Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias
Departamento de Matemática

Fibrados desde el punto de vista algebraico

Autor: Lcdo. Elvis Aponte Valladares

Tutor: Dr. Angel Mastromartino Pérez

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister, Mención Matemáticas

BARQUISIMETO, 2008

RESUMEN

En este trabajo consideramos conjuntos abstractos, cuyos elementos no tienen naturaleza especificada, pero han de tener estructura de $\mathbb{R}$-álgebra "F" asociativa, conmutativa y con unidad sobre $\mathbb{R}$, estructura que nos permite considerar el conjunto $M = |F|$ de todos los homomorfismos sobre el $\mathbb{R}$-álgebra a valores en $\mathbb{R}$, con este conjunto M clasificamos las $\mathbb{R}$-álgebras "F" que al ser geométricas hacemos de $|F|$ un espacio topológico de Hausdorff, y ver así los objetos de la $\mathbb{R}$-álgebra "F" como funciones continuas sobre $M = |F|$ a valores en $\mathbb{R}$.

Aunado a esto último, damos dos condiciones más para clasificar estas $\mathbb{R}$-álgebras "F," definiremos lo que es una $\mathbb{R}$-álgebra F diferenciable, la cual será vista como la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones diferenciables sobre M, definición que haremos una vez que F sea una $\mathbb{R}$-álgebra completa.

Si además F es una $\mathbb{R}$-álgebra C^∞-cerrada, trataremos en nuestro contexto con el producto tensorial de dos $\mathbb{R}$-álgebra, apuntando así hacia el producto tensorial en el contexto de los fibrados.

Una vez obtenidas las estructuras de algebra y variedad diferencial, aparece la definición de funciones diferenciables entre variedades diferenciables, la cual es necesaria para dar la definición de fibrados por paquetes, definición la cual será hecha considerando las $\mathbb{R}$-álgebras para luego obtener la equivalencia con la definición geométrica de la cual existen muchos resultados. Ver [3].

Palabras Claves: Función dual, $\mathbb{R}$-álgebra geométrica, diferenciable

Índice general

Agradecimientos

- A Dios que me dio el ser y la iluminación para lograr esta meta
- A mi familia, sobre todo a mi Madre Elvia Valladares, que con su amor y disciplina y alta colaboración me ha guiado por este camino. Gracias Mamá “Aya”
- A mi Papá Ramón Aponte, gracias viejo por impartir conocimientos y destrezas durante la étapa de mi crecimiento.
- A la Señorita Sandra Durán, por su incondicional apoyo y amor durante todos mis estudios de Matemática.
- A mi tutor, Dr. Ángel Mastromartino por su guia y colaboración en mi formación como matemático.
- A mis amigos y compañeros: Adrian, Minoru, Soto,Eric,Y ves, Andy, Jean Franco, Bernado Matheus, José Durán “El Jefe”, Jhonny Pastor Gil,Laireth Camacho.
- A todo el personal de la UCLA, especialmene a los profesores que han colaborado en mi desarrollo profesional: Mario Rodríguez, Ismael Huerta, Rafael Torrealba, Rommel Guerrero, Francisco Montes de Oca, Miguel Vivas.
- A todos aquellos partícipes en la realización de este trabajo, especialmente a Karmela Lozada “vamos a imprimir”, Secretaria de Posgrado del Decanato de Ciencias y Tecnología, UCLA.

Dedicatoria

Aponte-Valladares⇆ Rodríguez-Durán.

Introducción

En 1968 Alexander Vinogradov, dictaba un seminario de Teoría Cuántica de Campos, donde se encontraban estudiantes de física, quienes expresaban sus ideas en un lenguaje inadecuado. Por esta razón, en 1971, Alexander Vinagradov, en un seminario de matemáticas se comienza a estudiar la estructura del cálculo diferencial, buscando una analogía de la geometría algebraica para sistemas no lineales de ecuaciones en derivadas parciales, y al mismo tiempo comienza sistemáticamente la lectura sujeta a las ideas anteriormente mencionadas.

Al principio los participantes del seminario y oyentes de las lecturas manejaban algunos sumarios esqueméticos de tales lecturas, aportando sus propias notas. Después de 10 años, tales notas fueron dejadas, luego aparece Jet Nestruev y escribe una serie de libros sobre elementos del cálculo diferencial, dando comienzo a parte de la teoría que revisaremos para lograr el propósito principal de este trabajo, el cual es la definición de fibrados diferenciables desde el punto de vista algebraico.

En lo tradicional se define la noción de variedad diferenciable para luego definir el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad respectiva, procediendo de manera inversa, es decir, a partir de una $\mathbb{R}$-álgebra F conmutativa, definimos la variedad $M = M_F$, como el $\mathbb{R}$-espectro de esta álgebra F, que es el conjunto de todos los homomorfismos unitarios del álgebra F en $\mathbb{R}$. Conjuntos sobre el cual el álgebra F es vista como el álgebra de funciones diferenciables, para lograr ésto imponemos ciertas condiciones sobre F.

Esta formulación algebraica es basada sobre la noción de observable, aclarando la introducción de definiciones y construcción en la rama de la física, como son los conceptos de estado y dispositivos de medida en un sistema físico.

En este trabajo utilizaremos esta nueva reformulación algebraica de la variedad diferenciable para definir la noción de fibrados diferenciables en el contexto algebraico, la cual será hecha bajo la siguiente estructura.

En el capítulo 1 recordaremos el concepto tradicional de variedades diferenciables. En el capítulo 2 exploramos los tipos de $\mathbb{R}$-álgebra, dando luego en el capítulo 3; una definición algebraica de lo que es una variedad y una función diferenciable. Bajo este soporte realizamos nuestra tarea dando la definición algebraica de fibrados diferenciables, que en este contexto es equivalente a la definición geomérica.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo consideramos un conjunto no vacio M y crearemos sobre el una estructura diferenciable llamando asi a M una variedad diferenciable.

Definición 1.1

Una carta (U, X) sobre el conjunto M es una biyección $X : U \longrightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^n$; donde $U \subset M$ es un subconjunto cualquiera de M y $X(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. El número $n \geq 0$, se denomina dimensión de la carta.

Notar que solo es necesario chequear la inyectividad.

Ejemplo 1.1

Si $\mathbf{S}$ es la silla de montar $z = 1 + x^2 - y^2$, entonces la proyección vertical:

$$\mathbf{S} \ni (x, y, z) \longmapsto p_r(x, y, z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Donde $(x, y, z) \in S$, define una carta (U, p_r) sobre $\mathbf{S}$, en un entorno $U \subset \mathbf{S}$ del punto $(0, 0, 1)$.

Ejemplo 1.2

Si T^2 es el espacio de configuración del doble péndulo plano, entonces (U,S); donde

$$U = \{(\varphi,\psi) \in T^2 \ / \ -\frac{\pi}{4} < \varphi,\psi < \frac{\pi}{4}\}$$

y S es la función $S : U \longrightarrow S(U) \subset \mathbb{R}^2$, dada por $S(\varphi,\psi) = (sen\ \varphi, sen\ \psi)$, es una carta sobre T^2.

Ejemplo 1.3

Sea V un espacio vectorial real n-dimensional, entonces el par (E,V), es una carta de dimensión n, con E definida como sigue

$$\begin{aligned} &E : V \to \mathbb{R}^n, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i V_i \to (a_1,...,a_n). \end{aligned}$$

A continuacion expresamos un conjunto M "el ocho" en dos formas distintas, obteniendo sobre este dos cartas .

Esto nos indica que sobre un conjunto pueden existir mas de dos cartas.

$$\begin{aligned} &M = \{(\sin(2t),\sin(t)) \in \mathbb{R}^2/0 < t < 2\pi\}. \\ &X : M \to (0,2\pi). \\ &(\mathrm{sen}(2t),\mathrm{sen}(t)) \to t. \end{aligned}$$

Claramente el par (X,M) es una carta.

$$\begin{aligned} &M = \{(\mathrm{sen}\,2t,\mathrm{sen}\,t) \in \mathbb{R}^2/-\pi < t < \pi\}. \\ &Y : M \to (-\pi,\pi). \\ &(\mathrm{sen}(2t),\mathrm{sen}(t)) \to t. \end{aligned}$$

El par (Y,M) es una carta sobre M.

Fijémenos en la siguiente función

$$(Y \circ X^{-1})(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ 0 & t = \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Notemos que no es continua.

Definición 1.2

Dadas (U,X) , (V,Y),dos cartas sobre un conjunto M cualquiera diremos que son compatibles si la función

$$Y \circ X^{-1} : X(U \cap V) \longrightarrow Y(U \cap V).$$

llamada *función cambio de coordenadas* es un difeomorfismo de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, o si $U \cap V = \emptyset$.

En este sentido la compatibilidad de funciones define una clase de equivalencia.

Ejemplo 1.4

La carta (U,S) sobre el péndulo doble T^2 del ejemplo 1.2 no es compatible con la carta (U,C) la cual es definida como sigue

$$C : U \longrightarrow C(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (sen\ \varphi, g(\psi)).$$

donde

$$g(\psi) = sen\ \psi \quad si \quad \psi < 0.$$

$$g(\psi) = 1 - cos\ \psi \quad si \quad \psi \geq 0.$$

Estudiemos la función de cambio de coordenadas .

$$\begin{aligned}
&(C\circ\, S^{-1})(x,y)\\
&= C(S^{-1}(x,y))\\
&= C(sen^{-1}\, x, sen^{-1}\, y)\\
&= (sen(sen^{-1}\, x), g(sen^{-1}\, y))\\
&= (x, g(sen^{-1}\, y)).
\end{aligned}$$

donde

$$g(sen^{-1}y) = y \quad si \quad sen^{-1}\, y < 0.$$

$$g(sen^{-1}y) = 1 - cos(sen^{-1}y) \quad si \quad sen^{-1}(y) \geq 0.$$

Calculando el jacobiano correspondiente obtenemos

$$J(C\,\circ\, S^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Pero $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ depende de y solamente, tratemos con

$$\frac{dg}{dy}.$$

- $y \longrightarrow o^{+} \Longrightarrow sen^{-1}\, y \longrightarrow 0^{+}$. En este caso

$$\frac{\partial g}{\partial y} = y.\frac{1}{1-y^2}.$$

Luego,

$$\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0} = 0.$$

- $y \longrightarrow o^- \Longrightarrow sen^{-1}\, y \longrightarrow 0^-$. En este caso

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

Luego,

$$\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0} = 1.$$

Esto nos dice que $\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0}$, no existe y por tanto $C \circ S^{-1}$ no es diferenciable en $(0,0)$. Así (U,S) y (U,C) no son compatibles.

Definición 1.3

Una familia A de cartas compatibles $X_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sobre un conjunto M donde el número $n \geq 0$ es fijo y α varía sobre un conjunto de índices J, es un *atlas* sobre M si los conjuntos U_α forman un cubrimiento de M, es decir, $\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha = M$. El número n es llamado la dimensión del atlas A.

Si existe otro atlas B de manera que todas sus cartas sean compatibles con las todas las cartas del atlas A, diremos que los atlas son compatibles y en este caso $A \cup B$ es tambien un atlas para M. Asi tenemos también una relacion de equivalencia en cuanto a la compatibilidad de atlas, teniendo asi que cada atlas está contenida en un atlas maximal. Ver[3]

Ejemplo 1.5

$\mathbb{R}^n$ posee un atlas formado por una única carta: $(\mathbb{R}^n, id)$, donde id es la función identidad.

Ejemplo 1.6

S^n posee un atlas conformado por dos cartas llamado *atlas estereográfico*, es el siguiente:

$$A = \{(V,\pi),(V',\pi')\}.$$

$V = S^n\text{-}N.$

$\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n.$

$\pi(p) = (\frac{p_1}{1-p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1-p_{n+1}}).$

$V' = S^n - S.$

$\pi' : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n.$

$\pi'(p) = (\frac{p_1}{1+p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1+p_{n+1}}).$

N y S representan el polo norte y sur respectivamente. Es inmediato ver que la unión de los dominios de estas dos cartas cubren a S^n. Ahora $(\pi' \circ \pi^{-1}) = \dfrac{x}{|x|^2}$, $(\pi \circ \pi'^{-1}) = \dfrac{x}{|x|^2}$, son difeomorfismos.

Definición 1.4

Diremos que un atlas A sobre M satisface la *condición de numerabilidad* si ésta consiste de una cantidad finita o numerable de cartas.

Satisface la *condición de Hausdorff* si para cualquier par de puntos $a, b \in M$ existen cartas (U, X) y (V, Y) cuyos dominios son disjuntos conteniendo estos puntos, es decir, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.5

Un conjunto provisto de un atlas maximal $A_{max} = (U_\alpha, X_\alpha)$; donde

$$X_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

satisfaciendo la condición de numerabilidad y Hausdorff se denomina *variedad diferenciable n- dimensional*.

En casos sencillos, las dos últimas condiciones se no serán chequeadas.

Observaciones 1.1

Claro está que cualquier atlas para una variedad M está contenida en un único atlas maximal, Luego cuando se escriba (M,A), se indicará que A es un atlas diferenciable sobre M.

Observaciones 1.2

Sea (M,A) una variedad diferenciabe donde $A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$, entonces A determina una estructura topológica sobre el conjunto M. De hecho la topología esta conformada por todos los conjuntos de la forma $X_\alpha^{-1}(V)$ donde V es un subconjunto abierto básico de $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in X_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ mostremos que $X_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ es por si mismo un conjunto básico, sabemos que la función

$$X_\alpha \circ X_\beta^{-1} \quad : \quad X_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \longrightarrow \quad X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es un difeomorfismo, entonces $(X_\alpha \circ X_\beta^{-1})(W)$ es un subconjunto abierto de $X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, y asi subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Ahora

$$X_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W) = X_\alpha^{-1}(V \cap (X_\alpha \circ x_\beta^{-1})(W).$$

Como $X_\alpha^{-1}(V \cap (X_\alpha \circ x_\beta^{-1})(W))$ es abierto básico, entonces $X_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ también es un abierto básico asi tenemos definida la topologia mencionada.

Veamos a continuación algunos ejemplos clásicos de Variedades diferenciales, unas geométricas, otras inducidas por términos de álgebra.

Ejemplo 1.6

El hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$, posee un atlas conformado por cuatro cartas, el mostrado a continuación, $A = \{(U_\pm, p_{zy}), (V_\pm, p_{zx})\}$, donde

$$U_\pm = \{(x,y,z)/x = \pm\sqrt{1+z^2-y^2}, \pm x > 0\}.$$

$$V_{\pm} = \{(x,y,z)/y = \pm\sqrt{1+z^2-x^2}, \pm y > 0\}.$$

Las funciones p_{zy} y p_{zx} son las proyecciones sobre los planos zy y zx respectivamente, las cuales son inyectivas sobre conjuntos los $U_{\pm}$, $V_{\pm}$, respectivamente y tambien son compatibles. Con esta estructura el hiperboloide es una variedad 2-dimensional la cual es conexa no compacta.

Ejemplo 1.7

El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ conformado por el conjunto de todas las líneas rectas pasando por el origen 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para cada línea recta ℓ, consideremos la siguiente carta (U_ℓ, ρ_ℓ); donde el conjunto U_ℓ consiste de todas las líneas rectas haciendo un ángulo menor de 30^0 con la recta ℓ. Véase la figura. Para definir ρ_ℓ, seleccionemos una base en el n-plano $\ell^\perp$ que contiene al origen 0. Evidentemente perpendicular a ℓ y fijamos uno de los medios espacios $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\ell^\perp$; para cada $\ell' \in U_\ell$, sea $\rho\ell$ asignando las coordenadas en $\ell^\perp$ de la proyección sobre $\ell^\perp$ del vector unitario, puntiando en el medio-espacio elegido y determinado por ℓ'.

El conjunto de cartas (U_ℓ, P_ℓ) constituyen un ATLAS diferenciable, induciendo en $\mathbb{R}P^n$ una estructura de variedad n-dimensional compacta conexa. Para chequear condiciones de enumerabilidad y Hausdorff, ver [8].

