UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"*Estudio sobre la aplicación de operaciones de intersección y diferencia en medidas de comparación entre conjuntos difusos*"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Darwin J Sequera P

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: *Teoría de conjuntos difusos*.
Tutor: *Prof. Belkys López de Lameda*

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2010

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"*Estudio sobre la aplicación de operaciones de intersección y diferencia en medidas de comparación entre conjuntos difusos*"

presentado por el ciudadano *Br. Darwin J Sequera P* titular de la Cédula de Identidad No. 13.543.843, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

Doy infinitas gracias a Dios, quien me dió la fé, la fortaleza, la salud, y la esperanza para terminar este trabajo.

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios por haberme ayudado cada día.

A mis padres, Josefa y Segundo, porque gracias a su apoyo y consejo he llegado a concretar esta meta, la cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir. A mis hermanos (Zugeidy, Yhonny, Eduardo, Eugenio) por sus colaboraciones y a mis sobrinos (Alanis y Brandol) ya que sus presencias han sido y serán siempre el motivo más grande que ha impulsado para lograr esta meta.

Deseo expresar un testimonio de cariño y agradecimiento al grupo cultural UNUMA, por el apoyo moral y estímulo brindado con confianza y por infundir en mí, la responsabilidad que representa el término de mi carrera profesional, en especial (Janeth, Yessica, Mariela, Leo, Anuar, María, Royma y Mary).

No es fácil llegar, se necesita ahínco, lucha y deseo, pero sobre todo apoyo como el que he recibido de parte de mis compañeros y amigos (Victor, Wendy, Francisco, Eliecer, Carolina, María Eugenia, Pedro, Yankis, Borys, Wilmer, Rosmery, Yackelin, Danilo, Hilbemar, Miguel, entre otros) durante este tiempo. Ahora más que nunca se acredita mi cariño, admiración y respeto.

A todos ustedes muchas gracias.

Resumen

A través de este trabajo se estudió la aplicación de operaciones de intersección y diferencia para medidas que permiten comparar conjuntos difusos, tales como medidas de satisfacción (satisfiability), semejanza (resemblance), inclusión (inclusion), y desemejanza (dissimirarity). Para ello se revisaron aspectos fundamentales sobre conjuntos difusos y sus operaciones, se estudiaron varias medidas de comparación entre conjuntos difusos, así como la forma en que se han utilizado las operaciones de intersección y diferencia en la construcción de medidas de comparación entre conjuntos difusos. Así mismo, se mostró la utilidad del desarrollo teórico a través su aplicación en problemas prácticos.

Palabras claves: conjuntos difusos, operaciones con conjuntos difusos, medidas de comparación, lógica difusa.

Índice

Índice de figuras

Introducción

La comparación de descripciones de objetos es una operación usual en muchos dominios: psicología, analogía, ciencias físicas, procesamiento de imágenes, agrupamiento (clustering), razonamiento deductivo, razonamiento basado en casos. Esta comparación es realizada frecuentemente a través de una medida destinada a determinar hasta qué punto las descripciones tienen puntos comunes o difieren uno de otro. Las medidas de comparación tienen varias formas [8], [9], [22], [5], dependiendo del propósito de su utilización. En este trabajo se estudiarán varias clases de medidas de comparación, tales como medidas de satisfacción (satisfiability), semejanza (resemblance) e inclusión (inclusion), que pueden ser consideradas como medidas de similitud (similarty), y medidas de desemejanza (dissimirarity). Por ejemplo es posible usar medidas de similitud en razonamiento deductivo para evaluar hasta qué punto una observación satisface una regla dada o en razonamiento basado en casos para medir la semejanza entre las características de un caso conocido y uno nuevo [4]. La satisfacción corresponde a una situación en la que se considera una clase u objeto de referencia y se ha de decidir si un nuevo objeto es compatible con éste o satisface la referencia. Esta situación es típica en razonamiento basado en prototipos, donde las referencias son prototipos y un nuevo objeto debe ser relacionado con uno de ellos. La inclusión también concierne a una situación con un objeto de referencia y mide si los puntos comunes a A y

B son importantes con respecto a A. Ésta puede ser usada en sistemas de manejo de bases de datos para decidir si una clase está incluida en otra. La semejanza es usada para una comparación entre la descripción de dos objetos del mismo nivel de generalidad, para decidir si ellos tienen muchas características en común. Esta situación ocurre en forma natural en un sistema de razonamiento basado en casos. Además es la base de la lógica de similitud (similarity logic). La desemejanza entre objetos evalúa hasta qué punto son diferentes. Esta cantidad puede ser útil cuando, en el paso de recuperación (retrieval) de un sistema de razonamiento basado en casos, ningún caso es suficientemente similar al nuevo caso. Es entonces interesante ser capaz de establecer una comparación con respecto a diferencias entre descripciones, y escoger el caso menos diferente con respecto al nuevo.

La comparación de objetos con descripciones imperfectas, afectadas con imprecisiones e inexactitudes puede ser tratada utilizando conjuntos difusos. Conjuntos nítidos que representen las descripciones exactas y ciertas de objetos pueden ser considerados como casos particulares de conjuntos difusos.

Se propone estudiar la aplicación de operaciones de intersección y diferencia para las medidas que permitan comparar conjuntos difusos, basado en investigaciones tales como las presentadas por Bouchon-Meunier, Rifqi y otros [4], [15], [7]. Así mismo, se mostrará la utilidad del desarrollo teórico a través de su aplicación en problemas prácticos.

1
Preliminares

1.1. Conceptos básicos

En su artículo seminal, Lotfi Zadeh en 1965 [21] propuso una clase de objetos con un continuo de grados de pertenencia, que denominó conjuntos difusos **fuzzy sets**. A partir de este concepto se han generado importantes investigaciones y desarrollos en diferentes áreas del saber tales como ciencias matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y económicas, medicina, etc. El propósito inicial de Zadeh en introducir los conjuntos difusos era proveer de una herramienta para ayudar al modelado de sistemas complejos, especialmente, pero no restringido a aquellos que involucraban agentes humanos. Para los conjuntos difusos, estableció nociones de operaciones tales como unión, intersección, complemento, suma algebraica y diferencia absoluta.

- En el caso de la intersección: La idea intuitiva de intersección heredera de los conjuntos clásicos expresa que el conjunto intersección de dos conjuntos A y B, se define como los elementos que están en el conjunto A y en el conjunto B; de esta manera la intersección entre conjuntos se puede entender como el una operación tipo AND entre los mismos. De manera matemática lo anterior se puede expresar así: $C = A \cap B$ para todo $x \in U$ entonces;

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- En el caso de la diferencia absoluta de A y B se denota por $|A - B|$ y se define como:

$$\mu_{|A-B|}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \qquad \forall x \in X$$

En 1971, Zadeh [22] define la noción de similitud (**similarity**) como la generalización de la noción de equivalencia. Los conjuntos difusos están relacionados con las mediciones de similitudes y disimilitudes entre objetos por su capacidad de representar información subjetiva resultante de la complejidad del mundo real. Tversky [20] presentó una definición formal de medidas de similitud como una combinación lineal de las medidas de sus características comunes y distintivas.

Las relaciones entre conjuntos difusos puede ser estudiada en términos de operaciones adecuadas, y han sido presentadas por diversos autores, entre ellos Dubois y Prade [9], Bouchon-Meunier [6], Klir y Yuan [14], Zimmermann [23].

En 1996, Bouchon-Meunier, Rifqi y Bothorel [4] propusieron una definición general de medidas de comparación que involucran descripciones difusas de características, con la intención de enfocar la flexibilidad del concepto de similitud en el marco de conjuntos difusos, y extender la definición original de Zadeh sobre similitud.

En el 2000, Rifqi, Berger y Bouchon-Meunier [5] presentaron un método para escoger medidas de comparación entre dos objetos, basado en el poder de discriminación de una medida. De esta forma, las medidas pueden ser comparadas entre ellas según su comportamiento. El análisis de los comportamientos de las medidas de comparación es fácil debido a una interpretación geométrica. Esta interpretación geométrica es obvia si las variables que intervienen en la familia de medidas están normalizadas.

1.1.1. Concepto de conjuntos difusos

Consideremos un conjunto X de elemento genérico x, dicho conjunto constituye el universo a tomar.

Un Conjunto difuso A de X es formado por el par $(A,\mu_A(x))$, donde x es una variable de A y μ_A es una función cuya imagen pertenece al intervalo cerrado [0,1].

La función μ_A recibe el nombre de función de intensidad de pertenencia y el valor $\mu_A(x)$ representa el grado de pertenencia de x al subconjunto A. Cuando $\mu_A(x)$ toma el valor de 1 se tiene una pertenencia absoluta de x en A, mientras que si μ_A toma el valor de 0 se tiene la no pertenencia absoluta de x en A. Un valor de μ_A cercano a 1 significa que el grado de pertenencia de x en A es alto, y si μ_A es cercano a 0 significa que el grado de pertenencia es bajo.

Ejemplo

Consideremos tres conjuntos difusos que representen los conceptos de edad: joven, de mediana edad, y viejo. Una expresión razonable de estos conceptos mediante funciones de pertenencia trapezoidal A_1, A_2 y A_3 está mostrada en la figura 1.1. Estas funciones están definida sobre el intervalo [0,80] como sigue:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \leq 20 \\ (35-x)/15 & \text{cuando } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{cuando } x \geq 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \leq 20 \vee x \geq 60 \\ (x-20)/15 & \text{cuando } 20 < x < 35 \\ (60-x) & \text{cuando } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{cuando } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \leq 45 \\ (x-45)/15 & \text{cuando } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{cuando } x \geq 60 \end{cases}$$

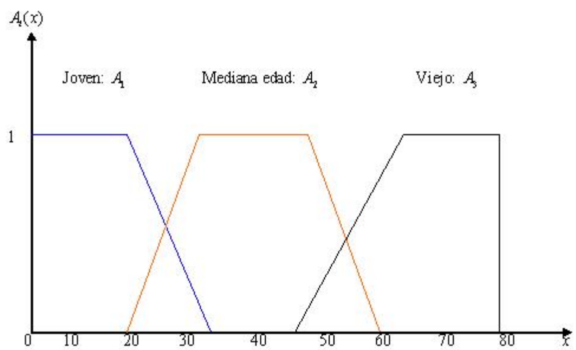

Figura 1.1: funciones de pertenencia de edades.

La variable x de un conjunto difuso puede ser continua o discreta.

- Para el caso continuo:

$$A = \{x/\mu_A(x)\} = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \geq a \\ \frac{x-a}{x^2} & \text{Si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

- Para el caso discreto:

  $B = \{0/-3 + 0{,}2/-2 + 0{,}25/-1 + 0{,}2/0 + 0{,}8/1 + 0{,}5/2 + 0/3\}$

  Se puede representar el conjunto difuso B de la siguiente manera:

x	$\mu_B(x)$
-3	0
-2	0.2
-1	0.25
0	0.2
1	0.8
2	0.5
3	0

Expresado gráficamente, tenemos:

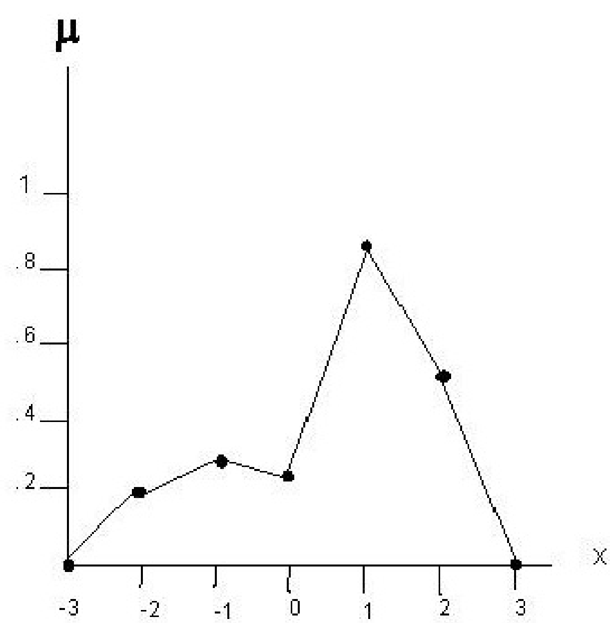

Figura 1.2: representación gráfica del conjunto difuso B.

1.1.2. Operaciones con Conjuntos Difusos

A continuación se presentan las diferentes operaciones con conjuntos difusos.

