ACOTAMIENTO HACIA EL FINAL Y EQUI-ACOTAMIENTO DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Por: MIGUEL A. GARCIA L.

Trabajo presentado para optar al título de Magister en Matemática Mención Matemática Pura.
Dirigido por: Dr. Ramón Gómez

DEDICATORIA

A la memoria de mi padre, quien me ha acompañado siempre. A mi madre apoyo incalculable durante toda la vida. A Zunilde, mi esposa, compañera y amiga quien ha estado a mi lado en todo momento. A Adriana y Andreina, mis hijas, que son mis dos grandes esperanzas y a quienes espero que el futuro les depare mucha felicidad.

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer el Dr. Ramón Gómez por su valiosa colaboración en la elaboración de este trabajo y por su apoyo en mi desarrollo profesional.

Agradezco también a todos mis compañeros y familiares que de una u otra forma me estimularon para lograr esta meta.

Finalmente debo agradecer a la Srta. Marisol Andueza por la excelente transcripción de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

La teoria de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias comienza con los trabajos de Newton, y el único objetivo que había era el aspecto cuantitativo, es decir la resolución numérica. Luego con los trabajos de Lagrange y Cauchy se empieza a fundamentar, de manera sólida, la teoria cualitativa, cuyo desarrollo se ve definitivamente gracias a los excelentes matemáticos: Poincaré y Liapunov.

La obra de Poincaré es muy extensa, pero entre ellas destaca el libro "Les Methodes nouvelles de la mecanique celeste". Por otro lado A. M Liapunov, creador de la teoria de la estabilidad y acotamiento, presenta su famosa Tesis Doctoral, en 1892; traducida al francés en 1907 "Problema general de la stabilite du mouvemente" y al inglés: "Stabillity of Motion", Academic. New York, 1966. Para establecer Teoremas de Estabilidad, Liapunov introduce un método llamado método directo o segundo método, el cual es muy útil en la teoria cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en el acotamiento de soluciones; concepto que es muy parecido a la estabilidad.

Hay varios tipos de acotamiento, entre los cuales se encuentran el equi-acotamiento y el acotamiento hacia el final de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, parte central de este trabajo.

Varios matemáticos han realizado importantes aportes en estos temas, como T. Yoshizawa [8], [9], [10]. En los últimos años Hara y Yoneyama [5], han realizado importantes estudios sobre acotamientos de soluciones.

El desarrollo de éste trabajo, se hará en tres capítulos. En el primero, se dan algunas definiciones esenciales, así como también algunos Teoremas que dan condiciones suficientes para el acotamiento de soluciones que servirán como base y referencia en los próximos capítulos.

El segundo capítulo, sirve para el establecimiento general del problema, en donde se demuestra que los teoremas de acotamiento hacia el final y equi-acotamiento de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser demostrados sin hacer uso de la propiedad de radialmente no acotada de una función Liapunov.

Además se investigará la relación entre la propiedad de radialmente no acotada de una función Liapunov V y el acotamiento hacia el final de soluciones, sin hacer uso de que la derivada total de V sea definida negativa. Esto es influenciado por Haddock [3], quien establece que la estabilidad Asintótica puede ser probada sin hacer uso de que V sea definida positiva.

También se estudia el acotamiento hacia el final de soluciones usando funciones escalares que satisfacen condiciones muy especiales.

Por último, en el Capítulo III, se dan unas aplicaciones de todo lo desarrollado anteriormente usando el criterio de Routh - Hurwitz para establecer condiciones necesarias y suficientes para que las soluciones de una ecuación diferencial de cuarto orden y sus derivadas sean equi-acotadas y acotadas hacia el final.

CAPITULO I

FUNCIONES DE LIAPUNOV Y ACOTAMIENTO DE SOLUCIONES

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(t, x) \qquad (\ ' = d/dt) \qquad (\mathrm{I})$$

donde f es una función continua de I x R^n en R^n ($f : I \times R^n \rightarrow R^n$) e $I = [0, +\infty)$. Se denotará por $x(t; t_0, x_0) = x(t)$ ó $x(t; t_0, x_0) = x$ a una solución de (I) con $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$. Además, se tomará a D como un abierto en R^n, $\|x\|$ la norma euclidiana de x. Para abreviar, se escribirá C y CCP la familia de las Funciones Contínuas, y contínuas crecientes y positivas, respectivamente.

1.1. Funciones de Liapunov

Definición 1.1.1 Una función $V : I \times D \rightarrow I$ satisface localmente una condición de Lipschitz con respecto a x, si $\forall\ K \subset R^n$, K compacto existe $L(K) > 0$ tal que

$$\|V(t, x) - V(t, y)\| \leq L(K)\ \|x - y\|, \qquad \text{para } x, y \in K$$

Definición 1.1.2 Sea $V : I \times D \rightarrow I$ una función escalar que es localmente lipschitziana. Definimos la función V', relativa al sistema (I), por:

$$V'(t, x) = \operatorname*{Lim\,sup}_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[V\big(t + h,\ x + hf(t, x)\big) - V(t, x)\right]$$

Definición 1.1.3 Una función contínua escalar $V : I \times R^n \rightarrow I$ que es localmente lipschitziana y satisface $V'(t, x) \leq 0$ es llamada una función Liapunov para el sistema (I)

Ejemplos 1.1.4

a) Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

Definimos la función V por $V(t, x) = x^2 + y^2$. Entonces V es contínua, localmente Lipschitziana en x y $V'(t, x) = 2xx' + 2yy' = -2y^2 \leq 0$. Así V es una función Liapunov para el sistema dado

b) Consideremos la ecuación escalar:

$$x' = \begin{cases} x & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Entonces $V(t, x) = e^{-x^2}$ es un función Liapunov para dicha ecuación.

Definición 1.1.5 Una función es de clase $H(a \in H)$, si a es una función de I en I y ella es continua, estrictamente creciente y cero en el origen.

Definición 1.1.6 Una función $V : I \times D \to I$ es definida positiva si $V(t, 0) = 0$ y $V(t, x) > 0$, si $x \neq 0$. (ó si $V(t, 0) = 0$ y existe $a \in H$ tal que $V(t, x) \geq a(\|x\|)$)

Definición 1.1.7 Una función $V : I \times D \to I$ es radialmente no acotada, si

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(t, x) = \infty$$

Siendo esto uniformemente $\forall\ t \in I$ (ó si existe una función a de clase H tal que $a(\|x\|) \leq V(t, x)\ \ \forall (t, x) \in I \times D$ y $\lim_{r \to \infty} a(r) = \infty$)

Ejemplos 1.1.8

a.- Tomemos $x = (x_1, x_2)$ y sea $V : I \times \mathbf{R}^2 \to I$ dada por $V(t, x) = (1 + t)(x_1^2 + x_2^2)$. Definimos $a(r) = r^2$ por lo tanto $a(\|x\|) = x_1^2 + x_2^2$. Luego $a(\|x\|) \leq V(t, x)$ y a de clase H. Así V es radialmente no acotada.

b.- Para la función $V : I \times \mathbf{R}^2 \to I$ dada como $V(t, x) = (1 + \cos^2 t)\, x_1^2 + 2x_2^2$, donde $x = (x_1, x_2)$, definimos $a(r) = r^2$ y se tiene $a(\|x\|) = x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x)$ y a de clase H. Luego V es radialmente no acotada.

1.2. Definiciones de Acotamientos

Definición 1.2.1 Las soluciones de (I) son **Acotadas**, si existe $B > 0$ tal que:

$$\|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < B \quad \text{para } t \geq t_0$$

donde B puede depender de cada solución.

Definición 1.2.2 Las soluciones de (I) son **Equi-Acotadas**, si para todo $\alpha > 0$ y $t_0 \in I$ existe $B(t_0, \alpha) = B > 0$ tal que:

$$\|x_0\| \leq \alpha \quad \text{y} \quad t \geq t_0 \Rightarrow \|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < B$$

Definición 1.2.3 Las soluciones de (I) son **uniformemente acotadas**, si B de la definición anterior es independiente de t_0.

Definición 1.2.4 Las soluciones de (I) son **Acotadas hacia el final o finalmente acotadas** si existen $B > 0$ y $T > 0$ tal que;

$$\|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < B, \quad \text{para } t \geq t_0 + T,$$

donde B es independiente de la solución particular, mientras que T puede depender de cada solución.

Para sistemas lineales el acotamiento de soluciones implica el equi-acotamiento y si las soluciones son acotadas hacia el final entonces ellas son equi-acotadas. Para sistemas periódicos, si las soluciones son equi-acotadas entonces son uniformemente acotadas. La demostración de este resultado puede verse en [10].