Ejemplo 1.8

La *variedad de Grassmann*, denotado como $\sigma_{n,m}$, es el conjunto de todos los planos $m-$dimensional en $\mathbb{R}^n$ que pasan por del orígen de $\mathbb{R}^n$. Para construir una carta seleccionemos en $\mathbb{R}^n$ un sistema cartesiano $(x_1,...,x_n)$, lo que nos permite considerar el conjunto U de todos los planos $m-$dimensional dados en esas coordenadas y por el sistema de ecuaciones

$$x_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \quad , \quad i = 1, ..., n-m.$$

Sea la función

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m(n-m)}.$$

$$\varphi(\Pi) = a_{ij} \in \mathbb{R}^{m(n-m)}.$$

Π denota un plano en el sistema de coordenadas ,es evidente la inyectividad de φ . Cambiando el orden de las coordenadas del sistema cartesiano seleccionado se cubre a $\sigma_{n,m}$. La dependencia diferenciable de las soluciones de un sistema lineal sobre el sistema de coeficientes nos permite tratar la compatibilidad de las cartas que se consideren, de esta manera tenemos que $\sigma_{n,m}$ es una variedad $m(n-m)-$dimensional.

Ejemplo 1.9

Cualquier conjunto abierto $N \neq \emptyset$ de una variedad diferenciable M de dimensión n es una variedad de la misma dimensión que M. Note que si $A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$, es un atlas para M, entonces $\overline{A} = \{(U_\alpha \cap N, X_\alpha |_{V_\alpha})\}$, es un atlas para N.

Presentamos algunos ejemplos clásicos de variedades diferenciables relacionadas con el algebra.

Ejemplo 1.10

Sea $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las matrices con entradas reales de orden $m \times n$. Veamos que este conjunto es una variedad diferenciable de dimensión $m \times n$. En efecto, si extendemos las entradas de cada matriz en una sola fila, entonces se puede identificar $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{m \times n}$ esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{n1} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{1m} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, ..., a_{n1}, ..., a_{1m}, ..., a_{nm}).$$

Esta función nos permite verificar lo dicho anteriormente.

Ejemplo 1.11

Consideremos el grupo lineal general formado por todas las matrices reales cuadradas de orden $n \times n$ con determinante no nulo, el cual es denotado como $Gl(n,\mathbb{R})$. Este conjunto es una variedad diferenciable de orden n^2 lo cual es sustentado notando que $Gl(n,\mathbb{R}) = (det)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$; al ser la función determinante continua se tiene que este es un subconjunto abierto de $\mathbb{M}(n \times n,\mathbb{R})$. Lo que nos permite dotarle de la estructura diferenciable del ejemplo anterior, como lo hecho en el caso general del ejemplo 1.9.

Ejemplo 1.12

Tomese en cuenta el conjunto de matrices de orden $m \times n$ de rango máximo. Sea $m < n$ y denotemos como $\mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$, al subconjunto de las matrices en $\mathbb{M}(m \times n,\mathbb{R})$ de rango m. Sea $A \in \mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$, luego el rango de A es m, asi que A posee algún menor no singular de orden $m \times m$. Pero la función determinante es continua, el determinante de este menor es no nulo en algún entorno de A en $\mathbb{M}(m \times n,\mathbb{R})$ y por tanto en $\mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$, es decir A es un punto interior el cual es arbitrario en $\mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$, lo que hace de $\mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$ un subconjunto abierto de $\mathbb{M}(m \times n,\mathbb{R})$.

Como en el ejemplo anterior concluimos que $\mathbb{M}_m(n \times n,\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable.

Capítulo 2

$\mathbb{R}$-Álgebras y $\mathbb{R}$-Puntos

2.1. $\mathbb{R}$-álgebras

Daremos detalles de la siguiente pregunta.

Dada una $\mathbb{R}$-álgebra F como encontrar un conjunto (Variedad Diferenciable) M, cuya $\mathbb{R}$-álgebra de funciones (diferenciables) pueda ser identificada con F.

F ha de ser una álgebra conmutativa, asociativa y con unidad sobre $\mathbb{R}$. Todos los homomorfismos de $\mathbb{R}$-álgebras $\alpha : F_1 \longrightarrow F_2$,los asumiremos unitarios, esto es, que envían la unidad de F_1 en la unidad de F_2.

Aspiramos que los elementos de F sean llamados "funciones", no son realmente funciones. Estos son objetos de naturaleza abstracta no específica. Nos encaminamos a volver esos objetos en funciones reales sobre una variedad , y para ello debemos imponer ciertas condiciones sobre el $\mathbb{R}$-álgebra F.

Algunas de estas condiciones son que F ha de ser geométrica condicion principal, completa y diferenciable.

Presentamos el siguiente ejemplo ilustrando como comenzo de nuestro itinerario.

Ejemplo 2.1.1.

Suponga que F es la $\mathbb{R}$ - álgebra de todas las sucesiones infinitas de números reales $\{a_i\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$, tal que $a_i = 0$, pero para una cantidad finita de estos índices $a_i \neq 0$.

Las operaciones de suma, multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ están definidas término a término como sigue:

$\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}$.

$\lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}$.

El producto $\{c_i\}$ de dos sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ está definido como sigue:

$$c_i = \sum_{k+l} a_k b_l.$$

Consideremos la siguiente asignación.

$$\{a_i\} \mapsto \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

Es claro que esta suma es finita en vista de la naturaleza de $\{a_i\}$. Esta asignación induce un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ - álgebras, sea tal isomorfismo φ, donde $\varphi : F \to \mathbb{R}_{[x]}$. $\mathbb{R}_{[x]}$ es la $\mathbb{R}$ - álgebra de polinomios en x. Específicamente tenemos.

$$\varphi(\{a_0, a_1, a_2, ...\}) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

Asi cualquier sucesión $\{a_i\} \in F$ puede ser vista como la función sobre $M = \mathbb{R}$ dada por $a \mapsto \sum_{i \geq 0} a_i x^i$. Asi el conjunto M buscado es $\mathbb{R}$ y nuestra álgebra es subconjunto del álgebra $C^\infty(\mathbb{R})$.

Dada una $\mathbb{R}-$álgebra F denotemos por $M = |F|$ el conjunto de todos los homomorfismos de F sobre $\mathbb{R}$.

Los elementos de M algunas veces serán llamados $\mathbb{R}$ - puntos para la álgebra F (los cuales conformarán nuestra futura variedad); el espacio dual de $\mathbb{R}$ - puntos o el espacio dual de la álgebra F lo denotaremos por $\mid F \mid$, donde se definira una topología.

Por otro lado el siguiente conjunto

$$\widetilde{F} = \{\widetilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R} / \widetilde{f}(x) = x(f)\},$$

tiene una estructura natural de $\mathbb{R}$ - álgebra dada por las siguientes operaciones

$$(\widetilde{f} + \widetilde{g})(x) = \widetilde{f}(x) + \widetilde{g}(x) = x(f) + x(g).$$

$$(\widetilde{f}\widetilde{g})(x) = \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x) = x(f)x(g).$$

$$(\lambda\widetilde{f})(x) = \lambda\widetilde{f}(x) = \lambda x(f), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Existe una función naturalτ la cual es un homomorfismo.

$$\begin{aligned} \tau : F &\longrightarrow \quad \widetilde{F}. \\ f \quad &\longrightarrow \quad \widetilde{f}. \end{aligned}$$

Sean $f, g \in F$ y tomemos $x \in M$. Luego.

$$(\widetilde{f+g})(x) = x(f+g) = x(f) + x(g) = \widetilde{f}(x) + \widetilde{g}(x) = (\widetilde{f} + \widetilde{g})(x).$$

$$(\widetilde{fg})(x) = x(fg) = x(f)x(g) = \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x).$$

Por lo tanto

$$\tau(f+g)(x) = \tau(f)(x) + \tau(g)(x).$$

$$\tau(fg)(x) = \tau(f)(x)\tau(g)(x).$$

De manera análoga se verifica que $\tau(\lambda f)(x) = \lambda\tau(f)(x)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esto nos asegura que τ es un homomorfismo,obviamente es sobreyectivo. No siempre inyectivo, consideremos el siguiente ejemplo justificando esto ultimo .

Ejemplo 2.1.2.

Supongamos que F es la $\mathbb{R}$- álgebra isomorfa (como espacio lineal) al plano

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$$

con el producto definido por:

$$(x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

El espacio dual de esta álgebra F, M=$\mid F \mid$ está constituído por un único punto. Procedamos a mostrar esto.

Note que el elemento $(1,0)$ es la unidad del álgebra F. Además cualquier elemento (x,y) en F tiene un inverso si $x \neq 0$ el cual denotaremos por $(x,y)^{-1}$ y es $(x,y)^{-1}$=$(x^{-1}, -yx^{-2})$. F es una $\mathbb{R}$- álgebra en particular es un anillo no nulo.

El único ideal de F diferentes de los ideales triviales es $I = \{(0,y)/y \in \mathbb{R}\}$, en efecto.

Sea J otro ideal tal que $J \neq F$, $J \neq \{0\}$, suponemos que $J \neq I$, Luego existe un par $(x,y) \in J$ tal que $(x,y) \notin I$. Esto nos dice que $x \neq 0$, así $(x,y).(x^{-1}, -y.x^{-2}) = (1,0)$ y por definición de ideal $(1,0) \in J$, lo que implica que $J = F$. $(\rightarrow\leftarrow)$

Esto nos dice que $J \subseteq I$, pero multiplicando por $\left(x_2, \dfrac{x_2}{y}\right), x_2 \in \mathbb{R}$, al par $(0,y) \in J$, y tomando en cuenta la definición de ideal concluimos que $J = I$. Por lo tanto I es único.

Definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \Theta: \quad & F|_I \rightarrow \mathbb{R}, \\ & [(x,y)] \rightarrow x. \end{aligned}$$

Θ es un isomorfismo.

La función cociente

$$\begin{aligned} &q: F \rightarrow F/I := \mathbb{R}, \\ &(x,y) \rightarrow [(x,y)] :\rightarrow x. \end{aligned}$$

Es el único homomorfismo sobreyectivo de F sobre $\mathbb{R}$. En efecto, si $\Pi : F \to \mathbb{R}$, es otro homomorfismo no nulo, entonces $ker(\Pi) = I$, pues $ker(\Pi)$, es un ideal y si $(x,y) \in ker(\Pi)$ y $(x,y) \notin I$ entonces $x \neq 0$. Así $1 = (x,y).(x^{-1}, -yx^{-2})$, lo que implica que $1 = \Pi(x,y).\Pi(x^{-1}, -yx^{-2}) = 0.\Pi(x^{-1}, -yx^{-2}).(\to\leftarrow)$

Sea $(x,y) \in F$, luego así

$$\begin{aligned}
(x,y) &= (x,0) + (0,y), \\
\Pi(x,y) &= \Pi(x,0) + \Pi(0,y) \\
&= x\Pi(1,0) + \Pi(0,y) \\
&= x \cdot 1 + 0 = x = q(x,y).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\Pi = q$ y entonces que $M = \{q\}$, de esta forma $\widetilde{F} = \{\widetilde{f} : M \to \mathbb{R} / \widetilde{f}(q) = q(\widetilde{f}) = q(x,y) = x\}$, *y* $\widetilde{F} \approx \mathbb{R}$.

Esto nos dice que F no puede ser identificada con $\widetilde{F}$ y que τ no siempre es inyectiva.

Teorema 2.1.1.

τ *es inyectiva* $\Longleftrightarrow$ *el ideal* $I(F) = \bigcap_{x \in M} Kerx = \{0\}$.

Demostracion

La Demostración se deduce de la siguiente implicaciones

$$\begin{aligned}
f \in ker\tau &\iff \tau(f) = 0 \\
&\iff \widetilde{f} = 0 \\
&\iff \widetilde{f}(x) = 0, \forall x \in M \\
&\iff x(f) = 0, \forall x \in M \\
&\iff f \in \bigcap_{x \in M} Kerx = I(F).
\end{aligned}$$

Luego, $Ker\ \tau = \{f \in F / \tau(f) = 0\} = \{0\} \Longleftrightarrow I(F) = \{0\}$ ■

Establecemos entonces la primera definición.

Definición 2.1.1.

*Una $\mathbb{R}$-álgebra F es llamada **geométrica** si*

$I(F) = \bigcap_{x \in |F|} Ker\ x = \{0\}$.

El álgebra F dada en el ejemplo anterior no es geométrica ya que

$$I(F) = \{(0,y)/y \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}.$$

al igual que las álgebras con espacio dual vacio.

Teorema 2.1.2.

Cualquier $\mathbb{R}$- álgebra geométrica F es isomorfa a la $\mathbb{R}$- álgebra $\widetilde{F}$ de las funciones definidas sobre el espacio dual $M = |F|$ de los $\mathbb{R}$- puntos por la regla $f(x) = x(f)$.

Observaciones 2.1.1.

Teniendo en cuenta el isomorfismo del teorema anterior identificaremos la $\mathbb{R}$- álgebra F (la cual asumiremos geométrica, a menos que se indique lo contrario) con la $\mathbb{R}$- álgebra $\widetilde{F}$ de funciones definidas sobre el espacio dual $M = |F|$.

Ejemplo 2.1.3.

El álgebra de los polinomios en varias variables $F = \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$, es geométrica, en efecto.

Sabemos que M= $|F| = \{x : F \longrightarrow \mathbb{R}/x \quad es\ \ homomorfismo\}$;

Veamos como son los elementos de M.

Consideremos el conjunto S de las sucesiones en $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$ dadas de la siguiente forma.

$$(a_i, z_i) = (a_1, (z_1, ...z_n), ..., a_n, (z_1, ...z_n)).$$

Sea φ*: S* $\longrightarrow$ *F, la siguiente asignación*

$$(a_1,(z_1,...z_n),...,a_n,(z_1,...z_n)) \xrightarrow{\varphi} a_1z_1z_2...z_n+...+a_nz_1^nz_2^n...z_n^n.$$

Por la forma como está definida φ*, resulta ser un homomorfismo biyectivo y por tanto un isomorfismo. En consecuencia,* $S \cong F$*. Luego* M *puede ser considerado de la siguiente manera*

$$M = \{x : F \longrightarrow \mathbb{R}/(x_1,...,x_n)(a_i,z_i) = a_1x_1x_2...x_n+...+a_nx_1^nx_2^n...x_n^n\},$$

es decir el conjunto de homorfismo de evaluación, sabemos que 0 $\in$ *Ker x,* $\forall x \in M$*.*
Ahora:

$$(x_1,...,x_n)(a_i,z_i) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$a_1x_1x_2...x_n+...+a_nx_1^nx_2^n...x_n^n = 0.$$

Derivando iterativamente, obtenemos que $a_i = 0, \forall i = 1,2,...,n$*, en consecuencia,* (a_i,z_i) *es la sucesión nula en* $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^n$*.*

Asi Ker x=$\{0\}$ *para todo* $x \in M$*.*

Deducimos que $\bigcap_{x\in|F|} Ker\ x = \{0\}$ *y* $F = \mathbb{R}[x_1,x_2,...,x_n]$ *es geométrica.*

Teorema 2.1.3.

Para una $\mathbb{R}$*- álgebra F arbitraria, se tiene que la* $\mathbb{R}$*- álgebra cociente* $F/I(F)$*, donde* $I(F) = \bigcap_{p\in|F|} Ker(p)$ *es geométrica y además se cumple que* $|F| = |F/I(F)|$*.*

Demostración:

Sea φ la siguiente función $\varphi : |F/I(F)| \longrightarrow |F|$, asignando a cada homomorfismo $b : F/I(F) \longrightarrow \mathbb{R}$, el homomorfismo $\varphi(b) = a = b \circ pr$, donde $pr : F \longrightarrow F/I(F)$ es la función cociente.

Sean b_1 y b_2 en $|F/I(F)|$, tal que $b_1 \neq b_2$. Mostremos que $\varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$.

Supongamos que $\varphi(b_1)$= $\varphi(b_2)$,entonces, $(b_1 \circ\ pr)(f) = (b_2 \circ\ pr)(f), \forall f \in |F|$.

Pero $b_1 \neq b_2$, luego existe $f_0 \in F/I(F)$, tal que, $b_1(f_0) \neq b_2(f_0)$. Ya que pr es sobreyectiva, para $f_0 \in F/I(F)$ existe $f \in F$ tal que $pr(f) = f_0$.

entonces.

$$b_1(f_0) \neq b_2(f_0) \Longrightarrow b_1(pr(f)) \neq b_2(pr(f)) \Rightarrow (b_1 \circ\ pr)(f) \neq (b_2 \circ\ pr)(f);$$

lo cual es una contradicción.

Esto nos dice que φ es inyectiva.