Definición 1.1.1. Consideremos los conjuntos difusos A y B. La intersección de estos dos conjuntos es un conjunto difuso C, denotado por $C = A \cap B$. La función de pertenencia de este nuevo conjunto difuso C está dada por:

$\mu_C(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad$ para $x \in X$

Ejemplo

consideremos los conjuntos difusos siguientes:

$A = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0/3\}$

Luego, aplicando la definición 1.1.1, tenemos que:

$\mu_C(-3) = min\{\mu_A(-3), \mu_B(-3)\} = min\{0 \cdot 5, 0 \cdot 3\} = 0 \cdot 3$

$\mu_C(-2) = min\{\mu_A(-2), \mu_B(-2)\} = min\{0 \cdot 5, 0 \cdot 3\} = 0 \cdot 3$

$\mu_C(-1) = min\{\mu_A(-1), \mu_B(-1)\} = min\{0, 0 \cdot 3\} = 0$

$\mu_C(0) = min\{\mu_A(0), \mu_B(0)\} = min\{0 \cdot 4, 0\} = 0$

$\mu_C(1) = min\{\mu_A(1), \mu_B(1)\} = min\{0, 0 \cdot 7\} = 0$

$\mu_C(2) = min\{\mu_A(2), \mu_B(2)\} = min\{0, 0 \cdot 2\} = 0$

$\mu_C(3) = min\{\mu_A(3), \mu_B(3)\} = min\{0 \cdot 5, 0\} = 0$

Entonces, la intersección del conjunto difuso C viene dado por:

$C = A \cap B = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0/-1 + 0/0 + 0/1 + 0/2 + 0/3\}$

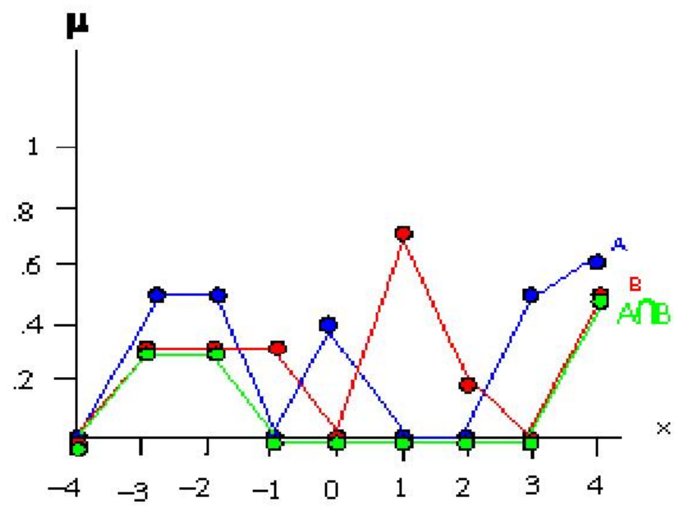

Figura 1.3: Representación gráfica de la intersección de los conjuntos difusos A y B

Definición 1.1.2. Consideremos los conjuntos difusos A y B. La unión de estos dos conjuntos es un conjunto difuso D, denotado por $D = A \cup B$. La función de pertenencia de este nuevo conjunto difuso D está dada por:

$\mu_D(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ para $x \in X$

Ejemplo

consideremos los conjuntos difusos siguientes:

$A = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0/3\}$

Luego, aplicando la definición 1.1.2, tenemos que:

$\mu_D(-3) = max\{\mu_A(-3), \mu_B(-3)\} = max\{0 \cdot 5, 0 \cdot 3\} = 0 \cdot 5$

$\mu_D(-2) = max\{\mu_A(-2), \mu_B(-2)\} = max\{0 \cdot 5, 0 \cdot 3\} = 0 \cdot 5$

$\mu_D(-1) = max\{\mu_A(-1), \mu_B(-1)\} = max\{0, 0\cdot 3\} = 0\cdot 3$
$\mu_D(0) = max\{\mu_A(0), \mu_B(0)\} = max\{0\cdot 4, 0\} = 0\cdot 4$
$\mu_D(1) = max\{\mu_A(1), \mu_B(1)\} = max\{0, 0\cdot 7\} = 0\cdot 7$
$\mu_D(2) = max\{\mu_A(2), \mu_B(2)\} = max\{0, 0\cdot 2\} = 0\cdot 2$
$\mu_D(3) = max\{\mu_A(3), \mu_B(3)\} = max\{0\cdot 5, 0\} = 0\cdot 5$
Entonces, la unión del conjunto difuso D viene dado por:
$D = A\cup B = \{0\cdot 5/-3 + 0\cdot 5/-2 + 0\cdot 3/-1 + 0\cdot 4/0 + 0\cdot 7/1 + 0\cdot 2/2 + 0\cdot 5/3\}$

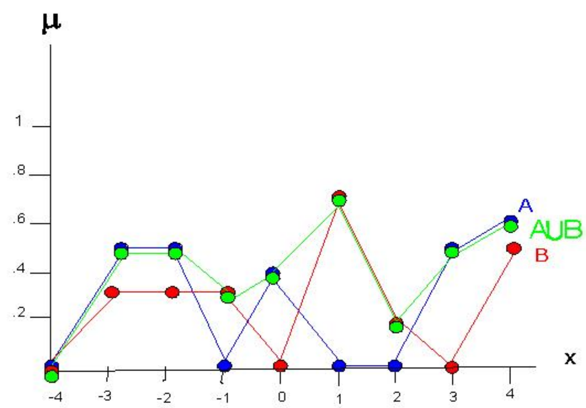

Figura 1.4: Representación gráfica de la unión de los conjuntos difusos A y B

Definición 1.1.3. Consideremos el conjunto difuso A, su complemento, denotado por A^c es también un conjunto difuso, caracterizado por la función de pertenencia:
$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad$ para $x \in X$

Ejemplo

consideremos los conjuntos difusos siguientes:

$A = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

Luego, aplicando la definición 1.1.3, tenemos que:

$\mu_{A^c}(-3) = 1 - \mu_A(-3) = 1 - 0 \cdot 5 = 0 \cdot 5$

$\mu_{A^c}(-2) = 1 - \mu_A(-2) = 1 - 0 \cdot 5 = 0 \cdot 5$

$\mu_{A^c}(-1) = 1 - \mu_A(-1) = 1 - 0 = 1$

$\mu_{A^c}(0) = 1 - \mu_A(0) = 1 - 0 \cdot 4 = 0 \cdot 6$

$\mu_{A^c}(1) = 1 - \mu_A(1) = 1 - 0 = 1$

$\mu_{A^c}(2) = 1 - \mu_A(2) = 1 - 0 = 1$

$\mu_{A^c}(3) = 1 - \mu_A(3) = 1 - 0 \cdot 5 = 0 \cdot 5$

Entonces, el complemento del conjunto difuso A^c viene dado por:

$A^c = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 1/-1 + 0 \cdot 6/0 + 1/1 + 1/2 + 0 \cdot 5/3\}$

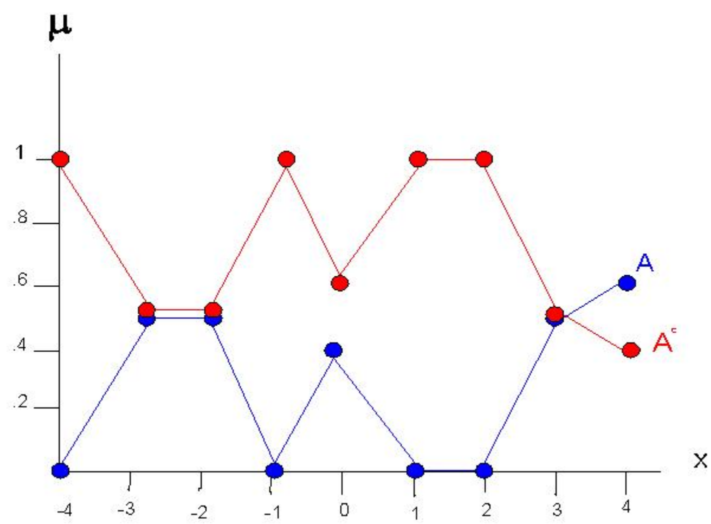

Figura 1.5: Representación gráfica del complemento del conjunto difuso A

Definición 1.1.4. Consideremos los conjuntos difusos A y B. La diferencia de A respecto B es también un conjunto difuso dado por: $A - B = A \cap B^c$, usando la función de pertenencia se tiene que:

$\mu_{A-B} = min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$ para $x \in X$

Ejemplo

consideremos los conjuntos difusos siguientes:

$A = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0/3\}$

Luego, aplicando la definición 1.1.4, tenemos que:

$\mu_{A-B}(-3) = min\{\mu_A(-3), 1 - \mu_B(-3)\} = min\{0 \cdot 5, 0 \cdot 7\} = 0 \cdot 5$

$\mu_{A-B}(-2) = min\{\mu_A(-2), 1 - \mu_B(-2)\} = min\{0 \cdot 5, 0 \cdot 7\} = 0 \cdot 5$

$\mu_{A-B}(-1) = min\{\mu_A(-1), 1 - \mu_B(-1)\} = min\{0, 0 \cdot 7\} = 0$

$\mu_{A-B}(0) = min\{\mu_A(0), 1 - \mu_B(0)\} = min\{0 \cdot 4, 1\} = 0 \cdot 4$

$\mu_{A-B}(1) = min\{\mu_A(1), 1 - \mu_B(1)\} = min\{0, 0 \cdot 3\} = 0$

$\mu_{A-B}(2) = min\{\mu_A(2), 1 - \mu_B(2)\} = min\{0, 0 \cdot 8\} = 0$

$\mu_{A-B}(3) = min\{\mu_A(3), 1 - \mu_B(3)\} = min\{0 \cdot 5, 1\} = 0 \cdot 5$

Entonces, la diferencia del conjunto difuso $A - B$ viene dado por:

$A - B = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

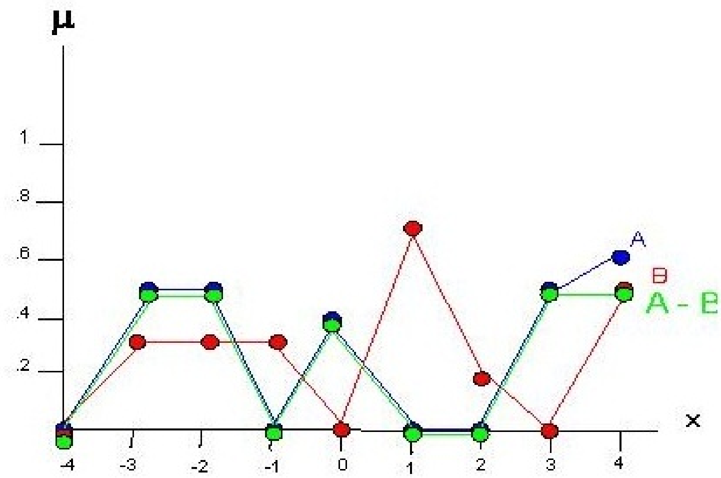

Figura 1.6: Representación gráfica de la diferencia del conjunto difuso A respecto al conjunto difuso B

Definición 1.1.5. Consideremos los conjuntos difuso A y B, la suma disyuntiva de estos conjuntos es también un conjunto difuso dado por:

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Ejemplo

consideremos los conjuntos difusos siguientes:

$A = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0/3\}$

Luego, aplicando la definición 1.1.5, tenemos que:

$A^c = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 1/-1 + 0 \cdot 6/0 + 1/1 + 1/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B^c = \{0 \cdot 7/-3 + 0 \cdot 7/-2 + 0 \cdot 7/-1 + 1/0 + 0 \cdot 3/1 + 0 \cdot 8/2 + 1/3\}$

Ahora bien,

$A \cap B^c = \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0/1 + 0/2 + 0 \cdot 5/3\}$

$B \cap A^c = \{0 \cdot 3/-3 + 0 \cdot 3/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0/3\}$

Entonces;

$$\begin{aligned} A + B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= \{0 \cdot 5/-3 + 0 \cdot 5/-2 + 0 \cdot 3/-1 + 0 \cdot 4/0 + 0 \cdot 7/1 + 0 \cdot 2/2 + 0 \cdot 5/3\} \end{aligned}$$

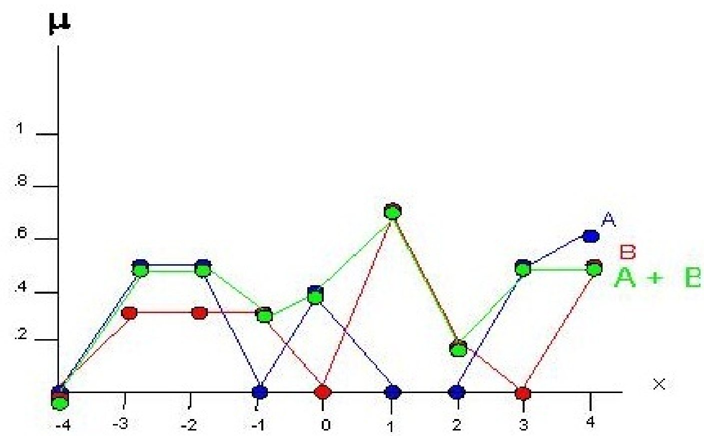

Figura 1.7: Representación gráfica de la suma disyuntiva del conjunto difuso A y B

1.1.3. Alfa Cortadura

Dado $\alpha \in [0,1]$. Una α- Cortadura de un conjunto difuso A es un conjunto nítido A^{α} constituido por los puntos del conjunto de discurso X, que tienen un grado de pertenencia mayor o igual a α.

