c_1 e_1 + \dots + c_m e_m \in \mathcal{B} \}$ . Así,

$$d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k}(y)) \leq c \max_i \{ \|f_{\sigma|k}(e_i) - f_{\sigma|k}(0)\|_2 : i = 1, \dots, m \}. \quad (4.3)$$

Sea  $\epsilon > 0$ ; de la definición de fibrado por puntos existe  $k_j$ , independiente de  $\sigma$ , tal que si  $k > k_j$ , entonces  $\|f_{\sigma|k}(e_j) - \pi(\sigma)\|_2 < \frac{\epsilon}{4c}$  y  $\|f_{\sigma|k}(0) - \pi(\sigma)\|_2 < \frac{\epsilon}{4c}$ , lo cual implica  $\|f_{\sigma|k}(e_j) - f_{\sigma|k}(0)\|_2 < \frac{\epsilon}{2c}$ . Esto y la identidad (4.3) implica que si  $k \geq \bar{k} := \max_j k_j$ , entonces para cualquier  $x, y \in \mathcal{B}$  tenemos

$$d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k}(y)) < c \frac{\epsilon}{2c} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.4)$$

Sea  $b$  un elemento fijo de  $\mathcal{B}$ . Existe un  $k_b$ , independiente de  $\sigma$ , tal que si  $k > k_b$ , entonces por la identidad (4.4), para cualquier  $x \in \mathcal{B}$ ,

$$d(f_{\sigma|k}(x), \pi(\sigma)) \leq d(f_{\sigma|k}(x), f_{\sigma|k}(b)) + d(f_{\sigma|k}(b), \pi(\sigma)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así la demostración está completa. ■

El siguiente resultado es justo (2)  $\Rightarrow$  (3) en el teorema A.

**Teorema 4.2.** *Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un SIF fibrado por puntos, entonces  $\mathcal{F}$  tiene como atractor al compacto  $A = \pi(\Omega_N)$ , donde  $\pi : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el código de  $\mathcal{F}$ .*

**Demostración.** Sigue directamente del diagrama conmutativo (3.4) que  $A$  obliga la ecuación auto-referencial (3.1). En lo siguiente demostraremos que  $A$  satisface la ecuación (3.2). Sea  $\epsilon > 0$ . Debemos demostrar que existe  $M$  tal que si  $k > M$ , entonces  $h(\mathcal{F}^k(B), \pi(\Omega)) < \epsilon$ , donde  $B$  es cualquier elemento de  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Es suficiente tomar  $M$  como  $\max(M_1, M_2)$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son seleccionadas como sigue:

Primero, sea  $a$  un elemento arbitrario de  $A$ . Entonces existe  $\sigma \in \Omega_N$  tal que  $a = \pi(\sigma)$ . Por el lema 4.1 existe  $M_1$  tal que  $k > M_1$ , implica

$$d(f_{\sigma|k}(b), a) = d(f_{\sigma|k}(b), \pi(\sigma)) < \epsilon,$$

para todo  $b \in B$ . Esto implica que  $A$  está en una  $\epsilon$ -vecindad de  $\mathcal{F}^k(B)$ .

Segundo, sea  $b$  un elemento arbitrario de  $B$  y  $\sigma$  un elemento arbitrario de  $\Omega_N$ . Si  $a := \pi(\sigma) \in A$ , entonces existe  $M_2$  tal que  $k > M_2$ , implica

$$d(f_{\sigma|k}(b), a) = d(f_{\sigma|k}(b), \pi(\sigma)) < \epsilon.$$

Esto implica que  $\mathcal{F}^k(B)$  está en una  $\epsilon$ -vecindad de  $A$ . De esto y lo anterior sigue que  $h(\mathcal{F}^k(B), A) < \epsilon$ . ■

## 4.2. Atractores y contracciones topológicas

El propósito de esta sección es demostrar (3)  $\Rightarrow$  (4) en el teorema A; más explícitamente ofrecemos una demostración del teorema:

**Teorema 4.3.** *Para un SIF afín  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$ , si existe un atractor  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$  de el SIF, entonces  $\mathcal{F}$  es contractivo topológicamente.*

Es necesario precisar algunos términos del enunciado anterior, y conocer algunos resultados preliminares, la mayoría de los cuales o bien son evidentes, o pueden encontrarse en el libro [10].