Sea $a \in |F|$ es claro que $I(F) \subset Ker(a)$.

Consideremos la aplicación siguiente:

$$b : F/I \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$[f] \longrightarrow b([f]) = a(f).$$

b está bien definida. En efecto.

Sea $g \in [f]$, luego $[g] = [f]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
[g] = [f] &\Longrightarrow g + I(F) = f + I(F) \\
&\Longrightarrow g - f \in I(F) \subset Ker(a) \\
&\Longrightarrow a(g - f) = 0 \\
&\Longrightarrow a(g) - a(f) = 0 \\
&\Longrightarrow a(g) = a(f) \\
&\Longrightarrow b[g] = b[f].
\end{aligned}$$

Al ser pr sobreyectiva, dado $[f] \in F/I(F)$, existe $f \in F$, tal que $pr(f) = [f]$, por otro lado.

$$\begin{aligned}\varphi(b)(f+g) &= (b\circ pr)(f+g)\\ &= b([f+g])\\ &= b([f]+[g]).\end{aligned}$$

Pero $\varphi(b)(f+g)=\varphi(b)(f)+\varphi(b)(g)=b([f])+b([g])$,luego $b([f]+[g])=b([f])+b([g])$, deducimos que $b\in|F/I(F)|$, y además $\varphi(b)=a$.

Luego tenemos que φ es sobreyectiva , concluimos que $|F|\cong|F/I(F)|$.

Supongamos ahora que $b\in|F/I(F)|$, $a=\varphi(b)=b\circ pr$. Entonces $Ker(b)=Ker(a)/I(F)$. En efecto

$$\begin{aligned}[f]\in Ker(b) &\iff b([f])=0\\ &\iff b(pr(f))=0\\ &\iff a(f)=0\\ &\iff f\in Ker(a)\\ &\iff [f]\in Ker(a)/I(F). \quad \text{“}[f]=f+I(F).\text{”}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}I(F/I(F)) &= \bigcap_{b\in|F/I(F)|} Ker(b)\\ &= \bigcap_{a\in|F|}(Ker(a)/I(F))\\ &= (\bigcap_{a\in|F|} Ker(a))/I(F))\\ &= I(F)/I(F)=\{0\}.\end{aligned}$$

Por tanto $F/I(F)$ es geométrica lo que finaliza la demostración. ■

Introducimos ahora una topología en M dada por los conjuntos abiertos básicos de la forma $f^{-1}(V)$ donde $V \subset \mathbb{R}$ es abierto y $f \in F$, puesto que F ha sido identificada con el álgebra de funciones defidas sobre M a valores en $\mathbb{R}$ esta topologia tiene sentido y es la topología en M más débil para la cual todas las funciones en F son contínuas.

Supongamos que x e y son dos $\mathbb{R}$- puntos distintos en $M = |F|$. Luego existe una función $f \in F$ para la cual se tiene que $x(f) \neq y(f)$.

Al ser F geométrica entonces $f(x) \neq f(y)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) < f(y)$. Entonces los conjuntos $f^{-1}[(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2})]$, $f^{-1}[(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)]$ son vecindades disjuntas de x e y respectivamente , lo que hace de M un espacio de Hausdorff por tanto la topología introducida en M es de Hausdorff.

Observación 2.1.1.

Sea una $\mathbb{R}$- álgebra F_0 de funciones definidas sobre el conjunto M_0, es decir

$$F_0 = \{f : M_0 \longrightarrow \mathbb{R} / \quad f \quad \textit{es función} \quad \}.$$

Existe un homomorfismo natural de evaluación $\theta : M_0 \longrightarrow |F_0|$ como sigue

$$\theta : M_0 \longrightarrow |F_0|.$$
$$a \longrightarrow (f \longrightarrow f(a)).$$

Tomemos $f \in F_0$ y supongamos que está definida sobre $|F_0|$ y que $f(x) = 0$, para cada $x \in \theta(M_0) \subset |F_0|$. Entonces f es el cero de F_0,probemos esto, sea $g \in F_0$ y $a \in M_0$; sabemos que $(g+f)(a) = g(a) + f(a)$.

Ahora bien, estudiaremos el término $f(a)$.

Si $a \in M_0$, entonces $\theta(a) \in |F_0|$, sabemos que $f \in F_0$ puede ser considerado como una *función definida sobre* $|F_0|$, *osea* , f *puede ser vista como una función perteneciente* $\widetilde{F_0}$ *donde*

$$\widetilde{F_0} = \{\widetilde{f} : |F_0| \longrightarrow \mathbb{R}/\widetilde{f}(x) = x(f), f \in F_0\}.$$

En particular para $\theta(a) \in |F_0|$ *tenemos que:* $\widetilde{f}(\theta(a)) = \theta(a)(f) = f(a)$.

Así $(h+f)(a) = h(a) + \widetilde{f}(\theta(a))$.

Pero $f(x) = 0$ *para cada* $x \in \theta(M_0) \subset |F_0|$. *Así* $(h+f)(a) = h(a)$.

Por tanto, $f \equiv 0$ *en* F_0.

Una $\mathbb{R}$ *- álgebra de este tipo* F_0 *siempre es geométrica pues notemos lo siguiente.*

$$\begin{aligned} o \in \bigcap_{x \in |F_0|} Ker(x) &\Longrightarrow o \in Ker(x), \forall x \in |F_0| \\ &\Longrightarrow x(o) = 0, \forall x \in |F_0| \\ &\Longrightarrow \widetilde{o}(x) = 0, \forall x \in |F_0|. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{o}(x) = 0, \forall x \in |F_0|$, *entonces en particular se tiene que* $\widetilde{o}(x) = 0, \forall x \in \theta(M_0)$. *luego se tiene que* $o \equiv 0$. *Como* o *es arbitraria se tiene que* $\bigcap_{x \in |F_0|} Ker(x) = \{0\}$, *por lo que* F_0 *es geométrica.*

La observacion anterior justifica el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4.

Si F_0 *es una subálgebra de la* $\mathbb{R}$*- álgebra de funciones continuas sobre el espacio topológico* M_0, *entonces la función* $\theta : M_0 \longrightarrow |F_0|$, $a \longmapsto (f \longmapsto f(a))$, *es continua.*

Demostración

Por hipótesis, F_0 es una subálgebra de la $\mathbb{R}$- álgebra de funciones continuas sobre el espacio topológico M_0, es decir

$$F_0 \subseteq \widetilde{F_0} = \{ f : M_0 \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es continua}\}.$$

Supongamos que $U = f^{-1}(V)$ es un abierto básico en $|F_0|$. Entonces por definición, U consiste de todos los homomorfismos definidos sobre F_0 a valores en $\mathbb{R}$ que asignan a la función fija $f \in F_0$ un elemento del conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}$.

Ahora

$$\theta^{-1}(U) = \{a \in M_0 \ / \ \theta(a)(f) = f(a) \in \ V\},$$

el cual es abierto en M_0. Deducimos que θ es continua.

Ejemplo 2.1.4.

Sea el $\mathbb{R}$- álgebra de polinomios en n variables, $F = \mathbb{R}[x_1,...,x_n]$. Todo homomorfismo $a : F \longrightarrow \mathbb{R}$, está determinado por el vector $(\lambda_1,...,\lambda_n)$, donde $\lambda_i = a(x_i)$ debido a que

$$\begin{aligned} a(\sum_{k_1,...,k_n} c_{k_1...k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n}) &= \sum_{k_1,...,k_n} c_{k_1...k_n}(a(x_1))^{k_1}...(a(x_n))^{k_n} \\ &= \sum_{k_1,...,k_n} c_{k_1...k_n}\lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n}, \end{aligned}$$

la función

$$F \ni \sum_{k_1,...,k_n} c_{k_1...k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n} \longmapsto \sum_{k_1,...,k_n} c_{k_1...k_n}\lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n} \in \mathbb{R},$$

es un homomorfismo el de evaluación de la álgebra F a $\mathbb{R}$ para todo $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Asi podemos identificar el espacio dual $|F|$ con $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_1,...,\lambda_n)\}$.

Afirmación

La topología definida en $|F|$ coincide con la topología usual de $\mathbb{R}^n$ demostremos esto.

Los conjuntos $p^{-1}(V)$ donde p es un polinomio y $V \subset \mathbb{R}$ es abierto, son abiertos en $\mathbb{R}^n = |F| = M$ ya que por ser p un polinomio, es una función continua.

Más aún, una bola de radio r con centro $(b_1,b_2,...,b_n)$ en $\mathbb{R}^n = |F|$ es de la forma $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, donde f es la función siguiente.

$$f(x_1,...,x_n) = r^2 - \sum_{i=1}^{n}(b_i - x_i)^2.$$

Note que f es un polinomio.

$$\begin{aligned} x \in B(r,b) \subset \mathbb{R}^n &\implies \| x-b \|^2 < r^2 \\ &\implies r^2 - \| x-b \|^2 > 0 \\ &\implies f(x) > 0. \end{aligned}$$

Es decir, $f(B(r,b)) \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. Luego por la topología definida en $|F|$ tenemos que $f^{-1}(f(B(r,b)))$ es un abierto en $\mathbb{R}^n = |F|$.

Ejemplo 2.1.5.

Sea la $\mathbb{R}$- álgebra $F = C^\infty(U)$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Consideremos la función

$$\theta : U \longrightarrow |F|.$$
$$x \longrightarrow (f \longrightarrow f(x)).$$

Demostramos que θ es un homeomorfismo asi $|C^\infty(U)| \cong U$.

1) θ es inyectiva.

$$\begin{aligned} \theta(x_1) = \theta(x_2) &\implies \theta(x_1)f = \theta(x_2)f \ ,\forall f \in F \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) \ ,\forall f \in F \\ &\implies x_1(f) = x_2(f) \ ,\forall f \in F \\ &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Es facil ver que F es geométrica.

2) θ es sobreyectiva.

Sea p en $|F|$ un homomorfismo. Existe una función diferenciable $f_c \in C^\infty(U)$ cuyas superficies de nivel son compactas. Esto es $f_c^{-1}(\lambda)$ es compacta ,$\lambda \in \mathbb{R}$, también ocurre para $\lambda = p(f_c)$, luego $L = f_c^{-1}(\lambda)$ es compacta.

Supongamos que p no es correspondido por un punto $a \in U$ esto es $\theta(a) \neq p$.

Asi para cada $a \in U$ existe $f_a \in F$ tal que $\theta(a)(f_a) \neq p(f_a)$, es decir, $f_a(a) \neq p(f_a)$.

Ahora bien, consideremos los siguientes conjuntos:

$$U_a = \{x \in U / f_a(x) \neq p(f_a)\}, \quad a \in L.$$

Notemos que U_a es no vacío ya que $a \in U_a$. Además estos U_a constituyen un cubrimiento abierto para L y como L es compacto podemos escoger un subcubrimiento finito $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$ para L.

Consideremos la siguiente función:

$$g = (f_c - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2.$$

Esta función g es diferenciable sobre U por ser suma de funciones diferenciables sobre U.

Además g no se anula sobre sobre U.Pues si $a \in U \setminus L$, entonces a no pertenece al conjunto $L = f_c^{-1}(\lambda)$,por lo que $f_c(a) \neq \lambda$, es decir, $f_c(a) \neq p(f_c)$.

Así podemos considerar que $\frac{1}{g} \in F$.

Como p es un homomorfismo unitario de $\mathbb{R}$- álgebras tenemos lo siguiente

$$1 = p(g.\frac{1}{g}) = p(g).p(\frac{1}{g}).$$

Por otra parte

$$p(g) = (p(f_c) - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m} (p(f_{a_i}) - p(f_{a_i}))^2 = 0$$

Lo cual genera un absurdo. Luego θ es sobreyectiva.

$$\theta^{-1} : |F| \longrightarrow U.$$

es continua. En efecto

Sea $\mathcal{W}$ un abierto en U, existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathcal{W}$, esto es, $\mathcal{W} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Pero $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ es abierto. Así $\mathcal{W}$ es un abierto en la topología de $|F|$. Asi, θ^{-1} es continua concluimos que θ es un homeomorfismo,por lo tanto $|C^\infty(U)| \cong \mathbb{R}^n$.

En particular $|C^\infty(\mathbb{R}^n)| \approx \mathbb{R}^n$. ■

Ejemplo 2.1.6.

Supongamos que F es la $\mathbb{R}$- álgebra constituída por todas funciones diferenciables de período 1 sobre $\mathbb{R}$. Entonces un punto $a \in \mathbb{R}$ determina el homomorfismo

$$F \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$f \longmapsto f(a).$$

Pero puntos diferentes pueden originar el mismo homomorfismo. Esto ocurre si y solo si la distancia entre los puntos es un entero.

En verdad es por el tipo de álgebra F que esto ocurre.

Si $p : F \longrightarrow \mathbb{R}$, no está determinado por un punto a en $\mathbb{R}$, entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe una función $f_a \in F$ tal que $p(f_a) \neq f_a(a)$. Consideremos un cubrimiento abierto

$$U_a = \{x \in \mathbb{R} / p(f_a) \neq f_a(x)\}, x \in [0,1],$$

del intervalo $[0,1]$, el cual es compacto podemos escoger un subcubrimiento finito $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$ y definimos la función:

$$g = \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2.$$

Claramente esta función no se anula sobre $[0,1]$, y por la periodicidad tampoco se anula sobre $\mathbb{R}$.

De aquí $\dfrac{1}{g}$ es un elemento de F razonando como antes se produce una contradicción.

Luego cualquier homomorfismo $p : F \longrightarrow \mathbb{R}$, está determinado por puntos de $\mathbb{R}$.

En nuestro caso $|F|$ puede ser identificado con el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Así las funciones periódicas diferenciables de período 1 sobre $\mathbb{R}$ son en realidad funciones vistas sobre el círculo S^1.

2.2. La Función Dual

Supongamos ahora que F_1 y F_2 son dos $\mathbb{R}$- álgebras geométricas y $\varphi : F_1 \longrightarrow F_2$, es un homomorfismo entre estas $\mathbb{R}$- álgebras, definamos la siguiente función, llamada función dual la cual es continua

$$|\varphi| : |F_2| \longrightarrow |F_1|,$$

donde $|\varphi|(x) = x \circ \varphi$. Consideremos un abierto básico $U = f^{-1}(V) \subset |F_1|$, $f \in F_1, V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, asi U es de la forma:

$$U = \{x \in |F_1| \; / f(x) \in V\}.$$

Por otra parte la imágen inversa de U mediante $|\varphi|$ es

$$\begin{aligned} |\varphi|^{-1}(U) &= \{y \in |F_2| \; / |\varphi|(y) \in U\} \\ &= \{y \in |F_2| \; / f(|\varphi|(y)) \in V\}. \end{aligned}$$

F_1 es geométrica luego

$$\begin{aligned} f(|\varphi|(y)) &= f(y \circ \varphi) \\ &= (y \circ \varphi)(f) \\ &= y(\varphi(f)). \end{aligned}$$

Como $\varphi(f) \in F_2$, $y \in |F_2|$, entonces al ser F_2 geométrica $y(\varphi(f)) = (\varphi(f))(y)$. Entonces, $f(|\varphi|(y)) = (\varphi(f))(y)$. Esto nos permite concluir que:

$$|\varphi|^{-1}(U) = \{y \in |F_2| \,/ (\varphi(f))(y) \in V\}.$$

Es un abierto de $|F_2|$ puesto que $\varphi(f) \in F_2$, y así $|\varphi|$ es contínua.

Mantengamos presente las siguientes igualdades:

$$f(|\varphi|(y)) = f(y \circ \varphi) = (y \circ \varphi)(f) = y(\varphi(f)) = \varphi(f)(y).....\star\star.$$

Por otro lado si $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow F_2$ y $\varphi_2 : F_2 \longrightarrow F_3$, son homomorfismos de $\mathbb{R}$-álgebras geométricas, entonces $|\varphi_2 \circ \varphi_1| = |\varphi_1| \circ |\varphi_2|$ y $|id_{F_i}| = id_{|F_i|}$. En efecto, sabemos que $|\varphi_1| \circ |\varphi_2| : |F_3| \longrightarrow |F_1|$.Sea $x \in |F_3|$ entonces:

$$\begin{aligned} (|\varphi_1| \circ |\varphi_2|)(x) &= |\varphi_1|(|\varphi_2|(x)) \\ &= |\varphi_1|(x \circ \varphi_2) \\ &= (x \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 \\ &= x \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) \\ &= |\varphi_2 \circ \varphi_1|(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|\varphi^{-1}| = |\varphi^{-1}|$, y tomando $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$, se demuestra también que $|id_{F_i}| = id_{|F_i|}$.