Para sistemas autónomos las soluciones no son necesariamente equi-acotadas aunque todas las soluciones sean acotadas, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -z|x| \\ z' = yx^2 \end{cases}$$

y la solución del sistema en $(0, x_0, y_0, z_0)$.

Si $x_0 = 0$, la solución es: $x = 0$; $y = y_0$; $z = z_0$.

Si $x_0 \neq 0$, la solución es: $x = x_0$; $y = y_0 \cos\sqrt{|x_0|^3}\, t - \frac{z}{\sqrt{|x_0|}} \operatorname{sen}\sqrt{|x_0|^3}\, t$

$z = y_0 \sqrt{|x_0|} \operatorname{sen} \sqrt{|x_0|^3}\, t + z_0 \cos\sqrt{|x_0|^3}\, t$

Así toda solución es acotada sin embargo $|y|$ tiene un valor muy grande si $|x_0|$ es suficientemente pequeño. Luego las soluciones no son Equi-acotadas.

Otros ejemplos que muestra la diferencia de estos conceptos pueden verse en [8]

1.3. Teoremas de Acotamiento

Teorema 1.3.1 Supongamos que existe una función localmente Lipschitziana $V : I \times \mathbf{R}^n \to I$ que es radialmente no acotada y $V'(t, x) \leq 0$. Entonces las soluciones de (I) son acotadas.

Demostración. Como V es radialmente no acotada existe $a \in H$ tal que:

$$V(t, x) \geq a\left(\|x\|\right) \text{ y } \lim_{r \to \infty} a(r) = \infty$$

Así dado $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbf{R}^n$, existe $r > 0$ tal que $a(r) > V(t_0, x_0)$. Además, si $t \geq t_0$ y $x(t) = x(t\,;\, t_0, x_0)$ entonces $a\left(\|x\|\right) \leq V(t, x)$ y como V es una función Liapunov se tiene que $V'(t, x) \leq 0$. Por lo tanto

$$\int_{t_0}^{t} V'(t, x)dt \leq 0 \Rightarrow V(t, x) \leq V(t_0, x_0)$$

$$\Rightarrow V(t, x) < a(r)$$

$$\Rightarrow a\left(\|x\|\right) < a(r)$$

$$\Rightarrow \|x\| < r.$$ Así las soluciones de (I) son acotadas. ∎

Teorema 1.3.2 [7, teorema EB] Supongamos que existe una función Liapunov $V : I \times D \to I$ que es radialmente no acotada. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas.

Demostración. Sea $x(t\,;\, x_0, t_0)$ una solución de (I). Como V es contínua en (t, x) existe $K(t_0, \alpha) = K$ (K depende de t_0 y α), tal que si $\|x_0\| \leq \alpha$ entonces $V(t_0, x_0) \leq K$ (ver figura 1) Como V es radialmente no acotada, existe $a \in H$ tal que $a\left(\|x\|\right) \leq V(t, x)$ y $\lim_{r \to \infty} a(r) = \infty$. Luego, escogemos $B = B(t_0, \alpha)$ suficientemente grande tal que $a(B) > K$.

Supongamos que $\| x(t_1; t_0, x_0) \| = B$ para algun $t_1 > t_0$ y sea $y = x(t_1; t_0, x_0)$. Por ser V una función Liapunov $V'(t, x) \leq 0$

Así: $\int_{t_0}^{t_1} V'(t, x)dt \leq 0 \Rightarrow V(t_1, y) - V(t_0, x_0) \leq 0$

$$\Rightarrow V(t_1, y) \leq V(t_0, x_0)$$

$$\Rightarrow V(t_1, y) \leq K$$

Luego $a(\| y \|) \leq K$ y por lo tanto $a(B) \leq K$, lo cual contradice la escogencia de $B(t_0, \alpha)$. Por lo tanto las soluciones de (I) son equi-acotadas.

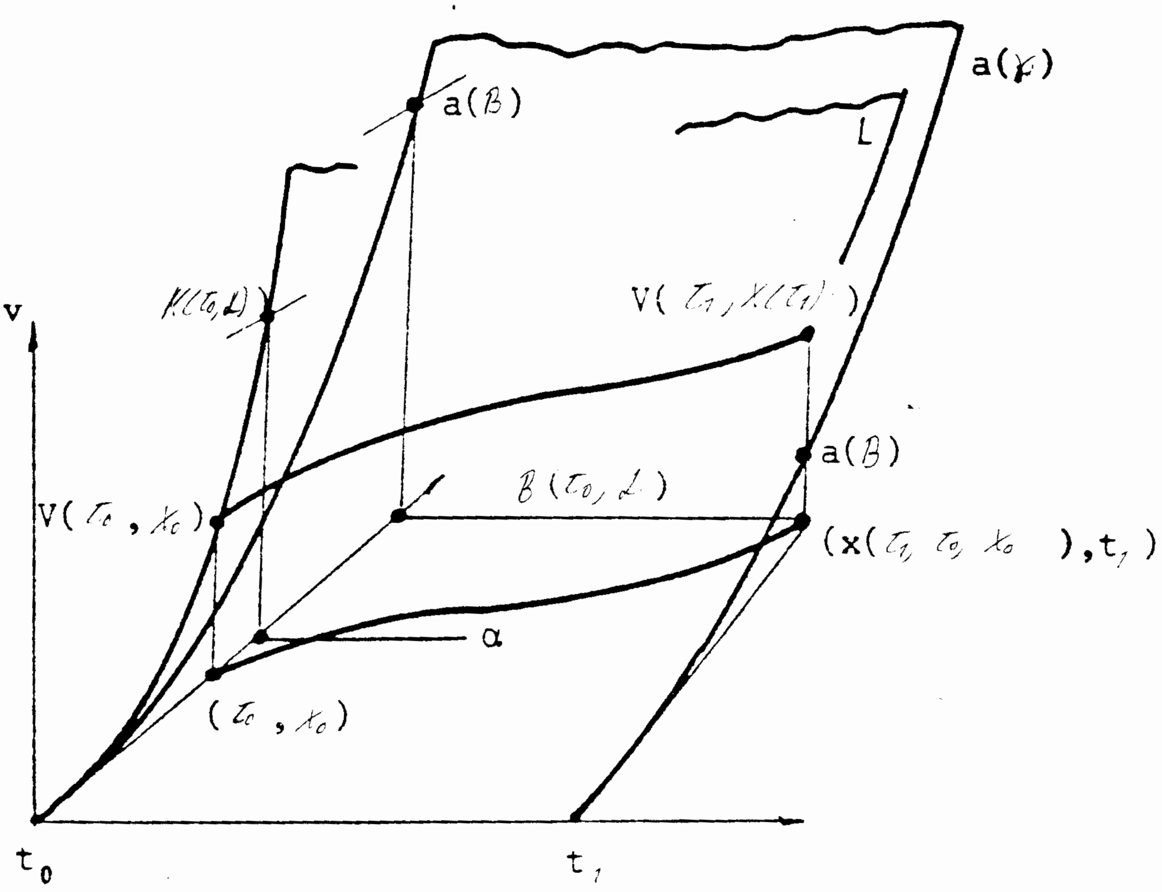

FIG. 1

A continuación se demostrará uno de los resultados clásicos sobre acotamiento final en la Teoría de Liapunov [10].

Teorema 1.3.3 Supongamos que existe una función Liapunov $V : I \times R^n \to R^n$ que satisface las siguientes condiciones:

i) V es radialmente no acotada

ii) $V'(t, x) \leq - c(\|x\|)$ donde c es un función contínua y positiva

iii) f es acotada cuando $\|x\|$ es acotada

Entonces las soluciones de (I) son finalmente acotadas.

Demostración: Por el Teorema 1.3.1, las soluciones de (I) son acotadas. Así $\exists M > 0$, tal que $\|x(t; t_0, x_0)\| < M$ para $t \geq t_0$

Supongamos que alguna solución no es acotada hacia el final entonces existe $B > 0$ y una sucesión divergente $\{t_k\}$para el cual $\|x(t_k; t_0, x_0)\| \geq B$, $t_0 \in I$. Como $f(t, x)$ es acotada para $\|x\|$ acotada, existe $p > 0$ tal que $\left\| \frac{d}{dt} \|x(t; t_0, x_0)\| \right\| < p$

Así en los intervalos $t_k - \frac{B}{2p} \leq t \leq t_k + \frac{B}{2p}$ se tiene que $\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \frac{B}{2}$.