Hay dos clases de cortadura importantes:

- $A^{\geq\alpha} = \{x \in X/\mu_A(x) \geq \alpha\}$
- $A^{>\alpha} = \{x \in X/\mu_A(x) > \alpha\}$

La primera es llamada α- cortadura fuerte y la segunda es llamada simplemente α- cortadura.

Ejemplo de α- cortadura fuerte:

Consideremos el siguiente conjunto difuso:

$A = \{0\cdot 1/x_1; 0\cdot 2/x_2; 0\cdot 3/x_3; 0\cdot 4/x_4\}$

A este conjunto difuso anterior, asociamos las 4 α- cortadura definidas por las funciones características y usaremos la siguiente representación:

- $A^{\geq 0\cdot 1} = \{1/x_1; 1/x_2; 1/x_3; 1/x_4\}$
- $A^{\geq 0\cdot 2} = \{0/x_1; 1/x_2; 1/x_3; 1/x_4\}$
- $A^{\geq 0\cdot 3} = \{0/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 1/x_4\}$
- $A^{\geq 0\cdot 4} = \{0/x_1; 0/x_2; 0/x_3; 1/x_4\}$

Ahora convertiremos cada una de las α- cortadura en un conjunto difuso especial definido para cada x en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ como sigue:

$$A_{\geq\alpha}(x) = \alpha.A^{\geq\alpha}$$

1.1.4. Principio de Extensión

El principio de extensión nos da un mecanismo básico para extender las expresiones matemáticas de conjuntos exactos al dominio difuso. Este principio generaliza la idea de un mapeo punto a punto de una función en los conjuntos tradicionales $y = f(x)$ a un mapeo entre conjuntos difusos.

Si f es una función $Y = f(X)$ y A es un conjunto difuso sobre X definido como:

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, ..., \mu_A(x_n)/x_n\} \tag{1.2}$$

Entonces el principio de extensión indica que la imagen del conjunto A bajo la función $f(.)$ es el conjunto difuso B:

$$B = f(A) = \{\mu_B(y_1)/y_1, \mu_B(y_2)/y_2, ..., \mu_B(y_n)/y_i\} \tag{1.3}$$

en la cual $y_i = f(x_i)$ y $\mu_B(y) = max\mu_A(x)$

Ejemplo:

Sean $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ y la función f definida así: $f(x_1) = y_2$, $f(x_2) = y_3$, $f(x_3) = y_5$, $f(x_4) = y_5$, $f(x_5) = f(x_6)y_4$, donde se observa:

y la aplicacion f^{-1}:

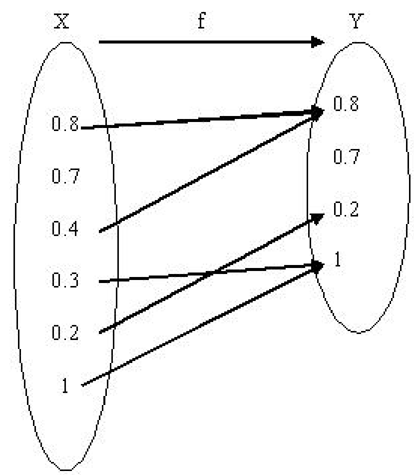

Figura 1.8: Diagrama sagital de la función f

$f^{-1}\{y_2\} = \{x_1\}$ $\qquad$ $f^{-1}\{y_4\} = \{x_5, x_6\}$

$f^{-1}\{y_3\} = \{x_2\}$ $\qquad$ $f^{-1}\{y_5\} = \{x_3, x_4\}$

considerando el siguiente conjunto difuso A en X:

$$B = \{0 \cdot 2/x_1; 0 \cdot 7/x_2; 0 \cdot 3/x_3; 1/x_4; 0 \cdot 4/x_5; 0 \cdot 8/x_6\}$$

Luego,

$$\mu_B(y_2) = \max_{\{x_1\}}\{0 \cdot 2\} = 0 \cdot 2 \qquad \mu_B(y_3) = \max_{\{x_2\}}\{0 \cdot 7\} = 0 \cdot 7$$
$$\mu_B(y_4) = \max_{\{x_5,x_6\}}\{0 \cdot 4; 0 \cdot 8\} = 0 \cdot 8 \qquad \mu_B(y_5) = \max_{\{x_3,x_4\}}\{0 \cdot 3; 1\} = 1$$

1.1.5. Normas y Conormas Triángulares

Normas triángulares ó t-Normas

Para representar la intersección de dos conjuntos difusos, buscamos funciones del tipo $T : [0,1]x[0,1] \to [0,1]$, que nos permitan obtener la función de pertenencia del conjunto intersección de la siguiente forma:

$$\mu_{P\cap Q}(x) = T(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \quad \forall x \in X \tag{1.4}$$

Si queremos que la intersección sea conmutativa, asociativa, que tenga por elemento neutro el conjunto X y sea monótona creciente, se debe verificar:

Desde el punto de vista de las funciones de pertenencia se deben cumplir las siguientes propiedades:

- Conmutativa.

  $\mu_{P\cap Q}(x) = \mu_{Q\cap P}(x)$. Por tanto,
  $T(\mu_P(x), \mu_Q(x)) = T(\mu_Q(x), \mu_P(x))$, $\forall x \in X$
  con lo que T ha de ser conmutativa.

- Asociativa.

  $\mu_{(P\cap Q)\cap R}(x) = \mu_{P\cap(Q\cap R)}(x)$. Entonces,

  $$T(T(\mu_P(x), \mu_Q(x)), \mu_R(x)) = T(\mu_P(x), T(\mu_Q(x), \mu_R(x))) \quad \forall x \in X,$$

  con lo que T ha de ser asociativo.

- Elemento Neutro del conjunto X.

  $\mu_{P\cap X}(x) = \mu_P(x)$ por lo que,
  $T(\mu_P(x), \mu_X(x)) = T(\mu_P(x), 1) = \mu_P(x)$, $\forall x \in X$,
  siendo el 1 el elemento neutro de T.

- Monotonía creciente.

  Si $\mu_P(x) \leq \mu_Q(x)$, $\forall x \in X$ y $\mu_R(x) \leq \mu_S(x)$, $\forall x \in X$. Entonces,
  $\mu_{P\cap R}(x) \leq \mu_{Q\cap S}(x)$, $\forall x \in X$.

De esta forma, $T(\mu_P(x), \mu_R(x)) \leq T(\mu_Q(x), \mu_S(x))$ por lo tanto; T ha de ser creciente.

Por tanto buscamos las funciones $T : [0,1]x[0,1] \to [0,1]$ que cumplan las siguientes propiedades:

(a) Conmutativa.

$T(x, y) = T(y, x)$, $\forall x, y \in [0, 1]$

(b) Asociativa.

$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))\ \forall x, y, z \in [0, 1]$

(c) Elemento Neutro.

$T(x, 1) = x\ \forall x \in [0, 1]$

(d) Monotonía Creciente.

Si $x \leq y$ entonces,$T(x, z) \leq T(y, z)\ \forall x, y, z \in [0, 1]$

A estas funciones se les denomina normas triángulares o t-normas. Las más conocidas son:

- Mínimo:

  $T(x, y) = Min(x, y)$, que es la mayor de las t-normas.

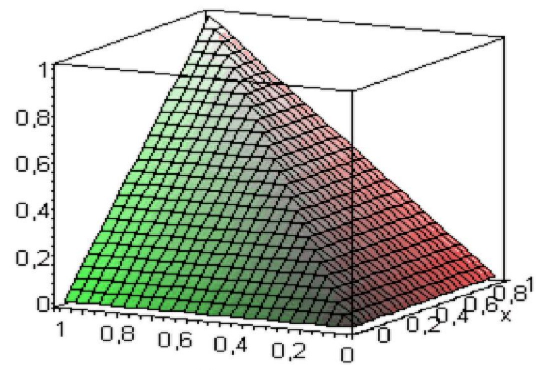

Figura 1.9: Representación gráfica del Mínimo

- Producto:

  $Prod(x, y) = x.y$

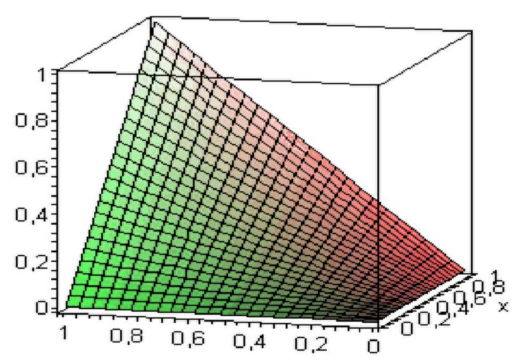

Figura 1.10: Representación gráfica del Poducto

- Operación de Lukasiewicz:

  $W(x, y) = Max(0, x + y - 1)$

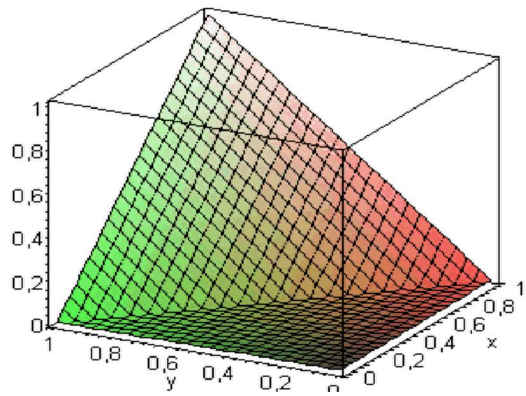

Figura 1.11: Representación gráfica del Operación Lukasiewicz

- Producto drástico:

  $$Z(x, y) = \begin{cases} x & \text{Si y=1} \\ y & \text{Si x=1} \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

  que es discontinua y es la menor de todas las t-normas.

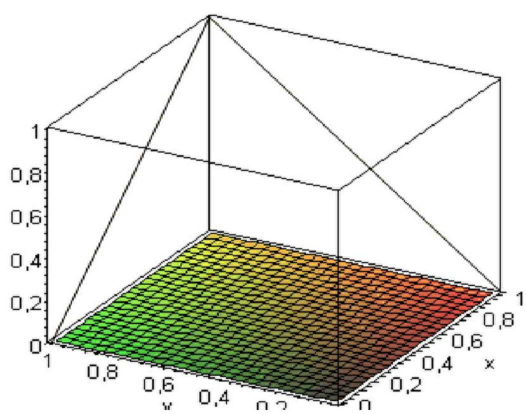

Figura 1.12: Representación gráfica del Producto drástico

Estas t-normas se relacionan por medio de las desigualdades siguientes:
$Z(x,y) \leq W(x,y) \leq Prod(x,y) \leq Min(x,y) \quad \forall x,y \in [0,1]$

Conormas Triángulares ó t-Conormas

Con la operación de la t-conorma se trata de representar la unión de dos conjuntos difusos. En este caso, necesitamos buscar una función del tipo

$$S : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$$

tales que nos permitan obtener la función de pertenencia del conjunto unión de forma que:

$$\mu_{P\cup Q}(x) = S(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \quad \forall x \in X \tag{1.5}$$

Desde el punto de vista de las funciones de pertenencia se deben cumplir las siguientes propiedades:

- Conmutativa.

  $\mu_{P\cup Q}(x) = \mu_{Q\cup P}(x)$. Por tanto,

  $$S(\mu_P(x), \mu_Q(x)) = S(\mu_Q(x), \mu_P(x)) \quad \forall x \in X$$

  con lo que S ha de ser conmutativa.

- Asociativa.

  $\mu_{(P\cup Q)\cup R}(x) = \mu_{P\cup(Q\cup R)}(x)$ entonces,

  $$S(S(\mu_P(x), \mu_Q(x)), \mu_R(x)) = S(\mu_P(x), S(\mu_Q(x), \mu_R(x))) \quad \forall x \in X,$$

  con lo que S ha de ser asociativo.

