UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“El Teorema de Beurling.”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Vicky del Carmen Venegas Morillo.

como requisito final
para obtener el título de Licenciada
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis.
Tutor: M.Sc. Jurancy Ereú.

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2010

A Dios el dador de la vida, quien en su Infinito Amor y Misericordia me ha llenado de su fortaleza, perseverancia y sabiduría para hacer cumplir mis sueños. A mis padres y mi tutora Prof. Jurancy, que me han apoyado.

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a mi amado Padre Eterno Dios, el Todopoderoso, quien me diseñó desde antes de la creación del mundo para grandes cosas. Gracias a Él que me dio el privilegio de estudiar la carrera de Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

A mis amados padres María del Carmen Morillo, Luis Alfonzo Venegas, que me han enseñado a luchar y no desmayar, ser constante, perseverante y esforzarme para tener una vida mejor y estable.

A mis hermanos Anne, José Luis, María Rafaela, Luis Alfonzo, Génesi, Lydda y Jonás, no importa las circuntancias, Dios está de nuestro lado.

A mis amados sobrinos Cibel, Germán, Dilán y Yetsay, que con su ternura e inocencia de niños me han llenado de fe y esperanza para seguir luchando y hacer realidad mis sueños.

A mí amada abuelita María de los Santos, a mí tía Amelia que me abrió las puertas de su casa, sus consejos, y también ha sido como una madre para mí.

A mi tutora: M.Sc. Jurancy Ereú por su orientación, su apoyo y dedicación. Su gran colaboración fue esencial en la culminación de este trabajo de grado, siempre le estaré agradecida. Que Dios siga bendiciendo de manera sobrenatural su vida y la de los suyos.

A los profesores Miguel Vivas, Mireya Bracamonte, Yenny Rangel, por todo el conocimiento que con paciencia me trasmitieron. Los bendigo en el nombre de Jesús.

A mis amados Apóstoles Morela y José Alavad, los pastores José Alberto, Kristel, José María, Giovanna, Patricia, que me han instruido en los diseños de Dios, la palabra de vida Eterna, y dado el amor de una verdadera familia restaurada por el Poder de Dios. También a mis amados hermanos de la Iglesia Libertad en Cristo.

A mis amigos Andreina, Yulimar, Jeniré, Johaly, Carla, Juan, Sinaí, Wilmer. Les agradezco por todos los momentos inolvidables que pasamos en la Universidad.

Resumen

Sea S un operador lineal en un espacio de Banach X. Si un subespacio cerrado Y de X tiene la propiedad de $S(Y) \subset Y$, entonces Y es un **subespacio S-invariante**. Así los subespacios S-invariantes de X son exactamente aquellos que son mapeados dentro sí mismo por S.

En 1949, Arne Beurling caracterizó los subespacios invariantes por el operador shift en el espacio de Hilbert H^2 (espacio de Hardy) en el círculo unitario. Este operador es usualmente llamado el operador traslación en H^2, descrito como sigue:

$$S : H^2 \to H^2, \quad S(f)(z) = zf(z) \quad (f \in H^2, z \in \mathbb{D})$$

donde $H^2(\mathbb{D})$ es el espacio de todas las funciones analíticas en el disco unidad $\mathbb{D}$, definido como:

$$H^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \text{analítica} : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty \right\}.$$

La estructura de este trabajo presenta en un primer término una revisión detallada de los Espacios de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ y los subespacios cerrados S-invariantes de H^2, además usaremos el hecho del isomorfismo existente entre un espacio de Hilbert y ℓ^2, el cual convierte el operador shift S en un operador de multiplicación en H^2, y que nos permitirán tener una base teórica, la cual será necesaria para la demostración del Teorema de Beurling.

ÍNDICE

Capítulo 1

Preliminares.

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario dar algunas definiciones, resultados y notaciones que serán utilizadas para la mejor comprensión del trabajo, por lo cual se da inicio al mismo con este capítulo. Recordaremos una serie de definiciones topológicas y de estructura de espacio vectorial, junto con alguna de las relaciones existentes entre ellos y sus propiedades, útiles para nuestro posterior estudio.

También presentaremos una serie de nociones, ejemplos y resultados relativos al Análisis Funcional, centrándonos en aquellos espacios que son objetivos principales de nuestro estudio, esto es, los espacios de Banach e Hilbert.

1.1. Definiciones Básicas

1.1.1. Estructura de Espacio Vectorial

Definición 1.1.1. Espacio vectorial o **espacio lineal** sobre $\mathbb{K}$, es un conjunto X de objetos llamados vectores dotado de una operación $(+)$ de $X \times X$ en X llamada **adición** de vectores y una operación $(\cdot)$ de $\mathbb{K} \times X$ en X, llamada **multiplicación** de vectores por escalar que satisfacen las siguientes condiciones:

1. La adición es conmutativa y asociativa.

2. Existe el **vector nulo** $0 \in X$, a veces llamado el **origen** de X, tal que $x+0=x$ para todo $x \in X$.

3. Para todo escalar α, β y $x, y \in X$, se cumple $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ y $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

4. Para cada vector $x \in X$, existe el vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. Para cada vector x, $1x = x$.

Definición 1.1.2. Sea V un espacio vectorial real y considérese una aplicación

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot z. \end{array}$$

Dicha aplicación recibe el nombre de **producto escalar**, si para cada x, y, z en V y λ en $\mathbb{R}$ se verifica que

1. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

3. $(x, y) = (\overline{y, x})$,

4. $(x, x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$ y $(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 1.1.3. Sea X un espacio vectorial. **La norma en** X, es una función de valor real $\| \cdot \|$, en X que satisface las siguientes condiciones para todo elemento $x, y \in X$, y cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$ $\forall x \in X$ y
   $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Desigualdad Triangular)

Definición 1.1.4. Un espacio vectorial dotado de una norma, es llamado **espacio normado** y denotado por $(X, \| \cdot \|)$.

Observación 1.1.1. Toda norma induce una métrica, en la cual la distancia $d(x, y)$ entre dos puntos x, y se define por

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

La importancia de esto radica en que todo espacio normado se convierte en un espacio vectorial topológico.

Definición 1.1.5. Si f es una aplicación uno a uno (inyectiva) entre los espacios (X, d), $(Y, d^{'})$, tal que, para cualesquiera $x, y \in X$, $d(x, y) = d^{'}(f(x), f(y))$, se dice que f es una isometría y los dos espacios se llaman **isométricos**.

Definición 1.1.6. Sea E un espacio vectorial euclídeo. Para cualquier vector $\mathbf{x} \in E$, se define la norma de $\mathbf{x}$ como

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Ejemplo 1.1.1. En el espacio euclídeo usual de $\mathbb{R}^n$ se tiene la norma

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

1.2. Conjuntos Ortonormales

Definición 1.2.1. Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial, $x_1, ..., x_k \in \mathbb{V}$, y $c_1, ..., c_k$ son escalares en $\mathbb{K}$, entonces $c_1x_1 + ... + c_kx_k$ es llamado **combinación lineal** de $x_1, ..., x_k$.

Definición 1.2.2. El conjunto $\{x_1, ..., x_k\}$ es llamado **independiente linealmente** si $c_1x_1 + ... + c_kx_k = 0$ implica que $c_1 = ... = c_k = 0$.
Un conjunto es **linealmente dependiente** si no es independiente linealmente.

Definición 1.2.3. Un espacio con producto interno o pre-Hilbert es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle ., . \rangle : X \times X \to E$ (donde E es el campo escalar) con las siguientes propiedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Definición 1.2.4. Sean x,y vectores en $\mathbb{V}$. Se dice que x, y son ortogonales cuando

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Definición 1.2.5. Dado un espacio X pre-Hilbert, un **conjunto ortogonal** M de X es un subconjunto $M \subset X$, tal que

$$\forall x, y \in M, x \neq y, \langle x, y\rangle = 0.$$

M es una conjunto **ortonormal** si además de lo anterior, $\langle x, x\rangle = 1, \forall x \in M$.

Teorema 1.2.1. *Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio de Hilbert H. Si $M \neq H$, entoces existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que $y \perp M$.*

Demostración:
Ver [8], cap. 4, pág. 80.

1.3. Completitud entre espacios normados

Definición 1.3.1. Una función es derivable en un punto $z_o \in \Omega$ (Ω es un conjunto en el plano complejo) si existe

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

Definición 1.3.2. Una función f es **holomorfa ó analítica** si es derivable en cada punto de su dominio.

Definición 1.3.3. Una función $f : A \to B$ se dice **continua** si para cada $z_0 \in A$ y cualquier vecindad de $w_0 = f(z_0)$, $U(w_0)$, existe una vecindad $V(z_0)$ tal que $f(V(z_0)) \subset U(w_0)$.

Teorema 1.3.1. *Una función $f : A \to B$ es continua en z_0 si y sólo si $f(z_n) \to f(z_0)$ cada vez que $z_n \to z_0$.*

Demostración:
Ver [2], cap. 1, pág. 46.