Notemos que si $\varphi : F_1 \longrightarrow F_2$, es invertible, entonces se cumple que.

$$|\varphi^{-1}| = |\varphi|^{-1}.$$

En particular Si $\varphi : F_1 \longrightarrow F_2$, es un isomorfismo, entonces $|\varphi|$ es un homeomorfismo.

Observaciones 2.2.1.

Esta función dual es esencial en la definición de lo que es una función diferenciable lo que veremos en el capitulo 3.

2.3. El Álgebra Restricción

Hemos estado considerando una $\mathbb{R}$- álgebra F, y hemos construído el espacio topológico $M = |F|$ de Hausdorff, para el cual F es la subálgebra del álgebra de todas las funciones continuas. Vemos que se necesita postular a F localmente isomorfa a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es decir hacer para M, un cubrimiento "$M = \bigcup U_i$" de manera que F sea isomorfa localmente a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, esto es $C^\infty(\mathbb{R}^n) \approx F|_{U_i}$, y nuestra tarea de definir una variedad en términos de su $\mathbb{R}$- álgebra de funciones diferenciables estaría lograda. Sin embargo esto no es tan inmediato como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1.

Sea $F = C^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales positivos. Consideremos la función $f(x) = x^{-1}$ definida sobre $\mathbb{R}_+$. Es claro que esta función es diferenciable sobre $\mathbb{R}^+$, sin embargo no es la restricción de una función $f \in F = C^\infty(\mathbb{R})$.

Establecemos siguiente definición, la cual nos encamina a lograr la tarea anteriormente.

Definición 2.3.1.

Supongamos que F es una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |F|$, es cualquier subconjunto del espacio dual. La restricción $F|_A$, de F al conjunto A, es el conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que para cualquier $a \in A$ existe una vecindad $U \subset A$ del punto a y un elemento $\overline{f} \in F$, tales que la restricción (en el contexto común) de f a U

coincide con la restricción de $\overline{f}$ (vista como función sobre $|F|$) a U.

Debido a que F es una $\mathbb{R}$- álgebra, entonces $F|_A$ hereda también esa estructura.

Ejemplo 2.3.2.

Consideremos nuevamente $F = C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. Afirmamos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$, es un elemento de $C^{\infty}(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$, en efecto, dado cualquier número real $a > 0$, existe una función $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, tal que $\alpha(x) = 0$, para $x \in (-\infty, \frac{a}{3}]$, y $\alpha(x) = 1$, para $x \in [\frac{2a}{3}, +\infty)$.

Sea $\overline{f} \in F$, $\overline{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\overline{f}(x) = 0, \quad si \quad x \in (-\infty, 0]$$

$$\overline{f}(x) = \frac{\alpha(x)}{x}, \quad si \quad x \in (0, +\infty).$$

Observemos que $\overline{f}$ es diferenciable y coincide con la función $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, en el entorno $U = (\frac{2a}{3}, \frac{4a}{3})$, ya que:

- *Si $w \in (\frac{2a}{3}, a)$, entonces*

$\overline{f}(w) = \frac{\alpha(w)}{w} = \frac{1}{w} = f(w)$

- *Si $w \in [a, \frac{4a}{3})$, entonces*

$\overline{f}(w) = \frac{\alpha(w)}{w} = \frac{1}{w} = f(w)$.

De manera análoga podemos demostrar que cualquier función definida sobre $\mathbb{R}_+$ pertenece a $C^{\infty}(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$, de esta manera obtendremos que $C^{\infty}(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+} = C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$.

Generalicemos un poco con el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1.

Sea $F = C^{\infty}(U)$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y no vacío. Si V es abierto en $U = |F|$, entonces $F|_V = C^{\infty}(V)$.

Demostración

Podemos identificar U con $|F|$,sean $f \in C^{\infty}(V)$, $x \in V$,existe un entorno $\mathcal{W} \subset V$ y una función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$. Por hipótesis tenemos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y como $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ podemos considerar $g|_U$. Sea $\overline{g} = g|_U$, naturalmente $\overline{g} \in C^{\infty}(U)$.

Ahora bien

$$\mathcal{W} \subset V \subset U \Rightarrow \mathcal{W} \subset U.$$

En consecuencia $\overline{g}|_{\mathcal{W}} = (g|_U)|_{\mathcal{W}} = g|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$, luego $f \in C^{\infty}(U)|_V$, por lo que $C^{\infty}(V) \subset C^{\infty}(U)|_V$. La otra inclusion se sigue de la definicion del álgebra. ∎

En general cuando F es una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |F|$, podemos asignar a cada $f \in F$ su restricción a A, obteniendo que $f|_A \in F|_A$.

Originando asi un homomorfismo llamado *homomorfismo restricción*:

$$\rho_A : F \longrightarrow F|_A.$$
$$f \longrightarrow f|_A.$$

Teorema 2.3.2.

Supongamos que $i : F_1 \longrightarrow F_2$, *es un isomorfismo de dos* $\mathbb{R}$- *álgebras geométricas,* $A_2 \subset |F_2|$, *y* $A_1 = |i|(A_2)$. *Entonces la función*

$$\psi : F_1 \longrightarrow F_2.$$
$$f \longrightarrow f(|i||_{A_2}).$$

es un isomorfismo.

Demostración.

φ está bien definida,veamos esto.

Notemos que para $f \in F|_{A_1}$, $f : A_1 \to \mathbb{R}$, $\quad f(|i||_{A_2}) : A_2 \to \mathbb{R}$.

Existe una vecindad $U_{\widehat{x}} \subset A_1$, y una función $\widehat{f_1} \in F_1$, de manera que $\widehat{f}|_{U_{\widehat{x}}} = f|_{U_{\widehat{x}}}$.

Al ser $A_1 = |i|(A_2)$, existe una vecindad $U_x \subseteq A_2$ del punto $x = |i|^{-1}(\widehat{x})$, tal que $|i|(U_x) = U_{\widehat{x}}$, así entonces $\widehat{f}|_{|i|(U_x)} = f|_{|i|(U_x)} \Rightarrow (\widehat{f} \circ |i|)|_{U_x} = (f \circ |i|)|_{U_x}$.

Al ser $U_x \subset A_2$ tenemos que $(\widehat{f} \circ |i|)|_{U_x} = (f \circ |i||_{A_2})|_{U_x}$. $\quad *$

Por otro lado $\widehat{f} \circ |i| : |F_2| \to \mathbb{R}$, asi existe $g \in F_2$, tal que $\tau(g) = \widehat{f} \circ |i|$,esto en vista de que F_2 es geométrica y $\widehat{f} \circ |i|$ se considera una función en F_2, por la linea $*$ concluimos que $f(|i||_{A_2}) \in F_2|_{A_2}$.

Así nuestra función

$$\varphi : \quad F_1|_{A_1} \to F_2|_{A_2}.$$
$$f \to f(|i|_{|}A_2),$$

está bien definida y es inyectiva, pues dadas $f, g \in F_1|_{A_1}$ tal que $f \neq g$, entonces ha de existir $x \in A_1$, de forma que $f(x) \neq g(x)$, pero $x = |i|(y)$ con $y \in A_2$, así $f(|i|(y)) \neq g(|i|(y))$. Esto es $f(|i||_{A_2}) \neq g(|i||_{A_2|})$, lo cual implica que $\varphi(f) \neq \varphi(g)$, así φ resulta ser una función inyectiva, pero también es sobreyectiva, lo cual se verá a continuación.

$(g \circ |i|^{-1})_{|A_1} : A_1 \to \mathbb{R}$ si $g \in F_{|A_2}$, tomemos $f = (g \circ |i|^{-1})_{|A_1}$, entonces $f \in F_1|_{A_1}$; en efecto, como $g \in F_2|_{A_2}$, entonces dado $x \in A_2$ existe una vecindad de x, $U_x \subset A_2$, y una función $\widehat{g} \in F_2$, tal que $g|_{U_x} = g|_{U_x}$.

Por hipótesis tenemos que $i(F_1) = F_2$, luego existe una función $\widehat{f} \in F_1$ tal que $i(\widehat{f}) = \widehat{g}$, pero $\widehat{g}|_{U_x} = g|_{U_x}$ entonces $i(\widehat{f})|_{U_x} = g|_{U_x}$.

Si $U_x \subset A_2$, entonces $U_x = |i|^{-1}(\widehat{U}_x)$, donde $\widehat{U}_x \subset A_1$, pues $A_1 = |i|(A_2)$, luego

$$i(\widehat{f})|_{U_x} = g|_{U_x} \Rightarrow$$
$$i(\widehat{f})|_{|i|^{-1}(U_x)} = g|_{|i|^{-1}(\widetilde{U}_x)} \Rightarrow$$
$$i(\widehat{f} \circ |i|^{-1})|_{\widetilde{U}_x} = (g \circ |i|^{-1})|_{\widetilde{U}_x} \Rightarrow$$
$$(i(f) \circ |i|^{-1})|_{\widetilde{U}_x} = (g \circ |i|^{-1})|_{A_1})|_{\widetilde{U}_x} \Rightarrow \quad \text{“}\widetilde{U}_x \subset A_1\text{”}$$
$$(i(f) \circ |i|^{-1})|_{\widetilde{U}_x} = f|_{\widetilde{U}_x};$$

pero $i(\widehat{f}) \in F_2$, y $|i|^{-1} : |F_1| \to |F_2|$. Esto nos permite decir que $i(\widehat{f}) \circ |i|^{-1}$, es una función de $|F_1|$ en $\mathbb{R}$, como F_1 es geométrica, ha de existir una función $L \in F_1$ tal que $\tau(L) = i(\widehat{f}) \circ |i|^{-1}$, y la función $i(\widehat{f}) \circ |i|^{-1}$, es considerada una función en F_1.

Así concluimos que $f = g \circ |i|^{-1}|_{A_2} \in F_1|_{A_1}$, es notorio que $\varphi(f) = g$ siendo $g \in F_2|_{A_2}$ cualquiera deducimos que φ es sobreyectiva. Siendo φ obviamente lineal y biyectiva es consecuentemente un isomorfismo. ■

El caso de mayor importancia es cuando $A = |F|$, lo que nos hace considerar el homomorfismo restricción,

$$p : F \to F|_{|F|}.$$

evidentemente p es inyectiva si F es geométrica, cuando p sea sobreyectivo el álgebra F será llamada un álgebra completa.

Veamos un ejemplo de un álgebra no completa, es decir ρ no es sobreyectivo.

Ejemplo 2.3.3.

Supongamos que F es la subálgebra de la álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, conformada por todas las funciones que son menores en valor absoluto que algún polinomio. Entonces el espacio dual $|F|$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, demostremos esto.

Consideremos la función inyectiva.

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow |F|. \\ x &\longrightarrow (f \longmapsto f(x)). \end{aligned}$$

Veamos que θ es sobreyectiva, sea $p \in |F|$, es decir, $p : F \longrightarrow \mathbb{R}$, es un $\mathbb{R}$ punto, se puede elegir una función $f_c \in F$ cuyas superficies de nivel sean compactas y que $f_c \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$. Tomemos $f(x) = \|x\|^2 + 1$, al considerar $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $f^{-1}(\lambda) \cong S^n$ que es compacta, ó $f^{-1}(\lambda) = \{\emptyset\}$.

Por otra parte $f \in F$ puesto que f es un polinomio . Sea $\lambda = p(f)$, entonces en *particular $f^{-1}(\lambda) = L$ es compacta. Asumamos que $p \in |F|$ es tal que para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, $\theta(a) \neq p$. Consideramos los conjuntos siguientes.*

$$U_a = \{x \in \mathbb{R}^n / f_a(x) \neq p(f_a)\},$$

con $a \in L$, estos U_a constituyen un cubrimiento abierto para L, seleccionemos un subcubrimiento finito $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$ para L.

Consideremos la siguiente función

$$g = (f - p(f))^2 + \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2.$$

Ahora $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, puesto que es la suma de funciones de clase C^∞, $g \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y como $g(x) \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$, entonces $\dfrac{1}{g(x)} \longrightarrow o$, conforme $\|x\| \longrightarrow \infty$, por lo que $\dfrac{1}{g(x)}$ puede ser acotada por un polinomio.

Pero $\dfrac{1}{g(x)}$ es de clase C^∞, así $\dfrac{1}{g(x)} \in F$, como p es un homomorfismo unitario de $\mathbb{R}$-álgebras tenemos que

$$1 = p(1) = p(g.\frac{1}{g}) = p(g).p(\frac{1}{g}).$$

Por otra parte

$$p(g) = (p(f) - p(f))^2 + \sum_{i=1}^{m} (p(f_{a_i}) - p(f_{a_i}))^2 = 0.$$

lo cual nos produce una contradicción. asi θ es sobreyectiva.

Al igual que antes se concluye que θ es un homeomorfismo.

Asi $F|_{|F|} = F|_{C^\infty(\mathbb{R}^n)}$, coincide con el álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora en una vecindad de un punto $a \in \mathbb{R}^n$, $f = f\theta$, para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y θ una función diferenciable, nula fuera de $B_2(a)$ e igual a 1 en $B_1(a)$, claramente $f\theta \in F$, de manera que el homomorfismo $p : F \longrightarrow F|_{|F|} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, no puede ser sobreyectiva,note que la función e^x no es acotada *por un polinomio.*

Establecemos conforme a la sobreyectividad de p la siguiente definición.

Definición 2.3.2.

Una $\mathbb{R}$- álgebra F geométrica es completa si el homomorfismo restricción

$$\rho : F \longrightarrow F|_{|F|},$$

es sobreyectivo. Es decir, si cualquier función localmente coincide con elementos de F, entonces ésta es un elemento de F

Ejemplo 2.3.4.

Sea $U \subset (R^n)$, abierto consideramos

$$\rho : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)|_{|C^\infty(U)|} = C^\infty(U)|_U = C^\infty(U),$$

se tiene que este es sobreyectivo.

La $\mathbb{R}$- álgebra del ejemplo anterior no es completa.

2.4. Álgebras Cerradas

Hasta los momentos hemos obtenido que $F \cong F|_{|F|}$, si F es geométrica y completa.Consideremos Ahora la situación general y sea $A \subset |F|$. Bajo ciertas hipotesis haremos posible identificar A con $|F|_A|$, es decir

$$A \cong |F|_A|.$$

Comencemos con el siguiente teorema

Teorema 2.4.1.

Supongamos que F es una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |F|$. Entonces la función

$$\mu : A \longrightarrow |F|_A|.$$
$$a \longrightarrow (f \to f(a)).$$

Es un homomorfismo sobre un subconjunto del espacio $|F|_A|$.

Demostración

Ya que todos los elementos de F se entienden como funciones sobre el espacio dual $|F|$, entonces son funciones continuas, $F|_A$ es una subálgebra del álgebra de funciones contínuas sobre A y así por la teorema 1.1.3 tenemos que μ es continua.

Por otro lado sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, luego.

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 &\implies \exists f \in F / a_1(f) \neq a_2(f), \\ &\implies \exists f \in F / f(a_1) \neq f(a_2), \end{aligned}$$

Esto tiene sentido por ser F geométrica.

Bien sabemos que $a_1, a_2 \in A$ y $f(a_1) \neq f(a_2)$, de esta forma

$$f|_A(a_1) \neq f|_A(a_2) \Rightarrow \mu(a_1)(f|_A) \neq \mu(a_2)(f|_A) \Rightarrow \mu(a_1) \neq \mu(a_2),$$

lo que Demostración la inyectividad de μ.

Para probar que la funcion inversa $\mu^{-1} : \mu(A) \longrightarrow A$, es continua consideremos un abierto básico en A de la forma $A \cap f^{-1}(V)$, donde $V \subset \mathbb{R}$,es abierto y $f \in F$. Este abierto es mapeado sobre el conjunto $\mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V)$, el cual sabemos que es un subconjunto abierto de $\mu(A)$. Por tanto μ^{-1} es contínua y en consecuencia un homeomorfismo entre A y $\mu(A)$.