Podemos asumir que estos intervalos son disjuntos y $t_1 - \frac{B}{2p} > t_0$, tomando si es necesario una subsusesión de $\{t_k\}$. Ya que $V'(t, x) \leq -c(\|x\|)$ existe una constante $r > 0$ tal que $V'(t, x(t; t_0, x_0)) \leq -r$ en los intervalos $t_k - \frac{B}{2p} \leq t \leq t_k + \frac{B}{2p}$ y

$V'(t, x(t;\, t_0, x_0)) \leq 0$ fuera de ellos, ya que $\dfrac{B}{2} \leq \|x(t;\, t_0, x_0)\| < M$ en dichos intervalos. Así $V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \leq -\int_{t_0}^{t} c(\|x(s)\|)\, ds$

$$\Rightarrow V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i - \frac{B}{2P}}^{t_i + \frac{B}{2P}} c(\|x(s)\|)\, ds \leq V(t_0, x_0) - \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i - \frac{B}{2p}}^{t_i + \frac{B}{2p}} r ds$$

$$= V(t_0, x_0) - kr\left(t_i + \frac{B}{2p} - t_i + \frac{B}{2p}\right) = V(t_0, x_0) - kr\frac{B}{p}.$$ Pero si $k \to \infty$

entonces $V(t_0, x_0) - kr\dfrac{B}{p} \to -\infty$. De aquí se obtiene $V(t, x(t)) \to -\infty$

Lo cual contradice el hecho de que V(t, x) es Radialmente no Acotada.

Luego las soluciones de (I) son acotadas hacia el final. ∎

Observación 1.3.4 Si en el Teorema 1.3.3 suponemos que se siguen cumpliendo ii) y iii) y la condición i) es reemplazada por: $\exists k,\ k \leq V(t, x),\ \forall (t, x) \in I \times R^n$ entonces V(t, x) no es necesariamente Radialmente no Acotada.

En efecto, motivado por [5], consideremos la Función Liapunov $V(t, x) = e^{-x^2}$ para el sistema

$$x' = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Entonces siempre existe k tal que $k \leq e^{-x^2} = V(t, x)$, pero $\lim_{\|x\| \to \infty} V(t, x) = 0$. Luego V(t, x) no es Radialmente no Acotada.

CAPITULO II

CONDICIONES ESPECIALES DE ACOTAMIENTO

En este capítulo se verá que los Teoremas de acotamiento hacia el final de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden demostrar sin hacer uso de la propiedad de radialmente no acotada de una función Liapunov.

Además se estudiará la relación entre el acotamiento hacia el final de las soluciones de (I) y el no acotamiento radial de una función Liapunov usando funciones escalares que satisfacen condiciones muy especiales.

En primer lugar se establecen las siguientes definiciones motivadas por Hara y otros en [5]

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1 Una función contínua, g de I en $\mathbf{R}^+$, tiene integral impropia acotada, si $\int_0^\infty g(t)\,dt < \infty$

Definición 2.1.2 Una función contínua g de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ tiene integral recíproca impropia no acotada, si $\int_0^\infty \frac{1}{g(u)}\,du = \infty$

Demostración. Sea $U(t, x) = e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds + \psi(V(t,x))}$ donde $\psi'(u) = \dfrac{1}{\Phi(u)}$

Entonces $U'(t, x) \leq 0$ y por otro lado

$$\lim_{\|x\| \to \infty} U(t, x) = \lim_{\|x\| \to \infty} e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} e^{\psi(V(t, x))}$$

$$= \lim_{\|x\| \to \infty} e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} e^{\int_0^{V(t, x)} \frac{du}{\Phi(u)}}.$$

Como $\int_0^\infty \lambda(t)\,dt$ es finita hagamos $M = e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds}$. Además al ser V radialmente no acotada se cumple que $\lim_{\|x\| \to \infty} V(t, x) = \infty$

Luego $\lim_{\|x\| \to \infty} U(t, x) = Me^{\int_0^\infty \frac{du}{\Phi(u)}} = \infty$. Asi $U(t, x)$ satisface las condiciones del Teorema 1.3.2. Por lo tanto las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

2.2. Acotamiento hacia el Final y Equi - Acotamiento de Soluciones y Funciones Radialmente no Acotadas

Lema 2.2.1. Supongamos que existe una función W radialmente no acotada que satisface $W'(t, x) \leq \mu(t)\ h(W(t, x))\ \ \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ es una función integrablemente acotada, $m \in CCP$ y h es una función que tiene integral recíproca impropia no acotada. Entonces las soluciones de (I) están definidas en todo **R**.

Demostración. Supongamos que existe una solución x(t), tal que $x(t) \to \infty$ si $t \to T^-$ para algún $T > t_0$.

Luego $W(t, x(t)) \to \infty$ si $t \to T^-$ (por ser W radialmente no acotada)

Por otro lado tenemos que:

$$W'(t, x(t)) \leq \mu(t)\, h\,(W(t, x(t))) \Rightarrow \frac{W'(t, x(t))}{h\,(W(t, x(t)))} \leq \mu(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{T} \frac{W'(t, x(t))}{h(W(t, x(t)))}\,dt \leq \int_{t_0}^{T} \mu(t)\,dt < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} \frac{du}{h(u)} < \infty; \text{ pero } \int_{t_0}^{\infty} \frac{du}{h(u)} = \infty$$

lo cual es una contradicción. Así, las soluciones están definidas en $[t_0, \infty)$. Similarmente para $(-\infty, t_0]$. ∎

Teorema 2.2.2. Supongamos que existen funciones Liapunov V y W tal que:

i) $V'(t, x) \leq \lambda(t)\, \Phi(V(t, x))$ donde λ y Φ son funciones que tienen integral impropia no acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente.

ii) $\exists$ K tal que $K \leq V(t, x) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

Entonces existe una constante $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \qquad \forall t \in I$

Demostración. Sea $L = \int_0^\infty \lambda(t)\, dt$. Por la continuidad de Φ, existe $M > 0$ tal que $\Phi(u) \leq M$ para cualquier u que satisface $K \leq u \leq N$

Por (i) $V'(t, x) \leq \lambda(t)\, \Phi(V(t, x))$

$$\Rightarrow \frac{V'(t, x)}{\Phi(V(t, x))} \leq \lambda(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{V'(s, x)}{\Phi(V(s, x))} ds \leq \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \psi(V(t, x(t))) \leq \psi(V(t_0, x_0)) + L$$

(donde ψ es una antiderivada de Φ)

$$\Rightarrow V(t, x(t)) \leq \psi^{-1}(\psi(V(t_0, x_0)) + L)$$

Haciendo $N = \psi^{-1}(\psi(V(t_0, x_0)) + L)$, entonces $K \leq V(t, x(t)) \leq N$

Por lo tanto existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall t \in I$

Hara Yoneyama, Saitoh e Hirano en [5] demuestran el siguiente Teorema.

Teorema 2.2.3 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W, tal que:

i) $|W'(t, x)| \leq \mu(t)\, h(W(t, x)) \qquad \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ es una función integrablemente acotada y h es una función que tiene integral recíproca impropia no acotada.

Entonces:

a) V es radialmente no acotada

b) Las soluciones de (I) son equi-acotadas y acotadas hacia el final.

Si la condición (i) en el Teorema anterior es debilitada como es motivada en [5], es decir si ésta la cambiamos por $W'(t, x(t)) \le \mu(t)\, h\,(W(t, x(t)))$, entonces algunas de las conclusiones del Teorema fallan. A continuación se presentan dos teoremas relacionados con este debilitamiento de la hipótesis.

Teorema 2.2.4. Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W, tal que

$W'(t, x) \le \mu(t)\, h(W(t, x))$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ es una función integrablemente acotada, $m \in$ CCP y h es una función que tiene integral recíproca impropia no acotada. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas.

Demostración. Por el Lema 2.2.1 las soluciones de (I) están definidas en todo **R**.

Supongamos que las soluciones de (I) no son equi-acotadas. Entonces existe $\alpha_0 > 0$ y $t_0 \in I$ y para cualquier $\beta > 0$, existe $\|x_1\| < \alpha_0$ y una solución $x(t; t_0, x_1)$ con $T \ge t_0$, tal que $\|x(T; t_0, x_1)\| \ge \beta$.