**Definición 4.1.** Un cuerpo convexo es un subconjunto compacto convexo de  $\mathbb{R}^m$  con interior no vacío.

**Definición 4.2.** Un cuerpo convexo  $K$  es centralmente simétrico si tiene la siguiente propiedad:  $x \in K$  si, y sólo si,  $-x \in K$ .

Un procedimiento estándar, y trivial, para producir cuerpos convexos centralmente simétricos es partir de un cuerpo convexo dado  $K$ , es simplemente el conjunto

$$K' = K - K = \{x - y : x, y \in K\}.$$

Fijemos un cuerpo convexo centralmente simétrico  $K$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^m$  se define

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}. \quad (4.5)$$

No es difícil mostrar que (4.5) define una norma sobre  $\mathbb{R}^m$ , denominada *norma de Minkowski*. Note que  $K$  es la bola unitaria cerrada con respecto a la norma (4.5). Obviamente la norma de Minkowski inducida por  $K$  permite definir la métrica de Minkowski, que es:

$$d_K(x, y) = \|x - y\|_K,$$

cualesquiera sean  $x, y \in \mathbb{R}^m$ . Claramente  $d_K$  y la métrica euclidiana son equivalentes.

Una interesante caracterización de las métricas de Minkowski es ofrecida en el libro [10]; esto es:

**Proposición 4.1.** Una métrica  $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty)$  es de Minkowski si, y sólo si, para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^m$  y cada  $\lambda \in [0, 1]$  se satisfacen:

$$\begin{cases} d(x + z, y + z) = d(x, y) \\ d(x, (1 - \lambda)x + \lambda y) = \lambda d(x, y) \end{cases} \quad (4.6)$$

**Definición 4.3.** Un SIF  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es llamado *contractivo topológicamente* si existe un cuerpo convexo  $K$  tal que  $\mathcal{F}(K) \subset \text{int}(K)$ .

La demostración del teorema 4.3 requiere de la siguiente propiedad de transformaciones afines la cual es muy simple de verificar.

**Lema 4.2.** *Si  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es afín y  $S \subset \mathbb{R}^m$ , entonces*

$$g(\text{conv}(S)) = \text{conv}(g(S)),$$

donde  $\text{conv}(S)$  es la cápsula convexa de  $S$ ; esto es, el menor conjunto convexo que contiene a  $S$ .

**Demostración del teorema 4.3.** La demostración de este teorema será dividida en tres pasos, los cuales enunciamos a seguir:

- (1) Existe un cuerpo convexo  $K_1$  y un entero positivo  $t$  con la propiedad que  $\mathcal{F}^t(K_1) \subset \text{int}(K_1)$ .
- (2) El conjunto  $K_1$  es usado para definir un cuerpo convexo  $K_2$ , tal que  $L_n(K_2) \subset \text{int}(K_2)$ , donde  $f_n(x) = L_n(x) + a_n$  y  $n = 1, 2, \dots, N$
- (3) Existe una constante positiva  $c$  tal que el conjunto  $K = cK_2$  tiene la propiedad  $\mathcal{F}(K) \subset \text{int}(K)$ .

**Demostración del paso (1).** Sea  $A$  el atractor del SIF  $\mathcal{F}$ . Para cada real positivo  $\rho$ , sea  $A_\rho = \{x \in \mathbb{R}^m : h(A, \{x\}) \leq \rho\}$  la  $\rho$ -dilatación compacta de  $A$ . Dado que  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(\mathcal{F}^k(A_\rho), A) = 0$ , para  $\rho = 1$  podemos encontrar un entero  $t$  tal que  $h(\mathcal{F}^t(A_1), A) < 1$ . Así,

$$\mathcal{F}^t(A_1) \subseteq \text{int}(A_1), \tag{4.7}$$

si tomamos  $K_1 := \text{conv}(A_1)$  y  $J_t$ , el conjunto de todos los  $t$ -índices  $i_1, \dots, i_t$  con  $i_k \in \{1, \dots, N\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^t(K_1) &= \bigcup_{J_t} (f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_t})(\text{conv}(A_1)) = \bigcup_{J_t} \text{conv}(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_t}(A_1)) \\ &\subseteq \bigcup_{J_t} \text{conv}(\text{int}(A_1)) = \text{conv}(\text{int}(A_1)) \subseteq \text{int}(\text{conv}(A_1)) = \text{int}(K_1); \end{aligned}$$

este argumento completa la demostración del paso (1).