Teorema 1.3.2. ***(Teorema de Morera)***
Si $f(z)$ es continua en un dominio D y $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado simple Γ en D, entonces $f(z)$ es analítica en D.

Demostración:
Ver [10], cap. 5, pág. 143.

Definición 1.3.4. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si

$$\forall\epsilon > 0, \exists N : \|x_m - x_n\| < \epsilon, \forall m, n > N.$$

Definición 1.3.5. Sea X un espacio normado. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si

$$\forall\epsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon$$

Definición 1.3.6. Una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ definida en un conjunto $R \subset \mathbb{C}$ se dice que **converge uniformemente** a una función $f(z)$ en R, si

$$\forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in R$$

Y escribiremos $f_n(z) \to f$ uniformemente en R.

Definición 1.3.7. Un espacio normado X es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.3.1. *Un subconjunto A de un espacio espacio métrico X es cerrado si y sólo si dada cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A y $x_n \to x$, entonces $x \in A$.*

Notación: Denotemos $\mathbb{D}$ el disco unitario abierto, y $\mathbb{T}$ el círculo unitario en el plano complejo $\mathbb{C}$ como:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

1.4. Series de Números Complejos

Definición 1.4.1. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, el símbolo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ denota la serie infinita de números complejos, la cual no es más que la sucesión de sumas parciales

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} z_k\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Una serie de números complejos se dice que **converge** o que es **convergente** si existe un número $S \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, a tal número S se le llama la suma de la serie y escribimos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

La serie se dice que **diverge** o que es **divergente** si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe.

Definición 1.4.2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se dice que **converge absolutamente** si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge.

Teorema 1.4.1. *Si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente, entonces la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge.*

Demostración:

Dado $\epsilon > 0$, sea $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, debido a que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente existe un entero N tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| < \epsilon$ si $m > N$. Así, si $m > k \geq N$, entonces

$$|s_m - s_k| = \left|\sum_{n=k+1}^{m} z_n\right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |z_n| < \epsilon$$

Así que la sucesión de sumas parciales S_n es de Cauchy, de donde S_n converge y en consecuencia la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

■

Teorema 1.4.2. ***(Producto de Cauchy)***
Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$*, además suponga que una de estas series es absolutamente convergente. Si* $c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$*.*

Demostración:
Ver [10], cap. 2, pág. 42.

1.4.1. Series de Funciones

Definición 1.4.3. Una **sucesión de funciones** es una función que asigna a cada número natural una función $f_n(z)$. A $f_n(z)$ se le llama el término n-ésimo de la sucesión.

Es bueno destacar que para cada z_0 fijo, la sucesión $f_n(z_0)$ es una sucesión numérica, así cuando $f_n(z)$ converge a $f(z)$ (puntualmente), es porque dado $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon, z)$, tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad para \quad n > N(\epsilon, z),$$

la convergencia de la sucesión de funciones $f_n(z)$ es **uniforme** en un conjunto A, cuando el $N(\epsilon, z)$ es el mismo, independientemente del valor del punto z, esto es cuando dado $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$, tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \text{para cada } z \in A \text{ y cada } n > N(\epsilon).$$

Definición 1.4.4. Sea $f_k(z) : A \to \mathbb{C}$, $(k = 1, 2, \cdots)$ una sucesión de funciones definidas sobre un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$. Se llama **serie de funciones** de término n-ésimo $f_n(z)$ a la sucesión de números complejos

$$\{S_k(z)\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{n=0}^{k} f_n(z) : z \in A \right\}$$

Definición 1.4.5. Se dice que la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

converge (respectivamente, converge absolutamente) en A, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$$

es convergente para todo $a \in A$ (respectivamente, converge absolutamente).

Definición 1.4.6. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ **converge uniformemente en un conjunto** A, si existe una función $S : A \to \mathbb{C}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe un N_0 dependiendo sólo de ϵ y no de z tal que si $n \geq N_0$ entonces:

$$\left| S(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in A.$$

En este caso, escribimos $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente sobre A, o equivalentemente, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A, si $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$, uniformemente sobre A, siendo $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.

Lema 1.4.1. *Si $f_n(z)$ converge uniformemente en Ω a una función $f(z)$ y cada $f_n(z)$ es continua en Ω entonces $f(z)$ es continua en Ω.*

Demostración:

Sea $z_0 \in \Omega$, entonces de la convergencia uniforme de $f_n(z)$ en Ω se tiene para $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $z \in \Omega$, y $n > N(\epsilon)$.

Pero ya que cada $f_n(z)$ es continua en Ω para este $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $N(\epsilon) > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_o)| \\
&\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $f(z)$ es continua en $z_0 \in \Omega$.

■

Teorema 1.4.3. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente sobre* A *y cada* $f_n(z)$ *es continua, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *es una función continua en* A.

Demostración:

Ver [10], cap. 2, pág. 51.

Teorema 1.4.4. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente en el intervalo* $[a,b]$ *y cada* $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *es continua, entonces*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(z)\, dz.$$

Demostración:

Sea $S_k(z) = \sum_{n=0}^{k} f_n(z)$, entonces $S(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n(z)$.

Así

$$\int_a^b S(z)\, dz = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(z)\, dz = \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(z)\, dz,$$

y por la linealidad de la integral, el resultado se tiene.

■

Teorema 1.4.5. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* f_n *converge uniformemente a* f *en* $[a,b]$, *entonces.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(z)\, dz = \int_a^b f(z)\, dz$$

Demostración:

La demostración se tiene del hecho que

$$\left| \int_a^b f_n(z)\, dz - \int_a^b f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f_n(z) - f(z)|\, dz,$$

y que $|f_n(z) - f(z)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, para $n > N(\epsilon)$ y todo $x \in [a,b]$.

■

1.5. Series de Fourier

Definición 1.5.1. Definimos a $L^p(\mathbb{T})$, para $1 \leq p < \infty$, como el conjunto de todas las funciones complejas con medida de Lebesgue, funciones 2π- periódicas en R^1, para el cual la norma:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definición 1.5.2. Para cualquier $f \in L^1(\mathbb{T})$, definimos los **coeficientes de Fourier** de f por la fórmula

$$\hat{f}(n) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right), (n \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

Así que asociamos con cada $f \in L^1(\mathbb{T})$ una función $\hat{f} \in \mathbb{Z}$. La **serie de Fourier** de f es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

y las sumas parciales son

$$S_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int} \qquad (N = 0, 1, 2, ...)$$

Puesto que $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, (1) puede ser aplicada a toda $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Teorema 1.5.1. ***(Teorema de Riesz-Fischer)***
Dada una sucesión de números complejos c_n tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

entonces existe una $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, (n \in \mathbb{Z})$$

Demostración:
Ver [8], cap. 17, pág. 341.

Teorema 1.5.2. ***(Teorema de Parseval)***
Este teorema asegura que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Demostración:
Ver [8], cap. 4, pág. 91.

1.6. Espacios de Banach

Definición 1.6.1. Un **Espacio de Banach** X es un espacio normado tal que toda sucesión de Cauchy es convergente (es decir, X es un espacio completo).

Podemos citar algunos ejemplos de espacios de Banach importantes como son:

- Para $1 \leq p < \infty$ el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ de todos las sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, las cuales satisfacen $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ dotado de la norma

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

  donde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, es un espacio de Banach.

- El espacio $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ denota el espacio normado de todas las sucesiones de valores escalares acotadas cuya norma se define como $\|\cdot\|_\infty = \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$, para $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$.

Teorema 1.6.1. ***(Desigualdad de Minkowski)***
Sea p un número real mayor que 1. Entonces para cualesquiera números complejos x_i, y_i con $i \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración:
Ver [8], cap. 3, pág. 63.

Teorema 1.6.2 (Desiguldad de Hölder)**.** *Sean p, q números reales mayores que 1 tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para cualesquiera números complejos x_i, y_j con $(i, j = 1, \cdots, n)$ se tiene que:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.7. Espacios de Hilbert

Definición 1.7.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Si H es dotado de un producto interno, decimos que es un espacio pre-Hilbertiano. Todo producto interno induce una norma en H de la forma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Si $(H, \|.\|)$ es un espacio de Banach decimos que $(H, \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Observación 1.7.1. En un espacio pre-Hilbertiano H se verifica la desigualdad de **Cauchy-Schawarz**, es decir; para cualesquiera $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

La igualdad se cumple si y sólo si x, y son linealmente dependientes.

En efecto
$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + 2Re\langle \lambda y, x \rangle$

Si legimos $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$, entonces

$0 \leq \|x\|^2 + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - 2\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$

$\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

■

Observación 1.7.2. Hay una condicion necesaria y suficiente para que una norma sea proveniente de un producto interno: la **Ley del Paralelogramo:**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

■

Nota 1.7.1. Un tipo particular de espacios de Banach son los **espacios de Hilbert**.