Ya que $\liminf_{r \to \infty} c(r) > 0$, existe $R_1 > 0$ y $\delta > 0$ tal que $c(r) \ge \delta$ para toda $r \ge R_1$. Sea $L = \int_0^\infty \lambda(t)dt$. Por la continuidad de V y W $\exists\, \eta > R_1$ tal que para cualquiera $\|x_1\| < \alpha_0$ se cumple, $V(t_0, x_1) < \eta$ y $W(t_0, x_1) < \eta$

Como $\int_0^\infty \frac{du}{h(u)} = \infty$. Existe $\beta_0 > \alpha_0$, $b(\beta_0) > \eta$ tal que $m(s) < \int_\eta^{b(\beta_0)} \frac{dr}{h(r)}$,

para alguna constante s. (2.2-1)

Reemplazando β en la hipotesis por β_0 existe $\|x_0\| < \alpha_0$, una solución $x(t) = x(t;\, t_0, x_0)$ y $t_1 > t_0$ tal que $\|x(t_1)\| \geq \beta_0$

Así $V(t_o, x_o) < \eta$ y $W(t_o, x_o) < \eta$

Entonces existen t_2 y t_3 tales que $t_0 < t_2 < t_3 \leq t_1$ y $W(t_2, x(t_2)) = \eta$, $W(t_3, x(t_3)) = b(\beta_0)$ y $\eta < W(t, x(t)) < b(\beta_0)$, $t \in (t_2, t_3)$ (ya que W es radialmente no acotada y es continua)

Por el Teorema 2.2.2 existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall\, t \in I$

Luego,

$$V(t_3, x(t_3)) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_2}^{t_3} c\,(W(t, x(t)))\,dt + ML$$

$$< \eta - \int_{t_2}^{t_3} c\,(W(t, x(t)))\,dt + ML \leq \eta - \delta(t_3 - t_2) + ML$$

Por otro lado $\displaystyle\int_{t_2}^{t_3} \frac{W'(t, x(t))}{h(W(t, x(t)))}\,dt \leq \int_{t_2}^{t_3} \mu(t)\,dt$. Entonces por (2.2-1) y por ser μ una función integrablemente acotada, obtenemos $m(s) < m\,(t_3 - t_2)$. Si escogemos $S = \dfrac{\eta - K + ML}{\delta}$ se tiene $\dfrac{\eta - K + ML}{\delta} < t_3 - t_2$. Por lo tanto $V(t_3, x(t_3)) < K$ y esto contradice la existencia de K tal que $K \leq V(t, x) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$. Por lo tanto las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

Teorema 2.2.5 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W tal que

$W'(t,x) \leq \mu(t)\, h(W(t, x)) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ es una función integrablemente acotada, $m \in CCP$ y h es una función que tiene integral recíproca impropia no acotada. Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Ya que $V'(t, x) \leq - c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$ y $c(r) \geq 0$, entonces $V'(t, x) \leq \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$

Por el Teorema 2.2.3. existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall\, t \in I$

Supongamos ahora que existe $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$, una solución $x(t) = x(t;\, t_0, x_0)$ y una sucesión $\{t_k\}$ tal que $t_k \to \infty$ si $k \to \infty$ y $W(t_k, x(t_k)) > R_1$, donde R_1 es una constante. Como $\operatorname{Lim}_{t\to\infty} \inf c(r) > 0$ existe $R_0 < R_1$ tal que $c(r) \geq \dfrac{\delta}{2}$ para cualquier $r \geq R_0$

Supongamos que $W(t, x(t)) > R_0 \quad \forall\, t \geq t_0$, luego $c(W(t, x(t)) \geq \dfrac{\delta}{2}$

Como $V'(t, x) \leq - c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$

$$V'(t, x) \leq - \frac{\delta}{2} + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$$

Así $V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - \dfrac{\delta}{2}(t - t_0) + ML$

y $\operatorname{Lim}_{t\to\infty} V(t, x(t)) = -\infty$, y esto contradice la existencia de una constante P tal que $P \leq V(t, x) \quad \forall\, (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

Así existe una sucesión $\{s_k\}$ tal que $s_k \to \infty$, si $k \to \infty$; y $W(s_k, x(s_k)) < R_0$. Luego existen dos subsucesiones de $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$, digamos $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$ tal que $s_k < t_k < s_{k+1}$, si $k \to \infty$ y $W(s_k, x(s_k)) = R_0$, $W(t_k, x(t_k)) = R_1$ y $R_0 \leq W(t, x(t)) \leq R_1$; $t \in [s_k, t_k]$

Interesa determinar que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - s_k) = \infty$ es divergente

Supongamos que $(t_k - s_k) \to 0$, si $k \to \infty$

Entonces por (2.2-1) se tiene

$$0 < \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{h(r)} \leq \int_{S_k}^{t_k} \frac{W'(t, x(t))}{h(W(t, x(t))} dt$$

Pero $\int_{S_k}^{t_k} \frac{W'(t, x(t))}{h(W(t, x(t))} dt \leq m(t_k - s_k)$ y $m(t_k - s_k) \to 0$ si $k \to \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - S_k) = \infty$ (2.2-2)

Por el Teorema 2.2.2 $\Phi(V(t, x(t))) \leq M$ para algún $M > 0$

Así $V(t_n, x(t_n)) \leq V(t_0, x_0) + ML - \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k}^{t_k} c(W(t, x(t)))\, dt$

$$\leq V(t_0, x_0) + ML - \frac{\delta}{2} \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k)$$

En consecuencia $\lim_{n \to \infty} V(t_n, x(t_n)) = -\infty$ y ésto contradice que existe una constante P tal que $P \leq V(t, x)$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

Supongamos finalmente que $\|x(t'; t_0, x_0)\| = \mathbf{R}_2$ para algún $t' > t_0 + T$. Por las propiedades de b existe $\mathbf{R}_2 > \mathbf{R}_1$ tal que $b(\mathbf{R}_2) > \mathbf{R}_1$, $b(\|x\|) \leq W(t, x)$, y además $b(r) \to \infty$, si $r \to \infty$

Así $b(\mathbf{R}_2) = b(\|x\|) \leq W(t, x) < \mathbf{R}_1$

Luego $b(\mathbf{R}_2) < \mathbf{R}_1$, lo cual contradice que $b(R_2) > R_1$. En conclusión las soluciones de (I) son acotadas hacia el final. ∎

Observación 2.2.6 Bajo las hipótesis de los Teoremas anteriores no se puede concluir que V es radialmente no acotada. Como es establecido mediante el siguiente ejemplo, de [5].

Consideremos la ecuación escalar

$$x' = -xe^{x^2}$$

Las soluciones de la ecuación son finalmente acotadas, en la figura 2 se pueden observar el comportamiento de las soluciones