***Demostración del paso*** (2). Considere el conjunto

$$K_2 := \sum_{k=0}^{t-1} (\text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1))).$$

El conjunto  $K_2$  es un cuerpo convexo centralmente simétrico porque es una suma finita de Minkowski de cuerpos convexos centralmente simétricos. Si cualquier aplicación afín  $f_n$  en  $\mathcal{F}$  es escrita como  $f_n = L_n(x) + a_n$ , donde  $L_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  denota una transformación lineal y  $a \in \mathbb{R}^m$  es un vector constante, entonces

$$\begin{aligned} L_n(K_2) &= \sum_{k=0}^{t-1} L_n(\text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1))) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} (\text{conv}(L_n(\mathcal{F}^k(K_1))) - \text{conv}(L_n(\mathcal{F}^k(K_1)))) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} (\text{conv}(f_n(\mathcal{F}^k(K_1))) - \text{conv}(f_n(\mathcal{F}^k(K_1)))) \\ &\subseteq \sum_{k=0}^{t-1} (\text{conv}(\mathcal{F}^{k+1}(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^{k+1}(K_1))) \\ &= (\text{conv}(\mathcal{F}^t(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^t(K_1))) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{t-1} (\text{conv}(\mathcal{F}^t(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^t(K_1))) \\ &\subseteq (\text{int}(K_1) - \text{int}(K_1)) + \sum_{k=1}^{t-1} (\text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1)) - \text{conv}(\mathcal{F}^k(K_1))) \\ &= \text{int}(K_2). \end{aligned}$$

La segunda de la última inclusión sigue de el efecto que  $f_n(\mathcal{F}^k(K_1)) \subset \mathcal{F}^{k+1}(K_1)$ .

La última igualdad sigue de el efecto que si  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}$  son cuerpos convexos centralmente simétricos en  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $\text{int}(\mathcal{O}) + \mathcal{C} = \text{int}(\mathcal{O} + \mathcal{C})$ . Tenemos ahora la demostración del paso (2) completa.

***Demostración del paso*** (3). Sigue del paso (2) y la compacidad de  $K_2$  que existe una constante  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $d_{K_2}(L_n(x), L_n(y)) < \alpha d_{K_2}(x, y)$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^m$  y todo  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Sea

$$c > \frac{r}{1 - \alpha},$$

donde  $r = \max\{d_{K_2}(a_1, 0), \dots, d_{K_2}(a_N, 0)\}$ . Si  $x \in cK_2$  y  $f(x) = L(x) + a$  es cualquier función en el SIF  $\mathcal{F}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{K_2} &= d_{K_2}(f(x), 0) = d_{K_2}(L(x) + a, 0) \\ &\leq d_{K_2}(L(x) + a, L(x)) + d_{K_2}(L(x), 0) \\ &= d_{K_2}(a, 0) + d_{K_2}(L(x), 0) \text{ (por la ecuación (4.6))} \\ &< r + \alpha d_{K_2}(x, 0) = r + \alpha \|x\|_{K_2} \\ &\leq r + \alpha c < (c - \alpha c) + \alpha c = c \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que  $\mathcal{F}(cK_2) \subset \text{int}(cK_2)$ . ■

### 4.3. Hiperbolicidad y SIF no antipodales

El propósito de esta sección es demostrar (4)  $\Rightarrow$  (5) y (5)  $\Rightarrow$  (1) del teorema A. Para ello se presentarán previamente algunas definiciones y propiedades que son necesarias para tales fines.

En primer lugar introducimos las nociones de pares antipodales y pares diametrales en un cuerpo convexo. En realidad se trata de los mismos objetos aunque con interpretaciones geométricas aparentemente distintas; remitimos a [7] y [9] para mayores detalles.

