UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Integral de Cauchy y Funciones Regladas."

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Yuber José Guzmán Sierra

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MCs. Mireya Bracamonte.

Barquisimeto, Venezuela. Enero de 2010

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"INTEGRAL DE CAUCHY Y FUNCIONES REGLADAS."

Presentado por el ciudadano BR. YUBER JOSÉ GUZMÁN SIERRA titular de la Cédula de Identidad Nº 16.642.927. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.
Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.
En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios primeramente, a la Virgen de Coromoto, mis Padres y especialmente a mi bebe Eriber Alejandro por ser mi inspiración en cada momento.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios por darme fortaleza en cada etapa de mi vida.
- A mis padres y hermanos por ser los primeros precursores de mi formación académica.
- A mi hijo Eriber y mi esposa Erika por ser la fuente de inspiración y motivación en cada uno de mis pasos.
- A mi tutora MCs. Mireya Bracamonte, por haberme orientado durante el desarrollo de mi tesis.
- A mis compañeros de la promoción, por que juntos hemos trabajado para lograr culminar esta meta.
- A mis amigos, muy especialmente a Anuar, el Gato, Wendy, Gabriel, Luggi, Elizabeth, Cubiro(Asdrubal), Wilmer, Rosmery, Yajaira, Jorge y a todos los que integran el grupo organizado GER, a ellos muchas gracias por demostrarme que tienen grandes corazones.
- A el grupo Pitijoc por su apoyo incondicional.
- A mi familia Reyes López, mis compadres y grandes amigos; padres y hermanos de corazón. Gracias
- A la familia Lugo Ríos por su apoyo en este camino, gracias sin ustedes no lo habría podido lograr.
- Al Departamento de matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la UCLA por brindarnos su abrigo como estudiantes durante los últimos años.

Resumen

En este trabajo presentaremos la integral de Cauchy como una alternativa a la integral de Riemann. Partiendo de la formación de la teoría de la integración de funciones escalonadas, transferimos las propiedades fundamentales a la clase de las funciones regladas, del artículo de **Nelson Viloria y Reinaldo Cadenas Ïntegral de Cauchy y Funciones Regladas".**

La clase de funciones Riemann integrables es algo difusa (cuando no se considera la Teoría de la Medida), en este sentido utilizaremos una categoría de funciones completamente caracterizada: el espacio de las funciones Regladas ($G[a,b]$), con la norma de la convergencia uniforme. Definiendo la integral de Cauchy para una función reglada como el límite de una sucesión, de integrales de funciones escalonadas, que convergen uniformemente a dicha función. A partir de esto, mostraremos todas las propiedades usuales de una integral, partiendo de conocimientos simples e intuitivos de la integral de una función escalonada. Las propiedades de la integral de Cauchy se transfieren de las propiedades de las funciones escalonadas.

Este trabajo consta de tres capítulos: el primero donde se definen la base de la teoría, funciones regladas y toda la teoría que se requiere para el desarrollo del trabajo. En el segundo capítulo se define la integral de Cauchy o integral reglada y finalmente un breve capítulo tres donde sólo nos limitamos a presentar una base para aquellas personas que deseen comenzar el estudio de funciones regladas vectoriales.

Índice

Introducción

El concepto de medida, en matemáticas, generaliza los conceptos habituales de longitud, área y volumen; y trata de conseguir que clases cada vez más generales de conjuntos tengan asociada una medida. Dichos conjuntos se llamarán conjuntos medibles. Con esta herramienta surgen las funciones Riemann integrales y la integral de Riemann está basada en la llamada *Medida de Jordan*, y se expresa como el límite de una suma de Riemann.

Como podemos ver, para trabajar con la clase de funciones de Riemann se requiere hacer un curso de Teoría de la Medida. El objetivo de este trabajo es desarrollar, detalladamente, el trabajo realizado por Nelson Viloria y Reinaldo Cadenas en [6], ambos profesores de la Universidad de los Andes, donde se trata de conjugar el trabajo realizado por matemáticos y pedagogos en miras de lograr la forma optima, en la medida de lo posible, de hacer llegar los conocimientos a los estudiantes interesados, en busca de una base teórica sólida que permita incentivar el trabajo de investigación futuro.

En busca de una forma de fácil acceso a la integral de Cauchy los autores utilizan la categoría de *funciones regladas*. Definen la categoría de funciones regladas con la norma de convergencia uniforme.

Todo el mundo conoce las propiedades básicas de cálculo de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado I. La idea consiste en extender algunas de estas propiedades a funciones con discontinuidades ”adecuadas”, esto es, las funciones cuyos límites a la derecha e izquierda en cada uno de los puntos I existe. A tales funciones se le llaman *funciones regladas*.

Capítulo 1

Funciones Regladas

§1.1. Algunas funciones especiales.

En este capítulo se presentan las definiciones y teoremas fundamentales que nos permiten una lectura rápida y satisfactoria del desarrollo del trabajo que se presenta posteriormente.

Definición 1.1. *Sea $a < b$. Recibe el nombre de* ***partición*** *del intervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b. Los puntos de una partición pueden ser numerados como $t_0, t_1, ..., t_n$ de manera que $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$.*
Convenimos en escribir

$$\wp[a, b] = \{P : P \quad \textit{es una partición de} \quad [a, b]\}$$

Lema 1.1. *La unión de dos particiones de un intervalo es una partición del mismo intervalo.*

Demostración.
Sea $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$, entonces P genera n sub-intervalos cerrados y acotados contenidos en $[a, b]$, a saber

$$[t_0, t_1],\ [t_1, t_2],\ \ldots, [t_{n-1}, t_n].$$

Si $P \in \wp[a,b]$ y $c \in [a,b]$, hacemos $Q = P \cup \{c\} \in \wp[a,b]$. Hay dos posibilidades, que $c = t_k$ para algún $k = 0,1,2,...,n$, en cuyo caso no hay nada que demostrar dado que $Q = P$. En caso contrario, que $c \in (t_{k-1}, t_k)$ para algún $k = 1,2,3,...,n$, entonces $Q = \{a = t_0, t_1, ..., t_{k-1}, c, t_k, ..., t_n\}$, el cual satisface la definición 1.1.
Así, de manera más general, cuando $P, R \in \wp[a,b]$, y $R = \{a = t_0, t_1, ..., t_m = b\}$, entonces hacemos $Q_1 = P \cup \{t_1\}$, la cual es una partición por lo anterior. Además, $Q_2 = Q_1 \cup \{t_2\}$, y de esta forma $Q_{m-1} = P \cup Q$, es una partición. ■

Definición 1.2. *Decimos que $Q \in \wp[a,b]$ es **más fina** que $P \in \wp[a,b]$, si $P \subset Q$. También se dice, en este caso, que Q es un refinamiento de P.*

Note que:

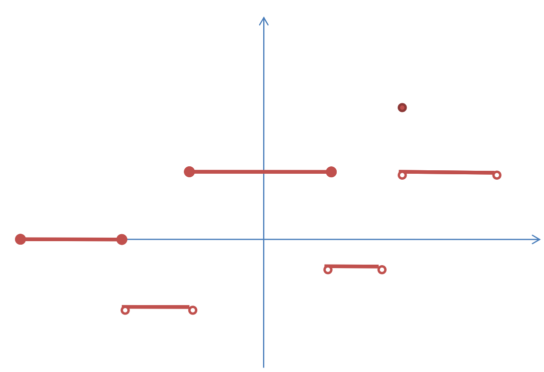
(a) Si Q es más fina que P entonces, Q divide más al intervalo $[a,b]$ que P.

(b) Cada sub-intervalo abierto de Q está contenido en algún sub-intervalo abierto de P.

Definición 1.3. *Una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama **escalonada** si existe $P \in \wp[a,b]$, tal que ϕ es constante en cada sub-intervalo abierto de P. Es decir, si existe $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ y para cada $k = 1,...,n$ existe $\phi_k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi(x) = \phi_k \quad si \quad t_{k-1} < x < t_k$$

Informalmente, una función escalonada es aquella cuya gráfica tiene la forma de una escalera o una serie de escalones (que no necesariamente deben ser crecientes).



Función de escalonada

Observación 1.1.

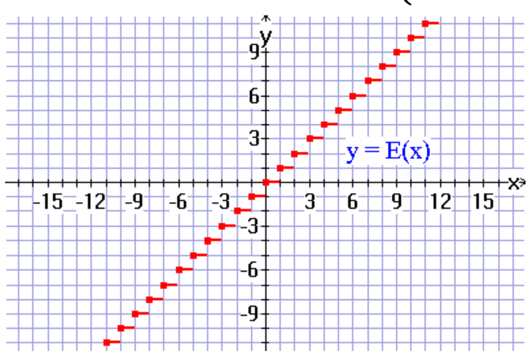
(a) De la definición se tiene ϕ debe estar definida en los extremos de los sub-intervalos $[t_{k-1}, t_k]$ $k = 1, ..., n$; pero no es necesario que el valor que tome en los extremos de cada uno de los sub-intervalos coincida con ϕ_k

(b) Si ϕ es una función escalonada sobre $[a, b]$ y ϕ es constante en cada sub-intervalo abierto de $P \in \wp[a, b]$, entonces ϕ es constante en cada sub-intervalo abierto de Q, donde Q es una partición del intervalo $[a, b]$ más fina que P.

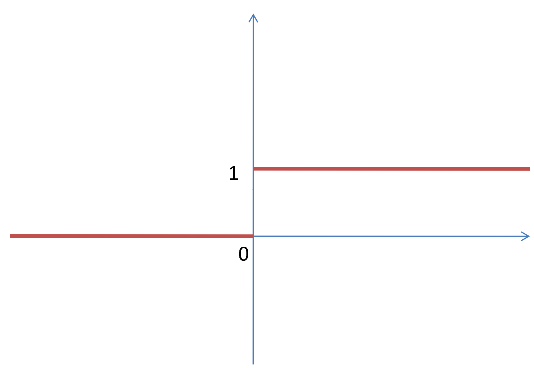
Al conjunto de las funciones escalonadas de valores reales sobre el intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $E[a, b]$, esto es

$$E[a, b] = \{\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \phi \,\text{es escalonada}\}.$$

El ejemplo más común de función escalonada es la función parte entera. Otras funciones escalonadas son la función signo y la función unitaria de Heaviside o función escalón unitario definida por $H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.



Función parte entera



Función de Heaviside

Con esta herramienta en la mano introducimos los siguientes teoremas.