Verifiquemos la siguiente igualdad

$$\mu(A \cap f^{-1}(V)) = \mu(A) \cap (f|A)^{-1}(V).$$

Notemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
& x = \mu(a) \ \wedge \ x = (f|_a)^{-1}(V_0) \\
\Rightarrow \quad & x = \mu(a) \ \wedge \ (f|_A)(x) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & (f|_A)(\mu(a)) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & \mu(a)(f|_A) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & f|_A(a) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & f(a) = V_0, \quad \text{“}a \in A\text{”} \\
\Rightarrow \quad & a \in f^{-1}(V).
\end{aligned}$$

Así $a \in A \cap f^{-1}(V)$ y $x \in \mu(A \cap f^{-1}(V))$.

Esto nos dice que $\mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V) \subset \mu(A \cap f^{-1}(V))$, por otro lado sea $x = \mu(z)$ donde el punto $z \in A \cap f^{-1}(V)$, de esta forma:

$$\begin{aligned}
& x = \mu(z) \ \wedge \ z = f^{-1}(V_0) \\
\Rightarrow \quad & f(z) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & (f|_A)(z) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & (f|_A)(\mu(z)) = V_0 \\
\Rightarrow \quad & \mu(z) \in (f|_A)^{-1}(V).
\end{aligned}$$

Como $z \in A \cap f^{-1}(V)$, tenemos que $\mu(z) \in \mu(A)$, concluimos que
$\mu(z) \in \mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V)$, en consecuencia $\mu(A \cap f^{-1}(V)) \subset \mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V)$.

Con todo lo anterior, concluimos que

$$\mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V) = \mu(A \cap f^{-1}(V)). \qquad \blacksquare$$

Observación 2.4.1.

$$A \subset B \subset |F| \Rightarrow (F|_B)_{|A} = F|_A.$$

Podrá $\mu(A)$ coincidir con $|F_{|A}|$, en realidad se cumple para $F = C^\infty(U)$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$, es abierto, y si $A \subset |F| = U$ es también abierto, ya que por teorema 2.3.1

$$C^\infty(U)_{|V} = C^\infty(V), V \subset U.$$

y por ejemplo 2.1.5

$$\begin{aligned}\mu(V) &= |C^\infty(V)| \\ &= |C^\infty(U)_{|V}| \\ &= F|_{|V|}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(V) = |F|_V|$.

En general esto no es cierto. Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1.

Sea $F = \mathbb{R}[x]$, los polinomios en x sobre $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+ \subseteq |F| = \mathbb{R}$,el homomorfismo restricción

$$\rho : \mathbb{R}_{[x]} \to \mathbb{R}_{[x]}|_{\mathbb{R}^+},$$

es un isomorfismo, ahora la función $\mu : \mathbb{R}^+ \to \left|\mathbb{R}_{[x]}|_{\mathbb{R}^+}\right|$,es función inclusión de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R} = \left|\mathbb{R}_{[x]}\right| = |\mathbb{R}_{[x]}\,|_{\mathbb{R}^+}\,\big| \supseteq \mathbb{R}^+ = A$, por lo tanto $\mu(A) \neq |F_{|A}|$, es decir, no hay identificación.

Sea $f \in \mathbb{R}_{[x]}|_{\mathbb{R}^+}$, asi f coincide localmente con un polinomio, si $\rho(p) \neq f$ para cada $p \in \mathbb{R}_{[x]}$, existe un $x_p \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho(p)(x_p) = (x_p)(\rho(p)) \neq f(x_p)$,lo cual no puede ser, pues $f \in \mathbb{R}_{[x]}|_{\mathbb{R}^+}$ por lo tanto

$$\exists p \in \mathbb{R}_{[x]} \quad \textit{tal que} \quad \rho(p) = f.$$

¿Qué condiciones debemos tener para asegurar la biyección de

$$\mu : A \Rightarrow |F_{|A}|(a \Rightarrow (f \to f(a))?$$

Definición 2.4.1.

Una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica F es llamada cerrada con respecto a la composición diferenciable o C^∞- cerrada , si para cualquier colección finita $f_1, f_2, ..., f_k \in F$ y para cualquier función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ existe un elemento $f \in F$ tal que:

$$f(a) = g(f_1(a), ..., f_k(a)) \ , \forall a \in |F|.$$

Note que $f \in F$ está únicamente determinada ya que F es geométrica.

La función $\mu : A \longrightarrow |F|_A|$, es sobreyectiva, y por tanto un homeomorfismo para álgebras que son C^∞- cerradas donde el conjunto básico A es de la siguiente forma

$$A = \{a \in |F| \ / \alpha < h(a) < \beta\} \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}, h \in F.$$

Sabemos que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que $g \equiv 0$ en $\mathbb{R} - (\alpha, \beta)$ y $g > 0$ en (α, β).

Ya que F es C^∞- cerrada, existe $f \in F$ tal que $f(x) = g(h(a))$, para todo punto $a \in |F|$.

Asi $f(a) > 0$,esto nos dice que $f|_A$ es un elemento invertible del álgebra $F|_A$.

En verdad, supongamos que $b' \in |F|$, es la imágen de algún punto $b \in |F|_A|$, mediante la función

$$\begin{aligned} |\rho| : |F|_A| \quad &\longrightarrow |F|. \\ x \quad &\longrightarrow x \circ \rho. \end{aligned}$$

es decir $b' = |\rho|(b)$, dada $f \in F$ $b'(f) = b \circ \rho(f) = b(f|_A)$ por lo tanto$f(b') = f|_A(b)$.

Si $b' \notin A$, entonces

$$f(b') = g(h(b')) = 0 \Longrightarrow f|_A(b) = 0,$$

lo cual contradice la invertibilidad de $f|_A$. Por lo tanto $b' \in A$,deducimos que $|\rho|(|f_A|) \subset A$.

Consideremos $f \in F$,$b \in |f_A|$, entonces.

$$\begin{aligned}
(\mu \circ |\rho|)(b)(f) &= \mu(b \circ \rho)(f) \\
&= f(b \circ \rho) \\
&= (b \circ \rho)(f) \\
&= b(\rho(f)) \\
&= b(f|_A) \\
&= b(f).
\end{aligned}$$

por lo tanto $\quad \mu \circ |\rho| = I_{|F_A|}$.

Ahora Sean $a \in A$ y $f \in F_A$, entonces;

$$\begin{aligned}
(|\rho| \circ \mu)(a)(f) &= |\rho|(\mu(a)(f)) \\
&= (\mu(a) \circ \rho)(f) \\
&= \mu(a)(f|_A) \\
&= (f|_A)(a) \\
&= f(a) \\
&= a(f). \\
&\Rightarrow \quad |\rho| \circ \mu = I_A.
\end{aligned}$$

Deducimos que $\mu(A) = |F|_A|$ y así μ es sobreyectiva. Teniendo en cuenta el resultado anterior, podemos hacer una modificacion de lo siguiente. Dada una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica como obtener una álgebra C^∞-cerrada $\overline{F}$. La manera mas directa es la siguiente.

Identificar F con su correspondiente álgebra de funciones sobre $|F|$, considerar el conjunto $\overline{F}$ de funciones definidas sobre $|F|$ que pueden ser representadas en la siguiente forma

$$g(f_1,...,f_l),\ donde\ l \in \mathbb{N}, f_1,...,f_l \in F, g \in C^\infty(\mathbb{R}^l).$$

El conjunto $\overline{F}$ tiene una obvia estructura de $(\mathbb{R})$-álgebra y F es una sub-álgebra de $\overline{F}$. $\overline{F}$ es C^∞-cerrada ya que la composición de funciones diferenciables es diferenciable, $\overline{F}$ tambien es geométrica.

Denotemos la inclusion $F \subset \overline{F}$, por i_F,la cual es dada desde un álgebra de funciones sobre un conjunto, en realidad $i_F : F \longrightarrow \overline{F}$. De una R-álgebra geométrica a una C^∞-cerrada $\overline{F}$, la cual es llamada en ocasiones la C^∞-clausura de F y posee la siguiente propiedad que establecemos como una teorema.

Teorema 2.4.2.

Cualquier homomorfismo $\alpha : F \longrightarrow F'$ *de una* $\mathbb{R}$*- álgebra geométrica* F *a una* $\mathbb{R}$*-álgebra* F' *que es* C^∞*-cerrada puede ser extendido de manera única a un homomorfismo* $\overline{\alpha} : \overline{F} \longrightarrow F'$ *de su* C^∞*- clausura* $\overline{F}$.

Demostración

Asumamos que la extención $\overline{\alpha}$ existe. Esto es, $\alpha = \overline{\alpha} \circ i_F$, donde $i_F : F \longrightarrow \overline{F}$, es la inclusión natural. Asi tenemos que $|\alpha| = |i_F| \circ |\overline{\alpha}|$.

Sea $a \in |F'|$ tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}(g(f_1,...,f_l))(a)\\
&= g(f_1,...,f_l)(|\overline{\alpha}|(a))\\
&= g(i_F(f_1),...,i_F(f_l))(|\overline{\alpha}|(a)))\\
&= g(i_F(f_1)(|\overline{\alpha}|(a)),....,i_F(f_l)(|\overline{\alpha}|(a)))\\
&= g(f_1(|i_F|(|\overline{\alpha}|(a)),...,f_1(|i_F|(|\overline{\alpha}|(a)))\\
&= g(f_1,...,f_l)(|i_F|(|\overline{\alpha}|(a)))\\
&= g(f_1,...,f_l)(|\alpha|(a))\\
&= g(f_1(|\alpha|(a)),...,f_l(|\alpha|(a)))\\
&= g(\alpha(f_1(a)),...,\alpha(f_l)(a))\\
&= g(\alpha(f_1),...,\alpha(f_l))(a).
\end{aligned}$$

Como F' es geométrica, entonces $\overline{\alpha}(g(f_1,...,g(f_l))) = g(\alpha(f_1),...,\alpha(f_l))$. De esta fórmula se deduce la unicidad.

Definamos

$$\overline{\alpha}(g(f_1,...,g(f_l))) = g(\alpha(f_1),...,\alpha(f_l)).$$

Veamos que está bien definida observando lo siguiente.

$$\begin{array}{rrcl}
& g(f_1,...,f_l) & = & g'(f'_1,...,f'_l)\\
\Rightarrow & g(\alpha(f_1),...,\alpha(f_l)) & = & g(\alpha(f'_1),...,\alpha(f'_l))\\
\Rightarrow & g(\alpha(f_1),...,\alpha(f_l))(a') & = & g(\alpha(f_1)(a'),...,\alpha(f_l)(a'))\\
& & = & g(f_1(a),...,f_l(a)) \quad \textit{donde } a = |\alpha|(a')\\
& & = & g(f_1,...f_l)(a).
\end{array}$$

Ánalogamente se tiene que

$$g(\alpha(f'_1),...,\alpha(f'_l)) = g'(f'_1,...,f'_l)(a).$$

Comparando las dos fórmulas anteriores y suponiendo que $g(f_1,...,f_l) = g'(f'_1,...,f'_l)$, tenemos asi que $\overline{\alpha}$ está bien definida. ■

Definición 2.4.2.

Una $\mathbb{R}$- álgebra $\overline{F}$ geométrica y C^∞- cerrada junto con un homomorfismo $i : F \longrightarrow \overline{F}$ es llamada la envoltura diferenciable de la $\mathbb{R}$- álgebra $\overline{F}$, si para todo homomorfismo $\alpha : F \longrightarrow F'$ de F en una $\mathbb{R}$-álgebra geométrica C^∞- cerrada $\mathcal{F}'$, existe un único homomorfismo $\overline{\alpha} : \overline{F} \longrightarrow F'$ que extiende a α (es decir, $\alpha = \overline{\alpha} \circ i$). En otras palabras,bajo la suposición anterior el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} & F' \\ F \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & \\ & \overline{F} \arrow[uu, "\overline{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

Pueda ser únicamente completado en forma conmutativa.

Notemos que de el teorema anterior seguimos que la C^∞-clausura es una envoltura diferenciable de F.

Teorema 2.4.3.

La envoltura diferenciable de cualquier $\mathbb{R}$- álgebra F es única, salvo isomorfismo. Específicamente, si los pares $(i_k, \overline{F}_k)$ con $k = 1,2$ son envolturas diferenciables de F, existe un único isomorfismo $j : \overline{F}_1 \longrightarrow \overline{F}_2$ tal que $i_2 = j \circ i_1$. En otras palabras, el siguiente *diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
& \overline{F}_2 \\
\overline{F}_1 \arrow[ur, "j"] & \\
& \overline{F} \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uu, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Demostración

Notemos que para cualquier envoltura diferenciable $(i, \overline{F})$ de F tenemos que cualquier homomorfismo $\alpha : \overline{F} \longrightarrow \overline{F}$ satisfaciendo $\alpha \circ i = i$ es la identidad, $\alpha = id_F$.

Efectivamnete, de acuerdo a la definición anterior,la "solución" de la "ecuación" $\alpha \circ i = i$ es única. Pero esta ecuación tiene una solución inmediata, a saber, $id_{\overline{F}}$.

De acuerdo con la definición anterior, para (i_1, F_1), el homomorfismo $i_2 : F \longrightarrow \overline{F}_2$ puede ser representado únicamente en la forma $i_2 = j_1 \circ i_1$, donde $j_1 : \overline{F}_1 \longrightarrow \overline{F}_2$ es un homomorfismo. Similarmente, $i_1 = j_2 \circ i_2$, donde $j_2 : \overline{F}_2 \longrightarrow \overline{F}_1$ es un homomorfismo.

Entonces, $i_1 = j_2 \circ i_2 = j_2 \circ (j_1 \circ i_1) = (j_2 \circ j_1) \circ i_1$. Esto nos indica que, $j_2 \circ j_1 = id_{\overline{F}_1}$.

Similarmente $j_1 \circ j_2 = id_{\overline{F}_2}$, así que j_1 y j_2 son isomorfismos inversos uno del otro. Seleccionesmos $j = j_1$ y así establecemos el teorema. La unicidad de j se sigue de la definición 2.4.2. $\blacksquare$

Capítulo 3

Variedades y Funciones Diferenciales

3.1. Álgebras Diferenciables

En este capítulo sentaremos las bases principales para dar sentido a lo expuesto en el capítulo 4, donde se desarrollará nuestro objetivo principal, definición algebraica de los fibrados diferenciales, haciendo exposición de $\mathbb{R}$-álgebras, variedades y funciones diferenciables.

Definición 3.1.1.

Una $\mathbb{R}$-álgebra F geométrica y completa es llamada diferenciable si existe un cubrimiento finito o contable $\{U_k\}$ del espacio dual $|F|$ tal que todas las álgebras $F|_{U_k}$ son isomorfas al álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, el entero $n \geq 0$ es llamado la dimensión del álgebra F.

Lema 3.1.1.

Si una $\mathbb{R}$-álgebra geométrica F es isomorfa a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces es C^∞-cerrada.

Demostración

Mostremos que si $i : F \to \sigma$ es un isomorfismo de álgebras geométricas y F es

C^∞-cerrada también lo es σ.

En efecto,

Sean $f_1,...,f_n \in F$, luego existe una función $f_o \in F$ tal que

$$\forall (g,a) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \times |F| \quad f_o(a) = g(f_1(a),...,f_n(a)),$$

como F es geométrica suponemos que $f_o = g(f_1,...,f_n)$; aplicando i a esta función $f_o \in F$, y evaluamos en $a \in |\sigma|$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
i(f_o)(a) &= i(g(f_1,...,f_n))(a) \Rightarrow \\
i(f_o)(a) &= g(f_1,...,f_n)(|i|(a)) \\
&= g(f_1(|i|(a)),...,f_n(|i|(a))) \\
&= g(|i|(a)(f_1),...,|i|(a)(f_n)) \\
&= g(a \circ i(f_1),...,a \circ i(f_n)) \\
&= g(i(f_1)(a),...,i(f_n)(a)) \\
&= g(i(f_1),...,i(f_n))(a) \\
&\Rightarrow \quad i(f_o)(a) = g(i(f_1),...,i(f_n))(a).
\end{aligned}$$

Como σ es geométrica suponemos que $i(f_o) = g(i(f_1),...,i(f_n))$. En vista de la biyección de i deducimos que σ es C^∞-cerrada. ■

Teorema 3.1.1.

Las álgebras diferenciables son C^∞-cerradas.