Ejemplo 1.7.1. El espacio de funciones medibles $L^2(S^1)$ (con medida de lebesgue) en S^1, definido como:

$$L^2(S^1) := \left\{ f : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2\, d\theta < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert, donde se define el producto interno dado por:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$$

Afirmación 1.7.1. Para cada entero n, $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ define una función en $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el conjunto

$$\{e_n \,:\, n \in \mathbb{Z}\},$$

es un conjunto ortonormal completo en L^2.

Demostración:
En primer lugar veamos que el conjunto $\{e_n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Por la definición de producto interno en L^2, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\overline{e^{im\theta}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta
\end{aligned}
$$

ahora estudiemos los casos cuando $n = m$ y $n \neq m$.

- Caso 1 : $n = m$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi = 1
\end{aligned}
$$

- Caso 2 : $n \neq m$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{u}\, \frac{du}{i(n-m)}, \text{ haciendo } u = i(n-m)\theta \Rightarrow du = i(n-m)d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta}) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{u}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}2isen((n-m)\pi)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left\langle e_n(e^{i\theta}), e_m(e^{i\theta})\right\rangle &= \frac{1}{(n-m)\pi} sen((n-m)\pi) \\
&= \frac{1}{2t} sen(t\pi) \;\text{ tomando } t = n-m \neq 0,\; t \in \mathbb{Z}, \text{ ya que } n, m \text{ lo están} \\
&= 0 \qquad \text{ya que } sen(t\pi) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Así tenemos que $\left\langle e^{in\theta}, e^{im\theta}\right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \; n = m, \\ 0, & \text{si } \; n \neq m. \end{cases}$

Sólo falta probar que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es completo, esto lo podemos ver en ([2], pág. 183-186).

Definición 1.7.2. ℓ^2 consiste de todas las colecciones de sucesiones de cuadrado sumable de números complejos. Esto es,

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Con producto interno dado por:

$$\langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

y la norma inducida por este producto interno es:

$$\|(a_n)_{n=0}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Proposición 1.7.1. $(\ell^2, \|.\|_2)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración:
Ver [2] cap. 4, pág. 95.

1.8. Espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$

Para $f \in H(\mathbb{D})$ y $r \in [0, 1)$, denotemos mediante $M_p(f; r)$ la media integral

$$M_p(f; r) := \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right]^{\frac{1}{p}}$$

Si $0 < p < \infty$, definimos el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ como el espacio vectorial de todas las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que

$$\sup_{0<r<1} M_p(f;r) < \infty$$

Definición 1.8.1. Para cualquier $f \in H(\mathbb{D})$ y $0 \leq p \leq \infty$ se tiene

$$\|f\|_p = \lim_{r\to 1} M_p(f;r)$$

Para $0 < p \leq \infty$, H^p consiste de todas las $f \in U)$ para la cual $\|f\|_p < \infty$.

Teorema 1.8.1. $(H^p, \|.\|_p)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:
Para $1 \leq p \leq \infty$, $\|.\|_p$ satisface la desigualdad triangular.
En efecto
aplicando la desigualdad de Minkowski a $M_p(f;r)$:

$$M_p(f+g;r) \leq M_p(f;r) + M_p(g;r) \qquad 0 \leq r < 1$$

Como $r \to 1$, obtenemos

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Así H^p es un espacio lineal normado.
Actualmente H^p es un *espacio de Banach*, si $1 \leq p \leq \infty$: probemos la completitud, Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H^p, $|z| \leq r < R < 1$, y aplicando la formula de Cauchy a $f_n \to f_m$, e integrando alrededor del círculo de radio R. Esto dirige a las desigualdades

$$(R-r)|f_n(z) - f_m(z)| \leq M_1(f_n - f_m; R) \leq M_p(f_n - f_m; R) \leq \|f_n - f_m\|_p$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a la función $f \in H(\mathbb{D})$. Dado $\epsilon > 0$, existe un m tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ para todo $n > m$, y entonces, para cada $r < 1$,

$$M_p(f_n - f_m; r) = \lim_{n\to\infty} M_p(f_n - f_m; r) \leq \epsilon.$$

Esto da $\|f - f_m\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$

$\blacksquare$

Definición 1.8.2. Denotemos por H^∞ al espacio de todas las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$. La norma de una función $f \in H^\infty$ es definida por:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$$

Propiedades de los espacios $H^p(\mathbb{D})$

1. La clase N consiste de todas las $f \in H(\mathbb{D})$ para el cual $\|f\|_0 < \infty$.
2. Usando el hecho de que la medida $\dfrac{d\theta}{2\pi}$ es finita, tenemos la siguiente contención

$$H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N, si \quad 0 < s < p < \infty.$$

3. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función $f \in H^\infty$ que tenga como ceros prescritos los de una sucesión a_n, es que dicha sucesión satisfaga la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$$

Esta condición se conoce con el nombre **Condición de Blaschke**.

Teorema 1.8.2. ***(Productos de Blaschke)***
Si a_n es una sucesión de $\mathbb{D}$ tal que $a_n \neq 0$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty \tag{1.1}$$

si k es un entero no negativo, y si

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \frac{|a_n|}{a_n} \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{1.2}$$

entonces $|B^*| = 1$ c.t.p en $\mathbb{T}$ y B tiene sus ceros exactamente en los a_n (y en cero si k es no nulo).

Llamamos a esta función B un producto Blaschke. Notese que alguno de los a_n pueden ser repetidos, en tal caso B tiene multiples ceros en estos puntos. Note también que cada factor en (1.1) tiene módulo 1 en $\mathbb{T}$.

Demostración:

Ver [8], cap. 15, pág. 310.

Teorema 1.8.3. *Supongase que $f \in N$, $f \neq 0$, y B el producto Blaschke formado con los ceros de f, entonces $g \in N$ y $\|g\|_0 = \|f\|_0$, con $g = f/B$. Más aún, si $f \in H^p$, entonces $g \in H^p$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$ $(0 < p \leq \infty)$.*

Demostración:

Ver [8], cap. 17, pág. 338.

Teorema 1.8.4. *Para una región plana Ω si $f \in H(\Omega)$ y $1/f \in H(\Omega)$, entonces existe un $g \in H(\Omega)$ tal que $f = exp(g)$.*

Demostración:

Ver [8], cap. 13, pág. 274.

Teorema 1.8.5. *Si $0 < p < \infty$ y $f \in H^p$, entonces*

(a) El límite radial $f^*(e^{it})$ existe en c.t.p en $\mathbb{T}$ y $f^* \in L^p(\mathbb{T})$;

(b) $\lim\limits_{r \to 1} \|f^* - f_r\|_p = 0$, y

(c) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

Demostración:

ver [8], cap. 17, pág. 340.

Teorema 1.8.6. ***(Fórmula Integral de Cauchy)***
Si f es una función analítica en un conjunto abierto conteniendo a $\overline{\mathbb{D}}$ y $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración:
ver [4], cap. 1, pág. 11.

Definición 1.8.3. Para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, el **Núcleo de Poisson** es definido por

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2rcos\theta + r^2} = Re\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right]. \tag{1.3}$$

Observe que $P_r(\theta) > 0$ para todo $r \in [0, 1)$ y θ, puesto que

$$1 - r^2 > 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - 2rcos\theta + r^2 > 0.$$

Teorema 1.8.7. ***(Fórmula Integral de Poisson)***
Si $f \in H^2$ y re^{it} está en $\mathbb{D}$, entonces

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{i\theta}) d\theta, \tag{1.4}$$

Demostración:
ver [4], cap. 1, pág. 12.

Corolario 1. *Para $r \in [0, 1)$ y t cualquier número real,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 1.$$

Demostración:
Esta es una aplicación inmediata del teorema (1.8.7) par el caso donde f es la función constante 1.

1.9. Operadores Lineales Acotados

Definición 1.9.1. Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que $T : H \to H$ es un operador lineal si el es una transformación lineal.

Definición 1.9.2. Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $T : X \to Y$ se dice lineal si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \alpha, \beta \in \mathbb{K}; x, y \in X$$

Si T es biyectiva, T se dice isomorfismo algebraico.

Definición 1.9.3. Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que $T : H \to H$ es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|, \ \forall x \in H$
Si no existe una constante que satisfaga esta desigualdad diremos que T es no acotado.

Nota 1.9.1. Los operadores que más nos interesan son aquellos que son continuos. Resulta que un operador es continuo si y sólo si es acotado.

Teorema 1.9.1. *El operador lineal definido en el espacio de Hilbert X es acotado si y sólo si es continuo.*

Demostración:
Ver [2], cap.3, pág. 87.