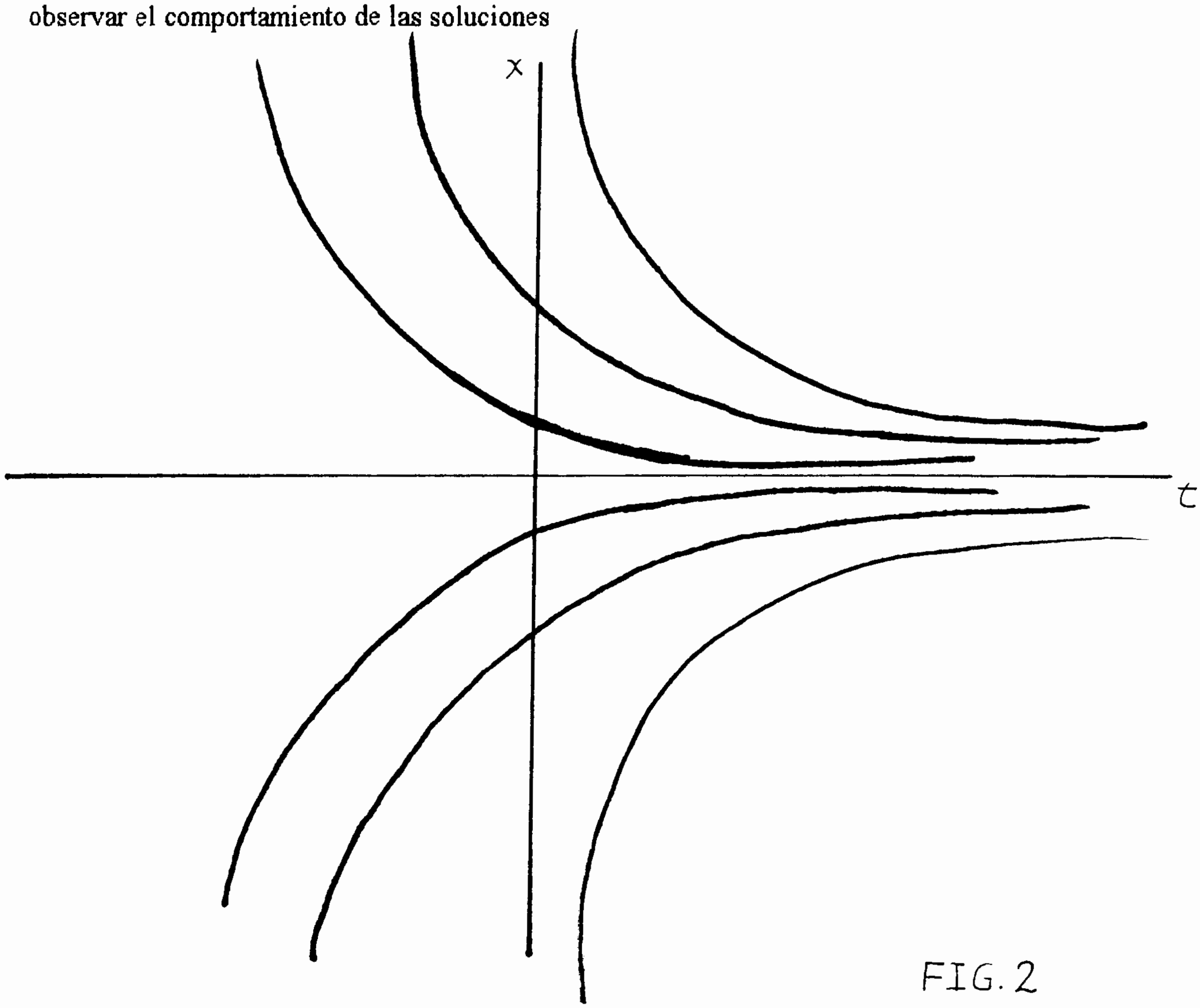

FIG. 2

Sea $V(t, x) = 1 - e^{-x^2}$ y $W(t, x) = x^2$, entonces las condiciones de los Teorema anteriores son satisfechas tomando $c(r) = K$ tal que $K > 0$ y $2x^2 \geq K$, $\Phi(u) = u^2$ $h(s) = s^2$; $\lambda(t) = 0$; $m(r) = r^2$; $u(t) = 1$.

Sin embargo V no es radialmente no acotada ya que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(t, x) = 1$

Teorema 2.2.7 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W tal que:

Existe $m \in CCP$ tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y $u(\tau) \in C([s, t])$, se cumple:

$$\left| \int_s^t W'(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leq m\,(t - s)$$

Entonces V es radialmente no acotada

Demostración. Supongamos que V no es radialmente no acotada.

Entonces existen $No > 0$, $r > 0$ $t \in I$ tal que $\|x_1\| > r$, y $V(t, x_1) \leq No$.

Como $\liminf\limits_{r \to \infty} c(r) > 0$, $\exists\, R_1 > 0$ y $\delta > 0$ tal que $c(r) \geq \delta$ $\forall\, r \geq R_1$. Sea $L = \int_0^\infty \lambda(t)\, dt$ Por otro lado existe b continua y creciente tal que $b(\|x\|) \leq W(t, x)$ y $b(r) \to \infty$ si $r \to \infty$. Además existe $R_2 > R_1$ tal que $b(R_2) > R_1$ y $m(s) < |b(R_2) - R_1|$

Reemplazando r en la hipótesis por R_2 $\exists\, t_0 \in I$, $\|x_0\| > R_2$, $V(t_0, x_0) < N_0$

Por el Teorema 2.2.2, existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M$ $\forall\, t \in I$

Supongamos ahora que $W(t, x(t)) > R_1$ $\forall\, t \geq t_0$

Entonces tenemos que $V'(t, x) \leq -\delta + M\lambda(t)$ $\forall\, t \geq t_0$. Luego

$$V(t, x) \leq N_0 - \delta(t - t_0) + ML \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\lim_{t \to \infty} V(t, x) = -\infty \quad \text{lo cual es una contradicción}$$

Así existe $t_1 > t_0$ tal que $W(t_1, x(t_1)) = R_1$ y $W(t, x(t)) > R_1$ $\forall\, t \in [t_0, t_1)$

En $[t_0, t_1]$ se tiene:

$$V(t_1\ x(t_1)) \leq N_0 - \delta\,(t_1 - t_0) + ML$$

Por otro lado $\left| \int_{t_0}^{t_1} W'(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leq m\,(t_1 - t_0)$ para toda función contínua u en $[s, t]$, luego se cumple para toda solución x(t) de (I), ya que éstas son contínuas

Así $\int_{t_0}^{t_1} W'(t, x(t))dt \leq m(t_1 - t_0)$

Luego $m(s) < m(t_1 - t_0)$

Si escogemos $s = \dfrac{N_0 - K + ML}{\delta}$, entonces $m\left(\dfrac{N_0 - K + ML}{\delta}\right) < m(t_1 - t_0)$

Así $\dfrac{N_0 - K + ML}{\delta} < t_1 - t_0 \Rightarrow N_0 - \delta(t_1 - t_0) + ML < K$

$\Rightarrow V(t_1, x(t_1)) < K$, lo cual es absurdo

Luego V es radialmente no acotada. ∎

Teorema 2.2.8 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W tal que

Existe $m \in$ CCP tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y $u \in C([s, t])$, se cumple:

$$\left| \int_s^t W'(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leq m(t - s)$$

Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Como $0 < \left| \int_{s_k}^{t_k} W'(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leq m(t_k - s_k)$ entonces por (2.2-2), se tiene $\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - s_k) = \infty$, y aplicando el Teorema 2.2.5 las soluciones de (I) son acotadas hacia el final. ∎

Teorema 2.2.9 Supongamos que existe una función Liapunov que satisface las siguientes condiciones:

i) V es radialmente no acotada

ii) Existe una función W radialmente no acotada tal que

$$V'(t, x) \leq -c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$$

donde c es una función continua y no negativa en **R**, tal que $\lim_{r \to \infty} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas

Demostración. Como $V'(t, x) \leq -c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$
Entonces $V'(t, x) \leq \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$ (ya que $c(r) \geq 0$); luego por el lema 2.1.5 las soluciones de (I) son equi-acotadas.∎

Teorema 2.2.10 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W tal que:

$\|f(t, x)\| \leq \mu(t)\, h(\|x\|)$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ y h son funciones integrablemente acotada y de integral recíproca impropia no acotada, respectivamente. Entonces V es radialmente no acotada.

Demostración. Supongamos que V no es radialmente no acotada. Entonces existe $No > 0$, tal que para cualquier $r > 0$ existe $t \in I$ $\|x_1\| > r$ y $V(t, x_1) \leq No$

Como $\lim_{r \to \infty} c(r) > 0$, existe $R_1 > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$c(r) \geq \delta$ $\forall r \geq R_1$. Sea $L = \int_0^{\infty} \lambda(t)\,dt$

Como W es radialmente no acotada existe una función creciente b, tal que $b(\|x\|) \leq W(t, x)$ y $b(r) \to \infty$, si $r \to \infty$. Por las propiedades de b, y como h es de integral recíproca impropia no acotada, existe $R_3 > R_2 > R_1$ tales que

$$b(R_3) > R_2, \quad b(R_2) > R_1 \quad y \quad m(s) < \int_{R_2}^{b(R_3)} \frac{du}{h(u)}$$

Sustituyendo r por R_2 existe $t_0 \in I$ tal que $\|x_0\| > R_2$ y $V(t_0, x_0) \leq No$

Por el Teorema 2.2.2, existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall t \in I$

Supongamos que $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \geq t_0$. Luego $b(\|x(t)\|) > b(R_2) > R_1$.

Así $W(t, x(t)) > R_1$ y $V'(t, x) \leq -\delta + M\,\lambda(t)$. De aquí se obtiene $V(t, x) \leq No - \delta(t - t_0) + ML$ lo cual implicaría que

$\lim\limits_{t \to \infty} V(t, x) = -\infty$ y esto es una contradicción. Por lo tanto existe $t_1 > t_0$ tal que

$\|x(t_1)\| = R_2$ y $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \in [t_0, t_1)$

Como $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{\|x'\|}{h(\|x\|)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \mu(\tau)d\tau \leq m(t_1 - t_0)$

Entonces $m(s) < m(t_1 - t_0)$. Haciendo $S = \left(\dfrac{No - K + ML}{\delta}\right)$ obtenemos:

$\dfrac{No - K + ML}{\delta} < t_1 - t_0$. De aquí $No - \delta(t_1 - t_0) + ML < K$ y esto implica que

$V(t_1, x(t_1)) < K$ lo cual es una contradicción.

En conlcusión V es radialmente no acotada. ∎

Teorema 2.2.11 Supongamos que existe una fimción Liapunov V acotada inferiormente de tipo W y además se cumple que

$\|f(t, x)\| \leq \mu(t)\, h(\|x\|) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ y h son funciones integrablemente acotada y de integral recíproca impropia no acotada respectivamente.

Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Por el Teorema 2.2.2, existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall t \in I$

Supongamos que existe $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ una solución $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ y una sucesión $\{t_k\}$ tal que $t_k \to \infty$ si $k \to \infty$ y $\|x(t_k)\| > R_1$. Como W es radialmente no acotada, existe una función creciente b, tal que $b(\|x\|) \leq W(t, x)$ y $b(r) \to \infty$, si $r \to \infty$.