Teorema 1.2. *La suma y producto de funciones escalonada es una función escalonada.*

Demostración.
En efecto, supongamos que $\phi, \varphi \in E[a, b]$. Entonces existen particiones $P, Q \in \wp[a, b]$ tal que ϕ y φ son constantes en cada sub-intervalo determinado por P y Q respectivamente. Haciendo uso del lema (1.1) tenemos que $O := P \cup Q \in \wp[a, b]$. Ahora bien, como ϕ y φ son constantes en cada sub-intervalo determinado por $P \cup Q$ entonces, de la observación

(1.1) garantiza que $\phi + \varphi$ y $\phi \cdot \varphi$ son constantes en cada sub-intervalo determinado por O, así, $\phi + \varphi, \phi.\varphi \in E[a, b]$. ■

Proposición 1.1. *La composición de cualquier función escalonada $s(x)$ y una función cualquiera $f(x)$ da por resultado una función escalonada $g(x) = f(s(x))$, siempre que $f(x)$ esté definida para cualquier valor de x en el rango de $s(x)$.*

Evidentemente, la derivada de una función escalonada es 0 en cualquier punto en que sea continua.

§1.2. Funciones Regladas.

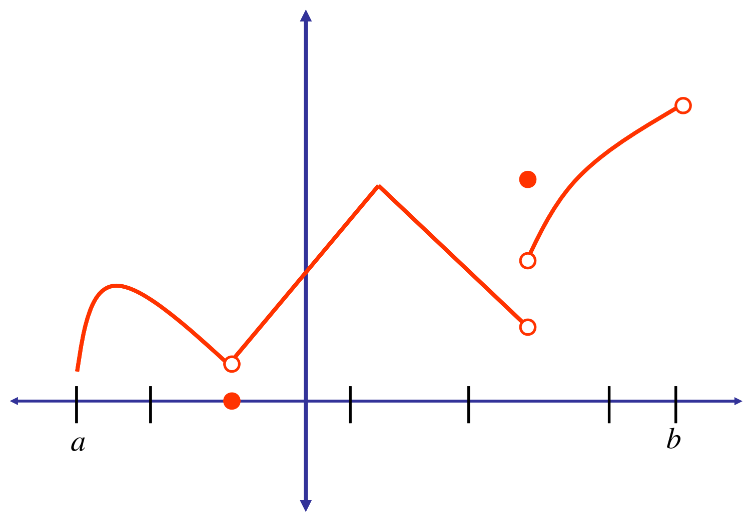
Todo el mundo familiarizado con el cálculo recuerda las propiedades de las funciones continuas definidas sobre un intervalo I cerrado y acotado. Algunas de estas propiedades pueden ser extendidas a funciones con una discontinuidad adecuada, específicamente a las funciones continuas a la derecha o izquierda en cada punto de I.
La idea ahora consiste en extender algunas de las magníficas propiedades de las funciones continuas a esta clase de funciones con discontinuidades, a las cuales les llamamos *funciones regladas*, e introducimos de inmediato.

Definición 1.4. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **reglada** si para cada $x \in I$ existen los siguientes límites:*

$$f(x^-) = \lim_{t \longrightarrow x^-} f(t), \quad y \quad f(x^+) = \lim_{t \longrightarrow x^+} f(t).$$

Al conjunto de todas las funciones regladas con valores reales definidas sobre el intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $G[a, b]$. Esto es,

$$G[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \ reglada\}.$$

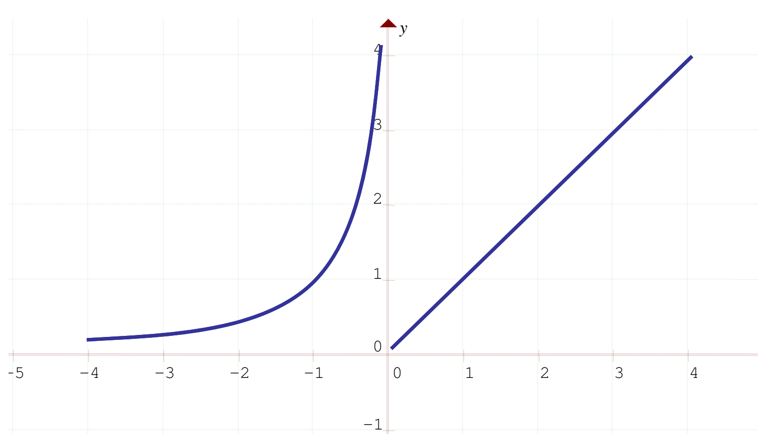


Como ejemplo de funciones regladas, tenemos las funciones parte entera, funciones escalonadas entre otras. Y vale la pena mencionar que podemos hallar un gran número de funciones que no son regladas, como por ejemplo la función

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{I}, \end{cases}$$

donde $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ denota los conjuntos de números racionales e irracionales respectivamente. Y también podemos construir la función

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,4] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in [-4,0]. \end{cases}$$



Entonces, de las propiedades que conocemos de las funciones continuas obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Toda función continua es reglada.*

La demostración es trivial, puesto que si f es una función continua y $x \in Dom(f)$, al existir $\lim_{y \to x} f(x)$, se desprende como consecuencia inmediata la existencia de los límites laterales; es decir

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ es continua } \} \subseteq G[a,b].$$

$G[a,b]$ con la norma del supremo

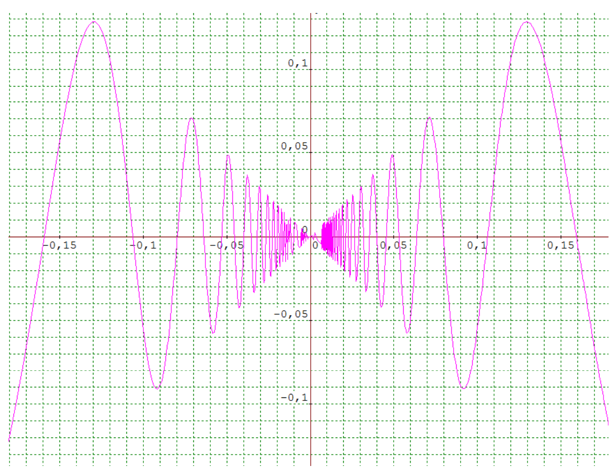
$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)| : a \leq x \leq b$$

es un espacio completo.

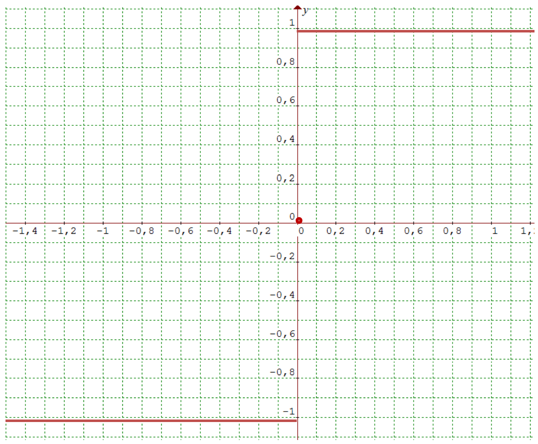
Observación 1.2. *Dadas dos funciones regladas, ¿sé puede garantizar que la función compuesta de ambas es reglada? La Respuesta es "no", y se ilustra con el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 1.1. *Dadas las funciones f, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante*

$$f(x) = \begin{cases} x sen(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0, \\ 0 & si \quad x = 0, \\ -1 & si \quad x < 0. \end{cases}$$



Sea $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x sen \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} x sen \frac{1}{x} = 0$$

Además,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} -1 = -1$$

Así f *y* g *son funciones regladas. Sin embargo* f *toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo de la forma* $(0, \delta)$ *y en consecuencia* $g \circ f$ *va a tomar los valores de* -1 *y* 1 *en puntos arbitrariamente cercanos a cero, por tanto* $g \circ f$ *no es reglada.*

Cabe preguntarse, qué propiedades de las funciones continuas son preservadas por estas funciones, como imagen de conjuntos compactos, que inmediato presentamos.

Proposición 1.3. *La imagen de un conjunto compacto mediante una función reglada es acotada.*

Demostración.
Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función reglada y $K \subset I$ un subconjunto compacto. Para cada $x \in K$ existen:

$$C = f(x^+) = \lim_{t \longrightarrow x^+} f(t) \quad \text{y} \quad D = f(x^-) = \lim_{t \longrightarrow x^-} f(t).$$

Sea $\epsilon > 0$. Existen $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que

$$0 < t - x < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - C| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad 0 < x - t < \delta_2 \Rightarrow |f(t) - D| < \epsilon.$$

Haciendo $\delta_x = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que:

$$|f(t)| - |C| \leq |f(t) - C| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f(t)| - |D| \leq |f(t) - D| < \epsilon$$

de lo cual obtenemos

$$|f(t)| < \epsilon + |C| \qquad \text{y} \qquad |f(t)| < \epsilon + |D|.$$

Haciendo $M_x = \text{máx}\{\epsilon + |C|, \epsilon + |D|\}$ tendremos que $|f(t)| \leq M_x$ para cada $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap I$.
Como $K \subset I$ tenemos que la colección $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in I}$ cubre al conjunto K y al ser K compacto, existen $x_1, ..., x_n \in I$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$. Luego para $M := \text{máx}\{M_{x_1}, M_{x_2}, ..., M_{x_n}\}$ se tiene que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in K$. Esto es, como se deseaba demostrar, f es acotada. ■

Desafortunadamente si un conjunto K es compacto no implica que $f(K)$ es compacto, cuando f es reglada, como lo evidencia el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{n} & si \quad x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

f, así definida, es reglada ya que $f(x^-)$ y $f(x^+)$ existen para todo $x \in [0, 1]$ y $[0, 1]$ es compacto, pero $f([0, 1]) = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$ por lo tanto no es compacto.

Proposición 1.4. *La suma y el producto de funciones regladas es reglada.*

Demostración.
En efecto; sean ϕ, $\varphi \in G[a, b]$, entonces para cada $x \in [a, b]$

existen

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{t \longrightarrow x^+} \phi(t) = a, & y & \lim\limits_{t \longrightarrow x^-} \phi(t) = b, \\ \lim\limits_{t \longrightarrow x^+} \varphi(t) = c, & y & \lim\limits_{t \longrightarrow x^-} \varphi(t) = d. \end{array}$$

Así, dado $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que

$$0 < t - x < \delta_1 \Longrightarrow |\phi(t) - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad 0 < t - x < \delta_2 \Longrightarrow |\varphi(t) - c| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $\delta_x := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tendremos que

$$\begin{aligned} |\phi(t) + \varphi(t) - (a + c)| &= |\phi(t) - a + \varphi(t) - c| \\ &\leq |\phi(t) - a| + |\varphi(t) - c| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim\limits_{t \longrightarrow x^+} (\phi(t) + \varphi(t))$ existe y de hecho es igual a $a + c$.
De manera análoga obtenemos que
Así $\lim\limits_{t \longrightarrow x^-} (\phi(t)+\varphi(t))$ existe y es igual a $b+d$. Con lo cual concluimos que $\phi+\varphi \in G[a, b]$.