Definición 1.9.4. Dado $T : X \to Y$ un operador lineal acotado, definimos **la norma de operador** T mediante

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \forall x \in X.$$

Capítulo 2

El Espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

En este capítulo, se presenta en un primer término una revisión detallada del espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ y los subespacios cerrados S-invariantes de H^2, donde S es el operador de traslación a la derecha llamado shift, además usaremos el hecho del isomorfismo entre un espacio de Hilbert y ℓ^2 el cual convierte el operador shift S a un operador de multiplicación en H^2, y que nos permitarán tener una base teórica, la cual será necesaria para la demostración del Teorema de Beurling.

2.1. El espacio de Hardy-Hilbert

Definición 2.1.1. El espacio de Hardy-Hilbert denotado por H^2, consiste de todas las funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$, teniendo representaciones en series de potencias con coeficientes complejos cuadrados sumables. Esto es,

$$H^2 := \left\{ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

El producto interno en H^2 es definido como:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

y la norma inducida por este producto interno es:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Afirmación 2.1.1. El espacio H^2 es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $f, g \in H^2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

(a) $f + g \in H^2$

En efecto,

Como $f, g \in H^2$ tenemos que $f, g \in H(\mathbb{D})$. Así para $z_0 \in \mathbb{D}$ arbitrario tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} &= \frac{f(z)+g(z)-f(z_0)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0},\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &= f^{'}(z_0)+g^{'}(z_0). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Así este límite 2.2 existe y se denota con $f^{'}(z_0)+g^{'}(z_0)$.

Por lo que $f+g \in H(\mathbb{D})$. Así $f+g$ admite una representación en series de potencias dada por:

$$(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{f}(n)+\hat{g}(n))z^n.$$

Ahora para $p = 2 > 1$ y con $\hat{f}(n), \hat{g}(n) \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por ser los coeficientes de series de potencias de f y g respectivamente, por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)+\hat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

de lo que obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)+\hat{g}(n)|^2 < \infty.$$

Por lo que $f+g \in H^2$.

(b) $\alpha f \in H^2$

En efecto,

Como $f \in H(\mathbb{U})$, tenemos que $\alpha f \in H(\mathbb{D})$. Así αf admite una representación en series de potencias, digamos

$$(\alpha f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha \hat{f}(n))z^n.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha\hat{f}(n)|^2 &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|\alpha|^2|\hat{f}(n)|^2\\ &= |\alpha|^2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|\hat{f}(n)|^2\\ &= |\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Por lo que $\alpha f \in H^2$.

(c) $h \in H^2$ (donde h representa la función nula)

En efecto,

$h = f + (-f)$ Por (a) y (b) $f, -f \in H^2$. Así $h \in H^2$.

Como H^2 es un subespacio de L^2 y por lo anterior vimos que es distinto de vació, además preserva la suma y la multiplicación por escalar. Por tanto podemos concluir que H^2 es un espacio vectorial.

∎

Proposición 2.1.1. *El espacio H^2 es congruente a ℓ^2, es decir, existe un isomorfismo isométrico entre H^2 y ℓ^2.*

Demostración:

Definamos la aplicación $\psi : H^2 \to \ell^2$, por $\psi(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in H^2$ y $\{\hat{f}(n)\}$,$\{\hat{g}(n)\}$ son las sucesiones de los coeficientes de las series de potencias de f

y g respectivamente.
Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(f+\alpha g) &= \Big(\hat{f}(1)+\alpha\hat{g}(1), \hat{f}(2)+\alpha\hat{g}(2), \cdots, \hat{f}(n)+\alpha\hat{g}(n), \cdots\Big)\\ &= (\hat{f}(1), \hat{f}(2), \cdots, \hat{f}(n)\cdots) + (\alpha\hat{g}(1), \alpha\hat{g}(2), \cdots, \alpha\hat{g}(n), \cdots)\\ &= (\hat{f}(1), \hat{f}(2), \cdots, \hat{f}(n)\cdots) + \alpha(\hat{g}(1), \hat{g}(2), \cdots, \hat{g}(n), \cdots)\\ &= \psi f + \alpha\psi g\end{aligned}$$

Así ψ es un homomorfismo.
Ahora veamos que H^2 es isométrico a ℓ^2, esto es, $\|\psi f\|_{\ell^2} = \|f\|$, con $f \in H^2$ y donde $\|.\|_{\ell^2}$ denota la norma en ℓ^2.

En efecto,

$$\|\psi f\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2 \Rightarrow \|\psi f\|_{\ell^2} = \|f\|. \tag{2.3}$$

Veamos que la aplicación ψ es inyectiva y sobreyectiva.

$$\begin{aligned}\psi f = 0 &\Leftrightarrow \|\psi f\|_{\ell^2} = 0\\ &\Leftrightarrow \|f\| = 0, && \text{por (2.3)}\\ &\Leftrightarrow f = 0.\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $Ker\psi = \{0\}$, donde $(Ker\psi = \{f \in H^2 : \psi f = 0\})$. Por lo que ψ es inyectiva.
Sea $y \in \ell^2$, esto es, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$, con $y_i \in \mathbb{C}$ tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|y_n|^2 < \infty$.
Definamos $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n z^n$, luego,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty, \qquad \text{ya que } y \in \ell^2.$$

Así $f \in H^2$, además $\psi f = (y_1, y_2, \cdots, y_n. \cdots) = y$; con lo que se garantiza que ψ es sobreyectiva.
Por tanto H^2 es congruente a ℓ^2 mediante la aplicación ψ.

■

2.2. H^2 vía Media Integral

En esta sección damos una definición de H^2 usando media integral, la cual nos permitirá mostrar que H^2 es un espacio de Hilbert.

Definición 2.2.1. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, para $0 < r < 1$ la notación f_r designará a la función f_r en $[-\pi, \pi]$ definida mediante

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}).$$

Se puede verificar que f_r es continua y que $f_r(-\pi) = f_r(\pi)$. Sea

$$\|f_r\|_r = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En H^2 se define el producto para $f, g \in H^2$ por

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Para $f \in H^2$ se define la norma por

$$\|f\| = \sup_r \|f_r\|_r < \infty. \tag{2.4}$$

Supongamos que $f \in H^2(\mathbb{D})$. Entonces f es una función analítica en $\mathbb{D}$, y puede ser escrita como serie de potencia de la forma $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k$ $(\forall z \in \mathbb{D})$ y el radio de convergencia de esta es menor que 1. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_r^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) r^k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\widehat{f}(m)} r^m e^{-im\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|f_r\|_r^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(m)}r^{r+m}e^{i(k-m)\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{\pi}^{\pi}\left(\sum_{k,m=0}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(m)}r^{k+m}e^{ik\theta}e^{im\theta}\right), \text{por el producto de Cauchy para series}
\end{aligned}
$$

Ahora para $n = m$ y por la ortogonalidad de las funciones $\{e^{in\theta}\}_0^{\infty}$ en L^2, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|f_r\|_r^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r^{2k}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{f}(k)|^2r^{2k}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r^{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r^{2k}\left[\frac{1}{2\pi}\theta\,\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r^{2k}.
\end{aligned}
$$

De acá tenemos que para $0 < r_1 < r_2 < 1$

$$
\begin{aligned}
\|f_{r_1}\|_{r_1}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r_1^{2k} \\
&< \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2r_2^{2k} \\
&= \|f_{r_2}\|_{r_2}^2.
\end{aligned}
$$

De esto podemos concluir que la función que asigna $r \longrightarrow \|f_r\|^2$ es creciente en (0,1). En consecuencia, el supremo en la expresión (2.4) puede ser reemplazado por $\lim\limits_{r\to 1}$. Así,

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \sup_r \|f_r\|_r^2 \\
&= \lim_{r\to 1}\|f_r\|_r^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \lim_{r\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 r^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)r^k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\widehat{g}(m)}r^m e^{-im\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(m)}r^{r+m}e^{i(k-m)\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k,m=0}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(m)}r^{k+m}e^{ik\theta}e^{im\theta}\right), \text{por el producto de Cauchy para series} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}r^{2k}\right), \text{ por la ortogonalidad de } \{e^{i\theta}\} \text{ en } L^2 \text{ y } k = m \\ &= \lim_{r\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}r^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}\end{aligned}$$

De acá tenemos que

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle.$$

Así el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ vía media integral se define como el conjunto de todas las funciones analíticas f en $\mathbb{D}$. Esto es,

$$H^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \text{analítica} : \sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2\, d\theta < \infty \right\}$$

Con producto interno:

$$\langle f, g\rangle := \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2.6}$$

Y la norma inducida por este producto interno viene dada por:

$$\|f\|_2 = \lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right\}^{1/2}.$$

Proposición 2.2.1. ***El espacio de Hardy*** $H^2(\mathbb{D})$ ***es un espacio de Hilbert.***

Demostración:

Probemos que $\langle .,. \rangle$ es ciertamente un producto interno. Sean $f, g, h \in H^2(\mathbb{D})$

y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\langle f+g, h\rangle &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}(f+g)(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})\right]\overline{h(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}+g(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\right]\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}+\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}g(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \langle f, g\rangle + \langle g, h\rangle
\end{aligned}$$

Luego $\langle f+g, h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle g, h\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f, g\rangle &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda f)(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\lambda\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lambda\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lambda\langle f, g\rangle
\end{aligned}$$

Así, $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle g, f\rangle} &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(re^{i\theta})}\ \overline{\overline{f(re^{i\theta})}}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \langle f, g\rangle
\end{aligned}
$$

Luego, $\overline{\langle g, f\rangle} = \langle f, g\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2\frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Como lo anterior es mayor o igual que cero. Así,

$\langle f, f\rangle \geq 0$. Si $f = 0$, entonces $\langle f, f\rangle = 0$.