Demostración

Sea F una $\mathbb{R}$-álgebra diferenciable, $\ell \in \mathbb{N}, g \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, $f_1,...,f_\ell \in F$, y sea $\{U_k\}$ un cubrimiento como el de la definición [3.1.1]. Ahora bien, consideremos la función:

$$h : |F| \to \mathbb{R}, \quad h(a) = g(f_1(a),...,f_\ell(a)),$$

por el lema 3.1.1 se tiene que $\forall k\, \exists h_k \in F|_{U_k}$ tal que, $\forall a \in U_k \quad (h_k)(a) = g(f_1(a), ..., f_\ell(a))$, pues $F|_{U_k} \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Así en cada vecindad del punto a, la función coincide con una función de F, pues $h_k \in F|_{U_k}$ al ser F completa se sigue que $h \in F$. ■

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1.

Consideremos la siguiente álgebra

$$F = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f(x+1) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Esta es un sub-álgebra del álgebra geométrica $C^\infty(\mathbb{R})$, y a su vez es geométrica, por otro lado no es difícil probar que F es geométrica. Sabemos que el espacio $|F|$ es el circulo,luego entonces consideremos las funciones $g_1, g_2 \in F$, dadas como sigue:

$$g_1(v) = \sin^2(\Pi.v); g_2(v) = \cos^2(\Pi.v)$$

cubriendo al círculo $|F|$ por los abiertos

$$U_i = \{v \in |F| / g_i(x) \neq 0\} \quad i = 1, 2;$$

estableciendo biyecciones

$$\begin{aligned} &U_i \longrightarrow]0,1[, \\ &[x] \longrightarrow x \in (0,1), \end{aligned}$$

que corresponden al isomorfismo $F|_{U_k} \cong C^\infty(]0,1[) \cong (C^\infty(\mathbb{R}))$.

De lo anterior se concluye que F es un álgebra diferenciable de dimensión 1 cuya variedad a determinar es el círculo $S^1 = |F|$.

Por otro lado, observemos lo siguiente:

$$U_i \xrightarrow{\phi} (0,1).$$

$$\phi[x] = x \in (0,1).$$

ϕ *es una biyección.*

$$\psi : F|_{U_k} \longrightarrow C^{\infty}(0,1).$$

$$f \longrightarrow \psi(f),$$

$$\psi(f)(x) = f(\phi^{-1}(x)),$$

ψ *es inyectiva y lineal. A continuación se muestra que es sobreyectiva.*

Dada $g \in C^{\infty}(0,1)$, *sea* $f = g \circ \phi : U_i \to \mathbb{R}$. *Luego* $\psi(f) = g$ *y* ψ *es sobreyectiva, veamos que* $f \in F|_{U_k}$.

Sea $a \in U_i$ *y* $V_a \subset U_i$ *una vecindad del punto a, sea* $h = e(f)$, *donde* $e(f)$ *es una copia diferenciable* 1*-periódica de* $f|_{V_a}$. *Así* $h|_{V_a} = f|_{V_a}$ *con* $h \in F$.

Sea $F = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R})/f(v_1+1, v_2) = f(v_1, v_2), \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\}$. *Procediendo en forma similar se tiene que es un álgebra 2-dimensional "cilindro"* $|F| \cong \dfrac{\mathbb{R}}{Z} \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.2.

Sea el álgebra

$$F = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)/f(x_1, y_1) = f(x_{1+1}, -y_1) = f(x_1, y_{1+1}), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2\};$$

es usual que cada par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *determine un homomorfismo sobre* F. *Veamos esto a continuación. Seleccionemos* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, *supongamos que los correspondientes homomorfismos son iguales, esto es*

$$\phi(x_1, y_1) = \phi(x_2, y_2) = \phi(x_3, y_3);$$

entonces $\forall f \in F$, *tenemos que*

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3),$$

En virtud de la definición de F obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1+1 \\ y_2 &= -y_1 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ y_3 &= -y_{1+1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En vista de la periodicidad podemos reducirnos al conjunto $[0,1]\times[-1,1]=A$.

De (1) $(0,y_1)\sim(1,-y_1)$

De (2) $(x_1,-1)\sim(x_1,0)=(x_1,1)$

Notemos que con esta identificación el conjunto A es homeomorfo a la botella de Klein.

Supongamos por absurdo que existe un homomorfismo $\mathcal{P}\in|F|$ *tal que* $\mathcal{P}$ *no es determinado por un par en* $\mathbb{R}^2$*, así* $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *existe una función* $f_{xy}\in F$ *tal que* $\mathcal{P}(f_{xy})\neq f(x,y)$*, cubriendo al conjunto compacto A por conjuntos de la forma*

$$U_{(x,y)}=\{(y_1,y_1)\in\mathbb{R}^2/f_{xy}(x_1,y_1)\neq\mathcal{P}(f_{xy})\};\quad (x,y)\in A,$$

podemos entonces elegir un subcubrimiento finito del conjunto A, digamos

$$U_{(x_1,y_1)},\ldots,U_{(x_n,y_n)};$$

y definir la función

$$g = \sum_{i=1}^{n} \left[f_{x_i y_i} - \mathcal{P}(f_{x_i y_i}) \right]^2.$$

Dicha función no es cero en los puntos de A y por periodicidad no es cero sobre $\mathbb{R}^2$. *Así pués* $\frac{1}{g}$ *está definida y* $\frac{1}{g} \in F$ *lo cual es notorio. Sabemos que* $\mathcal{P} \in |F|$ *y* $\mathcal{P}(1) = 1$. *Luego,*

$$\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}(g.\frac{1}{g}) = \mathcal{P}(g).\mathcal{P}(1/g) = 1 \quad *$$

pero $\mathcal{P}(g) = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{P}(f_{x_i y_i}) - \mathcal{P}(f_{x_i y_i})]^2 = 0$. *Esto es una contradicción con la línea* $*$, *por lo tanto todo homomorfismo* $\mathcal{P} \in |F|$ *es determinado por un par* (x, y). *Así concluimos entonces que* $|F| \approxeq K$*; homeomorfo a la Botella de Klein, ya que el conjunto A lo es.*

Ahora bien, utilizamos las funciones siguientes:

$$g_1(x_1, y_1) = \sin^2(\pi.X_1) \quad h_1(x_1, y_1) = \sin n^2(\pi y_1),$$
$$g_2(x_1, y_1) = \cos^2(\pi.x_1) \quad h_2(x_1, y_1) = \cos^2(\pi.y),$$

para crear los siguientes cuatro conjuntos

$$U_{ik} = \{(x_1, y_1) \in |F| / \quad g_i(x_1, y_1) \neq 0 \quad , \quad h_i(x_1, y_1) \neq 0\} \quad i, k = 1, 2$$

donde cada U_{ik} *es homeomorfo al cuadrado* $(0, 1)^2$.

Para establecer los homeomorfismos de los U_{ik} *al cuadrado abierto* $(0, 1)^2$ *basta hacer un análisis gráfico de tales conjuntos, teniendo en cuenta las cuatro funciones definidas anteriormente:* h_i, g_i $i = 1, 2$.

Sea $\phi_{ik}: U_{ik} \to (0,1)^2$ el homeomorfismo correspondiente. Definamos

$$\psi : F|_{U_{ik}} \to C^{\infty}((0,1)^2).$$
$$f \to \psi(f),$$
$$\psi(f)(x,y) = f(\phi^{-1}(x,y)).$$

Ahora, si $g \in C^{\infty}((0,1)^2)$ entonces $f = g \circ \phi : U_{ik} \to \mathbb{R}$ es tal que $\psi(f) = g$ y razonando como el ejemplo anterior, concluimos que φ es un isomorfismo, de donde se deduce que $F|_{U_{ik}} \approxeq C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ y así F es un álgebra diferenciable de dimensión 2.

Ejemplo 3.1.3.

Sea $F = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)/f(x_1,y_1) = f(x_1+1-y_2), \quad \forall (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2\}$.

Similarmente se muestra que F es un álgebra diferenciable de dimensión 2, cuyo $|F|$ es llamado la banda Möbius abierta.

Definición 3.1.2.

Suponga que F es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M y que $N \subseteq M \subseteq |F|$, si el álgebra $F|_N = F_N$, es un R-álgebra diferenciable, entonces decimos que N es una subvariedad diferenciable de la variedad diferenciable M y que F_N es el álgebra de funciones diferenciales sobre la subvariedad N.

La subvariedad N es llamada cerrada si el homomorfismo restricción $i : F \to F_N$ es sobreyectivo.

Teorema 3.1.2.

Suponemos que F es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M y que $N \subset M = |F|$ es una subvariedad diferenciable cerrada entonces.

1. *N es cerrado como subconjunto del espacio topológico M*

2. $N = |F_N|$

Demostración

1. Sea $a \in M \smallsetminus N$ un punto límite de N y $U \subset M$ una vecindad del punto a tal que $F|_U \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Este isomorfismo se puede elegir tal que los elementos de $F|_U$ correspondan a las funciones coordenadas $V_1, ..., V_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ anulándose en a. Consideremos la función sobre $F \smallsetminus a$ correspondiento a la función $\frac{1}{(r_1^2 + ... + r_n^2)}$, esta función puede ser extendida desde la vecindad punteada de $(U \smallsetminus a)$ a una función diferenciable g sobre la subvariedad $M \smallsetminus a$. Es claro que $g|_N \equiv 0$ pertenece al álgebra $F_N = F|_N$ y que no pertenece a la imagen del homomorfismo restricción $i : F \to F|_N$, en vista de esta contradicción tenemos que $a \in N$.

2. Consideremos el $\mathbb{R}$-punto $b : F_N \to \mathbb{R}$ y tomemos la composición $c = b \circ i : F \to \mathbb{R}$, asumamos que $c \notin N$ generalizando el teorema 2.5, construimos una $f \in F$ tal que $f|_N \equiv 0$ y $f(c) \neq 0$, pero $i(f) = 0$ y $f(c) = 0$, esto es una contradicción, por lo tanto debemos usumir que c pertenece a N y asi para todo b perteneciente al dual $|F_N|$ se tiene que $|i|(b) \in N$.

Lo anterior indica que $|i|(|F_N|) \subset N$, además

$$\mu : N \to |F_{|_N}|.$$

$$a \to (f \to f(a)).$$

$$\mu(N) \subset |F_{|N}|.$$

Y si $x \in N$, $f \in F$ entonces $\mu(x) \circ i(f) = \mu(x)(f|_N) = f|_N(x) = f(x) = x(f)$.

Por lo tanto

$$\mu(x) \circ i = x \quad \forall x \in N,$$

Luego

$$N = (\mu)(N) \circ i = |i|(\mu(N)) \subseteq |i|(|F|_N|) = |i|(|F_N|)$$

Entonces

$$|i|(|F|_N|) = N.$$

Por otro lado, sea $b, a \in |F_N|$ tal que $|i|(b) = |i|(a)$, así $\forall f \in F$, $|i|(b)(f) = |i|(a)(f), \Rightarrow$ $b(f|_N) = a(f|_N), \quad \forall f|_N \in F|_N \Rightarrow a = b.$

Esto finaliza la Demostración . $\blacksquare$

Ejemplo 3.1.4.

En $\mathbb{R}^2$ consideramos el conjunto de puntos S^1 dados por la ecuación $r_1^2 + r_2^2 - 1 = 0$, veamos que el R-álgebra $F|_{S^1} = C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{S^1}$, es isomorfa al álgebra de período uno sobre $\mathbb{R}$ de es forma es difeomorfo $\left|C\infty(\mathbb{R}^2)|_{S^1}\right|$ al círculo S^1 el dual de la segunda $\mathbb{R}$-álgebra mencionada. Esto es $|F|_N| = N$, veamos entonces lo propuesto.

Notemos que $F_{S^1} = C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, sea la función

$$w : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$$
$$x \to (\cos 2\pi.r, \sin 2\pi.r).$$

Así el homomorfismo algebraico correspondiente

$$|w| : F|_{S^1} \to C^\infty(\mathbb{R}),$$

$$|w| f(r) = f(w(r)) = f(\cos 2\pi r,\ \sin 2\pi r),\ g \in \mathbb{R},$$

es inyectivo y su imagen está contenida en $C^\infty_{peri}(\mathbb{R}^2)$, que es el conjunto de las funciones 1-periódicas sobre $\mathbb{R}$.

Probemos que $|w|$ es sobreyectivo. Consideremos

$$i : C^\infty_{peri}(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

dada por $i(f)(x_1,x_2) = f\left(\frac{arg(z)}{2\pi}\right), z = z_1 + z_2$ *si* $r \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{aligned} |w|(i(f))|_{S^1}(r) &= i(f)(w(r)) \\ &= i(f)(\cos 2\pi.r, sem 2\pi.r) \\ &= f(r), \end{aligned}$$

por lo tanto $|w|(i(f))|_{S^1} = f$.

Observación 3.1.1.

Sea $N \subset |F|$ *una subvariedad diferenciable cerrada, existe una forma algebraica de encontrar el álgebra* $F_N = F|_N$.

Sea $A_N \subset F,\ A_N = \{f \in F / f(a) = 0, a \in N\}$, *evidentemente* A_N *es un ideal en* F.

Consideremos entonces el álgebra cociente $F/_{AN}$, *existe una identificación* θ *de* $F|_{AN}$ *con* $F|_N$, *para la cual la función cociente* $\varphi : F \to F|_{AN}$, *es dada como el homomorfismo* $\rho : F \to F_N$.

$$F|_{AN} \xrightarrow{\theta} F|_N,$$

$$[f] \longrightarrow f|_N.$$

Notemos lo siguiente, sean f *y* g *dos funciones en* F

$$\begin{aligned} f|_N = g|_N \Leftrightarrow (f-g)|_N = 0 &\Leftrightarrow [f-g] = [0], \\ &\Leftrightarrow [f] = [g]. \end{aligned}$$

De donde la función θ *está bien definida y además es inyectiva, la sobreyectivida de* θ *es obvia.*

Ejemplo 3.1.5.

Sea S^1 *dada por* $r_1^2 + r_2^2 - 1 = 0$, *entonces* A_{S^1} *es el ideal principal en* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, *generado por la función $r_1^2+r_2^2-1$.*

Demostración.

Sea $f\in A_{S^1}$ entonces $f(x_1,x_2)=g(r_1,r_2)(r_1^2+r_2^2-1)$, para alguna $g\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como el álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es completa es suficiente construir g en una vecindad de S^1, digamos $\mathbb{R}^2\setminus 0$.

Introducimos las siguientes funciones

$$U(t,x_1,x_2)=t+\frac{1-t}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}.$$

$$h(t,x_1,x_2)=f(x_1\circ U(t,x_1,x_2),x_2\circ U(t,x_1,x_2)).$$

Así, entonces

$$\frac{\partial U}{\partial t}=1-\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}=\frac{r_1^2+r_2^2-1}{r_1^2+r_2^2+\sqrt{r_1^2+r_2^2}}.$$

$$h(0,x_1,x_2)=0,\qquad \text{“}f\in A_{S^1}\text{”}.$$

$$h(1,x_1,x_2)=f(x_1,x_2),.$$

De donde

$$f(x_1,x_2)=\int_o^1\frac{\partial h}{\partial t}(t,x_1,x_2)dt$$

$$=\frac{\int_o^1(r_1\frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1U,r_2U)+r_2\frac{\partial f}{\partial r_2}(r_1U,r_2U))}{r_1^2+r_2^2+\sqrt{r_2^2+r_2^2}}dt.(r_1^2+r_2^2-1)$$

$$=g(r_1,r_2).(r_1^2+r_2^2-1).$$

3.2. Partición de la Unidad

Teorema 3.2.1.

Sea $\{U_\alpha\}$ *un cubrimiento abierto localmente finito del espacio* $|F| = M$*, entonces existen funciones* $f_\alpha \in F$ *tal que* $f_\alpha(x) = 0$*, si* $x \in M \setminus U_a$ *y* $\sum\limits_\alpha f_\alpha(x) \equiv 1$.

Demostración

Si $x \in M$ entonces $x \in U_\alpha$ para una cantidad finita ya que si $x \in U_\alpha \quad \forall\alpha$, entonces $\{U_\alpha\}$ deja de ser localmente finito.

Sea $\overset{\approx}{U}{}^o_\alpha$ un subcubrimiento localmente finito donde $\overset{\approx}{U}_\alpha \subset U_\alpha$, $\overset{\approx}{U}_\alpha$ compacto. Ver [8]. Existe entonces un subcubrimiento $\{\widetilde{U}{}^o_\alpha\}$ tal que $\widetilde{U}_\alpha \subset \overset{\approx}{U}{}^\circ_\alpha$, $\widetilde{U}_\alpha$ compacto.