Por otra parte, para $x \in [a, b]$ y $\epsilon > 0$ existen $\delta_3 > 0, \delta_4 > 0$ tales que

$$0 < t - x < \delta_3 \Longrightarrow |\phi(t) - a| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + |c|)} \qquad \text{y} \qquad 0 < t - x < \delta_4 \Longrightarrow |\varphi(t) - c| < \epsilon$$

En este caso para $\delta_x := \min\{\delta_3, \delta_4\}$,

$$\begin{aligned} |\phi(t)\varphi(t) - ac| &= |\phi(t)\varphi(t) - \varphi(t)a + \varphi(t)a - ac| \\ &= |\varphi(t)(\phi(t) - a) + a(\varphi(t) - c)| \\ &\leq |\varphi(t)||\phi(t) - a| + |a||\varphi(t) - c| \\ &< (\epsilon + |c|)\frac{\epsilon}{2(\epsilon + |c|)} + |a|\epsilon \end{aligned}$$

Con lo cual garantizamos que $\lim\limits_{t \longrightarrow x^-} \phi(t)\varphi(t)$ existe, es decir, $\phi\varphi$ es reglada. ■

Lema 1.3. *Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(X) \subset Y$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, entonces $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c = g(b)$.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, en virtud de la existencia del límite $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, podemos elegir $\delta_1 > 0$ tal que

$$|y - b| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - c| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Por otra parte, la hipótesis $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = b$, para el $\delta_1 > 0$ nos permite elegir $\delta_2 > 0$ de tal manera que,

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta_1. \tag{1.3}$$

Por tanto de (1.2) tendremos que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \delta_1$, que haciendo uso de (1.3) se obtiene que $|g(f(x)) - c| < \epsilon$. Con lo cual se concluye la demostración de que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g \circ f(x) = c$. ■

Corolario 1.4. *Si $f \in G[a, b]$ y $g \in C[a, b]$, entonces $g \circ f \in G[a, b]$.*

Demostración.
Como $f \in G[a, b]$ entonces para todo $c \in [a, b]$ los siguientes límites existen

$$\lim_{t\longrightarrow c^+} f(t) = \ell \tag{1.4}$$

$$\lim_{t\longrightarrow c^-} f(t) = \omega \tag{1.5}$$

Además como g es continua en $[a, b]$ entonces $\lim\limits_{y\longrightarrow \ell} g(y) = g(\ell)$. Luego para ver que $\lim\limits_{t\longrightarrow c^+} g \circ f(t)$ existe.
Sólo basta tomar (1.4) y $\lim\limits_{y\longrightarrow \ell^+} g(y) = g(\ell)$ y por lema (1.3) podemos concluir que $\lim\limits_{t\longrightarrow c^+} g \circ f(t)$ existe.
Para el caso de $\lim\limits_{t\longrightarrow c^-} g \circ f(t) = g(\ell)$ existe tomamos que por la continuidad de g $\lim\limits_{y\longrightarrow \omega} g(y) = g(\omega)$.
Usando (1.8) y nuevamente por lema (1.3) obtenemos que $\lim\limits_{t\longrightarrow c^-} g \circ f(x)$ existe.
Concluyendo así que $g \circ f \in G[a, b]$. ■

§1.3. Funciones de variación acotada.

Definición 1.5. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$, escribimos $\triangle f_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ y definamos la* ***variación de f relativa a la partición*** *P, como*

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Además, definimos la ***variación (total) de*** *f en $[a, b]$, denotado por $V(f, a, b)$ (o simplemente $V(f)$), mediante*

$$V(f) = \sup_{P \in \wp[a,b]} V(f, P).$$

Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se le llama de ***variación acotada*** *en $[a, b]$ si, y solo si $V(f) < \infty$.*

Proposición 1.5. *Toda función monótona en $[a, b]$ es de variación acotada en $[a, b]$, y además*

$$V(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Demostración.
Supongamos que f es creciente, esto es, que para $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$.
Y consideremos $P \in \wp[a, b]$ entonces

$$V(f) = \sup_{P \in \wp[a,b]} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = f(b) - f(a) < \infty.$$

Supongamos ahora que f es decreciente, esto es que para x, $y \in [a, b]$ si $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$, luego $V(f) = \sup\limits_{P \in \wp[a,b]} \sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = f(a) - f(b) < \infty$. Por último supongamos que f es una función constante. En este caso $V(f) = 0$

Por lo tanto $V(f) = |f(a) - f(b)|$.

En conclusión si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.■
La función f definida en (1.1) sobre $[0, 1]$ nos muestra que no toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es de variación acotada.

Proposición 1.6. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con derivada f' acotada en (a,b), entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración.
Sea $P \in \wp[a,b]$, $|f'(x)| \leq M$, para todo $x \in (a,b)$ con $M > 0$ y consideramos $[x_{i-1}, x_i]$ un intervalo determinado por la partición P. Por el teorema de valor medio tenemos que para cada $[x_{i-1}, x_i]$ existe $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f'(y_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

lo que implica que $(x_i - x_{i-1})f'(y_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

En consecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})|f'(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})M \leq (b-a)M. \quad (1.6)$$

Dado que P es una particion arbitraria, tenemos que,

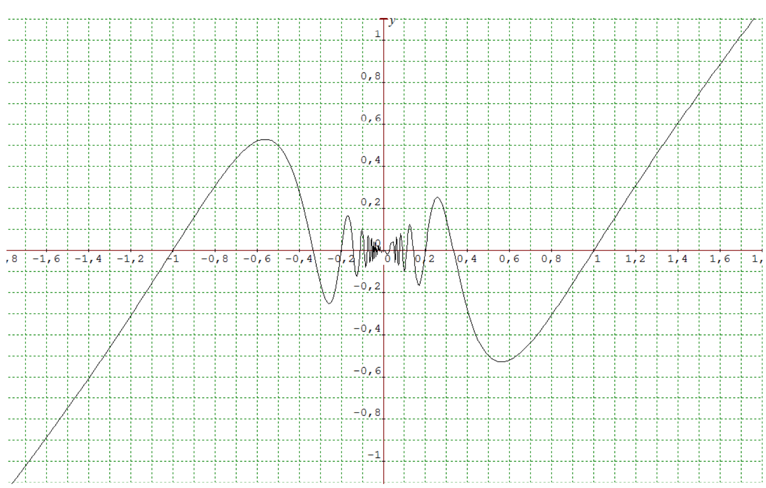
$$V(f) = \sup_{P \in \wp[a,b]} V(f,P) \ \leq \ (b-a)M < \ \infty.$$

Con lo cual obtenemos, que f es de variación acotada en $[a,b]$. ■

Sin embargo, una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser continua sin ser de variación acotada en $[a,b]$ como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$



Consideremos la partición $t_0 < t_1 < ... < t_n$ dada por

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{1}{2(n-k)}, \qquad (k = 1, ..., n-1) \qquad \text{y} \quad t_n = 1$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| &= |f(t_1) - f(t_0)| + \sum_{k=2}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t_n) - f(t_{n-1})| \\
&= \left| \frac{1}{2(n-1)} \cos\left(\frac{\pi}{2\dfrac{1}{2(n-1)}} \right) \right| \\
&+ \sum_{k=2}^{n-1} \left| \frac{1}{2(n-k)} \cos\left(\frac{\pi}{2\dfrac{1}{2(n-k)}} \right) - \frac{1}{2(n-k+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2\dfrac{1}{2(n-k+1)}} \right) \right| \\
&+ \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2\dfrac{1}{2}} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2(n-1)} \cos\left(\pi(n-1)\right) \right| \\
&+ \sum_{k=2}^{n-1} \left| \frac{1}{2(n-k)} \cos\left(\pi(n-k)\right) - \frac{1}{2(n-k+1)} \cos\left(\pi(n-k+1)\right) \right| \\
&+ \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\pi\right) \right| \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + 1 \\
&+ \sum_{k=2}^{n-1} \left| \frac{1}{2(n-k)} \cos\left(\pi(n-k)\right) - \frac{1}{2(n-k+1)} \cos\left(\pi(n-k+1)\right) \right| \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n-k+1)}
\end{aligned}$$

Note que esta partición no hace que la variación total esté minorada por la suma armónica, luego si n se acerca a ∞ tendremos que la variación de f puede hacerse tan grande como deseemos, es decir, esta función es continua pero $V(f) = \sup\limits_{P \in \wp[a,b]} V(f,P) = \infty$.

Proposición 1.7. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.*

Demostración.

Para cada $x \in [a,b]$ consideramos la partición $P := \{a, x, b\}$. Entonces
Dado que f es de variación acotada en $[a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(a)| + |f(x)| - |f(b)| &\leq |f(x) - f(a)| + |f(x) - f(b)| \\ &\leq V(f,P) \leq \sup_{Q \in \wp[a,b]} V(f,Q) < \infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, $2|f(x)| \leq V(f) + |f(a)| + |f(b)|$, lo cual equivale a

$$|f(x)| \leq \frac{V(f) + |f(a)| + |f(b)|}{2} < \infty,$$

para todo $x \in [a,b]$; es decir, f es acotada. ■

Teorema 1.5. *Si f y g son funciones de variación acotada, entonces $f+g$ y $f.g$ son funciones de variación acotada.*

Demostración.
Sea $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a,b]$, estudiemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\Delta(f+g)_i| &= \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i + \Delta g_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|\Delta f_i| + |\Delta g_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| + \sum_{i=1}^{n} |\Delta g_i|. \end{aligned}$$

Con esto hemos conseguido $V(f+g,P) \leq V(f,P)+V(g,P)$, tomando supremo tenemos $\sup_{P\in\wp[a,b]} V(f+g,P) \leq \sup_{P\in\wp[a,b]} V(f,P) + \sup_{P\in\wp[a,b]} V(g,P)$.
Lo cual implica que $V(f+g) \leq V(f)+V(g)$ y como tanto f y g son de variación acotada tenemos que $V(f+g) < \infty$. De lo cual se concluye la primera parte, $f+g$ es de variación acotada.
Para verificar la segunda parte, consideramos la hipótesis que nos garantiza que tanto f como g son de variación acotada y en virtud a la proposición 1.7 tenemos que f y g son acotadas, así existen A y B tales que

$$|f(x)| \leq A \qquad \text{y} \qquad |g(x)| \leq B \tag{1.7}$$

para todo $x \in [a,b]$.
Sea $h = f.g$ entonces

$$\begin{aligned}
\Delta h_{i-1} - \Delta h_i &= f.g(t_{i-1}) - f.g(t_i) \\
&= f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_i) \\
&= f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_{i-1}) + f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_i) \\
&= g(t_{i-1})(f(t_{i-1}) - f(t_i)) + f(t_i)(g(t_{i-1}) - g(t_i)) \\
&= g(t_{i-1})\Delta f_i + f(t_i)\Delta g_i.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|\Delta h_i| &= \sum_{i=1}^{n}|g(t_{i-1})\Delta f_i + f(t_i)\Delta g_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(|g(t_{i-1})||\Delta f_i| + |f(t_i)||\Delta g_i|) \\
&= \sum_{i=1}^{n}|g(t_{i-1})||\Delta f_i| + \sum_{i=1}^{n}|f(t_i)||\Delta g_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}B|\Delta f_i| + \sum_{i=1}^{n}A|\Delta g_i| \quad \textit{por} \quad 1.7 \\
&= B\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i| + A\sum_{i=1}^{n}|\Delta g_i|.
\end{aligned}$$

Si tomamos el supremo sobre el conjunto de todas las particiones P de $[a,b]$, tendremos que $V(h) \leq AV(g)+BV(f)$ y como g y f son de variación acotada entonces $V(h) < \infty$.
■

Teorema 1.6 (Relación entre funciones regladas y de variación acotada). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces f es reglada en $[a,b]$.*

Demostración.