Por lo tanto $\langle ., .\rangle$ es un producto interno.

Ahora bien,

Sea $\|f\|^2 = \lim\limits_{r\to 1}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta)\overline{f_r(\theta)}\frac{d\theta}{2\pi}$ con $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Probemos que $(H^2(\mathbb{D}), \|f\|^2)$ es un espacio normado.

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \langle f, f\rangle\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Como $|f|^2 > 0$ ya que $f \neq 0$. Así $\|f\|^2 > 0$.

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$. En efecto,

Supongamos que $\|f\| = 0$. Por como está definido el producto interno en H^2 tenemos que

$$
\langle f, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \\
&\Rightarrow |\hat{f}(k)|^2 = 0 \\
&\Rightarrow |\hat{f}(k)| = 0 \\
&\Rightarrow \hat{f}(k) = 0
\end{aligned}
$$

Así obtenemos que $f = 0$.

Ahora supongamos que $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, esto es $\hat{f}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\|f\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f\|^2 &= \langle \alpha f, f\rangle \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha f)(re^{i\theta})\overline{(\alpha f)(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha f(re^{i\theta})\overline{\alpha}\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha\overline{\alpha} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\alpha|^2|f(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= |\alpha|^2\langle f, f\rangle \quad \text{ya que } |\alpha| \geq 0 \\
&= |\alpha|^2\|f\|^2
\end{aligned}
$$

Así, $\|\alpha f\|^2 = |\alpha|^2\|f\|^2$.

Sean $f, g \in H^2(\mathbb{D})$

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle$$

$$= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})\right]\left[\overline{f(re^{i\theta})} + \overline{g(re^{i\theta})}\right]\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} + g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} + f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})} + g(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\right]\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[|f(re^{i\theta})|^2 + g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} + f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})} + |g(re^{i\theta})|^2\right]\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$+ \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} + \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} + \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle$$

$$\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g\rangle| + \|g\|^2$$

$$\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \quad \text{por desigualdad de Cauchy-Schawarz}$$

$$\leq (\|f\| + \|g\|)^2$$

Luego, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Por consiguiente $(H^2(\mathbb{D}), \|f\|^2)$ es un espacio normado.

Probemos ahora que $H^2(\mathbb{D})$ es completo y que los funcionales de evaluación puntual sobre $H^2(\mathbb{D})$ son acotados. Esta última afirmación es consecuencia del siguiente Lema.

Lema 2.2.1. ***(Estimador de crecimiento)***
Para cada $f \in H^2$, $|f(z)| \leq \dfrac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración:
Como $f \in H^2$, tenemos que $f \in H(\mathbb{D})$. Así,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{por Hölder para } p=2=q \\
&= \|f\|_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(|z|^2)^n\right)^{\frac{1}{2}}, \ \text{por definición de norma en } H^2
\end{aligned}
$$

Ahora como $z \in \mathbb{D}$ tenemos que $|z| < 1$, ya que $\mathbb{D}$ es el disco unitario, de lo que obtenemos $|z|^2 < 1$.
Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|z|^2)^n,$$

es una serie geométrica, por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|z|^2)^n = \frac{1}{1-|z|^2} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Así podemos concluir que

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

■

Corolario 2. *Supongamos que f_n es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{D}$, y $\lambda \in \mathbb{D}$. Entonces la sucesión $f_n(\lambda)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.*

Demostración:
Si R es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, $c = \sup\{|\lambda| : \lambda \in R\} < 1$. Por el Lema (2.2.1), tenemos que

$$|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \frac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Así,

$$\frac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{1-c^2}}, \quad \text{es una cota superior de}$$

$$\{|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \quad / \quad \lambda \in R\},$$

por consiguiente

$$\sup_{\lambda\in R} |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \frac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Por tanto, tomando limite cuando $n, m \to \infty$ obtenemos lo pedido.

■

Probemos ahora que $H^2(\mathbb{D})$ es completo, para ello debemos probar que toda sucesión $\{f_n\}$ de Cauchy en H^2 converge, digamos a una función f la cual también debe estar en H^2.

Mostremos en primer lugar que $f \in H^2$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Supongamos que f_n es una sucesión de Cauchy en $H^2(\mathbb{D})$. Definimos la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mediante $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Lema 2.2.2. *$f \in H^2(\mathbb{D})$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$.*

Demostración:

Probemos primero que f es analítica. Ciertamente, si Γ es una curva rectificable cerrada en $\mathbb{D}$, entonces $\displaystyle\int_\Gamma f_n(z)dz = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Además por Corolario (2), tenemos que $f_n \to f$ uniformemente en Γ. De modo que,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\, dz, \text{ por la convergencia uniforme de } \{f_n\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, por el Teorema de Morera, f esa analítica en $\mathbb{D}$.

Por otro lado

$$\|f_n\| - \|f_m\| \leq \|f_n - f_m\|,$$

de lo que resulta

$$|\|f_n\| - \|f_m\|| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon, \text{ ya que } \{f_n\} \text{ es de Cauchy.}$$

Por lo que $\{\|f_n\|\}$ es una sucesión de Cauchy de números no negativos, así $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$ existe. Fijemos $c > \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.
Además,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<r<1} \|f_n^{(r)}\|_r = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| < c,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<r<1} \|f_n^{(r)}\|_r < c.$$

Así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n > N$ y $r \in (0,1)$ tenemos que

$$\sup_{0<r<1} \|f_n^{(r)}\|_r < c \Rightarrow \|f_n^{(r)}\|_r < c.$$

Además para cualquier $r \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\|f_n^{(r)} - f_m^{(r)}\|_r &\leq \sup_{0<r<1} \|f_n^{(r)} - f_m^{(r)}\|_r \\ &= \|f_n - f_m\| < \epsilon, \text{ ya que } \{f_n\} \text{ es de Cauchy}\end{aligned}$$

De acá obtenemos que $\{f_n^{(r)}\}$ es una sucesión de Cauchy, y el corolario (2) garantiza la convergencia uniforme de esta sucesión.
Luego,

$$\begin{aligned}\|f^{(r)}\|_r^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\lim_{n\to\infty} f(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \text{ ya que } f_n \to f \text{ uniformemente} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|f_n^{(r)}\|_r^2 \\ &\leq c^2, \text{ ya que } \|f_n^{(r)}\|_r < c,\end{aligned}$$

como $\|f\| = \sup\limits_{0<r<1} \|f^{(r)}\|_r$, obtenemos que la norma de f es finita, lo que nos asegura $f \in H^2$. ■

Lema 2.2.3. *Para cualquier* $k \geq 0$ $\lim\limits_{n} \hat{f}_n(k) = \hat{f}(k)$.

Demostración:
Si f es una función analítica en $\mathbb{D}$ y $k \geq 0$, entonces

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}dz, \ (n \in \mathbb{Z})$$

esto es la representación de los coeficientes de Fourier. Ahora para $z_0 = 0$ y $r = \frac{1}{2}$, como $z = re^{i\theta}$, implica $dz = \frac{e^{i\theta}}{2}i\,d\theta$.
Luego,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\frac{e^{in\theta}}{2^n}\right)}{\frac{e^{i\theta(k+1)}}{2^{k+1}}} \frac{i}{2}e^{i\theta}\,d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\frac{e^{in\theta}}{2^n}\right)}{e^{i\theta(k+1)}} \frac{2^{k+1}}{2}e^{i\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\frac{e^{in\theta}}{2^n}\right) 2^{k+1-1}e^{i\theta(1-k-1)}\,\frac{d\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n\right) 2^k e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right) 2^k e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right) 2^k e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_n\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right) 2^k e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\hat{f}_n(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n(k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n\left(\dfrac{e^{i\theta}}{2}\right)}{\dfrac{e^{i\theta(k+1)}}{2^{k+1}}}\frac{i}{2}e^{i\theta}\,d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_n\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)\frac{2^{k+1}}{2}e^{i\theta(1-k-1)}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_n\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)2^k e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Por lo que $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{f}_n(k) = \hat{f}(k)$ para cualquier $k \geq 0$. ■

Ahora veamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. Recordemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_n(k)|^2 = \|f_n\|^2 < \infty$$

Así que $\hat{f}$ y $\hat{f}_n$ son elementos de $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, donde $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La norma de este espacio estará denotada por $|||.|||$.