#### Pares antipodales

Sean  $K \subset \mathbb{R}^m$  un cuerpo convexo y  $u \in S^{m-1}$  (la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^m$ ). Puede demostrarse que existen únicos hiperplanos paralelos, distintos y perpendiculares a  $u$ ,  $H_u$  y  $H_{-u}$ , tales que:

- ambos intersectan a la frontera  $\partial K$  de  $K$  y no cortan el interior de  $K$ .

- $K$  está entre ambos hiperplanos.

El par  $\{H_u, H_{-u}\}$  es usualmente referido como los *hiperplanos soportes* de  $K$  ortogonales a  $u$ . Dados los conjuntos:

$$\mathcal{A}_u := \mathcal{A}_u(K) = \{(p, q) \in (H_u \cap \partial K) \times (H_{-u} \cap \partial K)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(K) = \bigcup_{u \in S^{m-1}} \mathcal{A}_u,$$

se dice que un par  $(p, q)$  es *antipodal* con respecto a  $K$  si  $(p, q) \in \mathcal{A}$ .

### Pares diametrales

Se define el diámetro de  $K$  en la dirección de  $u$  como el número real

$$D(u) = \text{máx}\{\|x - y\|_2 : x, y \in K, x - y = \alpha u, \alpha \in \mathbb{R}^m\}.$$

Note que el máximo en  $D(u)$  es alcanzado en algún par de puntos que pertenecen a  $\partial K$  puesto que  $K \times K$  es convexo y compacto, y  $\|x - y\|_2$  define una función continua en  $K \times K$ . Para los conjuntos

$$\mathcal{D}_u = \{(p, q) \in \partial K \times \partial K : \mathcal{D}(u) = \|p - q\|_2\} \text{ y } \mathcal{D} = \bigcup_{u \in S^{m-1}} \mathcal{D}_u,$$

se dice que el par  $(p, q) \in \mathcal{D}_u$  es *par diametral* en la dirección de  $u$ , y que  $\mathcal{D}$  es el conjunto de pares diametrales de  $K$ .

Tal y como lo adelantamos arriba, la identidad  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  es cierta en cualquier cuerpo convexo, y es un resultado geoméricamente relevante, cuya demostración no se incluye acá.

**Definición 4.4. (SIF no antipodal)** Si  $K \subset \mathbb{R}^m$  es un cuerpo convexo, una función  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  se dice *no antipodal* con respecto a  $K$ , si  $f(K) \subseteq K$  y  $(x, y) \in \mathcal{A}(K)$  implica que  $(f(x), f(y)) \notin \mathcal{A}(K)$ . Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín tal que cada  $f_n$  es no antipodal con respecto a  $K$ , entonces  $\mathcal{F}$  es llamado no antipodal con respecto a  $K$ .

La siguiente proposición demuestra (4)  $\Rightarrow$  (5) del teorema A. La demostración es consecuencia de la definición.

**Proposición 4.2. (Una contracción topológica es no antipodal)**

Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un sistema iterado de funciones afín con la propiedad que existe un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $f_n(K) \subset \text{int}(K)$  para todo  $n = 1, 2, \dots, N$  entonces  $\mathcal{F}$  es no antipodal con respecto a  $K$ .

El siguiente teorema demuestra (5)  $\Rightarrow$  (1) del teorema A.

**Teorema 4.4.** Si el SIF afín  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es no antipodal con respecto a un cuerpo convexo  $K$ , entonces  $\mathcal{F}$  es hiperbólico.

**Demostración.** Asuma que  $K$  es un cuerpo convexo tal que  $f$  es no antipodal con respecto a  $K$  para todo  $f \in \mathcal{F}$ .