Bien sabemos que los U_α son difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, pues F es un álgebra diferenciable. Sean $d_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ los difeomorfismos.

Sea $K \subset W \subset \mathbb{R}^n$, K compacto, luego existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de manera que $f|_K = 1, 0 \leq f \leq 1, sop(f) \subset W$, Ver [8], donde

$$sop(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \neq 0\}.$$

Consideremos la función $f \circ d_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$, luego:

1) $f \circ d_\alpha \,|_{d_\alpha}^{-1}(K) = f|_{K=1}$,

2) $f \circ d_\alpha \,|_{d_\alpha}^{-1}(W) = f|_W \quad y \quad f(x) \neq 0 \quad \forall x \in W$.

En vista de nuestras hipótesis y al suponer que $d_\alpha^{-1}(K) = \widetilde{U}_\alpha$, concluimos que existe una función $f_\alpha \in F$ tal que $f_\alpha|_{\widetilde{U}} = 1$, $\quad 0 \leq f_\alpha \leq 1$, $\quad sop(f_\alpha) \subset \overset{\approx}{U}{}^o$, $\quad \widetilde{U}_\alpha \subset \overset{\approx}{U}{}^o_\alpha \subset U_\alpha$.

Lo anterior es posible para cada U_α, definamos la función $f : M \to \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \sum\limits_\alpha f_\alpha(p)$, la cual está bien definida ya que los cubrimientos son localmente finitos, note que $f(p) \geq 1$.

Sea $g_\alpha(x) = \dfrac{f_\alpha}{f}$, $g_\alpha(x) = 0$ si $x \in M \setminus U_\alpha$ luego $\sum\limits_\alpha g_\alpha(x) = 1$. ∎

Veamos algunos resultados adicionales.

i) Para todo subconjunto abierto $U \subset M$ existe una función $f \in F$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in U \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin U. \end{cases}$$

Demostración.

Sabemos que M posee un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ localmente finito. Así pues, para $x \in U \subset M$, x debe pertenecer a una cantidad finita de U_α digamos $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$, luego, en vista de las funciones que aparecen en la partición de la unidad, definimos f como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}(x) & \text{si} \quad x \in U \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U \end{cases}$$

Note que $f \in F$ ya que F es completa. ∎

ii) Sean A y B dos subconjuntos de M cerrados, existe una función $f \in F$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x \in A \\ f(x) = 1 & \text{si} \quad x \in B \\ 0 < f(x) < 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración

$M - A$ es abierto en M, por (i) existe una función $f_A \in F$, tal que $f_A|_{M-A} > 0$ y $f_{A_{|_A}} = 0$, análogo para B y la función buscada es $f = \dfrac{f_A}{f_A + f_B}$.

iii) Existe una función $f \in F$ con todas las curvas de nivel compactas. ■

Demostración

Sea $A_k = \{x \in |F| : \sup\limits_{f \in F} |f(x)| \leq k\}$. Note que

1. $A_k = \bigcap\limits_{f \in F} F^{-1}([-k,k])$. En efecto

$$
\begin{aligned}
x \in A_k &\Leftrightarrow \sup_{f \in F} |f(x)| \leq k \\
&\Leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k \quad \forall f \in F \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}([-k,k]) \quad \forall f \in F \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{f \in f} f^{-1}([-k,k]).
\end{aligned}
$$

2. Todos los puntos de A_k son puntos interiores de A_{k+1}, luego A_k y $(A_{k+1})^c$ son dos cerrados disjuntos, usando ii) existe una función $f_k \in F$, tal que

$$
f_k(x) = \begin{cases} f_k(x) = 0 & \text{si} \quad x \in A_k \\ f_k(x) = 1 & \text{si} \quad x \notin A_{k+1} \\ 0 < f_k < 1 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Por otro lado, dado $x \in |F|$ existe algún k, tal que $x \in A_p, p \geq k$, definimos entonces

$$
f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k;
$$

la cual está bien definida y es diferenciable, es decir, pertenece al álgebra F, pués localmente es la suma finita de funciones diferenciables.

Sea $x \in |F| \setminus A_k$; ya que todas las funciones f_i son no negativas, para $i > k$ tenemos que $f_i(x) = 1$, seguimos que $f(x) \geq k-1$. $\quad **$

Por lo tanto, si $x \in |F| \setminus A_k \Rightarrow f(x) \geq k-1$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(\lambda)$ es cerrado en el conjunto compacto A_k, donde k es el entero tal que $\lambda < k-1$, pues si $\quad x \in f^{-1}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda \Rightarrow f(x) < k-1 \Rightarrow x \in A_k \qquad$ ver la linea $\quad **$

Pero un conjunto cerrado en un conjunto compacto también es compacto, de manera que $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es la función requerida. $\blacksquare$

3.3. Variedad Cociente

Suponga que F es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M. Consideremos la acción de un grupo sobre esa variedad diferenciable, esto es, una familia Γ de automorfismos $\gamma : F \rightarrow F$ tal que

i) $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \rightarrow \gamma_1 \circ \gamma_2 \in \gamma$.

ii) $\gamma \in \Gamma \rightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$.

Con esto supongamos que F^{Γ} es el sub-álgebra de funciones invariantes por esa acción, es decir

$$F^{\Gamma} = \{f \in F | \gamma(f) = f \quad \forall \gamma \in F\}.$$

Establecemos el siguiente lema.

Lema 3.3.1.

Supongamos que F^{Γ} es el sub-álgebra de funciones invariantes del grupo acción de Γ sobre $M = |F|$.

Si F^{Γ} contiene una función con todas las curvas de nivel compacta, entonces F^{Γ} es geométrica.

Demostración

Si existe $h \in |F^{\Gamma}|$ tal que para cada $x_o \in M$, existe f_{xo}, tal que $f_{xo}(x_o) \neq h(f_{x_o})$, entonces si g es la función de todas curvas de nivel compacta, al cubrir a $L = g^{-1}(\lambda)$ por conjuntos de la forma $\{x \in M / f_{xo}(x) \neq h(f_{xo})\}$ $x_o \in L$, obtenemos un absurdo al igual que en el ejemplo [2.1.2], por lo tanto $\forall h \in |F^{\Gamma}|$ existe un $x \in M$ tal que $h = \phi(x)$. ■

Sea $N = \{0_a / a \in M\}$, donde $0_a = \{|\gamma|(a)/\gamma \in \Gamma\}$, es la órbita para el punto $a \in M$, entonces los elementos en F^{Γ} se pueden observar como funciones sobre N, en verdad si $b = |\gamma|(a) \in 0_a$, y $f \in F^{\Gamma}$, entonces

$$f(b) = f(|\gamma|(a)) = \gamma(f)(a) = f(a).$$

Esto nos dice que cada órbita de N determina un $\mathbb{R}$-punto del álgebra F^{Γ}, así tenemos la siguiente función natural

$$\begin{aligned} &n : N \to |F^{\Gamma}|, \\ &0_a \to (f \to f(a)), \end{aligned}$$

la cual será biyectiva al darse las dos siguientes condiciones:

i) Todo homomorfismo $a : F^{\Gamma} \to \mathbb{R}$ puede ser extendido a un homomorfismo $\widetilde{a} : F \to \mathbb{R}$ (sobreyectividad).

ii) Si $b \notin 0_a$, entonces existe una $f \in F^{\Gamma}$ tal que $f(a) \neq f(b)$ (inyectividad).

Veamos el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.1.

El álgebra F^{Γ} de funciones Γ-invariantes sobre una variedad diferenciable $M = |F|$ es completa si las dos condiciones anteriores son dadas y la suposición del lema anterior es dada.

Demostración

Cada función real $f : |f^{\Gamma}| \to \mathbb{R}$, mediante la proyección $\Pi : M \to N$; $a \to O_a$. Determina la función $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$. Ahora si $f|_{U_b} = f^{\Gamma}|_{U_b}, \forall b \in Oa$, $f^{\Gamma} \in F^{\Gamma}$, entonces $\widetilde{f}|_{U_b} = g|_{U_b}$, demostremos esto suponiendo por el absurdo que existe $a \in |F|$ tal que $\forall g \in F$, y toda vecindad U_a, $\widetilde{f}|_{U_a} \neq g|_{U_a}$, en particular ocurre para U_a tal que $U_a = \Pi(U_a)$ "$U_a \subset \Pi(U_a$" y $g \in F^{\Gamma}$ esto es $\widetilde{f}|_{U_a} = f|_{\Pi(U_a)} = f|_{U_a} \neq g|_{U_a}$, esto contradice lo anterior.Por lo tanto tenemos que si $f|_{U_b} = f^{\Gamma}|_{U_b}, \forall b \in Oa$, $f^{\Gamma} \in F^{\Gamma}$, entonces $\widetilde{f}|_{U_a} = g|_{U_a} \forall a \in |F|, g \in F$.

Al ser F completa tenemos que $\widetilde{f} \in F$, pero además $\widetilde{f} \in F^{\Gamma}$ veamos que esto es cierto.

Primeramente probemos que $O_a = 0_{|\gamma_1|(a)}$ para algún $\gamma_1 \in \Gamma$

$$O_a = \{|\gamma|(a) \,/\, \gamma \in \Gamma\},\ O_{|\gamma_1|(a)} = \{|\gamma|\,|\gamma_1|(a) \,/\, \gamma \in \Gamma\},$$

si seleccionamos $\gamma' = \gamma_1^{-1} \circ \gamma$, para $\gamma \in \Gamma$ probamos que

$O_a \subset O_{|\gamma_1|(a)}$ (1)

Note que $|\gamma'| = |\gamma| \circ |\gamma_1|^{-1}$, y tomando $\gamma' = \gamma_1 \circ \gamma, \gamma \in \Gamma$, probamos que $O_{|\gamma_1|(a)} \subset O_a$ (2)

De (1) y (2) $O_{|\gamma_1|(a)} = O_a$, como f es una función entonces:

$$\begin{aligned}
f(O_a) &= f(0_{|\gamma|(a))} \Rightarrow \\
f \circ \pi(a) &= f \circ \Pi(|\gamma|(a)) \Rightarrow \\
f \circ \pi(a) &= |\gamma|(a)(f \circ \Pi) \Rightarrow \qquad \text{"}f \circ \pi = \widetilde{f} \in F\text{"} \\
f \circ \pi(a) &= a \circ \gamma(f \circ \Pi) \Rightarrow \\
f \circ \pi(a) &= \gamma(f \circ \Pi)(a) \Rightarrow \\
f \circ \pi &= \gamma(f \circ \Pi) \quad \forall \gamma \in \Gamma.
\end{aligned}$$

por lo tanto $\quad \widetilde{f} = f \circ \pi \in F^\Gamma$,

así $\quad \widetilde{f}|_N \in F^\Gamma \Rightarrow f \in F^\Gamma$. $\qquad \blacksquare$

Definición 3.3.1.

Asuma que N coincide con $|F^\Gamma|$ y el álgebra F^Γ es diferenciable, entonces decimos que F^Γ es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad cociente de M por el grupo acción de Γ, la notación es $F/_\Gamma$ ó $|F^\Gamma|$.

Ejemplo 3.3.1.

En el ejemplo 3.1.1 tratamos con la variedad cociente de $\mathbb{R}$ con el grupo cíclico discreto Z de isometrías.

En realidad $\gamma(f)(v) = f(v+1)$, esto nos dice que F^Γ es el conjunto de funciones 1-periódicas, pero para $f \in F^\Gamma$ y $a \in M$, tenemos que

$$|\gamma|(a)(f) = f(|\gamma|(a)) = \gamma(f)(a) = f(a)$$
$$\Rightarrow \quad |\gamma|(a)/_{F^\Gamma} = a/_{F^\Gamma}.$$

Esto nos dice que si $f(a) = f(b) \quad \forall f \in F^\Gamma$, entonces $|\gamma|(a)|_{F^\Gamma} = |\gamma|(b)/_{F^\Gamma}$.

Si $b = a \Rightarrow \forall f \in F, f(b) = f(a)$.

Ahora $|\gamma|(a)(f) = \gamma(f)(a) = \gamma(f)(b) = |\lambda|(b)(f)$.

Esto es $\quad |\lambda|(a) = |\lambda|(b) \quad \forall \lambda \in \Gamma$, lo que implica que $\quad 0_a = 0_b$.

Ahora si $b \notin 0_a \Rightarrow b \neq |\gamma|(a) \quad \forall \gamma \in \Gamma$, entonces existe $f_\alpha F$ tal que $f_\alpha(b) \neq \gamma(f_\alpha)(a)$ en particular para $\gamma = i_d$ se tiene que $b \neq a$.

Bien si $b \notin 0_a \Rightarrow b \neq a \Rightarrow \exists f \in F$, tal que $f(b) \neq f(a)$, es posible hallar una función $g \in F^\Gamma$ es decir 1-periódica, tal que $g(a) = f(a), g(b) = f(b)$, así $g(a) \neq g(b)$ y la función n es inyectiva.

Por otro lado, si $a \in |F^\Gamma|$ entonces a es una función de F^Γ en $\mathbb{R}$; luego si $f \in F^\Gamma$

entonces

$$a(f) = f(a) = \gamma(f)(a) = |\gamma|(a)(f).$$

así $\quad a|_{F^\Gamma} = |\gamma|(a)/_{F^\Gamma} \Rightarrow a = |\gamma|(a)/_{F^\Gamma}.$

Esto nos dice que a es extensible y se verifica que n es sobreyectiva, por lo tanto N es identificado con $|F^\Gamma|$*, por otro lado* $\quad |F^\Gamma| = \dfrac{\mathbb{R}}{Z} = \dfrac{|C^\infty(\mathbb{R})|}{\Gamma} \cong S^1.$

Notemos que para el caso de n-generadores

$$r_i(f)_{(y)} = f(y_1, ..., y_{i-1}, y_i + 1, y_{i+1}, ..., y_n),$$

F^Γ *es el conjunto de funciones 1-periódicas en cada variable y*

$$N = |F^\Gamma|, |F^\Gamma| = \mathbb{R}^n/Z^n = T^n.$$

Veamos que T^n *es variedad diferenciable.*

Sea $U_1 = \{x \in N/sen^2(\pi.\pi_i(x)) \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$; $\quad$ *luego si* $[x] \in U_1$ *entonces* $x = (\pi_1[x], ..., \pi_n[x]) \in (0,1)^n$.

Así se deduce que $\quad U_1 \approxeq (0,1)^n$.

Sea $\quad U_2 = \{x \in N : \cos^2(\pi.\pi_i(x)) \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Note que $\cos^2(\pi.\pi_i)|_{U_1} = \cos^2(\pi.\pi_i)|_{U_2 - \left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)}$; *pero* $U_2 - (\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}) \approxeq (0,1)^n$ *con la siguiente aplicación ,*$[x] \Rightarrow x + (\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}) \in (0,1)^n$.

Es notorio que $(U_1 \cup U_2) = [0,1]^n \supset N$.

Es fácil ver que $F^\Gamma/U_i \cong C^\infty((0,1)^n) \approxeq C^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Y asi* T^n *es una variedad diferenciable n-dimensional.*

3.4. Envolvente Diferencial

No es difícil mostrar que $F_1 \otimes_R F_2$ es geométrica si las F_i lo son. Ver[10].

Definición 3.4.1.

La envolvente diferencial $F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2$, de R-álgebras geométricas es llamada la álgebra de funciones diferenciales del producto cartesiano de las variedades M_1 y M_2.

Teorema 3.4.1.

Si F es el álgebra de funciones diferenciables sobre el producto cartesiano de las variedades M_1 y M_2, entonces $|F|$ es homeomorfo al producto cartesiano de los espacios topológicos $M_1 = |F_1|, M_2 = |F_2|$.