Sea $t \in [a,b]$ y $(t_n) \subset [a,t)$ tal que $t_n \longrightarrow t$ cuando $n \to \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, por ser f de variación acotada $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq V(f,a,t)$.

Ahora si hacemos $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})|$, tendremos una sucesión de sumas, crecientes y acotadas superiormente por $V(f,a,t)$, en consecuencia converge, esto es,

$$S := \sum_{i=1}^{\infty}|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq V(f,a,t).$$

Luego, para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq n \geq n(\epsilon) \Longrightarrow |f(t_m) - f(t_n)| \;=\; \left|\sum_{i=n+1}^{m}[f(t_i) - f(t_{i-1})]\right| < \epsilon.$$

Ahora bien si $n \longrightarrow \infty$, entonces $m \longrightarrow \infty$ y $S_n \longrightarrow S$ al igual que $S_m \longrightarrow S$, entonces $|S_m - S_n| \longrightarrow 0$.

Además como $m > n$ entonces,

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= \left|\sum_{i=1}^{m}|f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})|\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=n+1}^{m}|f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})|\right| \\
&= \left|\sum_{i=n+1}^{m}|f(t_i) - f(t_{i-1})|\right|.
\end{aligned}$$

Luego como $|S_m - S_n| \longrightarrow 0$ tenemos que $\sum\limits_{i=n+1}^{m}|f_{t_i} - f(t_{i-1})| \longrightarrow 0$.

Así tenemos que si $m \geq n \geq n(\epsilon) \Longrightarrow |f(t_m) - f(t_n)| < \epsilon$.

Con esto obtendremos que $f(t_n)$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto convergente.

En consecuencia, existe $f(t^-) = \lim\limits_{x \to t^-} f(x)$.

La demostración de la existencia de $f(t^+)$ se hace de forma similar. ■

§1.4. Caracterizaciones de las funciones regladas

En esta sección se muestran algunas caracterizaciones de las funciones regladas, que es conveniente tener a la mano a la hora de trabajar con funciones regladas.

Teorema 1.7 (Criterio de Cauchy). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces:*

(a) Dado $x \in [a, b)$, existe $f(x^+)$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ de tal manera que

$$s, t \in (x, x + \delta_x) \cap [a, b], \quad \text{implica que} \quad |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

(b) Dado $x \in (a, b]$, existe $f(x^-)$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ de tal manera que

$$s, t \in (x - \delta_x, x) \cap [a, b], \quad \text{implica que} \quad |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

Demostración.

(a) ($\Rightarrow$) Sea $x \in [a, b)$. Si $f(x^+)$ existe consideramos $L_x = \lim\limits_{u \longrightarrow x^+} f(u)$, el cual existe, y $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces existe, $\delta_x > 0$ tal que

$$\forall u \in [a, b] \cap (x, x + \delta_x) \Longrightarrow |f(u) - L_x| < \epsilon/2$$

luego, si $s, t \in [a, b] \cap (x, x + \delta_x)$, tendremos que

$$|f(s) - L_x| < \epsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |f(t) - L_x| < \epsilon/2.$$

Así $|f(s)-f(t)| = |f(s)-L_x+L_x-f(t)| \leq |f(s)-L_x|+|f(t)-L_x| < \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$ esto se cumple siempre que $s, t \in [a, b] \cap (x, x + \delta_x)$. Quedando así demostrada la condición necesaria de la primera parte.

($\Leftarrow$) Sean $x, x_n \in [a, b)$ con $x_n > x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x \in [a, b)$, veamos que $(f(x_n))$ converge. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, por hipótesis, podemos elegir $\delta > 0$ que satisface

$$\forall s, t \in (x, x + \delta_x) \cap [a, b] \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

Ahora, la convergencia de (x_n), nos garantiza la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para $m, n > n_0$

$$\begin{aligned}
|x_n - x| < \delta_x \qquad &\text{y} \qquad |x_m - x| < \delta_x \\
-\delta_x < x_n - x < \delta_x \qquad &\text{y} \qquad |x_m - x| < \delta_x \\
x - \delta_x < x_n < \delta_x + x \qquad &\text{y} \qquad |x_m - x| < \delta_x \\
x < x_n < \delta_x + x \qquad &\text{y} \qquad |x_m - x| < \delta_x \,\text{usando (1.3).}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $x_m, x_n \in (x, \delta_x + x)$ de hecho, $x_m, x_n \in (x, \delta_x + x) \cap [a, b]$ de lo cual obtendremos que $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$. Con esto, $(f(x_n))$ es de Cauchy en [a,b] y en virtud a la completitud se garantiza $(f(x_n))$ converge, es decir, $f(x^+)$ existe.

(b) Esta demostración se hace de forma similar a la anterior.

■

Teorema 1.8. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es reglada si, y sólo si, existe una sucesión de funciones $(\phi_n) \subset E[a, b]$ tal que ϕ_n converge uniformemente a f en $[a, b]$. Esto lo denotaremos por*

$$\phi_n \rightrightarrows f \qquad \text{en} \qquad [a, b].$$

Demostración.
($\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de funciones $(\phi_n) \subset E[a, b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en [a,b].
Sea $x_0 \in [a, b](x_0 \neq a \ y \ x_0 \neq b)$, entonces por la convergencia uniforme tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi_n(t) - f(t)| < \epsilon/3 \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a, b].$$

Por otro lado como ϕ_{n_0} es una función escalonada es reglada, en consecuencia, existe $\phi_{n_0}({x_0}^+)$, y por el teorema (1.7) existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall \ s, t \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |\phi_{n_0}(t) - \phi_{n_0}(s)| < \epsilon/3.$$

Luego, para todo $s, t \in (x_0, x_0 + \delta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &= |f(s) - \phi_{n_0}(s) + \phi_{n_0}(s) - \phi_{n_0}(t) + \phi_{n_0}(t) - f(t)| \\ &\leq |f(s) - \phi_{n_0}(s)| + |\phi_{n_0}(t) - \phi_{n_0}(s)| + |\phi_{n_0}(t) - f(t)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

De nuevo por el teorema (1.7) tenemos que $f({x_0}^+)$ existe. Para verificar que $f({x_0}^-)$ existe se procede de forma similar, y al garantizar que $f({x_0}^-)$ existe se concluye que f es reglada.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que f es reglada, entonces en virtud a la existencia $f(x^+)$ y $f(x^-)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [a, b]$ por teorema (1.7), para $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, podemos elegir δ_x^1 y δ_x^2 tales que

$$s, t \in (x, x + \delta_x^1) \cap [a, b] \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{1}{n},$$

así como

$$s, t \in (x - \delta_x^2, x) \cap [a, b] \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}.$$

Sea $\delta_x = \text{mín}\{\delta_x^1, \delta_x^2\}$, entonces

$$s, t \in (x - \delta_x,) \cap [a, b] \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{n}. \tag{1.8}$$

Consideramos el intervalo abierto $I(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x)$.

Note que $[a, b] \subset \bigcup\limits_{x \in [a,b]} I(x)$ y en virtud a la completitud de $[a, b]$, podemos elegir una cantidad finita de elementos en $[a, b]$, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$, tales que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I(x_i).$$

Sea $(c_j)_{0 \leq\ j\ \leq 3n+2}$ una sucesión creciente, formada por $a, b, x_i - \delta_{x_i}, x_i$ y $x_i + \delta_{x_i}$, con $i = 1, ..., n$. Entonces, ya que la sucesión es creciente tenemos que $c_{j+1} \in I(x_j)$ ó $c_{j+1} \in [x_i + \delta_{x_i}, c_m]$. Esto implica qu e $c_{j+1} = x_j + \delta_{x_j}$; pues de no ser así $c_j < x_j + \delta_{x_j} < c_{j+1}$, pero $x_j + \delta_{x_j}$ también es un c_k. En consecuencia $(c_j, c_{j+1}) \subset I(x_j)$.

Luego, si $s, t \in (c_j, c_{j+1})$, se sigue que

$$s, t \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i) \cap [a, b] \qquad \text{ó} \qquad s, t \in (x_i, x_i + \delta_{x_i}) \cap [a, b].$$

Dado que

$$c_j \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i) \Rightarrow c_{j+1} \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i] \Rightarrow (a),$$
$$c_j \in (x_i, x_i + \delta_{x_i}) \Rightarrow c_{j+1} \in (x_i, x_i + \delta_{x_i}] \Rightarrow (b).$$

Para $s, t \in (c_j, c_{j+1})$, por (1.8) se tiene que $|f(s) - f(t)| \leq \dfrac{1}{n}$.
Definimos

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{m} f(\varepsilon_j)\chi_{(c_j, c_j+1)}(x) + \sum_{j=1}^{m} f(c_j)\chi_{c_j}(x).$$

donde $\varepsilon_j \in (c_{j-1}, c_j)$. Tenemos que $(\phi_n) \subset E[a,b]$ y

$$\begin{aligned} x \in [a,b] &\Rightarrow \begin{cases} x \in (c_j, c_{j+1}), & \text{para algún}\, c_j \\ x = c_j \end{cases} \\ &\Rightarrow |\phi_n - f(x)| = \begin{cases} |f(\varepsilon_j) - f(x)| \\ \hfill 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos lo que deseábamos, que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. ■

Corolario 1.9. *La convergencia uniforme de (ϕ_n) a f, sobre $[a,b]$, nos asegura que (ϕ_n) es uniformemente de cauchy.*

En efecto; Sea $\epsilon > 0$. Como $\|\phi_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\phi_n - f\| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n > N$. Ahora bien, si $n > m > N$ se sigue que

$$\|\phi_n - \phi_m\| \leq \| \phi_n - f \| + \| f - \phi_m \| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por tanto (ϕ_n) es de cauchy. ■

Corolario 1.10 (Discontinuidades de las funciones regladas)**.** *Sea $f \in G[a,b]$. Entonces el conjunto de puntos donde f es discontinua es numerable*

Demostración.
Como f es reglada, por el teorema (1.7), existe $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ sobre $[a,b]$.