Como $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \inf(c(r)) > 0$, $\exists R_1 < R_2$, tal que $b(R_2) > R_1$ y $c(r) \geq \dfrac{\delta}{2} \quad \forall r \geq R_1$

Supongamos que $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \geq t_0$, entonces $W(t, x(t)) \geq b(\|x(t)\|) > b(R_2) > R_1$.

Luego $c(W(t, x(t))) \geq \delta/2$. Como $V'(t, x) \leq -c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$

se tiene $V'(t, x) \leq -\dfrac{\delta}{2} + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$.

Por lo tanto $V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - \dfrac{\delta}{2}(t - t_0) + ML$ y de aquí $\displaystyle\lim_{t\to\infty} V(t, x) = -\infty$,

y esto contradice la existencia de una constante $P \leq V(t, x)$.

Así existe una sucesión $\{s_k\}$ tal que $s_k \to \infty$ si $k \to \infty$ y $\|x(s_k)\| < R_2$

Luego existen dos subsucesiones de $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$, digamos $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$ tal que $s_k < t_k < s_{k+1}$ $s_k \to \infty$, si $k \to \infty$; y $\|x(s_k)\| = R_1$, $\|x(t_k)\| = R_2$ y $R_1 \leq \|x(t)\| \leq R_2$ con $t \in [s_k, t_k]$.

Como $0 < \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{du}{h(u)} \leq \int_{s_k}^{t_k} \frac{\|x'\|}{h(\|x\|)}\,dt \leq m(t_k - s_k)$ entonces por (2.2-2), obtenemos

que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - s_k) = \infty$. Así,

$$V(t_n, x(t_n)) \leq V(t_0, x_0) + ML - \sum_{k=1}^{n} \int_{s_k}^{t_k} c(W(t, x(t)))\, dt$$

$$\leq V(t_0, x_0) + ML - \frac{\delta}{2} \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k)$$

En consecuencia $\lim_{n \to \infty} V(t_n, x(t_n)) = -\infty$ y esto es una contradicción

Supongamos finalmente que $\|x(t'; t_0, x_0)\| = R_2$ para algún $t' > t_0 + T$. Por las propiedades de b existe $R_2 > R_1$ tal que $b(R_2) > R_1$, $b(\|x\|) \leq W(t, x)$ y $b(r) \to \infty$ si $r \to \infty$. Así $b(R_2) = b(\|x\|) \leq W(t, x) < R_1$.

Luego $b(R_2) < R_1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto las soluciones de (I) son acotadas hacia el final. ∎

Teorema 2.2.12 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W y $\|f(t, x)\| \leq \mu(t)\, h(\|x\|)$ $\forall\, (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde μ y h son funciones integrablemente acotadas y de integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas.

Demostración. Por el Teorema 2.2.9 las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

Teorema 2.2.13 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W y que además se cumple

$\exists\, m \in CCP$ tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y $u \in C([s, t])$, se tiene que

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t - s)$$

Entonces V es radialmente no acotada.

Demostración. Supongamos que V no es radialmente no acotada. Entonces existe $No > 0, r > 0, t \in I$ tal que $\|x_1\| > r$ y $V(t, x_1) \leq No$.

Como $\underset{r \to \infty}{\text{Lim}} \inf c(r) > 0, \exists R_1 > 0$ y $\delta > 0$ tal que $c(r) \geq \delta \quad \forall r \geq R_1$. Sea

$L = \int_0^{\infty} \lambda(t)\, dt$

Como W es radialmente no acotada, existe una función una función b continua y creciente tal que $b(\|x\|) \leq W(t, x)$ y $b(r) \to \infty$ si $r \to \infty$.

Por otro lado existe $R_3 > R_2 > R_1$ tal que $b(R_3) > R_2$ y $b(R_2) > R_1$ y $m(R) < |b(R_3) - R_2|$. Ya que $\left\|\int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau\right\| \leq m(t - s)$ para $t \geq s$ y toda función continua u, entonces también es cierto para cualquier solución x(t) de (I). Así $\left\|\int_s^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right\| \leq m(t - s)$. Reemplazando r por R_2 existe $t_0 \in I$, $\|x_0\| > R_2$ y $V(t_0, x_0) < No$

Por el Teorema 2.2.2, existe $M > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall t \in I$

Supongamos ahora que $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \geq t_0$.

Luego $W(t, x(t)) \geq b(\|x(t)\|) > b(R_2) > R_1$.

Por lo tanto $V'(t, x) \leq -\delta + M\lambda(t) \quad \forall t \geq t_0$. De donde obtenemos $V(t, x) \leq No - \delta(t - t_0) + ML$

Por lo tanto $\underset{t \to \infty}{\text{Lim}} V(t, x) = -\infty$, lo cual es una contradicción.

Así existe $t_1 > t_0$ tal que $\|x(t_1)\| = R_2$ y $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \in [t_0, t_1)$

En $[t_0, t_1]$ se tiene: $V(t_1, x(t_1)) \leq No - \delta(t_1 - t_0) + ML$

Luego $m(R) < \left\|\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt\right\| \leq m(t_1 - t_0)$. Escogiendo $R = \dfrac{No - K + ML}{\delta}$

se obtiene $\dfrac{No - K + ML}{\delta} < t_1 - t_0$

Por lo tanto $V(t_1, x(t_1)) < K$, contradicción. En conclusión V es radialmente no acotada.

∎

Teorema 2.2.14 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W, y además $\exists\, m \in CCP$ tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y $u \in C([s, t])$, se cumple que $\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t - s)$. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas.

Demostración. Por el Teorema 2.2.9 las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

Teorema 2.2.15 Supongamos que existe una función Liapunov V acotada inferiormente de tipo W y además $\exists\, m \in CCP$ tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y $u \in C([s, t])$, se cumple que $\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t - s)$. Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Por Teorema 2.2.2, $\exists\, m > 0$ tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall\, t \in I$ y además como $0 < \left\| \int_{s_k}^{t_k} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t_k - s_k)$ entonces por (2.2-2), se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - s_k) = \infty$. Así por el Teorema 2.2.5 las soluciones de (I) son acotadas hacia el final . ∎

Teorema 2.2.16 Supongamos que existen funciones Liapunov V y W que satisfacen:

i) W es radialmente no acotada y $V'(t, x) \leq -c(W(t, x)) + \lambda(t)\,\Phi(V(t, x))$ donde c es una función continua, no negativa en **R** tal que $\lim_{r \to \infty} \inf c(r) > 0$ λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente.

ii) $k \leq V(t, x(t))$, donde k es una constante real y $\lim_{\|x\| \to \infty} V(t, x) = \infty$ para cada t fijo en I

iii) Para todo $R > 0$ y toda $u \in C(I)$ tal que $\|u(t)\| < R$ en I, $\exists\, m \in CCP$ tal que

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau)d\tau \right\| \leq m(t - s) \quad \forall t \geq s \geq 0$$

Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final

Demostración. Las condiciones (i) y (ii) garantizan la existencia global de las soluciones de (I). Ver [1]

Por el Teorema 2.2.12 existen dos subsucesiones de $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$ tal que $s_k < t_k \leq s_{k+1}$, $s_k \to \infty$, si $k \to \infty$ y $\|x(s_k)\| = R_1$ y $\|x(t_k)\| = R_2$ y $R_1 \leq \|x(t)\| \leq R_2$ $t \in [s_k, t_k]$.

Por (iii) $0 < \left\| \int_{s_k}^{t_k} f(t, x(t))dt \right\| \leq m(t_k - s_k)$. Luego por (2.2-2) de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - s_k)$ es divergente y aplicando el Teorema 2.2.5 las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

∎

Observación 2.2.17 Consideremos las siguientes condiciones:

i) $\|f(t, x)\| \leq u(t)\, h(\|x\|)$ $\quad \forall\, (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde u y h son funciones integrablemente acotada y que tienen integral impropia recíproca no acotada respectivamente.

ii) Existe $m \in$ CCP tal que $\forall\, t \geq s \geq 0$ y toda $u \in C([s, t])$

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t - s)$$

iii) Para cualquier $\mathbf{R} > 0$ y toda $u \in C([s, t])$ satisfaciendo $\|u(t)\| < R$ en I, existe $m \in$ CCP tal que $\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m(t - s)$ para $t \geq s \geq 0$

iv) Existen funciones Liapunov V y W tal que $|W'(t, x)| \leq u(t)\, h(W(t, x))$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde u y h son funciones como en (iii) y $\left| \int_s^t W'(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leq m(t - s)$ para toda $u \in C([s, t])$ y $m \in$ CCP. Entonces dichas condiciones, que son las que varían en los Teoremas 2.2.8., 2.2.11., 2.2.15. y 2.2.16, no pueden suprimirse y asegurar que las soluciones siguen siendo acotadas hacia el final, como lo plantean en [5], mediante el siguiente ejemplo.