- Elemento Neutro del conjunto $\emptyset$.

  $$\mu_{P\cup\emptyset}(x) = \mu_P(x)$$

  por lo que,

  $$S(\mu_P(x), \mu_\emptyset(x)) = S(\mu_P(x), 0) = \mu_P(x) \quad \forall x \in X,$$

  siendo el 0 el elemento neutro de S.

- Monótona creciente.

  Si $\mu_P(x) \leq \mu_Q(x)$, $\forall x \in X$ y $\mu_R(x) \leq \mu_S(x)$, $\forall x \in X$. Entonces,

  $$\mu_{P\cup R}(x) \leq \mu_{Q\cup S}(x) \quad \forall x \in X.$$

  De esta forma, $S(\mu_P(x), \mu_R(x)) \leq S(\mu_Q(x), \mu_S(x))$.

  Por lo tanto; S ha de ser creciente.

Para definir de forma correcta la unión, a la función $S : [0,1]x[0,1] \longrightarrow [0,1]$ debe cumplir las siguientes propiedades:

(a) Conmutativa.

$S(x,y) = S(y,x) \quad \forall x, y \in [0,1]$

(b) Asociativa.

$S(S(x,y),z) = S(x, S(y,z)) \quad \forall x, y, z \in [0,1]$

(c) Elemento Neutro.

$S(x,0) = x \quad \forall x \in [0,1]$

(d) Monotonía Creciente.

Si $x \leq y$ entonces,$S(x,z) \leq S(y,z) \quad \forall x, y, z \in [0,1]$

Se denota con el nombre de funciones Conormas triángulares o t-conormas aquellas funciones que verifican las propiedades anteriores. Las más conocidas son:

- Máximo:

  $S(x, y) = Max(x, y)$, que es la menor de las t-conormas.

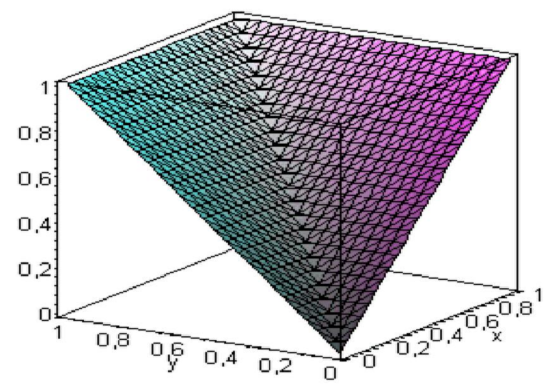

Figura 1.13: Representación gráfica del Máximo

- Suma-Producto:

  $sum - Prod(x, y) = x + y - x.y$

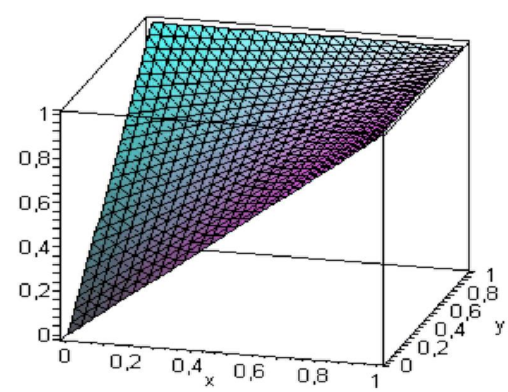

Figura 1.14: Representación gráfica del Suma producto

- Operación dual de Lukasiewicz:

  $W^*(x, y) = Min(1, x + y)$

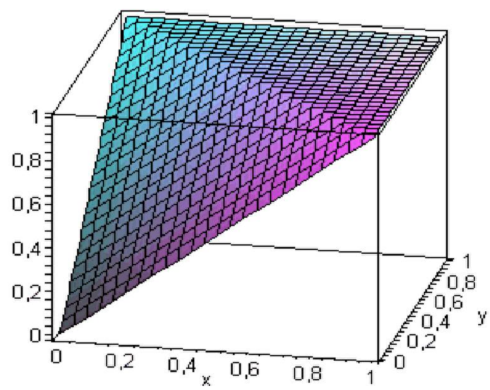

Figura 1.15: Representación gráfica del Operación dual de Lukasiewicz

- Suma drástica:

  $$Z^*(x, y) = \begin{cases} x & \text{Si y=0} \\ y & \text{Si x=0} \\ 1 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

  que es discontinua y es la mayor de todas las t-conormas.

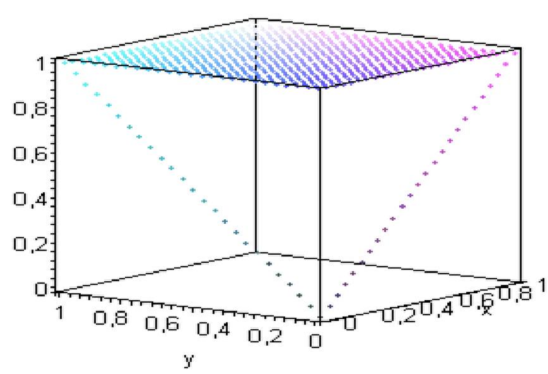

Figura 1.16: Representación gráfica del Suma drástica

1.1.6. Medidas Difusas

Definición 1.1.6. Una medida difusa M es una aplicación que lleva elementos de $F(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ tal que, para cada A y B en $F(\Omega)$:

AM1 : $M(\emptyset) = 0$

AM2 : Si $B \subseteq A$, entonces $M(B) \leq M(A)$

Si los valores de M son restringidos entre [0,1], M es una medida difusa introducida por M. Sugeno [19].

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
M_1(A) &= \int_{\Omega} f_A(x)dx && (1.6)\\
M_2(A) &= \sup_{x\in\Omega} f_A(x) && (1.7)\\
M_3(A) &= \Sigma(A) = \Sigma_{x\in\Omega} f_A(x) \qquad Si\ \Omega\ es\ finita && (1.8)\\
M_4(A) &= |Sup(A)| \qquad Si\ |.|\ denotada\ una\ metrica\ sobre\ \Omega && (1.9)\\
M_5(A) &= \Sigma f_A(x)^r \qquad Si\ \Omega\ es\ finita\ y\ r\ es\ un\ entero && (1.10)
\end{aligned}
$$

Una medida difusa nos permite evaluar el peso de la parte del universo común de A y B si consideramos $M(A \cap B)$, por ejemplo. La identificación de los elementos del universo que pertenecen en A y no en B, o a la inversa, es alcanzada mediante una operación de diferencia llamada:

Definición 1.1.7. Una operación en $F(\Omega)$ es llamada una diferencia y denotada por - , si satisface para cada A y B en $F(\Omega)$:

D1 : Si $A \subseteq B$, entonces $A - B = \varnothing$

D2 : $A - B \subseteq A - (A \cap B)$

D3 : $B - A$ es monótona con respeto a B : $B \subseteq B'$ implica $B - A \subseteq B' - A$

Ejemplo:

$$f_{A-_1B}(x) = max(0, f_A(x) - f_B(x)) \tag{1.11}$$

$$f_{A-_2B}(x) = \begin{cases} f_A & \text{Si } f_B = 0 \\ 0 & \text{Si } f_B > 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

2

Medidas de comparación entre conjuntos difusos

Se considerarán objetos con descripciones imperfectas, afectadas con imprecisiones e inexactitudes. Se usará el marco de conjuntos difusos para representar tales descripciones. Conjuntos nítido o cantoriano que representan las descripciones exactas y ciertas de objetos serán considerados como los casos particulares de conjuntos difusos.

Para cualquier conjunto Ω de elementos, sea $F(\Omega)$ el conjunto de subconjuntos difusos de Ω,f_a la función de pertenencia de cualquier descripción A en $F(\Omega)$ y $sup(A) = \{x \in \Omega / f_a(x) \neq 0\}$ su apoyo. La comparación de dos conjuntos difusos A y B definidos sobre un universo dado toma en cuenta los elementos del universo que pertenecen, al menos en parte, a cada uno de ellos. Dependiendo de la situación, se refiere considerar los elementos que pertenecen a A y no a B, a B y no a A, o a ambos. Se toma también en consideración el grado de pertenencia de estos elementos para A y B y, finalmente, el peso de la parte del universo común para A y B o relevante a sólo uno de ellos. Usamos la definición clásica de intersección:

$$f_{A \cap B} = \text{mín}(f_A, f_B)$$

para describir los elementos que pertenecen A y B. Se supone que se han dado medios para evaluar el peso de los elementos del universo caracterizado por un conjunto difuso a través de una medida difusa.

2.1. M-Medidas de comparación

La forma más simple de medida de comparación entre A y B tiene en cuenta $A \cap B$, $B - A$, $A - B$.

Definición 2.1.1. Una medida de comparación sobre Ω es una aplicación que llevan elementos de $S : F(\Omega)xF(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$S(A,B) = G_S(A \cap B, B - A, A - B)$$

para dar una aplicación $G_S : F(\Omega)xF(\Omega)xF(\Omega) \longrightarrow [0,1]$.

Según las propiedades de G_S , obtenemos varias medidas de la proximidad de dos conjuntos difusos. dado que el orden sobre $F(\Omega)$ inducido por la inclusión de conjuntos difusos no es total, una medida de similitud es insuficiente para comparar cualquier par de conjuntos difusos A y B. Además, puede ser útil comparar dos conjuntos difusos A y B más globalmente que solamente mediante este orden. Por ello, se introduce una medida menos restrictiva de similitud.

Definición 2.1.2. Una M-medida de comparación sobre Ω es una aplicación que lleva elementos de $S : F(\Omega)xF(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$S(A,B) = F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B))$$

para dar una aplicación $F_S : \mathbb{R}^+ x \mathbb{R}^+ x \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1]$ y una medida difusa M en Ω.

Se puede ver la diferencia entre una medida de comparación y una M- medida de comparación por el ejemplo dado en la figura 2.1 , donde: $A \cap B = A \cap C$ y $A -_1 B = A -_1 C$, $M_1(A \cap D) = M_1(A \cap B) = M_1(A \cap C)$,$M_1(A -_1 D) = M_1(A -_1 B)$ pero $A \cap D \neq A \cap B$ y $A -_1 D \neq A -_1 B$.

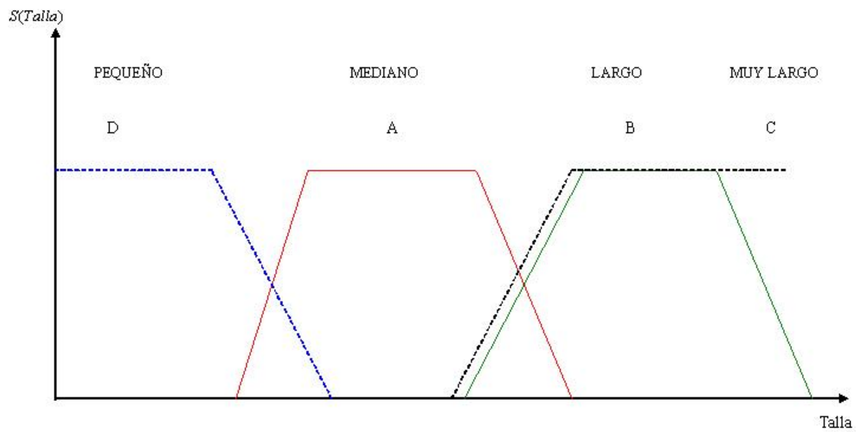

Figura 2.1: Diferencia entre una medida de comparación y una M- medida de comparación

2.2. Similitudes de conjuntos difusos

Para dos subconjuntos difusos A y B de Ω, puede que se quiera ver la semejanza entre ellos o sus diferencias. Primero, se enfocará el primer caso.

Definición 2.2.1. Una M- medida de similitud en Ω es una M- medida de comparación en S que satisface:

Sea $u = M(A \cap B)$, $v = M(B - A)$ y $w = M(A - B)$

AF1 : $F_S(u, v, w)$ es no decreciente en u, no creciente en v y en w.

Esta definición es justificada por la proposición siguiente que corresponde a exigencias naturales para una cantidad que evalúa hasta qué punto A y B son similares.