Ahora, como cada $\phi_n \in E[a,b]$, entonces existe un conjunto finito $H_n \subset [a,b]$ donde ϕ_n es discontinua, los cuales van a ser los puntos de la partición o los extremos de los sub-intervalos determinados por la partición.

Así, cada ϕ_n es continua en $T_n = [a,b]\backslash H_n$ y por la convergencia uniforme, f es continua en $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(T_n) = [a,b]\backslash \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, el cual es numerable; es decir, f es discontinua, a lo mas, en un conjunto numerable de puntos. ■

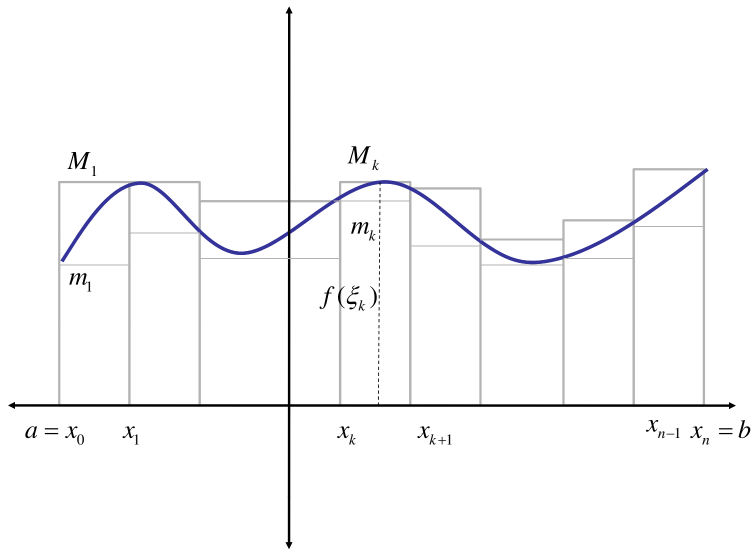
Capítulo 2

Integración.

El Cálculo Integral fue asentado de forma rigurosa a partir de la noción de límite de Cauchy. Pero la integral de Cauchy sólo era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados. Esto dejaba fuera muchas funciones, así que fue Riemann quien definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en una cantidad numerable de discontinuidades; pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad.

§2.1. La integral de Cauchy

La integral de Cauchy es un número real que se obtiene a partir de las hipótesis de que la función f es continua sobre un intervalo acotado $[a, b]$.
Para ello se toma una partición del intervalo $[a, b]$, digamos $\{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ y en cada uno de los sub-intervalos determinados por la partición se elige un punto intermedio ξ_k.



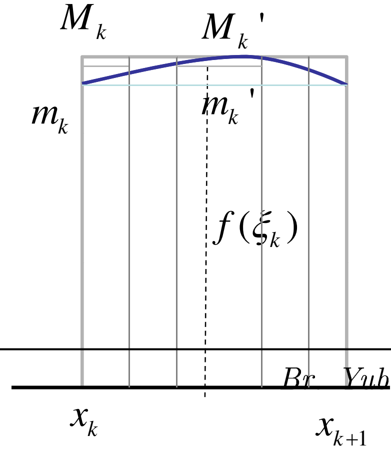
La integral de Cauchy se define como el límite de la sumatoria del área de los rectángulos $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ cuando el máximo $|x_{k+1} - x_k|$ tiende a cero. Nótese que para que la integral de Cauchy tenga sentido, debe asegurarse la existencia del límite de la sumatoria que la define. Ello se demuestra a partir de la continuidad de la función sobre un intervalo acotado.

Denotemos por M_k y m_k los valores extremos superior e inferior de f en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, los cuales se garantizan que son finitos, dado que f es continua sobre $[a, b]$. Entonces

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

Entonces

$$s_0 := \sum_{k=0}^{n} m_k(x_{k+1} - x_k) \quad \leq \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \quad S_0 := \sum_{k=0}^{n} M_k(x_{k+1} - x_k).$$



Tomando una partición mas fina que la anterior de manera que sub-divida cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ en varios sub-intervalos, en cada nuevo sub-intervalo existen nuevos extremos de la función que satisfacen

$$m_k \leq m'_k \leq f(\xi'_k) \leq M'_k \leq M_k,$$

entonces resulta que

$$s_0 := \sum_{k=0}^{n} m_k(x_{k+1} - x_k) \quad \leq \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \quad S_0 := \sum_{k=0}^{n} M_k(x_{k+1} - x_k),$$
$$s_1 := \sum_{k=0}^{n} m'_k(x'_{k+1} - x'_k) \quad \leq \sum_{k=0}^{n} f(\xi'_k)(x'_{k+1} - x'_k) \leq \quad S_1 := \sum_{k=0}^{n} M'_k(x'_{k+1} - x'_k).$$

Repitiendo el proceso con particiones sucesivas se pueden formas dos sucesiones (s_p) y (S_p), tales que

$$s_p := \sum_{k=0}^{n} m_k^{(p)}(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}) \quad \leq \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k^{(p)})(x_{k+1}^{(p)} - x_k) \leq \quad S_p := \sum_{k=0}^{n} M_k^{(p)}(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}).$$

Las dos sucesiones cumplen

$$s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_p \leq s_{p+1} \leq S_{p+1} \leq S_p \leq \cdots \leq S_1 \leq S_0.$$

Es decir, s_p es monótona no decreciente y acotada superiormente por S_0 mientras que S_p es monótona no creciente y acotada inferiormente por s_0. Por el Teorema de Weierstrass ambos límites existe, digamos s y S respectivamente.

Además,

$$S_p - s_p \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (M_k^{(p)} - m_k^{(p)})(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}).$$

Como f es continua, podemos hacer $|M_k^{(p)} - m_k^{(p)}|$ tan pequeño como deseemos, digamos que $|M_k^{(p)} - m_k^{(p)}| < \epsilon$, de lo cual se sigue que

$$S_p - s_p \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (M_k^{(p)} - m_k^{(p)})(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}) < \sum_{k=1}^{n} \epsilon(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}) = (b-a)\epsilon.$$

Por lo tanto los límites s y S son iguales.

En consecuencia, se deduce que por la acotación

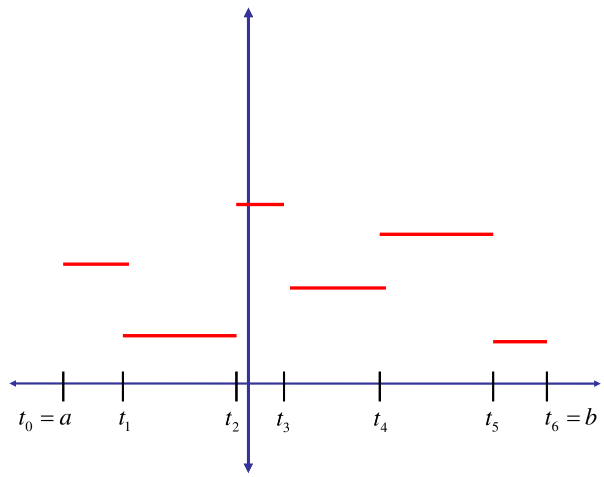
$$s_p := \sum_{k=0}^{n} m_k^{(p)}(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)}) \quad \leq \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k^{(p)})(x_{k+1}^{(p)} - x_k) \leq \quad S_p := \sum_{k=0}^{n} M_k^{(p)}(x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)})$$

que existe el límite

$$\lim_{\max |x_{k+1} - x_k| \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k^{(p)})(x_{k+1}^{(p)} - x_k) = s = S.$$

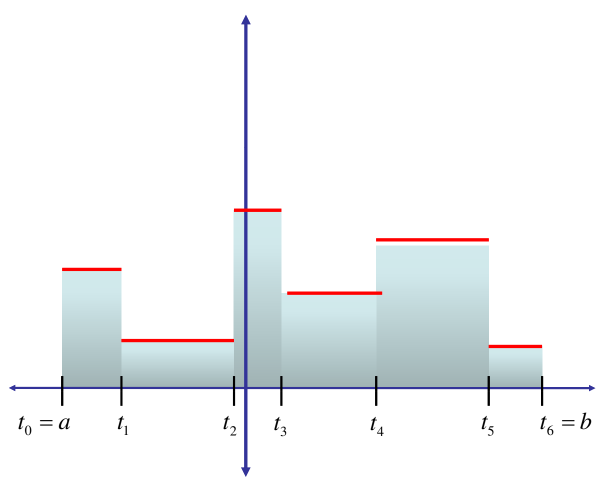
§2.2. Integral de Funciones Escalonadas.

La integral de Cauchy se extiende fácilmente para el caso de funciones continuas por partes, como es el caso, que se muestra a continuación, de las funciones escalonadas. Consideremos ϕ una función escalonada definida sobre $[a,b]$, y sea $P=\{t_0,...,t_n\}\in\wp[a,b]$ la partición en la cual ϕ es constante en cada uno de los sub-intervalos de $[a,b]$ y designamos por ϕ_i ese valor constante que toma ϕ en (t_{i-1},t_i) $i=1,...,n$.



Definición 2.1. *La* ***integral de una función escalonada*** ϕ *sobre* $[a,b]$*, denotada por el símbolo* $\int_a^b \phi(t)dt$*, se define mediante*

$$\int_a^b \phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i, \qquad \textit{donde} \qquad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \tag{2.1}$$



Ejemplo 2.1. *Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función constante, dada por $\phi(x) = c$, entonces*

$$\int_a^b c\,dt = \sum_{i=1}^{n} c\Delta t_i = c(b-a). \tag{2.2}$$

Observe que si $c > 0$, entonces el valor de (2.2) coincide con el área de un rectángulo de base $b - a$ y altura c.