Sean  $C = K - K$  y  $f(x) = L(x) + a \in \mathcal{F}$ , donde  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación lineal. El conjunto  $C$  es un cuerpo convexo centralmente simétrico y

$$L(C) = L(K) - L(K) = f(K) - f(K) \subseteq K - K = C.$$

Veamos que  $L(C) \subset \text{int}(C)$ . Dado que  $C$  es compacto y  $L$  es lineal, para demostrar lo anterior es suficiente demostrar que  $L(x) \notin \partial C$  para todo  $x \in \partial C$ . Por reducción al absurdo, asumimos que  $x \in \partial C$  y  $L(x) \in \partial C$ . Entonces el vector  $x$  es el vector con longitud máxima en  $C$  en esta dirección. Dado que  $x \in C = K - K$  existen  $x_1, x_2 \in \partial K$  tales que  $x = x_1 - x_2$ , y  $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} = \mathcal{A}$ , recordemos que esto es porque el conjunto de pares diametrales es igual al conjunto de pares antipodales. Así  $(x_1, x_2)$  es un par antipodal con respecto a  $K$ . Sin embargo, dado que  $L(x)$  es el vector de longitud máxima en  $C$  en esta dirección, existen  $y_1, y_2 \in \partial K$  tales que  $L(x) = y_1 - y_2$ , y  $(y_1, y_2) \in \mathcal{D} = \mathcal{A}$ ; de aquí:

$$f(x_2) - f(x_1) = L(x_2) - L(x_1) = L(x_2 - x_1) = L(x) = y_1 - y_2,$$

lo cual implica que  $(f(x_1), f(x_2)) \in \mathcal{D} = \mathcal{A}$ , esto contradice el hecho que  $f$  es no antipodal con respecto a  $K$ .



Si  $d_C$  es la métrica de Minkowski con respecto al cuerpo convexo centralmente simétrico  $C$ , entonces  $C$  es la bola unitaria centrada en el origen con respecto a esta métrica y dado que  $C$  es compacto, la contención  $L(C) \subset \text{int}(C)$  implica que existe un número  $\alpha \in [0, 1)$  tal que  $\|L(x)\|_C < \alpha\|x\|_C$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . Luego,

$$\begin{aligned} d_C(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\|_C = \|L(x) - L(y)\|_C \\ &= \|L(x - y)\|_C < \alpha\|x - y\|_C = \alpha d_C(x, y). \end{aligned}$$

De aquí  $d_C$  es una métrica para la cual cada función en el SIF es una contracción, y como  $d_C$  es equivalente a la métrica euclidina de  $\mathbb{R}^m$  concluimos que,  $\mathcal{F}$  es hiperbólico. ■

## 4.4. Respuesta a la pregunta de Kameyama

Ahora retornamos a la prueba del teorema B, el resultado que da una respuesta parcial a la pregunta de Kameyama.

Si  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{F} = (X; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un SIF sobre  $X$ , entonces las definiciones de código y fibrado por puntos para  $\mathcal{F}$  son exactamente las mismas definiciones 3.6 y 3.7, con  $\mathbb{R}^m$  reemplazado por  $X$ . La prueba del teorema B requiere la siguiente proposición.

**Proposición 4.3.** *Si  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{F} = (X; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un SIF con código  $\pi : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi(\Omega_N) = X$ , entonces  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos sobre  $X$ .*

**Demostración.** Por la definición 3.7, debemos demostrar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x)$  existe, es independiente de  $x \in X$ , y es continua como una función de  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \in \Omega_N$ . Probaremos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma|k}(x) = \pi(\sigma)$ .

Dado que  $\pi$  es un código, sabemos por definición 3.6 que

$$f_n \circ \pi(\sigma) = \pi \circ s_n(\sigma),$$

para todo  $n = 1, 2, \dots, N$ . Por hipótesis, si  $x$  es cualquier punto en  $X$ , entonces existe un  $\tau \in \Omega_N$  tal que  $\pi(\tau) = x$ . Así

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(\pi(\tau)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(s_{\sigma_1} \circ s_{\sigma_2} \circ \dots \circ s_{\sigma_k} \circ \tau) \\ &= \pi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_{\sigma_1} \circ s_{\sigma_2} \circ \dots \circ s_{\sigma_k} \circ \tau\right) \\ &= \pi(\sigma). \end{aligned}$$