Proposición 2.2.1. *Una M- medida de similitud S satisface las siguientes propiedades:*

P1 : M-Monotonicidad: Si $M(A \cap B) \geq M(A \cap B')$ y $M(B - A) \leq M(B' - A)$ y $M(A - B) \leq M(A - B')$, entonces $S(A, B) \geq S(A, B')$

P2 : Monotonicidad: Si $A \cap B \supseteq A \cap B'$ y $B - A \subseteq B' - A$ y $A - B \subseteq A - B'$, entonces $S(A, B) \geq S(A, B')$

Demostración. Probaremos para [P1]: por la definición (2.3.1) en la parte de [AF1], tenemos que:

$$S(A, B) = F_S(u, v, w) \tag{2.1}$$

Luego, por hipotesis tenemos que:
$M(A \cap B) \geq M(A \cap B')$, $M(B - A) \leq M(B' - A)$, $M(A - B) \leq M(A - B')$
Entonces;
$S(A, B) \geq F_S(M(A \cap B'), M(B' - A), M(A - B')) = S(A, B')$

Por tanto; $S(A, B) \geq S(A, B')$

Ahora bien, probaremos [P2]: por la definición (2.3.1) en la parte de [AF1], tenemos que:

$$S(A, B) \geq F_S(u, v, w) \tag{2.2}$$

Luego por hipotesis, tenemos que:
$A \cap B \supseteq A \cap B'$, $B - A \subseteq B' - A$, $A - B \subseteq A - B'$
Entonces;
$S(A, B) \geq F_S(A \cap B', B' - A, A - B')$

Por tanto; $S(A, B) \geq S(A, B')$ □

Las propiedades siguientes son también las consecuencias directas de axioma $AF1$, los mencionamos porque ellos expresan la influencia de los tres elementos $M(A \cap B)$, $M(A - B)$ y $M(B - A)$ de un modo más claro que el que puede visualizarse por ejemplo en la figura 2.1.

Proposición 2.2.2. *Una M- medida de similitud S satisface las siguientes propiedades adicionales:*

P3 : Información M- elemental izquierda interna: Si $M(A \cap B) = M(A \cap B')$ y $M(A - B) = M(A - B')$, entonces $M(B - A) \leq M(B' - A)$ implica que $S(A, B) \geq S(A, B')$.

P4 : Información M- elemental derecha interna: Si $M(A \cap B) = M(A \cap B')$ y $M(B - A) = M(B' - A)$, entonces $M(A - B) \leq M(A - B')$ implica que $S(A, B) \geq S(A, B')$.

P5 : Información M- elemental derecha externa: Si $M(A - B) = M(A - B')$ y $M(B - A) = M(B' - A)$, entonces $M(A \cap B) \geq M(A \cap B')$ implica que $S(A, B) \geq S(A, B')$.

Estas tres propiedades pueden ser interpretadas de la siguiente forma:

- Para una cantidad dada de información común a las descripciones A y B y una cantidad dada de información contenida a A y no a B, mientras menor sea la información contenida a B y no a A, más se parecerán A y B.

- Para una cantidad dada de información contenida a A y no a B y una cantidad dada de información contenida a B y no a A, mientras menor sea la información común a las descripciones A y B, más se parecerán A y B.

Las medidas de similitud son todavía muy generales y se pueden identificar tres clases importantes de tales medidas. En las dos primeras, A es considerado como una referencia y B es comparado con A. Así, estas medidas no son simétricas. En la tercera, A y B tienen la misma clase de estatus y ninguno de ellos es una referencia. Así, esta medida es simétrica.

2.3. Medidas de satisfacción

Las primeras familia medidas de similitud a considerar evalúa la satisfacción de una descripción de referencia A de $F(\Omega)$ según una nueva descripción B definida como un subconjunto difuso de Ω.

Definición 2.3.1. Una M- medida de satisfacción en Ω es una M- medida de similitud S tal que:

AF2 : $F_S(0, v, w) = 0$ para cualquier valor de v y w

AF3 : $F_S(u, v, w)$ es independiente de w

AF4 : $F_S(u, 0, .) = 1$ para cualquier valor de $u \neq 0$

Las propiedades dadas en la proposición (2.2.1) son todavía válidas para una M- medida satisfacción que también satisfacen las propiedades adicionales que tienen en cuenta su especificidad. La mayor parte de ellos son las versiones ampliadas de las propiedades requeridas por A. Tversky [20]de su noción de semejanza.

Proposición 2.3.1. *Basado el orden de las descripciones deducidas de la inclusión de conjuntos difusos, las siguientes se mantienen propiedades para una M- medida de satisfacción:*

P6 : Exclusividad: Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $S(A, B) = S(B, A) = 0$.

P7 : Contención: Si $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, entonces $S(A, B) = 1$.

P8 : Independencia: Si $A \cap B = C \cap D$, $A' \cap B' = C' \cap D'$, $B - A = B' - A'$ y $D - C = D' - C'$, entonces $S(A, B) \geq S(A', B')$ si y solo si $S(C, D) \geq S(C', D')$.

P9 : Independencia relativa: Si $A \cap B = A \cap D$, $A \cap B' = B \cap D'$, $B - A = B' - A$ y $D - A = D' - A$, entonces $S(A, B) \geq S(A, B')$ si y solo si $S(A, D) \geq S(A, D')$.

Demostración. Probaremos para [P6].
Sea $A \cap B = \emptyset$, probaremos que $S(A, B) = S(B, A) = 0$. En efecto; por definición (2.3.1) en la parte [AF2] tenemos que;

$$F_S(A \cap B, B - A, A - B) = F_S(0, B - A, A - B)$$

ya que $A \cap B = \emptyset$

Luego, como $B - A$ y $A - B$ son independientes, entonces que

$$F_S(A \cap B, B - A, A - B) = F_S(0, B - A, A - B) = 0$$

Ahora bien, por definición (2.1.1) tenemos que;

$$F_S(A \cap B, B - A, A - B) = S(A, B) = 0$$

Análogamente, tenemos que;

$$F_S(B \cap A, A - B, B - A) = F_S(0, A - B, B - A)$$

ya que $B \cap A = \emptyset$

Luego, como $A - B$ y $B - A$ son independientes, entonces que

$$F_S(B \cap A, A - B, B - A) = F_S(0, A - B, B - A) = 0$$

Ahora bien ,aplicando la definición (2.1.1) tenemos que;

$$F_S(B \cap A, A - B, B - A) = S(B, A) = 0$$

Por tanto; $S(A, B) = S(B, A) = 0$

Probaremos para [P7].
Sea $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, queremos probar que $S(A, B) = 1$. En efecto;
por definición (2.3.1) en la parte [AF4], tenemos que;

$$F_S(A \cap B, 0, A - B) = 1$$

Luego; aplicando la definición (2.2.1) tenemos que,

$$F_S(A \cap B, 0, A - B) = S(A, B) = 1$$

Por tanto; $S(A,B)=1$

Probaremos para [P8].

Sea $S(A,B) \geq S(A',B')$

sí y solo si

$$F_S(M(A\cap B), M(B-A)) \geq F_S(M(A'\cap B'), M(B'-A'))$$

sí y solo si

$$F_S(M(C\cap D), M(B'-A')) \geq F_S(M(C'\cap D'), M(B'-A'))$$

por hipotesis $A\cap B = C\cap D$ y $B-A = B'-A'$

Luego, sí y solo si

$$M(C\cap D) \geq M(C'\cap D')$$

Ahora bien, como $M(D-C) = M(D'-C')$
de ahí, debido a [AF1], obtenemos que;

$$S(C,D) \geq S(C',D')$$

Probaremos para [P9].

$$S(A,B) \geq S(A,B')$$

sí y solo si

$$F_S(M(A\cap B), M(B-A)) \geq F_S(M(A\cap B'), M(B'-A))$$

sí y solo si

$$F_S(M(A \cap D), M(B' - A)) \geq F_S(M(B \cap D'), M(B' - A))$$

por hipotesis $A \cap B = A \cap D$ y $B - A = B' - A$

Luego, sí y solo si

$$M(A \cap D) \geq M(B \cap D')$$

Ahora bien, como $M(D - A) = M(D' - A)$
de ahí, debido a [AF1], obtenemos que;

$$S(A, D) \geq S(A, D')$$

□

La propiedad de independencia puede ser interpretada así: es equivalente comparar la semejanza de un primer par (A, B) a la semejanza de un segundo par (A', B') con la misma diferencia, o comparar la semejanza de cualquier otro primer par (C, D) a la semejanza de cualquier otro segundo (C', D'), también con la misma diferencia, en cuanto la información común al primer par es conservada, la información común al segundo par es conservada.

La independencia relativa es un caso particular de la independencia, en el caso donde C, A', C' son reemplazados por A. Esto quiere decir que, para un objeto dado de referencia A, es equivalente comparar la semejanza de cualquier objeto B con éste a la semejanza de cualquier objeto B' que tiene la misma diferencia con A, para una información dada común A y B, A y B'.

Notamos que el modelo dado por A. Tversky [20] como

$$S(A, B) = f(A \cap B, B - A, A - B)$$

puede ser considerado como un M-medida de satisfacción S, con tal de que la $f(u, v, w)$ sea independiente de w y, otra vez, creciente en u y descreciente en v.

Las propiedades de independencia e independencia relativa de S son compatibles con la independencia definida por A. Tversky.

Proposición 2.3.2. *Una M- medida de satisfacción S tiene las siguientes propiedades:*

P10 : Ejemplaridad: Si $M(B-A) \geq M(A-B)$, entonces $S(A,B) \leq S(A,B)$.

P11 : Información M- elemental interna: Si $M(A\cap B) = M(A\cap B')$, entonces $M(B-A) \geq M(B'-A)$ implica que $S(A,B) \geq S(A,B')$.

P12 : Información M- elemental externa: Si $M(B-A) = M(B'-A)$, entonces $M(A\cap B) \geq M(A\cap B')$ implica que $S(A,B) \geq S(A,B')$.

P13 : Solubilidad: Para algún A, B, B' tal que
$M(A\cap B) > M(A\cap B')$ y $M(B-A) < M(B'-A)$,
existe un par (P,Q) tales que
$M(P\cap Q) = M(A\cap B)$, $M(Q-P) = M(B'-A)$ y $S(A,B) > S(P,Q) > S(A,B')$
si $F_S(u,v,.)$ es estrictamente creciente en u y estrictamente descreciente en v.

Demostración. Probaremos para [P10]
Supongamos que $M(B-A) \geq M(A-B)$ entonces;

$$\begin{aligned} S(A,B) &= F_S(M(B\cap A), M(B-A)) \\ &\leq F_S(M(A\cap B), M(A-B)) \text{ya que } M(B\cap A) \geq M(A\cap B) \\ &= S(B,A) \end{aligned}$$

Por tanto; $S(A,B) \leq S(B,A)$

Probaremos para [P13]
Supongamos que $M(A\cap B) > M(A\cap B')$ y $M(B-A) < M(B'-A)$. Si existe P y Q tal que,

(a) $M(P \cap Q) = M(A \cap B)$

(b) $M(Q - P) = M(B' - A)$

Entonces tenemos que;

$$\begin{aligned} S(P,Q) &= F_S(M(P \cap Q), M(Q - P)) \\ &= F_S(M(A \cap B), M(B' - A)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(P,Q) &< F_S(M(A \cap B), M(B - A)) \\ &= S(A,B) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(P,Q) &> F_S(M(A \cap B'), M(B' - A)) \\ &= S(A,B') \end{aligned}$$

Se demostrará ahora que alli existe un par (P,Q) de este tipo. En efecto; Podemos considerar $P = A$ y Q con una función de pertenencia $f_Q(x) = f_B(x)$ para todo x tal que $f_B(x) \leq f_A(x)$ y $f_Q(x') \geq f_B(x')$ para todo x' tal que

$$f_B(x) \geq f_A(x)$$

Conseguimos que; $M(Q \cap P) = M(A \cap B)$ y escogemos un Q tal que;

$$\begin{aligned} M(Q - P) &= M(Q - A) \\ &= M(B' - A) \end{aligned}$$

debido a la parte [D3] de la definición (1.1.7). □

La propiedad de solubilidad quiere decir que, si B se parece más a A que a B', existen dos objetos P y Q, con la misma información común que A y B, con la misma diferencia que B' y A, que proporcionan una medida de semejanza en el intervalo $]S(A, B'), S(A, B)[$.

Esta última propiedad es, otra vez, una propiedad que puede ser vinculada a la noción de solubilidad introducida por A. Tversky.

Por lo general, las M- medidas de satisfacción no son simétricas, lo cual quiere decir que, para la mayor parte de los subconjuntos difusos A y B,

$$S(A, B) \neq S(B, A)$$

porque A es tomado como una referencia y, además, S depende de $B - A$ y no de $A - B$.

Ejemplos:

Una M- medidas de satisfacción son las siguientes:

- $S(A, B) = 1 - sup_{f_A(x)=0} f_B(x) = 1 - M_2(B -_2 A)$ por conjuntos difusos normalizado, con M_2 y la diferencia definida por $-_2$.
- $S(A, B) = inf_x min(1 - f_B(x) + f_A(x), 1) = 1 - M_2(B -_1 A)$ para conjuntos difusos normalizados, con M_2 y la diferencia definida por $-_1$.
- $S(A, B) = M(A \cap B)/M(B) = M(A \cap B)/(M(A \cap B) + M(B - A))$ con la medida de información M_1 o M_3 y la diferencia definida por $-_1$.