Veamos que el valor de (2.1) no depende de la elección de la partición P, mientras ϕ sea constante en los sub-intervalos abiertos determinados por P.
En efecto, sea Q una partición mas fina que P ($P \subset Q$), que contiene un punto t más que P. Así, para algún $k = 0, ..., n-1$ se tiene que

$$t_0 < \cdots < t_k < t < t_{k+1} < \cdots < t_n$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\phi_1(t_1 - t_0) + \cdots + \phi_k(t - t_k) + \phi_k(t_{k+1} - t) + \cdots + \phi_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= \phi_1(t_1 - t_0) + \cdots + \phi_k(t_{k+1} - t_k) + \cdots + \phi_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i.
\end{aligned}$$

Es decir, el valor de la suma en (2.1) no cambia. Por tanto, podemos pasar de P a cualquier partición mas fina que Q añadiendo cada vez puntos de sub-división uno tras otro y en cada paso la suma en (2.1) no se altera. Por lo cual, el valor de la integral es el mismo para todos los refinamientos de P.
En consecuencia, dadas dos particiones, P y Q las sumas determinadas por P y Q son iguales, cada una de ellas, a la determinada por $P \cup Q$. De lo cual se concluye lo deseado.
Una vez dada esta definición podemos considerar las propiedades de esta integral.

§2.3. Propiedades.

Teorema 2.1 (Propiedad aditiva)**.** *Sean ϕ y φ funciones escalonadas, entonces, para $a < b$,*

$$\int_a^b [\phi(t) + \varphi(t)]dt = \int_a^b \phi(t)dt + \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Demostración.

Dado que ϕ y φ son funciones escalonadas, existen particiones P, Q de $[a, b]$, donde ϕ y φ son constantes en cada sub-intervalo determinado por P y Q, respectivamente. Hacemos $T = P \cup Q \in \wp[a, b]$, donde podemos garantizar que $\phi + \varphi$ es constante en cada sub-intervalo determinado por T.

Digamos que $T = \{t_0, ..., t_n\}$, entonces por la definición (2.1) tendremos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(t)dt &= \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta t_i, \\ \int_a^b \varphi(t)dt &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(t)dt + \int_a^b \varphi(t)dt &= \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\phi_i + \varphi_i) \Delta t_i \\ &= \int_a^b [\phi(t) + \varphi(t)]dt \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2 (Propiedad Homogénea). *Para todo $c \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_a^b c\phi(t)dt = c\int_a^b \phi(t)dt. \tag{2.3}$$

Demostración.

Sean $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$ una partición asociada a la función ϕ, $c \in \mathbb{R}$ y definimos $\psi(t) := c\phi(t)$ para cada $t \in [a, b]$. Note que

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(t)dt &= \sum_{i=1}^n \psi_i \Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^n c\phi_i \Delta t_i \\ &= c\sum_{i=1}^n \phi_i \Delta t_i \\ &= c\int_a^b \phi(t)dt. \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos (2.3). ■

Lema 2.3. *Si $\phi(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b \phi(t)dt \geq 0.$$

Demostración.
Por definición,

$$\int_a^b \phi(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i,$$

la cual es positiva, dado que $\Delta t_i > 0$, por representar la longitud de los sub-intervalos determinados por la partición; y en virtud de la hipótesis $\phi_i \geq 0$. Con lo cual se garantiza que la integral es no negativa.

■

Teorema 2.4 (Teorema de Comparación)**.** *Si $\phi(t) \leq \varphi(t)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b \phi(t)dt \leq \int_a^b \varphi(t)dt. \tag{2.4}$$

Demostración.
Como $\phi(t) \leq \varphi(t)$, entonces $\varphi(t) - \phi(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Por otro lado, de los teoremas (2.1) y (2.2),

$$\begin{aligned}
\int_a^b [\varphi(t) - \phi(t)]dt &= \int_a^b [\varphi(t) + (-1)\phi(t)]dt \\
&= \int_a^b \varphi(t)dt + \int_a^b (-1)\phi(t)dt \\
&= \int_a^b \varphi(t)dt - \int_a^b \phi(t)dt.
\end{aligned}$$

El lema precedente (2.3) garantiza que

$$\int_a^b [\varphi(t) - \phi(t)]dt \geq 0,$$

en consecuencia se obtiene (2.4). ■

Teorema 2.5 (Aditividad Respecto al Intervalo de integración)**.** *Sea $a < c < b$, entonces*

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^c \phi(t)dt + \int_c^b \phi(t)dt \qquad si \qquad a < c < b.$$

Demostración.

Consideramos la partición $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$ asociada a la función ϕ. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que que $c = t_j$, para algún j $(1 < j < n)$, en caso contrario hacemos el mismo procedimiento con $Q = P \cup \{c\}$.
En este caso,

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(t)dt &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{j} \phi_i \Delta t_i + \sum_{i=j+1}^{n} \phi_i \Delta t_i \\ &= \phi_1(t_1 - t_0) + \phi_2(t_2 - t_1) + \cdots + \phi_j(t_j - t_{j-1}) \\ &+ \phi_{j+1}(t_{j+1} - t_j) + \cdots + \phi_n(t_n - t_{n-1}) \\ &= \int_a^c \phi(t)dt + \int_c^b \phi(t)dt. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.6 (Invariancia Frente a la Traslación)**.** *Para cada número real c se tiene que*

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} \phi(t + c)dt$$

Demostración.
Sean c un número real y $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$, tal que $\phi(t) = \phi_i$ $(i = 1, ..., n)$ y $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Definamos, $\varphi(t) = \phi(t - c)$, siempre que $t \in [a + c, b + c]$.

Note que, dado que $Dom\,\phi = [a, b]$ tendremos que

$$Dom\,\varphi = [a + c, b + c], \;\; t - c \in [a, b], \quad a < t - c < b \quad \Rightarrow \quad a + c < t < b + c.$$

Luego $t - c \in (t_{i-1}, t_i)$ y $\varphi(t) = \phi_i$ en $(t_{i-1} + c, t_i + c)$.
Así, $P' = \{t_0 + c, ..., t_n + c\} \in \wp[a + c, b + c]$, y ϕ es una función escalonada relativa a la partición P' y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
\int_{a+c}^{b+c} \phi(t+c)dt &= \int_{a+c}^{b+c} \varphi(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta(t_i + c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i [(t_i - c) - (t_{i-1} + c)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i \\
&= \int_{a}^{b} \phi(t)dt,
\end{aligned}$$

obteniendo así la igualdad deseada. ■

Teorema 2.7 (Dilatación o contracción del intervalo de integración)**.**

$$\int_{ka}^{kb} \phi\left(\frac{t}{k}\right) dt = k \int_{a}^{b} \phi(t)dt \qquad \textit{para todo} \qquad k > 0 \tag{2.5}$$

Demostración.

Sea $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \wp[a, b]$, tal que $\phi(t) = \phi_i$ $(i = 1, ..., n)$ y $t \in (t_{i-1}, t_i)$.
Sea $\varphi(t) = \phi$ si $ka < t < kb$. Luego $a < \dfrac{t}{k} < b$ con $(k > 0)$ y entonces,

$$\varphi(t) = \phi\left(\frac{t}{k}\right) \qquad \text{si} \qquad t \in (kt_{i-1}, kt_i)$$

Así $P' = \{kt_0, ..., kt_n\} \in \wp[ka, kb]$, φ es un función escalonada relativa a la partición P' y

$$\begin{aligned}
\int_{ka}^{kb} \phi\left(\frac{t}{k}\right) dt &= \int_{ka}^{kb} \varphi(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta(kt_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i[(kt_i) - (kt_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i k(t_i - t_{i-1}) \\
&= k\sum_{i=1}^{n} \phi_i[t_i - t_{i-1}] \\
&= k\sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta t_i \\
&= k\int_a^b \phi(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Nos interesa extender las propiedades de la integral de una función escalonada para $b < a$. Con este objetivo en mente definimos:

$$\int_b^a \phi(t)dt = -\int_a^b \phi(t)dt \qquad \text{si} \qquad a < b,$$

así como

$$\int_a^a \phi(t)dt = 0$$

Con estas convenciones, el teorema (2.5) vale para cualquier a, b y c.
El teorema anterior puede extenderse al caso $k < 0$. Luego, para $k = -1$ (2.5) se convierte en

$$-\int_a^b \phi(t)dt = \int_{-b}^{-a} \phi(-t)dt.$$

Esta propiedad se conoce como **propiedad de reflexión de la integral**, ya que el gráfico de la función $\varphi(t) = \phi(-t)$ se obtiene de la función ϕ, por reflexión con respecto al eje y.

§2.4. Integral de Cauchy o Integral Reglada.

Las funciones regladas surgen como una clase de funciones integrables, y tiene varias caracterizaciones equivalentes.

Teorema 2.8. *Sea* $f, \phi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f *una función reglada y* $(\phi_n) \subset E[a,b]$ *tales que* $\phi_n \rightrightarrows f$ *en* $[a,b]$. *Entonces*

(a) La sucesión $(\int_a^b \phi_n(t)dt)_n$ *es una sucesión de Cauchy.*

(b) Supongamos que $(\varphi_n) \subset E[a,b]$ *tal que* $\varphi_n \rightrightarrows f$ *en* $[a,b]$. *Entonces, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon \qquad \textit{para todo} \qquad t \in [a,b].$$

(c) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt.$

Demostración.

(a) Por hipótesis tenemos que (ϕ_n) es de cauchy, así, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \Rightarrow \|\phi_n - \phi_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

lo cual implica que

$$n, m > n_0 \Rightarrow |\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b]. \tag{2.6}$$

Por otro lado, por (2.6) y por teoremas (2.1) y (2.4), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \phi_n(t)dt - \int_a^b \phi_m(t)dt\right| &= \left|\int_a^b (\phi_n(t) - \phi_m(t))dt\right| \\
&\leq \int_a^b |\phi_n(t) - \phi_m(t)|dt \\
&< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dt \\
&= \epsilon\frac{b-a}{b-a} = \epsilon,
\end{aligned}$$

siempre que $m, n > n_0$. Así obtenemos lo que deseábamos, $\left(\int_a^b \phi_n(t)dt\right)_n$ es una sucesión de Cauchy.

(b) Supongamos que $\phi_n \rightrightarrows f$ y $\varphi_n \rightrightarrows f$ sobre $[a,b]$. Entonces, para $\epsilon > 0$ dado, podemos elegir $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de manera que, para todo $t \in [a,b]$, tengamos

$$\begin{aligned} n &> n_1 \Rightarrow |\phi_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \\ n &> n_2 \Rightarrow |\varphi_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Hacemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ de lo cual se sigue que

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi_n(t) - f(t)|, |\varphi_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b] \quad (2.7)$$

En consecuencia, si $n > n_0$ se sigue de (2.7) que

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| &= |\phi_n(t) - f(t) + f(t) - \varphi_n(t)| \\ &\leq |\phi_n(t) - f(t)| + |\varphi_n(t) - f(t)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

como deseábamos.