La sucesión $(\hat{f}_n)$ es de cauchy en $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, por Teorema (1.7.1) el espacio $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ es completo, por consiguiente existe $a \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n = a.$$

Luego, para cualquier $k \in \mathbb{Z}_+$, tenemos

$$|\hat{f}_n(k) - a(k)| \leq |||\hat{f}_n - a||| < \epsilon.$$

Así

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(k) = a(k).$$

Por el lema 2.2.3 y unicidad del límite resulta que $a = \hat{f}$ y de ecuación 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=o}^{\infty} |\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} |||\hat{f}_n - \hat{f}||| = 0.
\end{aligned}$$

Así hemos llegado a que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0$. En conclusión podemos decir que H^2 es completo.

■

Afirmación 2.2.1. La norma de H^2 proviene de un producto interno.

Demostración:

Sean $f, g \in H^2$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)+\hat{g}(n)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)-\hat{g}(n)|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [|\hat{f}(n)+\hat{g}(n)|^2 + |\hat{f}(n)-\hat{g}(n)|^2] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(\hat{f}(n)+\hat{g}(n))(\overline{\hat{f}(n)+\hat{g}(n)}) + (\hat{f}(n)-\hat{g}(n))(\overline{\hat{f}(n)-\hat{g}(n)})] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(\hat{f}(n)+\hat{g}(n))(\overline{\hat{f}(n)}+\overline{\hat{g}(n)}) + (\hat{f}(n)-\hat{g}(n))(\overline{\hat{f}(n)}-\overline{\hat{g}(n)})] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [2\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)} + 2\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(n)}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [2|\hat{f}(n)|^2 + 2|\hat{g}(n)|^2] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2|\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} 2|\hat{g}(n)|^2 \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2 \\
&= 2\|f\|^2 + \|g\|^2
\end{aligned}$$

Como H^2 es un espacio Banach y satisface el lema 1.4.2, podemos concluir que es un espacio de Hilbert.

■

2.3. Propiedades del espacio $H^2(\mathbb{D})$

Las propiedades de H^2 se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *(a) Sea f una funcion analítica en $\mathbb{D}$. Entonces $f \in H^2$ si y sólo si*

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty. \tag{2.7}$$

Además, para $f \in H^2$,

$$\|f\|_2^2 = \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty. \tag{2.8}$$

(b) Para cualquier función f en el disco, la función

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

es creciente. Por lo tanto $\lim\limits_{r \to 1^-} M(r) = \sup\limits_{0<r<1} M(r)$, y así la función f esta en H^2 si y sólo si $\lim\limits_{r \to 1^-} M(r) < \infty$, en tal caso $\lim\limits_{r \to 1^-} M(r) = \|f\|_2^2$.

(c) Si $f \in H^2$, entonces f tiene límite radial $f^*(e^{i\theta})$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$; $f^* \in L^2(\mathbb{T})$; el enésimo coeficiente de Fourier de f^* es a_n si $n \geq 0$ y 0 si $n < 0$, tiene lugar la aproximación en L^2:

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 0 \tag{2.9}$$

y f es la integral de Poisson así como la integral de cauchy de f^*.
Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt \tag{2.10}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi; \tag{2.11}$$

donde Γ es el círculo unitario orientado positivamente.

(d) La aplicación $f \to f^*$ es una isometría de H^2 sobre el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ de las funciones que tienen coeficientes de Fourier de índice negativo iguales a cero.

Demostración:

Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ con series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces, para $0 < r < 1$,

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.$$

Puesto que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m},$$

integrando sobre toda la expresión por $|f(re^{i\theta})|^2$ y dividiendo por 2π resulta en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Si $f \in H^2$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \|f\|^2$ para cada $r \in [0,1)$. Luego

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta \leq \|f\|^2.$$

Por el contrario, suponga que el supremos es finito.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Si $f \notin H^2$, el lado derecho puede ser arbitrariamente grande tomando r cercano a 1. Esto contradice el suponer que el supremo del lado izquierdo de la ecuación es finito. Para $f \in H^2$, se tiene que

$$\|f\|_2^2 = \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta.$$

Esto prueba la parte (a).

La parte (b) se sigue inmediatamente por la fórmula

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$$

establecida en la demostración de la parte (a).

Supongamos ahora que $f\in H^2$. Para $0<s<1$, definimos la función f_s en $\mathbb{T}$ por

$$f_s(e^{i\theta})=f(se^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^ne^{in\theta}. \tag{2.12}$$

Puesto que $\sum|a_n|^2<\infty$, el teorema de Riesz-Fischer asegura la existencia de una función $g\in L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\hat{g}(n)=\begin{cases} a_n & \text{si } n\geq 0\\ 0 & \text{si } n<0\end{cases}$$

Los coeficientes de Fourier de $g-f_s$ son $(1-s^n)a_n$ para $n\geq 0$. Otra aplicación del teorema de Parseval muestra que

$$\|g-f_s\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}(1-s^n)^2|a_n|^2. \tag{2.13}$$

Como $s\to 1$, el lado derecho de (2.13) tiende a cero, y concluimos que

$$\lim_{s\to 1}\|g-f_s\|_2=0. \tag{2.14}$$

Si $f\in H^1$, $r<1$ y $f_r(z)=f(rz)$, entonces $f_r\in H(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D}=\mathbb{D}(0;1/r)$. Así, para $z\in\mathbb{D}$, f_r puede ser representada en $\mathbb{D}$ por la fórmula de Cauchy

$$f(rz)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_r(e^{it})}{1-e^{-it}z}dt \tag{2.15}$$

Y por la fórmula de Poisson

$$f(rz)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(z,e^{it})f_r(e^{it})dt \tag{2.16}$$

Para cada $z \in \mathbb{D}$, $|1 - e^{-it}z|$ y $P(z, e^{it})$ son funciones acotadas en $\mathbb{T}$.
El caso $p = 1$ de b) conduce por lo tanto, (2.15) y (2.16) a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - e^{-it}z} dt \tag{2.17}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) f^*(e^{it}) dt. \tag{2.18}$$

Para cualquier fijo $s \in (0, 1)$, $f(sz)$ es holomorfa en $\mathbb{D}(0, 1/s)$. De donde si $z = re^{i\theta}$, tenemos

$$f(sz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it}) dt$$

y

$$f(sz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_s(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Consideremos la diferencia entre estas integrales y correspondiendo g en lugar de f_s. La desigualdad de Schwarz, combinada con (2.14), entonces dados (2.10) y (2.11), con g en lugar de f^*.

Así f es la integral de Poisson de g; y puesto que $g \in L^1(\mathbb{T})$ el corolario del teorema (1.8.5) muestra que el límite radial de f existe y es igual a g c.t.p en $\mathbb{T}$. Así se prueba (c).
Parte (d)
Que $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$ se sigue de haber probado (2.9). La prueba de (b) muestra que los coeficientes de Fourier de f^* son cero para $n < 0$. Para completar la prueba de (c), supongase que $g \in L^2(\mathbb{T})$ y $\hat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$, y haciendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n.$$

Entonces $f \in H$ por (a) y por la prueba de (b) muestra que $f^* = g$.

■

Observación 2.3.1. Supongase que $f \in H^p$ para algún $p > 0$, B es el producto Blaschke formado con los ceros de f, y $g = f/g$. El teorema (1.8.3) muestra que $g \in H^p$ y que $\|g\|_p = \|f\|_p$. Puesto que que g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, existe $\varphi \in H(\mathbb{D})$ tal que $exp(\varphi) = g$ por teorema (1.8.4). Haciendo $h = exp(p\varphi/2)$. Entonces $h \in H(\mathbb{D})$ y $|h|^2 = |g|^p$ así $h \in H^2$. De hecho $\|h\|_2^2 = \|g\|_p^p$. Luego el f tiene una factorización de la forma

$$f = B \cdot h^{2/p}$$

de donde $h \in H^2$ y h no tiene ceros en $\mathbb{D}$. Esto se hace posible en cualquier caso, al aplicar H^2-resultados a las funciones en en cualquier H^p.

La prueba que sigue usa esta técnica.

Teorema 2.3.2. *Si $f \in H^1(\mathbb{D})$, entonces*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \tag{2.19}$$

existe en casi todo punto de $\mathbb{T}$, y

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| d\theta = 0. \tag{2.20}$$

Demostración:

Que el límite en (2.19) exista c.t.p se deduce por el corolario del teorema (1.8.5).

Si B es el producto Blaschke formado con los ceros de f, procediendo de la observación (2.3.1) muestra que existe un $h \in H^2$ tal que $h^2 = f/B$ y $\|h\|_2^2 = \|f\|_1$. Poniendo $h = Bh$. Entonces $g \in H^2$, $\|g\|_2 = \|g\|_2$, y $f = gh$. Tenemos a f dentro de un producto de dos funciones perteneciendo a H^2.