2.4. Medidas de inclusión

La segunda familia de medidas de similitud a considerar toma en cuenta la noción de inclusión. Muchas aplicaciones necesitan el empleo de medidas de inclusión, que consideran un objeto de referencia A y mira a las características de B que son comunes a A.

Definición 2.4.1. Una M- medida de inclusión S sobre Ω es un M- medida de similitud tal que:

AF2 : $F_S(0, v, w) = 0$ independiente de lo que pueda ser v y w.

AF5 : S es reflexiva

AF6 : $F_S(u, v, w)$ es independiente de v.

Proposición 2.4.1. *Una M- medida de inclusión satisface las siguientes propiedades:*

P6 : Exclusividad

P14 : Inclusión de conjunto: Si M es tal que: $M(A) = M(A \cap B) + M(A - B)$ para algún A y B, entonces alguna M- medidas de inclusión es monótona con respecto a $M(A \cap B)$ y, como una consecuencia, es monótona con respecto a B para un A fijo:

- *Si $M(A \cap B) \leq M(A \cap B')$ entonces $S(A, B) \leq S(A, B')$*
- *Si $B \subseteq B'$ entonces $S(A, B) \leq S(A, B')$*

Demostración. Probaremos para [P14].

Demostraremos una primera parte. Queremos probar que:
$M(A, B) \leq M(A, B')$ entonces, $S(A, B) \leq S(A, B')$. En efecto;
supongamos que $M(A) = M(A \cap B) + M(A - B) = M(A \cap B') + M(A - B')$ para cada B'. Luego, si $M(A \cap B) \leq M(A \cap B')$, tenemos que, $M(A - B) \geq M(A - B')$. Entonces, aplicando la definición [AF1] obtenemos que: $S(A, B) \leq S(A, B')$

Demostraremos la segunda parte. Queremos probar que:
Si $B \subseteq B'$ entonces, $S(A, B) \leq S(A, B')$. En efecto;
Si $B \subseteq B'$, tenemos que, $M(A \cap B) \leq M(A \cap B')$ y $M(A - B) \geq M(A - B')$. Luego, aplicando la definición [AF1] obtenemos que: $S(A, B) \leq S(A, B')$. □

Las propiedades de la información M- elemental interior y exterior análogo para $P11$ y $P12$ están satisfechos por M- medida de inclusión.

Ejemplos:

Una M- medidas de inclusión son los siguientes:

- $S(A,B) = \dfrac{|A \cap B|}{|A|} = \dfrac{M_3(A \cap B)}{M_3(A \cap B) + M_3(A - B)}$ con la medida difusa M_3 y la diferencia definida por $-_1$.
- $S(A,B) = inf_x min(1 - f_A(x) + f_B(x), 1) = 1 - M_2(A -_1 B)$ para conjuntos difusos normalizados.

El grado clásico de inclusión (inclusión de Zadeh):

$$S(A,B) = \frac{1}{|\Omega|}\Sigma_x min(1, 1 - f_A(x) + f_B(x)) = 1 - \frac{1}{|\Omega|}M_3(A -_1 B) \qquad (2.3)$$

es una M- medida de comparación que satisface todos los requerimientos de un M- medida de inclusión, excepto el hecho de que: $S(A,B) \neq 0$ para A y B tal que $A \cap B = \emptyset$.

2.5. Medidas de semejanza

La última familia de medidas de similitud a considerar toma en cuenta dos objetos y mira las características que ellos tienen en común, sin tomar en cuenta a uno de ellos como una referencia.

Definición 2.5.1. Una M-medida de semejanza sobre Ω es una M- medida de similitud S que satisface las propiedades:

AF : Reflexividad: $S(A,A) = 1$

AF7 : Simetría: $S(A,B) = S(B,A)$

M- Medidas de semejanza S que satisfacen una propiedad adicional de T- transitividad, para una t-norma T,$S(A,B) \geq T(S(A,C), S(C,B))$,$\forall A, B, C \in F(\Omega)$ son conocidas como relaciones indistinguishabilidad.

La propiedad de simetría de M- medidas de semejanza implica que $F(u, v, w)$ es simétrica en v y w: $F(u, v, w) = F(u, w, v)$. En el caso particular donde todas las descripciones son tales que: $M(A - B) = M(B - A)$, cualquier M- medida de satisfacción S es una medida de semejanza ya que es reflexiva. Además, S se hace simétrica debido a esta condición especial. Este es por ejemplo el caso si consideramos descripciones definidas como clases de una partición difusa comúnmente usada en el control difuso con las formas de funciones de pertenencia simétricas, idénticas para todas las clases localizadas a intervalos regulares como se indica en la figura 2.2.

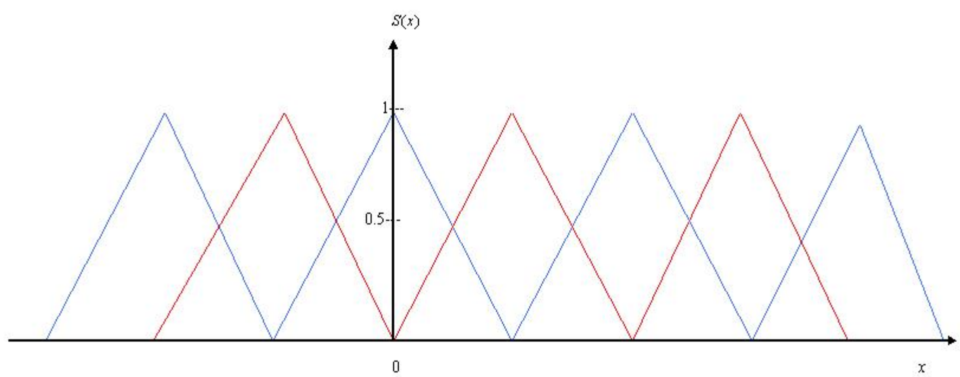

Figura 2.2: Partición difusa en un control difuso

Ejemplos:
Una M- medidas de semejanza son los siguientes:

- $S(A,B) = M(A \cap B)/M(A \cup B)$ para M tal que:

$$M(A \cup B) = M(A \cap B) + M(A - B) + M(B - A)$$

  por ejemplo M_1 o M_3 y con la diferencia definida por $-_1$.

- $S(A,B) = 1 - \frac{1}{|\Omega|}\Sigma_x |f_A(x) - f_B(x)| = 1 - \frac{1}{|\Omega|}(M_3(A-B) + M_3(B-A))$ con la medida difusa M_3 y la diferencia $-_1$.

2.6. Medidas de desemejanza

Muchas medidas de comparación de conjuntos difusos en la literatura están basadas en una clase de distancia entre sus funciones de pertenencia [6], [16], [20], [22]. A continuación se dan los requerimientos necesarios para su introducción en el marco de trabajo general.

Definición 2.6.1. Una M-medida de desemejanza S sobre Ω es una M- medida de comparación que satisface los siguientes requerimientos:

AF8 : Minimalidad: $S(A,A) = 0$

AF9 : $F_S(u,v,w)$ es independiente de u y creciente en v y w.

Claramente, una distancia es una medida de desemejanza que es simétrica y satisface la desigualdad triángular.

Ejemplos:
Una M- medidas de desemejanza son los siguientes:

- $S(A,B) = |A -_1 B| = \frac{1}{|\Omega|}(\Sigma_x f_{A-B}(x) + \Sigma_x f_{B-A}(x))$ donde $A -_1 B$ define el subconjunto difuso de elementos que aproximadamente pertenecen a A y no B o a la inversa, es una M-medida de desemejanza con la medida de información M_3 y la diferencia $-_1$.

- La distancia geométrica generalizada normalizada:
$S(A,B) = (\frac{1}{|\Omega|}(\Sigma_x |f_A - f_B|^r)^{1/r}$ para $r \geq 1$, con la medida difusa M_5 y la diferencia $-_1$.

- $S(A,B) = d_\infty(A,B) = sup|f_A(x) + f_B(x)|$ [6] con la medida difusa M_5 y la diferencia $-_1$.

3

Poder de discriminación de medidas de similitud

Similitud es un concepto ampliamente utilizado, con usos en varios campos, tales como el reconocimiento de patrones, razonamiento basado en casos, procesamiento de imágenes, razonamiento aproximado, aprendizaje automático, recuperación de información, por ejemplo. Existen muchas definiciones de similitud o semejanza y de disimilitud o de distancia. En este trabajo se ha concentrado la atención en medidas de similitud propuestas por Bouchon-Meunier y colaboradores [15].

3.1. Medidas de similitud

Una M-medida de la similitud en Ω es una aplicación: $S : \Omega \times \Omega \to [0, 1]$, definida como:

$$S(A, B) = F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) \tag{3.1}$$

para una aplicacion dada $F_S : \mathbb{R}^{+3} \to [0, 1]$, tal que $F_S(u, v, w)$ es no decreciente en u, y no creciente en v y w.

Obviamente, esta noción de M-medida de similitud es muy general y corresponde a asignaciones con comportamientos muy diferentes. Con el fin de ayudar a elegir uno de ellos en la solución de un problema particular, consideramos las siguientes propiedades adicionales que pueden ser satisfechas por M-medidas de similitud.

- *Reflexividad* ($S(A,A) = 1$ para cualquier A)lo que significa que $F_S(u,0,0) = 1$ para cualquier $u \neq 0$.
- *Exclusividad* ($S(A,B) = 0$ para cualquier A y B tal que $A \cap B = \varnothing$) lo que significa que $F_S(0,v,w) = 0$ para cualquier v y w diferente de 0.
- *Simetría* ($S(A,B) = S(B,A)$ para cualquier A y B), lo que significa que $F_S(u,v,w) = F_S(u,w,v)$ para cualquier u,v,w.

Entonces se distinguen las siguientes medidas de similitud de particular interés:

- Una M-medida de satisfacción es una medida de similitud exclusiva y reflexivo independiente del tercer componente:

$$S(A,B) = F_S(M(A \cap B), M(B - A))$$

  para una función $F_S : \mathbb{R}^{+2} \to [0,1]$ tal que $F_S(u,v) = F_S(u,v,.)$. Como consecuencia, una medida satisfacción satisface la propiedad de contención (si $B \subseteq A, B \neq \emptyset$,entonces $S(A,B) = 1$).

- Una M-medida de semejanza es una medida simétrica y reflexiva:

$$S(A,B) = F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B))$$

3.2. Medidas de satisfacción

Una medida de satisfacción corresponde a una situación en la que se considera un objeto de referencia o una clase y se tiene que decidir si un nuevo objeto es compatible con él o ella, o lo satisface. Por ejemplo, medida de satisfacción, son apropiadas para sistemas de base de reglas.

Definición 3.2.1. Una M-medida de satisfacción sobre Ω es una medida $S(A,B) = F_S(X,Y,Z)$ donde $X = M(A \cap B), Y = M(B - A), Z = M(A - B)$ tal que

- F_S es creciente con respecto a X, decreciente con respecto a Y e independiente de Z.

Sea $F_S(X,Y) = F_S(X,Y,Z)$. Entonces;

- $F_S(X,0) = 1$ para todo X
- $F_S(0,Y) = 0$ para todo $Y \neq 0$

Con esta definición, la satisfacción puede ser diferente en dos pares de conjuntos difusos distintos sólo debido a la escala. Es deseable que una medida de satisfacción dependa sólo de los pesos relativos de X e Y y no de la escala del sistema. Para obtener una medida objetiva, Rifqui y colaboradores [15] han propuesto de normalizar la medida de satisfacción.

- $x = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ la intersección reducida.
- $y = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ el rasgo distintivo reducido.

En la figura (3.1) se muestran las diferencias de comportamiento entre las dos definiciones de medidas de satisfacción. Como $x^2+y^2 = 1$, el dominio de definición de la medida de satisfacción es un cuarto de círculo. Puede ser descrito por un argumento único ϕ, con $\phi = arctan\frac{y}{x}$.

Se denotará la medida de satisfacción como $S(A,B) = \eta(\phi)$.

Las condiciones de la definición 3.2.1 hacen que:

- η sea decreciente con respecto a ϕ.
- $\eta(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- $\eta(0) = 1$

Esta nueva forma de una medida de satisfacción, expresada por una variable única, tiene la ventaja de no ser dependiente del tamaño del sistema. Además, esta normalización hace la definición de una medida de satisfacción más simple dado que el argumento es un segmento $[0, \frac{\pi}{2}]$ y no un cuarto de plano.