(c) Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces por (b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b].$$

Por otra parte, si $n > n_0$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b \phi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_n(t)dt\right| &\leq \int_a^b |\phi_n(t) - \varphi_n(t)|dt \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)}dt \qquad (2.8) \\ &= \epsilon\frac{b-a}{2(b-a)} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Por (2.8) y (a), tenemos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$ existen. De la continuidad de la función valor absoluto y usando (2.8), concluimos que

$$\left|\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt - \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt\right| < \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b \phi_n(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt.$$

■

Este teorema nos permite definir sin ambigüedad la integral de una función reglada.

Definición 2.2. *Se define la* ***integral de una función reglada*** *f, sobre $[a,b]$, mediante*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b \phi_n(t)dt;$$

donde $(\phi_n) \subset E[a,b]$ y satisface $\phi_n \rightrightarrows f$, sobre $[a,b]$. Decimos que f es ***integrable*** *y tal integral la denotamos por $\int_a^b f(t)dt$.*

Es propicia la ocasión para recordar que una función f es uniformemente continua si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que para cada par x, y se tiene que

$$|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon.$$

Y como un resultado bien conocido se encuentra el teorema de Heine que establece

Teorema 2.9 (Heine)**.** *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.*

Demostración.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, supongamos que no es uniformemente continua en $[a,b]$ y demostremos que en este caso existe algún punto en $[a,b]$ donde f o es continua.

Como estamos suponiendo que f no es uniformemente continua, existe algún $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ hay al menos un par de puntos $x, y \in [a,b]$, que dependerán de δ, para los cuales $|x-y| < \delta$, pero $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$.

En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escogen $x_n, y_n \in [a,b]$ tales

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon.$$

En particular, $x_n - y_n \to 0$. Dado que la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada, hay alguna subsucesión que converge, digamos

$$y_{n_k} \to y \in [a,b].$$

Por otra parte, y dado que $x_n - y_n \to 0$, también se tiene que $x_{n_k} - y_{n_k} \to 0$. Por lo tanto,

$$x_{n_k} = (x_{n_k} - y_{n_k}) + y_{n_k} \to 0 + y.$$

Por último, la función f no puede ser continua en y, ya que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(y) - f(y)| = 0,$$

y, sin embargo,

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Tomando en cuenta esta definición y este resultado, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *Sea f una función de valores reales continua sobre $[a, b]$. Entonces f puede aproximarse uniformemente en $[a, b]$ por funciones escalonadas.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$. Dado que f es continua, esa continuidad es uniforme; podemos entonces elegir un $\delta > 0$ de manera que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \tag{2.9}$$

Consideremos una partición $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ de tal forma que $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Sea $x_k \in [t_{k-1}, t_k]$ y definimos

$$g_\epsilon(x) := \begin{cases} f(x_k) & \text{para} \quad x \in [t_{k-1}, t_k] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

En consecuencia si $x \in [a, b]$ se tiene que $x \in [t_{k-1}, t_k]$ para algún $k = 1, 2, \cdots, n$, que a su vez implica que $|x - x_k| < \delta$, y en virtud de (2.10) obtenemos que

$$|f(x) - g_\epsilon(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon.$$

Como esto es válido para todo $x \in [a, b]$ se tiene que g_ϵ aproxima a f uniformemente en $[a, b]$ en no mas que ϵ. ■

Corolario 2.11. *Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.*

Demostración.

Sea f una función continua sobre $[a, b]$, el teorema (2.10) nos garantiza que podemos elegir una sucesión (ϕ_n) de funciones escalonadas, por lo tanto funciones regladas, de manera que $\phi_n \rightrightarrows f$, lo cual significa que

$$\lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

■

Teorema 2.12. *Sea f una función reglada sobre $[a, b]$. Entonces f puede aproximarse uniformemente en $[a, b]$ por funciones escalonadas.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$. Dado que f es reglada, es discontinua a lo más en una cantidad numerable de puntos de $[a, b]$, en virtud del teorema (**??**), entonces, f es continua uniformemente excepto en $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ Elegimos $\delta > 0$ de manera que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \tag{2.10}$$

Consideremos una partición $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ de tal forma que $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ y $t_k \neq x_j$ para todo $k = 1, 2, ..., n$ y todo $j = 1, 2, ...$
Sea $\alpha_k \neq x_j \in [t_{k-1}, t_k]$ para todo $j = 1, 2, ...$ y definimos

$$g_\epsilon(x) := \begin{cases} f(\alpha_k) & \text{para} \quad x \in [t_{k-1}, t_k] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

En consecuencia si $x \in [a, b]$ se tiene que $x \in [t_{k-1}, t_k]$ para algún $k = 1, 2, \cdots, n$, que a su vez implica que $|x - x_k| < \delta$, y en virtud de (2.10) obtenemos que

$$|f(x) - g_\epsilon(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon.$$

Como esto es válido para todo $x \in [a, b]$ se tiene que g_ϵ aproxima a f uniformemente en $[a, b]$ en no mas que ϵ. ■
Lo natural ahora es considerar las propiedades que esta integral satisface, y es considerada a continuación.

Teorema 2.13 (Propiedad Aditiva). *Si f y g son funciones regladas integrables, entonces $f+g$ es integrable y*

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Demostración.

Si f, g son funciones regladas, en virtud del teorema (2.12) existen sucesiones de funciones escalonadas (ϕ_n), (φ_n) tales que $\phi_n \to f$ y $\varphi_n \to g$. De donde, $\phi_n + \varphi_n \to f + g$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt &= \lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt + \lim_n \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lim_n \left[\int_a^b \phi_n(t)dt + \int_a^b \varphi_n(t)dt\right] \\
&= \lim_n \int_a^b [\phi_n(t)+\varphi_n(t)]dt \qquad \text{(Teorema 2.4)} \\
&= \int_a^b [f(t)+g(t)]dt.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.14 (Propiedad Homogénea). *Para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt.$$

Demostración.

Si f es una función reglada, existe una sucesión de funciones escalonadas (ϕ_n) tal que $\phi_n \to f$. Luego, $c\phi_n \to cf$. Así,

$$\begin{aligned}
c\int_a^b f(t)dt &= c(\lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt) \\
&= \lim_n c\int_a^b \phi_n(t)dt \\
&= \lim_n \int_a^b c\phi_n(t)dt \\
&= \int_a^b cf(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.15 (De Comparación). *Si $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Demostración.
Si f, g son funciones regladas, existe (ϕ_n), (φ_n) sucesiones de funciones escalonadas tal que $\phi_n \to f$ y $\varphi_n \to g$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$; tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $\phi_n \leq \varphi(t) f$.

Así, en virtud del teorema (2.4), se tiene que

$$\int_a^b \phi_n(t)dt \leq \int_a^b \varphi_n(t)dt) \qquad \text{para todo} \qquad n \geq n_0,$$

y como consecuencia

$$\lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt \leq \lim_n \int_a^b \varphi_n(t)dt,$$

es decir,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

■

Teorema 2.16 (Aditividad con respecto al intervalo de integración). *Sean f y g integrales y $a < c < b$ números reales, entonces*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Demostración.
Si f es una función reglada, existe $(\phi_n) \in E[a,b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. Luego $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Así,

$$\int_a^c f(t)dt = \lim_n \int_a^c \phi_n(t)dt \qquad \text{y} \qquad \int_c^b f(t)dt = \lim_n \int_c^b \phi_n(t)dt.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt \\
&= \lim_n \left[\int_a^c \phi_n(t)dt + \int_c^b \phi_n(t)dt\right] \qquad \text{por la nota 2.3 respecto al teorema 2.7} \\
&= \lim_n \int_a^c \phi_n(t)dt + \lim_n \int_c^b \phi_n(t)dt \\
&= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt
\end{aligned}$$

■

§2.5. Teoremas Fundamentales del Cálculo.

Una función f real de variable real se dice que satisface una **condición de Lipschitz** si existe una constante $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo x y y en el dominio de f. En tal caso, K es llamada la **constante Lipschitz** de la función. Este nombre se dio en honor al matemático alemán Rudolf Lipschitz.
Entre los resultados clásicos, relacionados con funciones que satisfacen la condición de Lipschitz se encuentra el teorema:

Proposición 2.1. *Toda función que satisface la condición de Lipschitz es uniformemente continua y por tanto continua.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$. Como satisface la condición de Lipschitz si $|x - y| < \dfrac{\epsilon}{M}$ tendremos que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Con lo cual queda demostrado que f es uniformemente continua, por lo tanto continua.
■

Teorema 2.17. *Si $f \in G[a, b]$ y $g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds$, entonces g es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

Demostración.

Como $f \in G[a,b]$ y $[a,b]$ es compacto, entonces la proposición (1.3), $f([a,b])$ es acotado, esto significa que existe una constante $M > 0$ de manera que $|f(x)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$.

Como consecuencia, para todo x, $y \in [a,b]$ se sigue que

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(x)| &= \left| g(y) + \int_a^y f(t)dt - g(a) - \int_a^x f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\
&\leq \int_x^y |f(t)|dt \\
&\leq \int_x^y M dt \\
&= M \int_x^y dt \\
&= M|y - x|
\end{aligned}$$

Con esto podemos decir que g es una función Lipchitz y de esta manera g es uniformemente continua sobre $[a,b]$. ■

Teorema 2.18 (Caracterización de Hönig)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $f \in G[a,b]$ y

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds \tag{2.11}$$

para cada $t \in [a,b]$.

(b) Para cada $t \in [a,b)$ g es derivable por la derecha y por la izquierda y

$$g\prime_+(t) = f(t+), \quad g\prime_- = f(t-) \quad \text{para cada} \quad t \in (a,b]$$

(c) $f \in G[a,b]$ y g es una primitiva de f.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $t_0 \in [a, b)$. Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[g(t_0+h)-g(t_0)]-f(t_0^+) &= \frac{1}{h}\left[g(a)+\int_a^{t_0+h} f(s)ds - g(a) - \int_a^{t_0} f(s)ds\right] - f(t_0^+)\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{t_0+h} f(s)ds - \int_a^{t_0} f(s)ds\right] - f(t_0^+) \qquad (2.12)\\
&= \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s)ds - f(t_0^+)\\
&= \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} [f(s)-f(t_0^+)]ds.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $f \in G[a, b]$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal forma que

$$t_0 < s < t_0 + \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t_0^+)| < \epsilon. \qquad (2.13)$$

Luego, si $0 < h < \delta$ se deduce que $t_0 \leq s \leq t_0 + h$ o lo que es equivalente $0 \leq s - t_0 \leq h < \delta$

$$\frac{1}{h}[g(t_0+h)-g(t_0)]-f(t_0^+) = \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} [f(s)-f(t_0^+)]\, ds < \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \epsilon\, ds = \epsilon,$$

con lo cual se deduce que g es derivable a la derecha de t_0 y esta derivada es $f(t_0^+)$.
De una manera similar se demuestra que $g\prime_-(t_0) = f(t_0^-)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Claramente, de la hipótesis (b) tenemos que tanto $f(t^+)$ como $f(t^-)$ existen y por tanto $f \in G[a, b]$. Ahora veamos que g es una primitiva de f.