Definamos ahora $f_r \in \mathbb{T}$ por $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ y definamos a g_r y h_r de la misma manera. Como $f^* = g^*h^*$ c.t.p, tenemos

$$f^* - f_r = g^*(h^* - h_r) + h_r(g^* - g_r) \tag{2.21}$$

Por Teorema (2.3.1), $\|h^* - h_r\|_2 \to 0$ y $\|g^* - g_r\|_2 \to 0$ cuando $r \to 1$, también,

$$\|g^*\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|f\|_1 \quad \text{y} \tag{2.22}$$

$$\|h_r\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1 \tag{2.23}$$

Si aplicamos la desigualdad de Schwarz a cada uno de los productos en la derecha de (2.21), concluimos que $\|f^* - f_r\|_1 \to 0$ cuando $r \to 1$.

■

Teorema 2.3.3. *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$, entonces existe una polinomial trigonométrica P tal que*

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon \quad \textit{para cualquier real } t.$$

Demostración:

Ver [8], cap.4, pág. 91.

Definición 2.3.1. Función Interior

Una función interior es una función $\varphi \in H^\infty$ para el cual $|\varphi^*| = 1$ c.t.p en $\mathbb{T}$, donde φ^* denota el límite radial de φ.

Proposición 2.3.1. *Si $\varphi, f \in H^1(\mathbb{D})$, entonces $(\varphi f)^* = \varphi^* f^*$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
(\varphi f)^*(e^{i\theta}) &= \lim_{r\to 1}(\varphi f)(re^{i\theta}) \\
&= \lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta}) f(re^{i\theta}) \\
&= \lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta}) \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \quad \text{por } (2.19) \\
&= \varphi^*(e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta}) \\
&= (\varphi^* f^*)(e^{i\theta})
\end{aligned}$$

Así $(\varphi f)^* = \varphi^* f^*$. ■

Corolario 3. *Cada función de H^∞ está en H^2.*

Demostración:

Esto se siguie inmediatamente por la caracterización de H^2 dada en el Teorema (2.3.1)

Proposición 2.3.2. *Si f es una función de valor real en el espacio de Hilbert H^2 entonces f es constante.*

Demostración:
Ver [4], cap.1, pág. 31.

Definición 2.3.2. Sea φ una función en H^∞. El operador de multiplicación por φ, denotado por M_φ, está definido como $M_\varphi(f) = \varphi f$, para cada $f \in H^2$.

2.4. Subespacios Invariantes

Definición 2.4.1. Sea T un operador lineal en un espacio de Banach X. Si un subespacio cerrado Y de X tiene la propiedad de $T(Y) \subset Y$, entonces Y es un **subespacio T-invariante**. Así los subespacios T-invariantes de X son exactamente aquellos que son mapeados dentro sí mismo por T.

Observación 2.4.1. Para hallar otros subespacios S-invariantes hacemos uso del isomorfismo entre los espacios de Hilbert ℓ^2 y H^2, el cual convierte el operador Shift S a un operador de multiplicación en H^2. El punto es que el operador de multiplicación es más fácil de analizar (debido a la rica estructura de H^2 como un espacio de funciones holomorfas).

2.5. Operador Shift

Definición 2.5.1. LLamaremos operador de traslación a la derecha (**Shift ó Shift unilateral**) al operador

$$S : H^2 \to H^2 \quad S(f)(z) = zf(z) \quad (f \in H^2, z \in \mathbb{D})$$

Proposición 2.5.1. ***El operador Shift es un operador lineal y acotado.***

Demostración:
Debemos probar que S es:

(1) Un operador lineal, es decir; es una transformación lineal

(2) Acotado, es decir; $\exists\, C > 0 : \|S(f)\| \leq C\,\|f\|, \forall f \in H^2$

(1) Sean $f, g \in H^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} S(f+g)(z) &= z(f+g)(z) \\ &= z(f(z)+g(z)) \\ &= zf(z)+zg(z) \\ &= Sf(z)+Sg(z) \end{aligned}$$

Luego $S(f+g)(z) = S(f)(z) + S(g)(z)$

$$\begin{aligned} S(\alpha f)(z) &= z(\alpha f)(z) \\ &= z(\alpha f(z)) \\ &= z\alpha f(z) \\ &= \alpha z f(z) \\ &= \alpha S(f)(z). \end{aligned}$$

De modo que $S(\alpha f)(z) = \alpha S(f)(z)$.
Así S es una transformación lineal. En consecuencia S es un operador lineal.
(2) Supongamos que $f \in H^2$

$$\begin{aligned} \|Sf\|_2^2 &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |S(f)(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |(re^{i\theta})f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |(re^{i\theta})|^2|f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq 1\ \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Así $\|Sf\| \leq \|f\|_2^2$.
Por tanto S es un operador lineal acotado.

■

Definición 2.5.2. En el espacio de Hardy-Hilbert H^2 definimos el operador $M_z : H^2 \to H^2$ como

$$(M_z f)(z) = zf(z).$$

Es claro que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces

$$(M_z f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}.$$

Bajo la identificación entre ℓ^2 y H^2, M_z es simplemente el operador S y así lo denotaremos.

Proposición 2.5.2. *El operador M_φ es una isometría de H^2 en H^2.*

Demostración:
Supongamos que $\varphi \in H^\infty$ es una función interior, entonces $|\varphi^*| = 1$ c.t.p.
Veamos que $\|\varphi f\|_2 = \|f\|_2$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|_2 &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\varphi f)^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\varphi^* f^*)(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^2 |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \qquad \text{(por ser } |\varphi^*| = 1) \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \\
&= \|f\|_2
\end{aligned}$$

Así $\|\varphi f\|_2 = \|f\|_2$. Por tanto M_φ es una isometría de H^2 en H^2.

■

Capítulo 3

El Teorema de Beurling

Este capítulo, se centra en demostrar el teorema Beurling, el cual caracteriza los subespacios cerrados invariantes de $H^2(\mathbb{D})$ mediante el operador shift.

Teorema 3.0.1. ***(El Teorema de Beurling)***

a) *Para cada función interior φ, el espacio*

$$\varphi H^2 = \left\{\varphi f : f \in H^2\right\}$$

es un subespacio cerrado S-invariante de H^2.

b) *Si φ_1 y φ_2 son funciones interiores y $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$, entonces $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ es constante.*

c) *Todo subespacio cerrado S-invariante Y de H^2, diferente de $\{0\}$, contiene una función interior φ tal que $\varphi H^2 = Y$.*

Demostración:
Parte (a)
Probemos que el espacio φH^2 es un subespacio cerrado en H^2.
Para ello usemos el hecho de que el operador $M\varphi$ siendo una isometría, su rango φH^2 es un subespacio cerrado de H^2.
En efecto,
Sea $\{\varphi f_n\}$ una sucesión en φH^2 tal que $\varphi f_n \to g$ en H^2, es decir;

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \, n > N_0 \Rightarrow \|\varphi f_n - g\|_2 < \epsilon.$$

Por consiguiente, dado $\epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m, n > N_0 &\Rightarrow \|\varphi f_n - \varphi f_m\|_2 < \epsilon \\ &\Rightarrow \|\varphi(f_n - f_m)\|_2 < \epsilon \\ &\Rightarrow \|f_n - f_m\|_2 < \epsilon \quad \text{(por isometría } \|\varphi f\|_2 = \|f\|_2) \end{aligned}$$

Así, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H^2.
Puesto que H^2 es un espacio de Hilbert, el cual es completo, se tiene que $f_n \to f$ en H^2.
De aquí que, $\varphi f_n \to \varphi f$ y así $g = \varphi f \in \varphi H^2$. Por lo tanto φH^2 es un subespacio cerrado de H^2.

Probemos ahora que φH^2 es S-invariante de H^2.
Recordemos que el operador shift viene dado por:

$$S(f)(z) = zf(z) \quad (f \in H^2, z \in \mathbb{D})$$

Debemos probar que $S(\varphi H^2) \subset \varphi H^2$.
Sea φ una función interior en H^∞ tal que $\varphi f \in \varphi H^2, \forall f \in H^2$

$$\begin{aligned} S(\varphi f)(z) &= z(\varphi f)(z) \\ &= z\varphi(z) f(z) \\ &= \varphi(z) z f(z) \end{aligned}$$

Como $f \in H^2$ admite una representación en series de potencias, digamos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ entonces, $\quad zf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ y como los coeficientes complejos de $f(z)$ y $zf(z)$ son los mismos tenemos que, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

En consecuencia $S(\varphi f)(z) = \varphi(z)\, zf(z) \in \varphi H^2$. Por lo que $S(\varphi H^2) \subset \varphi H^2$. Por tanto φH^2 es un subespacio cerrado S-invariante de H^2.