Consideremos la ecuación escalar

$$x' = \left[\frac{g'(t)}{g(t)}\right] x,$$

donde $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + n^4 (t - n)^2}$

Sea $V(t, x) = x^2 \left\{K^2 + \int_t^{\infty} g^2(s) ds\right\} / g^2(t)$

donde $K = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ y $W(t, x) = x^2$

Entonces $V(t, x) \geq x^2$; $V'_{(I)}(t,x) = -W(t, x)$

y $\quad W'(t, x) = \{2\, g'(t) \,/\, g(t)\}\, W(t, x)$

Sin embargo las condiciones nombradas no son satisfechas. Por otro lado tenemos:

$$x' = \left[\frac{g'(t)}{g(t)}\right] x$$

Entonces $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{g'(t)}{g(t)}\, dt$

Luego las soluciones de la ecuación satisfacen

$$|x(t; t_0, x_0)| = \frac{|x_0|}{g(t_0)}\, g(t)$$

Como $g(n) > 1$ entonces $|x(n; t_0, x_0)| \geq \dfrac{|x_0|}{g(t_0)}$, $(n = 1, 2, \ldots)$

Luego las soluciones de la ecuación no son acotadas hacia el final.

Observación 2.2.18 Bajo las condiciones del Teorema 2.2.16 no se puede concluir que V es radialmente no acotada. Consideremos la ecuación escalar $x' = -xe^{x^2}$, sus soluciones, ya hemos visto, son acotadas hacia el final.

Sea $V(t, x) = \dfrac{x^2}{t+1} - e^{-x^2} + 1$ y $W(t, x) = x^2$. Entonces las condiciones del Teorema 2.2.16 son satisfechas pero V no es radialmente no acotada ya que $V(t, x) \not\to \infty$, si $\|x\| \to \infty$ uniformemente. Pero para cada t fijo, tal que $V(t, x) > \dfrac{x^2}{t+1}$ se tiene que $V(t, x) \to \infty$, si $\|x\| \to \infty$

Teorema 2.2.19 Supongamos que existe una función Liapunov que satisface las siguientes condiciones

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq v(t, x)$

ii) $\|f(t, x)\| \leq u(t)\, h(\|x\|)$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde u y h son funciones integrablemente acotada y de integral recíproca impropia no acotada respectivamente y $m \in$ CCP

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\, \Phi(V(t, x))$, donde $c \in C(I)$, $\lim\limits_{r \to \infty} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces V es radialmente no acotada.

Demostración. Procediendo por reducción al absurdo aplicamos el Teorema 2.2.10, para asegurar la existencia de $R_2 > R_1$ tal que $m\left(\dfrac{No - K + ML}{\delta}\right) < \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{du}{h(u)}$ donde No, K, M, L y δ son las constantes que se obtienen en la demostración de dicho Teorema.

Supongamos ahora que $\|x(t)\| > R_1$ $\forall t \in I$. Entonces $c(\|x\|) \geq \dfrac{\delta}{2}$. Entonces aplicando el Teorema 2.2.10 obtenemos $\lim\limits_{t \to \infty} V(t, x) = -\infty$ y esto contradice (i). Así por el mismo Teorema, V es radialmente no acotada. ∎

Teorema 2.2.20 Supongamos que existe una función Liapunov que satisface las siguientes condiciones

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq v(t, x)$

ii) $\|f(t, x)\| \leq u(t)\, h(\|x\|)$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde u y h son funciones integrablemente acotada y de integral recíproca impropia no acotada respectivamente.

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\, \Phi(V(t, x))$ donde $c \in C(I)$, $\underset{r \to \infty}{\text{Lim}} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Supongamos que existen $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$, una solución $x(t) = x(t;\, t_0, x_0)$ y una sucesión $\{t_k\}$ tal que $t_k \to \infty$ si $k \to \infty$ y $\|x(t_k)\| > R_2$. Como $\text{Lim} \inf c(r) > 0$ existe $R_1 < R_2$ tal que $c(r) \geq \dfrac{\delta}{2}$ $\forall\, r \geq R_1$.

Supongamos ahora que $\|x(t)\| > R_1$ entonces $c(\|x(t)\|) \geq \dfrac{\delta}{2}$. Luego por el Teorema 2.2.11 se obtiene que $\underset{t \to \infty}{\text{Lim}} V(t, x) = -\infty$ y ésto contradice (i). Aplicando de nuevo el Teorema 2.2.11 las soluciones de (I) son acotadas hacia el final. ∎

Teorema 2.2.21 Supongamos que existe una función Liapunov que satisface las siguientes condiciones

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq v(t, x)$

ii) $\|f(t, x)\| \leq u(t)\, h(\|x\|)$ $\forall\, (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$ donde u y h son funciones integrablemente acotada y de integral recíproca impropia no acotada respectivamente y $m \in CCP$

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\, \Phi(V(t, x))$ donde $c \in C(I)$, $\underset{r \to \infty}{\text{Lim}} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas

Demostración. Por el Teorema 2.2.9 las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

Teorema 2.2.22 Supongamos que existe una función Liapunov V que satisface:

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq V(t, x) \quad \forall\ (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

ii) $\exists\ m \in$ CCP tal que $\forall\ t \geq s \geq 0$ y toda $u \in C([s, t])$ se cumple

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m\ (t - s)$$

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\ \Phi(V(t, x))$ donde $c \in C(I)$, $\operatorname*{Lim\,inf}_{r \to \infty} c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces V es radialmente no acotada.

Demostración. Supongamos que V no es radialmente no acotada. Entonces existe $No > 0$, $r > 0$, $t \in I$ tal que $\|x_1\| > r$ y $V(t, x_1) \leq No$

Como $\operatorname*{Lim\,inf}_{r \to \infty} c(r) > 0$, existen $R_1 > 0$ y $\delta > 0$ tal que $c(r) \geq \delta \quad \forall\ r \geq R_1$

Por Teorema 2.2.13 existen $R_3 > R_2 > R_1$ tales que $b(R_3) > R_2$, $b(R_2) > R_1$ y

$$m\left(\frac{No - k + ML}{\delta}\right) < \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))\, dt \right\| \leq m(t_1 - t_0) \quad \text{donde } L = \int_{t_0}^{t} \lambda(t)\, dt \quad \text{y}$$

M es una constante positiva tal que $\Phi(V(t, x(t))) \leq M \quad \forall t \in I$. Por (iii) $V'(t, x) \leq c(\|x\|) + \lambda(t)\ \Phi(V(t, x))$. Luego por el Teorema 2.2.13 existe $t_1 > t_0$ tal que $\|x(t_1)\| = R_2$ y $\|x(t)\| > R_2 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. De nuevo por el Teorema 2.2.13, V es radialmente no acotada. ∎

Teorema 2.2.23 Supongamos que existe una función Liapunov V que satisface:

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq V(t, x) \quad \forall\ (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

ii) $\exists$ $m \in CCP$ tal que $\forall\ t \geq s \geq 0$ y toda $u \in C([S, t])$ se cumple

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m\ (t - s)$$

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\ \Phi(V(t, x))$ donde $c \in C(I)$, $\lim\limits_{r \to \infty} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son acotadas hacia el final.

Demostración. Como Lim inf c(r) > 0, existe $R_2 > R_1$ tal que $b(R_2) > R_1$ y $c(r) \geq \dfrac{\delta}{2} \quad \forall\ r \geq R_1$. Por (iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\ \Phi(V(t, x))$. Luego existe una sucesión $\{s_k\}$ tal que $s_k \to \infty$, si $k \to \infty$; y $\|x(s_k)\| < R_2$. Así por el Teorema 2.2.15, las soluciones de (I) son acotadas hacia el final ∎

Teorema 2.2.24 Supongamos que existe una función Liapunov V que satisface:

i) $\exists$ k constante tal que $k \leq V(t, x) \quad \forall\ (t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$

ii) $\exists$ $m \in CCP$ tal que $\forall\ t \geq s \geq 0$ y toda $u \in C([S, t])$ se cumple

$$\left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leq m\ (t - s)$$

iii) $V'(t, x) \leq -c(\|x\|) + \lambda(t)\ \Phi(V(t, x))$ donde $c \in C(I)$, $\lim\limits_{r \to \infty} \inf c(r) > 0$, λ y Φ son funciones que tienen integral impropia acotada e integral recíproca impropia no acotada respectivamente. Entonces las soluciones de (I) son equi-acotadas

Demostración. Por el Teorema 2.2.9 las soluciones de (I) son equi-acotadas. ∎

Observación 2.2.25 La suposición de que $\lim\limits_{r\to\infty} \inf c(r) > 0$ no puede ser suprimida en los Teoremas 2.2.19 al 2.2.24. Como se establece mediante el siguiente ejemplo de [5]. Consideremos la ecuación escalar

$$x' = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

y una función Liapunov $V(t, x) = e^{-x^2}$

Entonces tomando $a \equiv 1$, $h \equiv 1$, m cualquier función creciente, continua y positiva, $c \equiv 0$, $\lambda \equiv 0$ y Φ cualquier función continua, positiva en **R** y como

$$V'(t, x) = \begin{cases} -2x^2 e^{-x^2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ -2e^{-x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Entonces todas las condiciones de los Teoremas 2.2.19 al 2.2.24 se cumplen; excepto $\lim\limits_{r\to\infty} \inf c(r) > 0$. Sin embargo las soluciones que son de la forma $x(t) = e^t$ ó $x(t) = \sqrt{2t}$ tienden a infinito, si $t \to \infty$ (excepto la solución nula).