Como el conjunto de puntos donde una función reglada es discontinua es numerable, consideramos los puntos conjuntos donde la función f es discontinua a la derecha y a la izquierda, respectivamente

$$A = \{t \in [a, b] : f(t^+) \neq f(t)\} \quad \text{y} \quad B = \{t \in [a, b] : f(t^-) \neq f(t)\},$$

ambos deben ser a lo mas numerables.
En consecuencia, en los puntos de los conjuntos

$$[a, b]\backslash A \qquad \text{y} \qquad [a, b]\backslash B$$

f es continua; es decir, $f(x) = f(x^+) = f(x^-) = g'_+(x) = g'_-(x) = g'(x)$ para cada $x \in [a,b] \backslash A \cup B$.
Así, existe g' y $g'(t) = f(t)$, para todo t excepto posiblemente en un conjunto numerable.
$(c) \Rightarrow (a)$ Como $f \in G[a,b]$, entonces existe $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$.
Definimos,

$$\varphi_n(t) = g(a) + \int_a^b \phi_n(t)dt.$$

como $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, entonces

$$\varphi_n \rightrightarrows \psi(t) := g(a) + \int_a^t f(t)dt$$

en $[a,b]$.
Dado que por hipótesis, g es una primitiva de f y Por las implicaciones antes probadas y por la forma como esta definida ψ ; podemos decir que ψ es primitiva de f, así existe ψ con $\psi'(t) = f(t) = g'(t)$, sobre $[a,b]$ excepto posiblemente en un conjunto numerable.
Luego $\psi'(t) = g'(t)$ lo cual implica que

$$\psi(t) = g(t) + c$$

y dado que $\psi(a) = g(a) \rightarrow c = 0$. Por tanto obtenemos 2.11. ■

Corolario 2.19 (Primer teorema fundamental del cálculo)**.** *Sean* $f \in G[a,b]$ *y* $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Si f *es continua en* $c \in [a,b]$*.Entonces* g *es derivable en* c *y*

$$g'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ *ó* b*, entonces* $g'(c)$ *se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de* g*).*

Demostración.
La continuidad de f en c garantiza que $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$ y, así, por $(a) \Rightarrow (b)$ del teorema (2.18), se tiene que

$$g'(c) = g'_+(c) = f(c^+) = f(c) = f(c^-) = g'_-(c).$$

Así, tenemos que $g'(c) = f(c)$. ■

Corolario 2.20 (Segundo teorema fundamental del cálculo.)**.** *Sea* $f \in G[a,b]$ *y* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función tal que* $g'(x) = f(x)$ *para cada* $x \in [a,b]$*. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Demostración.
Como $f \in G[a,b]$, entonces g es continua en $[a,b]$ y $g'(x) = f(x)$ para cada $v \in [a,b]$. Luego, por teorema (2.18), g es una primitiva de f y así,

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds,$$

para cada $t \in [a,b]$. En particular,

$$g(b) = g(a) + \int_a^b f(s)ds \Rightarrow g(b) - g(a) = \int_a^b f(s)ds.$$

■

Corolario 2.21. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua sobre* $[a,b]$ *y* $f = g'$ *para alguna función* g*, entonces*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Demostración.
Basta ver que si f es continua sobre $[a,b]$, entonces en virtud de la proposición (1.2) $f \in G[a,b]$ y por el corolario (2.20), el resultado es inmediato. ■

§2.6. Integración en términos elementales.

Teorema 2.22 (Integración por Partes)**.** *Sean* $f', g' \in G[a,b]$*. Entonces*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t).$$

Demostración.
Por la propiedad de derivada de una multiplicación tenemos que

$$(f.g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t). \tag{2.14}$$

Entonces por ser f' y g' regladas y (2.14), se tiene que

$$\int_a^b (f.g)'(t) = \int_a^b f'(t)g(t) + \int_a^b f(t)g'(t),$$

o de forma equivalente

$$\int_a^b f(t)g'(t) = \int_a^b (f.g)'(t) - \int_a^b f'(t)g(t). \tag{2.15}$$

Por otro lado, por el corolario (2.21) tenemos que

$$\int_a^b (f.g)'(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \text{dado que} \quad g'; f' \in G[a,b]. \tag{2.16}$$

Luego, de (2.15) y (2.16) obtenemos

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t).$$

■

Corolario 2.23 (Fórmula usual de integración por partes.)**.** *Si f' y g' son funciones continuas sobre $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g(t)dt$$

Demostración.
Basta recordar que $C[a,b] \subset G[a,b]$ y aplicar el teorema (2.22). ■

Teorema 2.24 (Fórmula de Sustitución.)**.** *Sean $f', g' \in G[a,b]$. Si f es continua, entonces*

$$\int_a^b (f\circ g)(t)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Demostración.
Sea F una primitiva de f, entonces, por el corolario (2.21), tendremos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado, como F es una primitiva de f, por la regla de la cadena, obtenemos

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = (F' \circ g)(t)g'(t) = (f \circ g)(t)g'(t),$$

para todo $t \in [a,b] \backslash E, E \subset \mathbb{R}$ numerable.
En consecuencia, $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)g'$. Por otro lado, como $f \in C[a,b]$ y $g, g' \in G[a,b]$, entonces $(f \circ g)g' \in G[a,b]$. por lo cual, usando el corolario (2.21), se garantiza que

$$\int_a^b (f \circ g)(t)g'(t)dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

En consecuencia

$$\int_a^b (f \circ g)(t)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Generalización

En este capítulo sólo nos limitamos a enunciar la generalización de las funciones regladas definidas previamente así como sus propiedades e integral, sin realizar ninguna demostración de los mismos.
Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$. Una función $f:[a,b]\to X$ es llamada una función reglada si una de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1) Para todo t en el intervalo $[a,b]$, ambas limites laterales en t, $f(t^-)$ y $f(t^+)$ existe en X.

2) Existe una sucesión de funciones escalonadas $\varphi_n:[a,b]\to X$ que converge uniformemente a f, con respecto a la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

3) Si para todo $\delta>0$, existe alguna función escalonada $\varphi_\delta:[a,b]\to X$ tal que

$$\|f-\varphi\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)-\varphi_\delta(t)\|_X<\delta.$$

Denotaremos por $G([a,b];X)$ al conjunto de todas las funciones regladas $f:[a,b]\to X$.

Teorema 3.1.

(a) La suma y la multiplicación por un escalar de funciones regladas genera una función reglada. Esto significa que $G([a,b];X)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ para el cual está definido el espacio X.

(b) La norma del supremo sobre $G([a,b];X)$ es una norma y en consecuencia $G([a,b];X)$ es un espacio vectorial topológico con respecto a la topología inducida por dicha norma.

(c) Si X es un espacio de Banach, entonces $G([a,b];X)$ es también un espacio de Banach con respecto a la norma del supremo.

(d) $G([a,b];X)$ forma un álgebra de Banach real de dimensión infinita.

(e) Ya que una función continua definida sobre un espacio compacto, como es $[a,b]$, es automáticamente uniformemente continua, toda función continua es reglada.

(f) Si X es un espacio de Banach, entonces el espacio de todas las funciones $f:[a,b]\to X$ de variación acotada, denotada por $BV([a,b],X)$ forman un subespacio lineal denso de $G([a,b];X)$.

§3.1. La integral reglada

Como en el segundo capítulo, la integral reglada sigue siendo una definición de la integración para las funciones regladas, que se definen como los límites uniforme de las funciones escalonadas.
Nicolas Bourbaki es el nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses que en los años 30 del siglo XX se propusieron revisar los fundamentos de las matemáticas con una exigencia de rigor mucho mayor que la que entonces era moneda corriente en esta ciencia. Fundado en 1935, inició la publicación de sus monumentales elementos de matemáticas de acuerdo con el nuevo canon de rigor y el método axiomático, pretendiendo cubrir las bases de todas las matemáticas.
Su impacto en las matemáticas contemporáneas ha sido enorme, y desde los años 50 puede decirse que su exigencia de rigor ha sido universalmente aceptada en matemática, junto con el estilo particular en que la expresan, siendo muy diferentes los textos actuales de los prebourbakianos. Este éxito ha vuelto innecesaria la continuación de su obra, pues desde los años 60 todos los textos se redactan ya siguiendo sus exigencias. No obstante, en París sigue desarrollándose el Seminario Bourbaki, donde cada año se exponen los principales avances de las matemáticas.

El uso de la integral reglada en lugar de la integral de Riemann ha sido defendida por Nicolas Bourbaki y Jean Dieudonné.

Definición 3.1. *Se define la integral de una función reglada f por*

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt,$$

donde $(\varphi_n)_n$ es una sucesión de funciones escalonadas que convergen uniformemente a f.

Se puede chequear, igual que en el capitulo anterior, que la definición no depende de la sucesión de funciones escalonadas escogida.
Entre las propiedades de esta definición encontramos las siguientes:

Teorema 3.2.

(a) La integral es un operador lineal, esto es, para escalares α, β y funciones f, g regladas, tendremos que

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

(b) La integral es un operador acotado, esto es, para toda función reglada f es acotada y si $m \leq f(t) \leq M$ para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$m|b-a| \leq \int_a^b f(t)dt \leq M|b-a|.$$

En particular,

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Dado que las funciones escalonadas son integrables y la integrabilidad y el valor de la integral de Riemann son compatibles con los límites uniformes, la integral reglada es un caso especial de la integral de Riemann.

Referencias

[1] Bachman G., NARICI L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] Berberian, S.K. (1979). *Regulated Functions: Bourbaki's Alternative to the Riemann Integral.* The American Mathematical Monthly 86:208.

[3] P. Habala, P. HAJEK, V. ZIZLER. *Introduction to Banach Spaces I, II.* Matfyspress, Prague. 1996. 173-184.

[4] Megginson R. An Introduction to Banach Spaces Theory. Springer, Verlag New York. 1998.

[5] Rudin W. *Functional Analysis.* Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Parin, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.

[6] Viloria Nelson y Cadenas Reinaldo. *Integral de Cauchy: Alternativa a la Integral de Riemann*, Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 1(2003), pp. 49-53.