Parte (b)
Supongamos que $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$, con $|\varphi_1^*| = 1 = |\varphi_2^*|$ c.t.p en $\mathbb{T}$.

Como $1 \in H^2$, tenemos que $\varphi_1 \cdot 1 \in \varphi_1 H^2 \subset \varphi_2 H^2$, luego $\varphi_1 = \varphi_2 f$, para algún $f \in H^2$.
Entonces, $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = f \in H^2$. Así $\varphi_1/\varphi_2 \in H^2$. Similarmente,

$\varphi_2 H^2 = \varphi_1 H^2$ implica que $\varphi_2 = \varphi_1 f$, para algún $f \in H^2$. Luego, $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = f \in H^2$. Así, $\varphi_2/\varphi_1 \in H^2$.
Haciendo $\varphi = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} \in H^2$ y $h = \varphi + \dfrac{1}{\varphi}$. Como $h = \varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} + \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$. Así $h \in H^2$.
Dado que $|\varphi^*| = 1$ c.t.p en $\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} h^* = \varphi^* + \frac{1}{\varphi^*} &= \frac{(\varphi^*)^2 + 1}{\varphi^*} \\ &= \frac{(\varphi^*)^2 + \varphi^*\overline{\varphi^*}}{\varphi^*} \\ &= \frac{\varphi^*(\varphi^* + \overline{\varphi^*})}{\varphi^*} \\ &= \varphi^* + \overline{\varphi^*} \\ &= 2Re(\varphi^*) \end{aligned}$$

Así h^* es real c.t.p en $\mathbb{T}$.

Por otro lado como $h \in H^2$, h es la integral de Poisson de h^*, por Teorema y por ser h^* real c.t.p en $\mathbb{T}$, se tiene que si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$ y θ real,

$$h(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) h^*(e^{it}) dt$$

Puesto que $P_r(\theta - t)$ es el núcleo de Poisson, esto es,

$$P_r(\theta - t) = Re\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Así,
$h(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1 - r^2}{1 - 2rcos(\theta - t) + r^2}\, h^*(e^{it}) dt.$

Como $\dfrac{1-r^2}{1-2rcos(\theta-t)+r^2}$ y $h^*(e^{it})$ son reales, se sigue que h es real en $\mathbb{D}$.

Por consiguiente h es constante, entonces φ debe ser constante y por tanto se prueba (b).

Procedamos a demostrar la parte c) del Teorema.
Supongamos que Y es un subespacio cerrado de H^2 invariante bajo el operador S, el cual no consiste de cero solamente. Entonces existe un entero más pequeño k tal que Y contiene una función de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n, \qquad\qquad c_k \neq 0.$$

Como Y es S-invariante, esto es;

$$zY \subset Y, \quad \text{donde} \quad zY = \{g : g(z) = zf(z), f \in Y\}$$

Entonces $f \notin zY$. Así $zY \neq Y$ y por tanto zY es un subconjunto propio de Y.
Mostremos que zY es un subespacio cerrado de Y.
Veamos que zY es un subespacio de Y.
$0 = 0f(0) = g(0), f \in Y$. Así $0 \in zY$
Sean $g, h \in zY$ tales que $g(z) = zf(z)$ y $h(z) = z\,p(z)$ donde $f, p \in Y$

$$\begin{aligned}(g+h)(z) &= g(z) + h(z)\\ &= zf(z) + z\,p(z)\\ &= z(f(z) + p(z))\\ &= z(f+p)(z)\end{aligned}$$

Por lo que $(g+h) \in zY$

$$\begin{aligned}(\alpha g)(z) &= \alpha\, zf(z)\\ &= z\alpha\, f(z)\\ &= z(\alpha\, f)(z)\end{aligned}$$

De modo que $\alpha g \in zY$.
Como zY es distinto de vacío, además preserva la suma y la multiplicación por escalar. Así podemos concluir que zY es un subespacio de Y.

Veamos que zY es cerrado en Y.
Si $g \in \overline{zY}$, entonces existe una sucesión $\{g_n\}$ en zY, tal que $g_n \to g$ y $g_n \in zY$ tiene una representación $g_n = zf_n$, donde $f_n \in Y$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces, dado $\epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m, n > N_0 &\Rightarrow \|g_n - g_m\| < \epsilon \|z\| \\ &\Rightarrow \|zf_n - zf_m\| < \epsilon \|z\| \\ &= \|z(f_n - f_m)\| < \epsilon \|z\| \\ &\Rightarrow \|z\| \|f_n - f_m\| < \epsilon \|z\| \\ &\Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon \end{aligned}$$

De aqui que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H^2, podemos asegurar la existencia de $f \in Y$ tal que $f_n \to f$.
Por tanto zY es un subespacio cerrado de Y.

Luego $zY \neq Y$ y por tanto zY es un subespacio cerrado propio de Y.
Así por Teorema, existe una función $\varphi \in Y$, diferente de cero tal que $\|\varphi\|_2 = 1$ y $\varphi \perp zY$.
Entonces se sigue que $\varphi \perp z^n Y$, para $n = 1, 2, ...$ Esto implica que,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, e^{in\theta}\varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(e^{i\theta}) \overline{\varphi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, ...) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, ...) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son preservadas si reemplazamos el lado izquierdo por su complejo conjugado, es decir; si reemplazamos n por $-n$.
Tomando conjugado obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, ...)$$

Luego,
$|\varphi^*|^2$ es una función en $L^1(\mathbb{T})$ con todos los coeficientes de Fourier de $|\varphi^*|^2$ cero, excepto el correspondiente a $n = 0$ que es 1.

Así $|\varphi^*|^2$ es constante en c.t.p, por lo que $|\varphi^*|$ también lo es. Como $\|\varphi\|_2 = 1$ se sigue que $|\varphi^*| = 1$ c.t.p en $\mathbb{T}$. Puesto que $\varphi \in H^2$, así φ es la integral de Poisson de φ^* y por consiguiente $|\varphi| \leq 1$.
De aquí concluimos que φ es una función interior.

Como $\varphi \in Y$ y Y es S-invariante, se tiene que $\varphi z^n \in Y$ para $n = 0, 1, 2, ...$ Por eso $\varphi P \in Y$ para toda polinomial P.
Ya que los polinomios son densos en H^2 (las sumas parciales de las series de potencias de cualquier $f \in H^2$ converge a f en la H^2-norma, por teorema), y puesto que Y es cerrado y $|\varphi| \leq 1$ se sigue que $\varphi H^2 \subset Y$.

Ahora probar que $Y \subset \varphi H^2$, ya que φH^2 es cerrado, es suficiente mostrar que:

$$h \in Y \text{ y } \quad h \perp \varphi H^2 \text{ implica que } h = 0$$

Si $h \perp \varphi H^2$, entonces $h \perp \varphi z^n$ para $n = 0, 1, 2, ...$, esto es;

$$\begin{aligned}\langle h, \varphi e^{in\theta}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\varphi^*(e^{i\theta})e^{in\theta}}d\theta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, ...)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\varphi^*(e^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta = 0\end{aligned}$$

Si $h \in Y$, entonces $z^n h \in zY$, si $n = 1, 2, 3, ...$ y la escogencia de φ muestra que $z^n h \perp \varphi$, es decir;

$$\langle e^{in\theta}h, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\varphi^*(e^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta = 0 \quad (n = -1, -2, ...)$$

Luego, todos los coeficientes de Fourier de $h^*\overline{\varphi^*}$ son cero. Por consiguiente $h^*\overline{\varphi^*} = 0$ c.t.p en $\mathbb{T}$, y puesto que $|\varphi^*| = 1$ c.t.p, tenemos $h^* = 0$ c.t.p. Así $h = 0$.
En consecuencia $h = 0$ implica que $h = \varphi(f + (-f)) \in \varphi H^2$.
Por lo tanto $Y \subset \varphi H^2$ y así la prueba de (c) está completa.

■

Referencias

[1] A. Beurling. *On two problems concernig linear transformations in Hilbert space*. Acta Math. 81 (1949), 239 - 255.

[2] Bachman G. Narici L. *Functional Analysis*. New York, 1966.

[3] Conway J. *A Course in Functional Analysis*. Second Edition. Springer-Verlag, 1990.

[4] Halmos P. *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] Martínez Avendaño, Rubén A. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. Springer-Verlag. New York, 2007.

[6] Ronal G. Douglas. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Second Edition. Springer Verlag 1997.

[7] Rosenthal Peter, Radjavi Heydar. *Invariant Subspaces*. Second edition. Spring-Verlag, 2003.

[8] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill. Third edition, New York ,1987.

[9] Rudin Walter. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill, Inc. New York. 1991.

[10] Vivas C, Miguel J. *Análisis en una Variable Compleja*. Horizonte C.A. 1era. Edición. Barquisimeto, Estado Lara 2009.