CAPITULO III

A P L I C A C I O N E S

3.1 Criterio de Routh - Hurwitz

En este capítulo se aplicará lo desarrollado anteriormente usando las condiciones de Routh Hurwitz. En primer lugar recordemos algo sobre estas condiciones.

Sea $p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s$ un polinomio con coeficientes reales de grado n. Miller y Michel [6], definen a p(s) como estable si todos los ceros tienen parte real negativa y lo llaman polinomio Hurwitz. Además se tiene la siguiente condición necesaria y suficiente para que p(s) sea un polinomio Hurwitz.

Teorema 3.1.1 [4, Teorema 6.3.]
$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s$ es Hurwitz si y sólo si

$$\frac{a_1}{a_0} > 0; \quad \frac{a_2}{a_0} > 0 \ldots \frac{a_n}{a_0} > 0 \qquad \text{y} \qquad D_1 = a_1 > 0; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \ldots D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0$$

3.2 Condiciones de Routh - Hurwitz y Soluciones acotadas hacia el final y equi-acotadas

Consideremos ahora la ecuación de cuarto orden establecida en [5],

$$x'''' + ax''' + bx'' + cx' + dx = p(t) \qquad \text{(II)}$$

donde p es continua; a, b, c, d son constantes y asumimos las condiciones de Routh - Hurwitz,

$$a > 0,\ ab - c > 0\ \ (ab - c)c - a^2d > 0,\ d > 0.$$

Ahora establecemos el siguiente Teorema [5, Teorema 4.1]

Teorema 3.2.1 Supongamos que las condiciones de Routh - Hurwitz se cumplen. Entonces las soluciones x(t) de (II) y sus derivadas x'(t), x''(t), x'''(t) son equi-Acotadas y acotadas hacia el final si y sólo si.

$$\sup_{t \geq 0} \left| e^{-t} \int_0^t e^s p(s)\, ds \right| < +\infty$$

Ahora motivado por [5], consideramos la ecuación diferencial de cuarto orden

$$x'''' + ax''' + bx'' + cx' + dx = q(t, x, x', x'', x''') \qquad \text{(III)}$$

donde q es continua y a, b, c, d son constantes como en (II), y demostremos el siguiente Teorema

Teorema 3.2.2 Supongamos que las condiciones de Routh-Hurwitz se cumplen y que existe un número positivo M y una función contínua no negativa λ tal que

$$|q(t,x,y,z,u)| \leq M + \lambda(t)\left[1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right] + \gamma\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$

donde $\int_0^\infty \lambda(t)dt < \infty$ y $\gamma > 0$ suficientemente pequeño.

Entonces las soluciones de (III) y sus derivadas x'(t), x''(t), x'''(t) son equi-acotadas y acotadas hacia el final .

Demostración. La ecuación (III) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = u \\ u' = -au - bz - cy - dx + q(t,x,y,z,u) \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Consideremos una función Liapunov V definida por

$$V = \frac{ka}{d}\left(u + az + by + cx\right)^2 + (a + c)\left[au + a^2z + (ab - c)y\right]^2$$

$$+ a\left(cu + acz + ady\right)^2 + \frac{ac}{bc - ad}\left[(bc - ad)u + c^2z + cdy\right]^2$$

$$+ (a + c)\left(cz + acy + adx\right)^2 + c\left[az + a^2y + (ab - c)x\right]$$

$$+ a\left[(bc - ad)z + c^2y + cdx\right]^2 + k\,(ad + c)\left(z^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$+ \frac{kac}{bc - ad}\left(cz + dy\right)^2 \text{; donde } k = (ab - c)c - a^2d.$$

Ahora $(ab - c)c - a^2d > 0$

$\Rightarrow (ab - c)c > a^2d > 0 \qquad (d > 0)$

$\Rightarrow c > 0$ (ya que $ab - c > 0$)

Además $ab - c > 0 \Rightarrow ab > c > 0 \Rightarrow b > 0$

También: $(ab - c)c - a^2d > 0$

$\Rightarrow abc - c^2 - a^2d > 0$

$\Rightarrow abc - a^2d > c^2 > 0$

$\Rightarrow bc - ad > 0$ (ya que $a > 0$)

Así $V(x, y, z, u) \geq 0$.

Por otro lado

$$\exists N > 0: V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right) + N\,|q(t, x, y, z, u)|\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$

$$\Rightarrow V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right)$$
$$+ N\Big[M + \lambda(t)\left(1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right)$$
$$+ \gamma\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)\Big]\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$

$$\Rightarrow V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right)$$
$$+ NM\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$
$$+ N\lambda(t)\left(1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right)\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$
$$+ \gamma\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)^2$$

$$\Rightarrow V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right) + \frac{(NM)^2}{kac}$$
$$+ N\lambda(t)\left(1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right)\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$
$$+ \gamma\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)^2$$

Como γ es suficientemente pequeño, se pueden escoger k, a, c tal que $\frac{kac}{4} > \gamma > 0$.

Luego

$$\Rightarrow V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right) + \frac{(NM)^2}{kac}$$

$$+ N\lambda(t)\left(1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right)\left(|x| + |y| + |z| + |u|\right)$$

$$+ \frac{(NM)^2}{4kac}$$

$$\Rightarrow V' \leq -2kac\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right) + \frac{5}{4}\frac{(NM)^2}{kac}$$

$$+ \frac{N}{kac}\lambda(t)\left(1 + |x| + |y| + |z| + |u|\right)$$

$$\Rightarrow V' \leq -\frac{kac}{2}\left\{x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2\left(\frac{NM}{kac}\right)^2\right\}$$

$$+ \lambda(t)\left\{\frac{1}{2} + 3\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right)\right\}$$

Sea

$$W(x, y, z, u) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right) - 2\left(\frac{NM}{kac}\right)^2.$$

Luego $|W'| \leq (2 + 2a + b + c + d)\left[W + 2\left(\frac{NM}{kac}\right)^2\right] + (2 + a)M$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.2.3, las soluciones de (III) y sus derivadas $x'(t)$, $x''(t)$ y $x'''(t)$ son equi-acotadas y acotadas hacia el final. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] Bernfeld S. R., *"Global existence without uniqueness"*, Annali Mat. pura appl. 87. 227 - 239 (1970).

[2] Burton, T. A., *"Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations"*. Academic. Press. Inc. New York. 1985.

[3] Haddock, J. R., *"A remark on a stability theorem of M. Marachkoff "*, Proc. Am. math. Soc. 31 209-212 (1972)

[4] Hahn, W., *"Stability of Motion"*. Springer - Verlag. Berlin . 1967.

[5] Hara T. Yoneyama T. Saitoh, S e Hirano M., *"Relation Between ultimate Boundedness and Radially unbounded Liapunov Function"*. Nonlinear Analysis. Methods and Applications. Vol. 10 N° 5, p 471 - 482 (1986)

[6] Miller R. y Michel Anthony. *"Ordinary Differential Equations"*.Academic Press. Inc. 1982.

[7] Skowrowski, J., *"Applied Liapunov Dynamics"*. System and Control Enginering Consults. Inc. (S. C. E. C.). Brisbane 1984.

[8] Yoshizawa, T., *"Liapunov's Funtions and of Boundedness solutions"*. Funkcialaj Ekvcacioj 2, 71 - 103. (1958)

[9] Yoshizawa, T., *"Stability Theory by Liapunov's Second Method"*, Math Soc. Japan 1966.

[10] Yoshizawa T., *"Stability Theory and the Exisntece of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions"*. Springer - Verlag New York - Heidelberg. Berlin 1975.