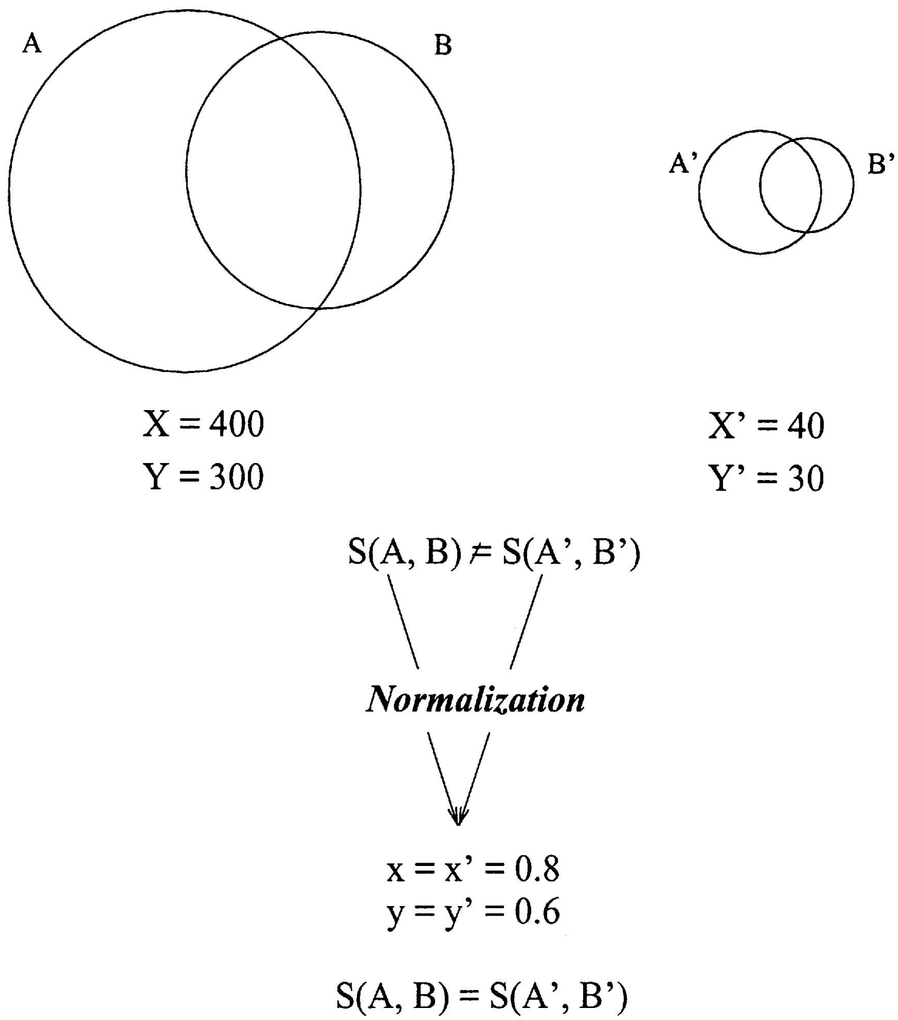

Figura 3.1: El efecto de la normalización sobre medidas de satisfacción

3.3. Medidas de semejanza

Una medida de semejanza es usada para una comparación entre la descripción de dos objetos, del mismo nivel de generalidad, para decidir si ellos tienen muchas características comunes. Las medidas de semejanza son apropiadas por el razonamiento basado en casos o el aprendizaje basado en casos. En métodos de agrupación, las distancias pueden ser substituidas por una medida de semejanza.

Ejemplo

Denotemos $Z = M(A - B)$. Nos enfoquemos en satisfacer las medidas de semejanza en la característica de exclusividad.

Siguiendo el procedimiento de normalización, se define:

- $x = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
- $y = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
- $z = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$

Para $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$.

En forma similar al caso de las medidas de satisfacción, esto asegura que una medida exclusiva de semejanza no sea dependiente de la escala del problema.

El dominio de estudio ahora se ha restringido a una parte de la esfera unitaria dado que desde entonces, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Geométricamente, la esfera simplemente es obtenida por una rotación del círculo de satisfacción alrededor del eje x (ver figura 3.2). La representación vectorial sigue siendo válida.

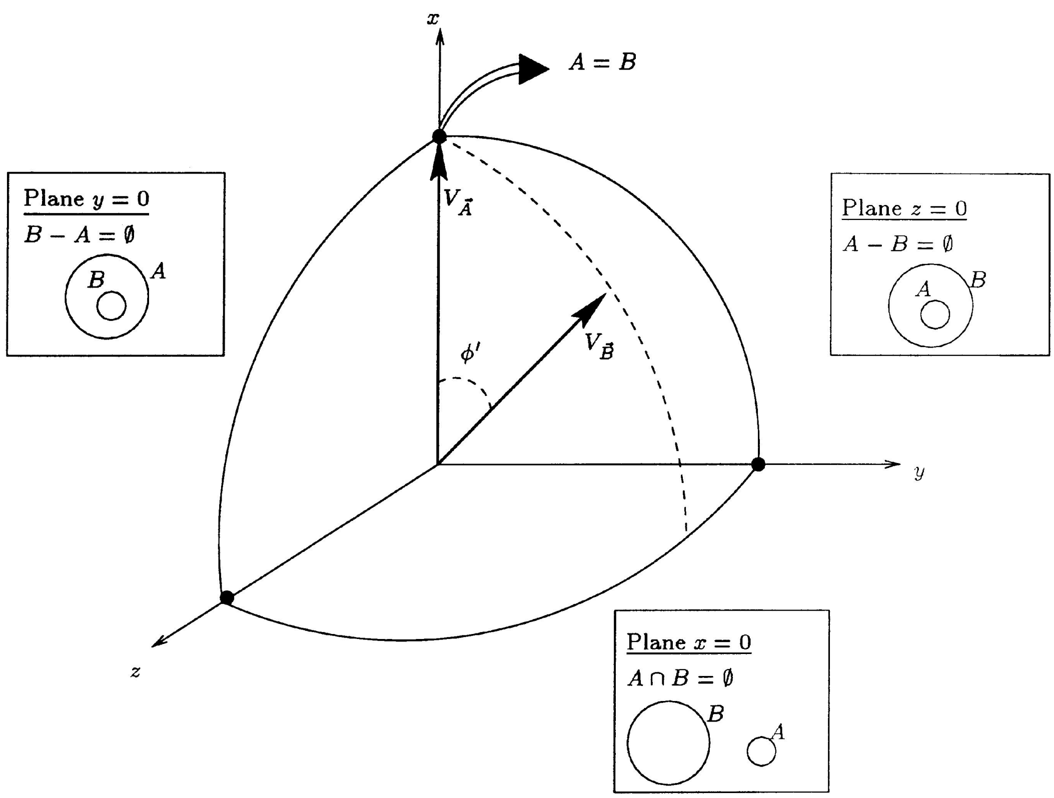

Figura 3.2: Nueva representación de una medida exclusiva de semejanza

4 Aplicación a problemas prácticos

Un número importante de métodos de clasificación se basan en las comparaciones de los objetos: el método de los k-vecinos más cercanos (k-NN), aprendizaje basado en casos [20],[21],entre otros. Es en parte gracias a la fácil explotación de los resultados obtenidos por estos métodos basados en la similitud que tienen tanto éxito. De hecho, la comprensión de los resultados es a menudo un obstáculo importante que todos los métodos no satisfacen. Por ejemplo, la fácil interpretación de los resultados en las aplicaciones médicas es esencial.

El ejemplo 1 presentado a continuación se centra en el problema de la elección de una medida de comparación.

Ejemplo 1:

La medida utilizada para comparar objetos es a menudo una distancia. Pero, cada vez más, una similitud o una medida de disimilitud es elegida. No es fácil elegir una medida adecuada. La elección está relacionada con el problema de la caracterización de las propiedades pertinentes para una tarea de clasificación.

En este ejemplo se utiliza la formalización y el marco introducido en [5] para hacer frente a las medidas de comparación en un problema de clasificación dificil: la clasificación de microcalcificaciones en imágenes de mamografías [22]. Además, se pone a prueba un método de clasificación basado en prototipos difusos en [23].

Construcción de un prototipo difuso

Antes de que el paso de la clasificación, los objetos se han de comparar con el fin de construir un prototipo para cada clase.

Según [24], todos los objetos no representan del mismo modo la categoría a la que pertenecen. Ellos se extienden a lo largo de una escala de tipicidad. La noción de prototipo está asociado a la noción de tipicidad.

Clasificación

Descripción del proceso de clasificación

Un nuevo objeto del que no conocemos que clase se clasifica gracias a una comparación con el prototipo de cada clase. De hecho, un prototipo puede ser considerado como una regla que describe una clase. Por ejemplo, el prototipo de la clase redonda"puede ser: si la superficie = alrededor de 15 píxeles, y compacidad = entre 5 y 6 y entonces clase = redondo.

El proceso de clasificación se basa en la pregunta: ¿El nuevo objeto satisface un prototipo?. Esta pregunta implica el uso de una medida que es máxima cuando el objeto está incluido en el prototipo y se puede considerar como un caso particular del prototipo, y mínimo cuando no hay rasgos comunes compartidos por los dos objetos.

Medidas para el proceso de clasificación

Una medida de satisfacción corresponde a una situación en la que se considera un objeto o una clase de referencia y tenemos que decidir si un nuevo objeto es compatible con él o cumple la referencia.

Definición 4.0.1. Una M- medida de satisfacción sobre Ω es una M- medida de comparación S tal que $F_S(u, v, w)$ es:

- Independiente de w
- no decreciente en u y no creciente en v
- exclusivo: $F_S(0, v, \cdot) = 0$ independiente de lo que sean v, u y w
- maximal: $F_S(u, 0, \cdot) = 1$ indenpendiente de lo que sea $u \neq 0$

Relaciones de analogía [26] tales como:

$$S(A, B) = inf_x min(1 - f_B(x) + f_A(x), 1) \tag{4.1}$$

y semejanza borrosa [27] tales como:

$$S(A, B) = 1 - sup_{f_A(x)=0} f_B(x) \tag{4.2}$$

son M-medidas particulares de satisfacción.

Resultados

Se probaron varias medidas de semejanza, desemejanza y satisfacción en las bases de datos de prueba y ha ocurrido que las medidas siguientes proporcionan los mejores prototipos con respecto a la tasa de clasificación:

- Medida de Semejanza:
  $S(A, B) = (\frac{2}{\pi}) * arctan(2 * M(A \cap B) * sup(A \cap B)/M(A \cup B))$
  siendo M la superficie ($M(A) = \int_x f_A(x)dx$).
- Medida de satisfacción: $S(A, B) = M(A \cap B)/M(B)$ siendo M la superficie.
- Medida de desemejanza:
  $S(A, B) = |A * B| = \frac{1}{\Omega}(\sum_{x/f_A > f_B} f_{A-B}(x) + \sum_{x/f_B > f_A} f_{B-A}(x))$
  donde $A * B$ describe el conjunto difuso de elementos que pertenecen a A aproximadamente y no a B o a la inversa, con la sigma-cuenta como la medida de conjunto difuso.

La prueba está ampliamente explicada en [22], y ha confirmado que este marco es eficiente.

Ejemplo 2:

Este ejemplo trata con descripciones (más o menos aproximadas) de automóviles usados para la venta en un garaje. Los atributos diferentes involucrados son la edad del auto, el precio de compra, el consumo de gas y la velocidad del auto. Los datos disponibles pueden ser representados en la tabla [4-1].

Tabla 4-1

Vehículo	Edad del auto	Precio de compra	Consumo de gas	Velocidad
V_1	Nuevo	Caro	Económico	Más bien rápido
V_2	Menos de 3 años	Alrededor de 45000	Más bien económico	180-200
V_3	Reciente	Entre 50000 y 60000	Cuantioso	Rápido
V_4	Alrededor de 5 años	Menos de 20000	8-9	180
V_5	5-10	Alrededor de 10000	Cuantioso	Más bien rápido
V_6	Viejo	Barato	Económico	No muy rápido
V_7	Nuevo	32000-40000	Muy económico	Entre 140 y 160

Cada fila en la tabla corresponde a una lista de pares ((valor (difuso)) (nombre de atributo)); por ejemplo la primera fila corresponde al dato V_1:((Edad nuevo) (precio caro) (consumo económico) (más bien velocidad rápida)).

Un dominio está conectado a cada atributo; este dominio es el conjunto de todos los valores que pueden ser tomados por el atributo. Aquí por ejemplo el dominio conectado al atributo **edad del auto** es el intervalo [0,20]. Todos los dominios considerados en este ejemplo son la escala continua.