Con ello la demostración está completa.  $\blacksquare$

**Teorema 4.5.** *Si  $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \dots, f_N)$  es un SIF afín con código  $\pi : \Omega_N \rightarrow X$ , entonces  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos cuando se restringe a la cápsula afín de  $\pi(\Omega_N)$ . En particular, si  $\pi(\Omega_N)$  contiene un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$  no vacío, entonces  $\mathcal{F}$  es fibrado por puntos sobre  $\mathbb{R}^m$ .*

**Demostración.** Sea  $A := \pi(\Omega_N)$ . Dado que  $f_n(A) \subseteq A$  para todo  $n$ , la restricción de el SIF  $\mathcal{F}$  a  $A$ , digamos  $\mathcal{F}|_A := (A; f_1, f_2, \dots, f_N)$ , está bien definida. Se sigue de la proposición 4.3 que  $\mathcal{F}|_A$  es fibrado por puntos, y como el código para un SIF fibrado por puntos es único,

$$\pi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(a)$$

para  $(\sigma, a) \in \Omega_N \times A$ , sea  $aff(A)$  la cápsula afín de  $A$  sólo nos queda demostrar que la restricción  $\mathcal{F}|_{aff(A)} := (aff(A); f_1, f_2, \dots, f_N)$  a la cápsula afín de  $A$  es fibrado por puntos. Sea  $x \in aff(A)$ ; es bien conocido que cualquier punto en la cápsula afín puede expresarse como una suma,  $x = \sum_{p=0}^m \lambda_p a_p$  para algunos  $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum_{p=0}^m \lambda_p = 1$  y  $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$ . De aquí para  $(\sigma, x) \in \Omega_N \times aff(A)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}\left(\sum_{p=0}^m \lambda_p a_p\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^m \lambda_p f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(a_p) \\ &= \sum_{p=0}^m \lambda_p \pi(\sigma) = \pi(\sigma). \end{aligned}$$

■

El teorema B sigue fácilmente del teorema 4.5 y el teorema A.

***Demostración del teorema B.*** Sea  $A := \pi(\Omega_N)$  y sea  $\dim(\text{aff}(A)) = k \leq m$ . Es fácil ver del diagrama conmutativo (3.4) que  $f(A) \subseteq A$  para cada  $f \in \mathcal{F}$ , de donde  $f(\text{aff}(A)) \subseteq \text{aff}(A)$ . Dado que  $\text{aff}(A)$  es isomorfo afín a  $\mathbb{R}^k$ , el teorema A puede aplicarse a el SIF  $\mathcal{F}|_{\text{aff}(A)} := (\text{aff}(A); f_1, f_2, \dots, f_N)$  para concluir que, dado que éste es fibrado por puntos,  $\mathcal{F}|_{\text{aff}(A)}$  es también hiperbólico. ■



## Bibliografía

- [1] Atsushi Kameyama. *Distances on Topological Self-Similar Sets*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 72.1, 2004.
- [2] E. Lages Lima. *Espaços métricos*, Terceira Edição. Projeto Euclides. IMPA (2003).
- [3] M. F. Barnsley, *Fractal everywhere*. Morgan Kaufmann; 2nd edition (2000).
- [4] M. F. Barnsley, *Transformations between attractors of Hyperbolic Iterated Function Systems*. Preprint (2007) <http://arxiv.org/pdf/math/0703398>
- [5] M. F. Barnsley, *Transformations between fractals*. Preprint Mathematical Sciences Institute, Australian National University (2009) [www.superfractals.com/pdfs/GerFinal.pdf](http://www.superfractals.com/pdfs/GerFinal.pdf)
- [6] M. F. Barnsley and S. G. Demko, *Iterated function systems and the global construction of fractals*, *Proc., Roy. Soc. London Ser. A* 399 (1985) 243-275.
- [7] M. Moszyńska, *Selected Topics in Convex Geometry*, Birkhäuser, Boston (2006).
- [8] N. Romero y F. Sánchez *Introducción al estudio de los fractales* V TForMa. LUZ (2004)
- [9] R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince and D. Wilson *A characterization of hyperbolic affine iterated function systems* Preprint. arXiv:0908.1416v1 (2009) [www.superfractals.com/pdfs/FinalABVW.pdf](http://www.superfractals.com/pdfs/FinalABVW.pdf)

- [10] R. Tyrrel Rockafeller, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.