Se asumirá que las funciones de pertenencia de los valores difusos son trapezoidales.

Una función trapezoidal será representada por un 4 - tupla (a, b, c, d) de los parámetros, tal como se muestra en la figura 4.1.

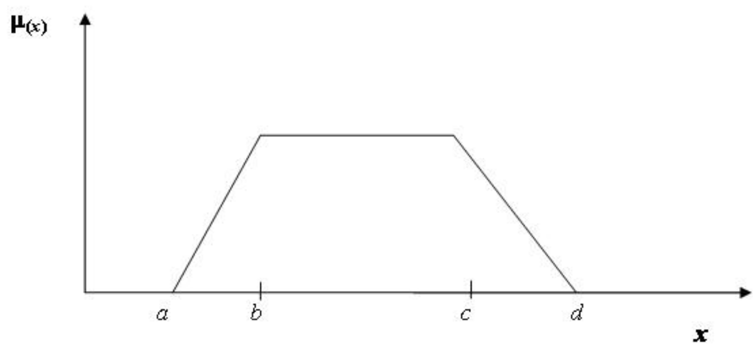

Figura 4.1: Representación de una función de membresía trapezoidal.

En la tabla 4-2 se dan a las funciones de pertenencia de los valores difusos correspondientes a los téminos linguísticos para el atributo **edad del auto**: Nuevo (N), Reciente (R), Menos de 3 (E), Alrededor (H) y Viejo (V), al cual se le ha asignado un dominio [0. 20], usando la codificación indicada. Así mismo, dichas funciones de pertenencia muestran en la figura 4.2.

Término linguístico	Función de pertenencia representada como una 4 - tupla (a, b, c, d)
Nuevo (N)	(0 0 1 2)
Reciente (R)	(0 1 2 3)
Menos de 3 (E)	(0 0 3 3)
Alrededor de 5 (H)	(4 5 5 6)
Viejo (V)	(8 10 15 20)

Tabla 4-2. Funciones de pertenencia correspondientes a los téminos linguísticos para el atributo **edad del auto**, representadas como 4 - tuplas.

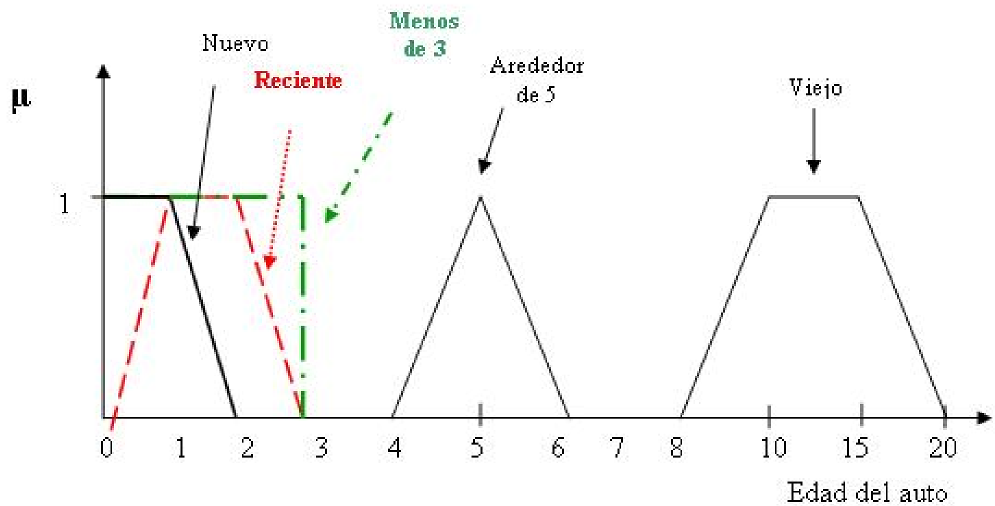

Figura 4.2: Gráfica de Funciones de pertenencia correspondientes a los téminos linguísticos para el atributo **edad del auto**.

Podemos por ejemplo determinar las medidas de satisfacción, inclusión, semejanza, y desemejanza entre varios de estos términos linguísticos.

(a) Determinar la medida de inclusión (Nuevo, viejo).
Inclusión (N,V) $= F_S(M(N \cap V), M(V - N), M(N - V))$.
Por la definición de la operación de intersección de conjuntos, tenemos que $N \cap V = \emptyset$.
Por lo que;
Inclusión (N, V) $= F_S(M(\emptyset), M(V - N), M(N - V))$
De acuerdo al axioma AM1, definición 1.1.6. tenemos que AM1 : $M(\emptyset) = 0$, entonces: $M(N \cap V)) = 0$
Inclusión (N, V) $= F_S(0, M(V - N), M(N - V))$.
Luego, por el axioma AF2 de la definición 2.4.1., AF2 :$F_S(0, v, w) = 0$,

tenenos que
Inclusión (N, V) = 0.

(b) Asumiendo que la medida específica seleccionada de semejanza es

$$S(A,B) = \frac{M(A \cap B)}{M(A \cup B)}$$

,
con $M(A \cap B)$= area $(A \cap B)$ y $M(A \cup B)$ = area $(A \cup B)$.
Luego, encontraremos el valor de la medida: $semejanza(R,E)$. En efecto;
$semejanza(R,E) = \frac{M(R \cap E)}{M(R \cup E)}$
$semejanza(R,E) = \frac{area(R \cap E)}{area(R \cup E)}$.
De la figura 4.2 puede observarse que
$area(R \cap E) = area(R) = 2$
$area(R \cup E) = area(E) = 3$.
Por lo tanto, bajo las premisas seleccionadas tenemos que:
$semejanza(R,E) = \frac{2}{3}$
$semejanza(E) = 0{,}666$.

(c) Asumiendo las mismas premisas que en el caso anterior, encontrar el valor de la medida: semejanza (E, N).En efecto;
$semejanza(E,N) = \frac{M(E \cap N)}{M(E \cup N)} = \frac{area(E \cap N)}{area(E \cup N)}$.
De la figura 4.2 puede observarse que:
$area(E \cap N) = area(N) = 1{,}5$
$area(E \cup N) = area(E) = 3$.
Por lo tanto, bajo las premisas seleccionadas tenemos que:
$semejanza(E,N) = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$.

(d) Encontrar el valor de la medida: satisfacción (E, N).En efecto;
satisfacción $(E,N) = F_S(M(E \cap N), M(N-E), M(E-N))$.
Ahora bien, por la definición 1.1.7, D1: Si A está contenida en B, entonces $A - B = \emptyset$ por lo que $N - E = \emptyset$.
Por otra parte, de acuerdo a definición 1.1.6 del axioma AM1, tenemos que:

$M(\emptyset) = 0$, entonces, $M(N - E) = 0$, por lo cual tenemos:
satisfacción $(E, N) = F_S(M(E \cap N), 0, M(E - N))$.
Como, según el axioma AF4 de la definición 2.3.1, AF4 : $F_S(u, 0, .) = 1$, para cualquier valor de $u \neq 0$.
Se concluye que
satisfacción $(E, N) = 1$.

(e) Asumiendo que la medida específica seleccionada de desemejanza es
$desemejanza(A, B) = (\frac{1}{|\Omega|})(area(A \cap B') + area(B \cap A'))$, encontrar:
$desemejanza(E, R)$. En efecto;
$desemejanza(E, R) = (\frac{1}{|\Omega|})(area(E \cap R') + area(R \cap E'))$,entonces
$desemejanza(E, R) = (\frac{1}{20})(1 + 0) = 0{,}05$.

(f) Asumiendo las mismas premisas que en el caso anterior, encontrar el valor de la medida: desemejanza (H, V). En efecto;
$desemejanza(H, V) = (\frac{1}{|\Omega|})(area(H \cap V') + area(V \cap H'))$, entonces
$desemejanza(H, V) = (\frac{1}{20})(1 + 8{,}5) = 0{,}475$.

De la misma manera que hemos procedido a comparar funciones de pertenencia correspondientes a los téminos linguísticos para el atributo **edad del auto**, puede hacerse con las funciones funciones de pertenencia correspondientes a los téminos linguísticos de los otros atributos.

Conclusiones

A través del presente trabajo se realizó un estudio sobre la aplicación de operaciones de intersección y diferencia en medidas de comparación entre conjuntos difusos.

Para ello se revisaron aspectos fundamentales sobre conjuntos difusos y sus operaciones, se estudiaron varias medidas de comparación entre conjuntos difusos, así como la forma en que se han utilizado las operaciones de intersección y diferencia en la construcción de medidas de comparación entre conjuntos difusos. Finalmente se mostró la utilidad de la aplicación de operaciones de intersección y diferencia en medidas de comparación entre conjuntos difusos en problemas prácticos.

A partir del presente trabajo pueden realizarse otros estudios para extender o aplicar el tema tratado. Por ejemplo, pueden usarse las propiedades de semejanza junto con la desemejanza para obtener medidas de comparación valoradas por intervalos. Así mismo, las medidas estudiadas se pueden utilizar en la recuperación de base de datos, el razonamiento analógico, el razonamiento basado en casos o en el procesamiento de imágenes.

Referencias

[1] Aha, D.; Kibbler, D. and Albert, M. *Instance-based learning algorithms.* Machine Learning 6: 37-66,(1991).

[2] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, and S. Bothorel. *Resemblance in database utilization.* In Proceedings of 6th IFSA World Congress, Sao Paulo,(1995).

[3] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, and S. Bothorel. *La Logique floue et ses applications.* Addison-Wesly France.,(1995).

[4] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, and S. Bothorel. *Towards general measures of comparison of objects.* Fuzzy sets and systems, 84(2):143- 153,(1996).

[5] B. Bouchon-Meunier. *Similarity, analogy and case-based reasoning* . ICCBR, 13-16 August, Belfast, North Ireland,(2007).

[6] Bouchon-Meunier, B. *Fuzzy similitude and approximate reasoning.* Ing Wang, P., Advances in Fuzzy Theory and Technology, pp. 161-166, Bookwrites Press , (1993).

[7] Chen, C. H.Chen, S. H *A New method to measure the similarity between fuzzy numbers.* Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, vol. 3, Melbourne, Australia,(2001).

[8] Dasarathy, B. V. *Nearest Neighborgs (NN) Norms: NN Pattern Classifications Techniques*. IEEE Computer Sciety Press,(1990).

[9] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*. Academic Press, New York, (1980).

[10] D. Dubois and H. Prade. *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*. Information Sciences,30: 183-224 (1983).

[11] D. Dubois and H. Prade. *Operations on fuzzy numbers*. International Journal of Systems Science Volume 9 , Issue 6 June 1978 , pages 613 - 626. (1987).

[12] Dubois, D.; Prade, H.; Testemale, C. *Weighted Fuzzy Pattern Matching*. Fuzzy Sets and Systems 28, pp. 313-331 , (1988).

[13] J. Gasos and A. L. Ralescu. *The direct and inverse problem of the matching of fuzzy sets depending on fuzziness*. Kybernetes, 24:9-17, (1995).

[14] Klir, G. Yuan, B. *Fuzzy Sets Theory*. Foundations and Applications. Prentice Hall.,(1997).

[15] Rifqui, M.; Berger, V. Bouchon-Meunier B. *Discrimination power of measures of comparison*. Fuzzy Sets and Systems,Vol 110, pp. 189-196, (2000).

[16] Rifqui, M.; Bothorel, S.;Bouchon-Meunier, B. and Muller, S. *Similarity and prototype based approach for classification of microcalcifications*. In 7th IFSA World Congress, pp. 123-128 ,(1997).

[17] Rifqui, M. *Constructing prototypes from large databases*. In IPMU'96, pp.301-306,(1996).

[18] Rosch, E. Principles of categorization. In Rosch, M. and Lloyd, B., editors. *Cognition and categorization,* . pp. 27-48, Laurence Erlbaum Associates,(1978).

[19] M.Sugeno. *Theory of Fuzzy Integral and its Application.* PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, Japan, (1974).

[20] A.Tversky. *Features of similarity* Psychological Review. 84:327-352, (1977).

[21] L.A.Zadeh. *Fuzzy Sets.* Information and Control, pp. 338-353, (1965).

[22] L.A.Zadeh. *Similarity relations and fuzzy ordering.* Information Sciences, pp. 177- 200, (1971).

[23] Zimmermann, H-J. *Fuzzy Set Theory and its Applications.* Fourth Edition. Kluwer Academic Publishers., (2001).

[24] R.Zwick,E.Carlstein, and D.V. Budescu. *Measures of similarity among fuzzy concepts: a comparative analysis.* International Journal of Approximate Reasoning, 1(2):221-242,(1987).