Demostración

Para cada par $(a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$, asociamos el homomorfismo

$$a_1 \otimes a_2 : F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2 \to \mathbb{R},$$

$$(f_1 \otimes f_2) \to f_1(a_1).f_2(a_2);$$

$f_i \in F_i, i = 1, 2.$

Notemos que la $\mathbb{R}$-álgebra es C^∞-cerrada. Entonces, por definición de envolvente diferenciable, $a_1 \otimes a_2$ puede ser extendido únicamente.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times M_2 \arrow[r, "i_{\text{clase}}"] \arrow[dr, "g=\Pi_{\text{lineal}}"'] & M_1 \bigotimes_{\mathbb{R}} M_2 \arrow[d, "\overline{g}"] \\
 & |F|
\end{tikzcd}$$

$\overline{g}$ es un único homomorfismo, g la extensión de $a_1 \otimes a_2$, al homomorfismo

$$\overline{a_1 \otimes a_2} : F = \overline{F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2} \to \mathbb{R}.$$

Así hemos construido la función

$$\Pi : M_1 \times M_2 \to |F|.$$

$$(a_1, a_2) \to \overline{a_1 \otimes a_2}.$$

Π es inyectiva.

Pues si $\overline{a_1 \otimes a_2} = \overline{a_1 \otimes a_2}$. Usando el hecho de que esos homomorfismos coinciden sobre elementos de la forma $f_1 \otimes 1, 1 \otimes f_2$, se concluye que

$$f_1(a_i) = f_i(a_i') \quad \forall f_i \in F_i, i = 1, 2;$$

ya que las álgebras F_i son geométricas tenemos que $a_i' = a_i$, la sobreyectividad de Π se sigue de la propiedad de producto tensorial.

De resto veremos que Π identifica la topología del producto estándar en $M_1 \times M_2$ con la $\mathbb{R}$-Topología en $|F|$.

Sea la base de la topología en $M_1 \times M_2$, consistiendo de los conjuntos $U_1 \times U_2$, donde

$$U_i = \{a \in M_i | \alpha_i < f_i(a) < \beta_i\},$$

$$f_i \in F_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2.$$

Entonces, los conjuntos

$$V_1 = U_1 \times M_2 = \{(a_1, a_2)/\alpha_1 < \overline{a_1 \otimes a_2}(f_1 \otimes 1) < \beta_1\},$$

$$V_2 = M_1 \times V_2 = \{(a_1, a_2)/\alpha_2 < \overline{a_1 \otimes a_2}(1 \otimes f_2) < \beta_2\}.$$

son abiertos en la topología inducida desde $|F|$ por Π en $M_1 \times M_2$ consecuentemente $V_1 \cap V_2 = U_1 \times U_2$, es también abierto.

Inversamente seguimos el orden de la construcción de envolventes diferenciable, en que orden obtenemos una base para la topología en $|F|$.

Tomemos un subconjunto de funciones en F lo sufientemente adecuado como la subálgebra generada por el subconjunto con envolvene diferenciable coincidiendo con F. En el caso dado es suficiente tomar el subconjunto de funciones de la forma

$$f_1 \otimes f_2, f_i \in F_i; i = 1, 2.$$

Consideremos el conjunto básico abierto

$$V = \{(a_1, a_2) \in M_1 \times M_2 = |F| / \alpha < f_1(a_1).f_2(a_2) < \beta\}.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, correspondiendo a tales funciones.

Notemos que V es la unión de conjuntos de la forma

$$\{(a_1, a_2) \in M_1 \times M_2 / \alpha_1 < f_1(a_1) < \beta_1, \alpha_2 < f_2(a_2) < \beta_2\},$$

los cuales son abiertos en $M_1 \times M_2$.

El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ satisfaciendo que $\alpha_1 < V_1.V_2 < \beta$, es abierto, en el sentido que para todos sus puntos en forma individual están contenidos en un rectángulo de la forma siguiente:

$$\{(V_1, V_2) / \alpha_1 < V_1 < \beta_1, \alpha_2 < V_2 < \beta_2\}.$$

Así cada punto es un punto interior. ■

Lema 3.4.1.

La envolvente diferenciable de la $\mathbb{R}$-álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^k) \bigotimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, es isomorfa a la R-álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^{k+\ell})$.

Demostración

Consideremos el homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$i : C^\infty(\mathbb{R}^k) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}^\ell) \to C^\infty(\mathbb{R}^{k+\ell}).$$

$$i(f \otimes g)(r_1,...,r_{k+\ell}) = f(r_1,...,r_k).g(r_{k+1},...,v_{k+\ell}).$$

Mostremos que i satisface la definición de envolvente diferenciable.

Suponemos que $\phi : C^\infty(\mathbb{R}^k) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}^\ell) \to F$, es un homorfismo, la $\mathbb{R}$-álgebra F es cerrada.

Un homomorfismo $\phi' : C^\infty(\mathbb{R}^\ell) \to F$, es la prolongación de ϕ, esto es $\phi = \phi' \circ i$, si y solo si para todo $(r_1,...,r_k) \in \mathbb{R}^k$, $(s_1,...,s_\ell) \in \mathbb{R}^\ell, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+\ell})$,
tenemos que

$$\phi'(g) = g(\phi(r_1 \otimes 1),...,\phi(r_k \otimes 1), \phi(1 \otimes s_1),...,\phi(1 \otimes s_\ell)).$$

Demostremos esto.

Notemos que si $r_i \in \mathbb{R}^k$ y $s_j \in \mathbb{R}^\ell$, entonces $i(r_i \otimes 1) = r_i$; $i(1 \otimes s_j) = s_j$ (entender la igualdad salvo isomorfismo, recordemos que $A \otimes_M M \approx A$ y $M \otimes_M A \approx A$). Sabemos que $C^\infty(\mathbb{R}^k) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, es geométrica. Consideremos $a \in |F|, r_i \in C^\infty(\mathbb{R}^k), s_j \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ y $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+\ell})$, entonces
$\Phi'(g(r_1,...,r_k,s_1,...,s_1))(a) = a(\Phi'(g(r_1,...,r_k,s_1,...,s_\ell)))$

$$= (a \circ \Phi')(g(r_1,...,r_k,s_1,...,s_\ell))$$

$$= |\Phi'|(a)(g(r_1,...,r_k,s_1,...,s_\ell))$$

$$= g(r_1,...,r_k,s_1,...,s_\ell)(|\Phi'|(a))$$

$$= g(i(r_1 \otimes 1),...,i(r_k \otimes 1), i(1 \otimes s_1),...,i(1 \otimes s_\ell))(|\Phi'|(a))$$

$= g((r_1 \otimes 1)(|i|), ..., (r_k \otimes 1)(|i|), (1 \otimes s_\ell)(|i|), ..., (1 \otimes s_\ell)(|i|), ...(1 \otimes s_\ell)(|i|))(|\phi'|(a))$

$= g((r_1 \otimes 1), ..., (r_k \otimes 1), (1 \otimes s_1), ..., (1 \otimes s_\ell), ..., (1 \otimes s_\ell))((|i|)(|\Phi'|(a)))$

$= g((r_1 \otimes 1), ..., (r_k \otimes 1), (1 \otimes s_1), ..., (1 \otimes s_\ell))((|i| \circ |\Phi'|)(a))$

$= g((r_1 \otimes 1), ..., (r_k \otimes 1), (1 \otimes s_1), ..., (1 \otimes s_\ell))(|\Phi|(a))$

$= g(\Phi(r_1 \otimes 1), ..., \Phi(r_k \otimes 1), \Phi(1 \otimes s_1), ..., \Phi(1 \otimes s_\ell))(a).$

Por lo tanto tenemos

$$\Phi'(g(r_1, ..., r_k, s_1, ..., s_\ell) = g(\Phi(r_1 \otimes 1), ..., \Phi(r_k \otimes 1), \Phi(1 \otimes s_1), ..., \otimes(1 \otimes s_\ell));$$

si y solo si $\phi = \phi' \circ i$.

Note que esta fórmula está bien definida y hace que ϕ' sea único. ■

Teorema 3.4.2.

Si F_1, F_2 son $\mathbb{R}$-álgebras diferenciables, entonces $F = \overline{F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2}$ también es diferenciable.

Demostración

Supongamos que $a_i \in M_i = |F|$ y sea $U_i \ni a_i$ una vecindad tal que

$$F_i|_{U_i} \cong C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad i = 1, 2.$$

¿Cómo establecemos que $F|_{U_1 \times U_2} \cong C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$?.

Bien, por el ejemplo anterior es suficiente mostrar que $F|_{U_1 \times U_2} \cong \overline{F_i|_{U_1} \otimes_{\mathbb{R}} F_2|_{U_2}}$.

Como antes existe un homomorfismo $i : F_1|_{U_1} \otimes_{\mathbb{R}} F_2|_{u_2} \to F|_{U_1} \times U_2$, el cual satisface la definición de envolvente diferenciable. ■

3.5. Funciones Diferenciales

Definición 3.5.1.

Suponga que F_i *es el álgebra de funciones diferenciables sobre* $M_i,\ i \in \{1,2\}$*; una función* $f : M_1 \to M_2$ *es llamada diferenciable si* $f = |\varphi|$ *, donde* φ *es un homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-algebras,* $\varphi : F_1 \to F_2$*.*

Supongamos ahora que f *es sobreyectiva, luego dadas* $f_1, f_2 \in F_2$ *tal que* $\xi(f_1) = \xi(f_2)$ *entonces para todo* $z \in |F_1| = M_1$ *tenemos que*

$$z(\varphi(f_1)) = z(\varphi(f_2)) \Rightarrow$$

$$|\varphi|(z)(f_1) = |\varphi|(z)(f_2) \Rightarrow$$

$$f_1(|\varphi|(z)) = f_2(|\varphi|(z)) \Rightarrow$$

$$f_1(w) = f_2(w); \quad \forall w \in |F_2| = M_2,$$

“$f = |\varphi|$ es sobreyectiva ”

Asì $f_1 = f_2$*, esto es* φ *es inyectiva.*

Mostremos algunos ejemplos

Ejemplo 3.5.1.

Supongamos que F *es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad* M *y que* Γ *es un grupo actuando sobre* M*, tal que* $N = |F^{\Gamma}| = M/_{\Gamma}$*.*

Luego, la función $\rho = |i| : M \to M/_{\Gamma}$*, dual de la inclusión* $i : F^{\Gamma} \to F$*, es de hecho diferenciable.*

Si $\Gamma = Z$*, actuando sobre* $\mathbb{R}$ *con la identificación de* r_1*, y* r_2*, si* $r_1 - r_2 \in Z$*, denotando* S^1 *como el conjunto de las clases de equivalencias y* F *las funciones* *diferenciables 1-periódicas sobre $\mathbb{R}$.*

Entonces, la proyección $P : \mathbb{R} \to S^1$ es una función diferenciable, pues coincide con $|i|$ donde i es la inclusión $F \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo 3.5.2.

Sea $F = C^\infty(M)$ y $N \subseteq M$ una subvariedad diferenciable de M. En este caso la inclusión $i : N \to M$ es una función diferenciable, ya que coincide con $|p|$, donde p es el homomorfismo restricción $p : F \to F|_N$.

Supongamos que $F_{\mathbb{C}} = C^\infty(\mathbb{C})$; F y S^1 igual al ejemplo 3.5.1, consideremos la inclusión,

$$i : S^1 \to \mathbb{C},$$

$$[r] \to e^{2\Pi ir};$$

donde $[r] \in S^1$, es la clase de equivalencia del punto $r \in \mathbb{R}$.

Definamos el homomorfismo:

$$\beta : F_{\mathbb{C}} \to F, \quad (\beta(f))(r) = f(e^{2\pi ir}) \quad f \in F_{\mathbb{C}}, \quad r \in \mathbb{R},$$

la inclusión i coincide con $|\beta|$ y tenemos entonces una función diferenciable de S^1 a $\mathbb{R}^2$, pues

$$\beta(f)([r]) = f(e^{2\Pi\, i.r)} = e^{2\Pi\, i.r}(f) = i([r])(f).$$

Así

$$[r] \circ \beta = i[r] \Rightarrow |\beta| = i.$$

Ejemplo 3.5.3.

Supongamos que F es el álgebra de funciones diferenciable sobre la Banda de Möbius *abierta y* $F(S^1)$ *el álgebra de funciones diferenciables 1-periódicas sobre* $\mathbb{R}$.

Considere los homomorfismos

$$\alpha, \beta : F \to F(S^1),$$

$$\alpha(f)(r) = f(r,0), \beta(f)(r) = f(2r,b)),$$

donde $f \in F$, $r \in \mathbb{R}$ *y* $b \neq 0$ *es un número real.*

$$|\gamma| : S^1 \to \tilde{M},$$

$$x \to |\gamma|(x),$$

$$|\gamma|(x)(f) = f(|\gamma|(x)) = \gamma(f)(x) = f(x,0) = (x,0)(f);$$

$$\textit{así} \quad |\gamma|(x) = (x,0),$$

$$|\beta| : S^1 \to \tilde{M},$$

$$x \to |\beta|(x),$$

$$|\beta|(x)(f) = f(|\beta|(x)) = \beta(f)(x) = f(2x,b) = (2x,b)(f).$$

Esto nos permite concluir que $|\beta|(x) = (2x,b)$.

Las funciones diferenciables $|\alpha|$ *y* $|\beta|$ *se muestran en la figura. Note que la imagen de la función* $|\beta|$ *es dos veces más larga que la de* $|\alpha|$.

Existe una función interesante entre la banda de Möbius sobre el círculo, la cual denotamos por $\xi : F(S^1) \to F$.

Dada por $(\xi(f)(v_1, v_2)) = f(v_1)$. *Ahora, dado* $x \in \mathbb{R}$ *y* $f \in F(S^1)$*, tenemos que*

$$\alpha(\xi(f))(v) = \xi(f)(v, 0) = f(v).$$

por lo tanto $\quad \alpha(\varepsilon(f)) = f$. *Esto nos indica que* $\alpha \circ \xi = id_{F(S^1)}$.

Por otro lado tenemos la siguiente función

$$\begin{aligned} |\xi| : \quad & \ddot{\mu} \to S^1, \\ & x \to |\xi|(x); \end{aligned}$$

$$|\xi|(x)(f) \quad = f(|\xi|(x)) = \xi(f)(x) = f(\pi_1(x)) = \pi_1(x)(f).$$

Concluimos que $|\xi| = \pi_1$.

La función $g = |\xi|$ *podemos visualizarla como "colapsando" la banda A de Möbius sobre su círculo central.*

Ejemplo 3.5.4.

Elijamos un número irracional $\lambda \in \mathbb{R}$ *y consideremos la función*

$$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2,$$

$$r \to (r, \lambda r),$$

entonces $f = |\varphi|$*, donde*

$$\varphi : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^1),$$

$$(\varphi(g))(r) = g(r, \lambda r)),$$

para toda $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2), r \in \mathbb{R}$

Denotemos por $\overline{\varphi}$ *la restricción del homomorfismo* φ *a la subálgebra de funciones dos* *veces periódicas.*

La imagen de la función diferenciable $|\overline{\varphi}| : \mathbb{R}^1 \rightarrow T^2$ *es siempre densa en* T^2 *y por tanto el homomorfismo* $\overline{\varphi}$ *es inyectivo.*

Cuando el número λ *es racional, la imagen de* $|\overline{\varphi}|$ *es compacta.*

El conjunto $\{n.\lambda + m/(n,m) \in Z \times Z\}$ *es denso en* $\mathbb{R}$ *. Ver [8]*

Sea $\theta = y - \lambda x \in \mathbb{R}$*, dado* $\varepsilon > 0 \quad \exists m,n \in Z$*, tal que* $|\theta - m\lambda + n| < \varepsilon$

Consideremos así el $\mathbb{R}$*-punto* $(x+m, y+n)$ *y la* B_ε *centrada en tal* $\mathbb{R}$*-punto,* $\varepsilon > 0$

Sea $t = x + m$*. Luego el punto* $(t, \lambda t) = (x+m, \lambda x + \lambda m)$ *Es tal que*

$$|(t,\lambda t) - (x+m, y+n)| = |(\lambda x - y) - (n - \lambda m)|,$$

$$= |-\theta + \lambda m - m| = |\theta - m.\lambda + n| < \varepsilon.$$

Así $\quad (t,\lambda t) \in B_\varepsilon \quad ,\varepsilon > 0$

Luego $\quad |\overline{\varphi}|(t) \cap B_\varepsilon(x+m, y+m) \neq \phi$*, pero* $(x+m, y+n) = (x,y)$*, deducimos que* $|\overline{\varphi}|(\mathbb{R})$ *es denso en* T^2*.*

Ejemplo 3.5.5.

Supongamos que M_1 *y* M_2 *son variedades, la función diferenciable* $a : M_1 \rightarrow M_2$ *se dice que es un difeomorfismo si existe una función diferenciable* $b : M_2 \rightarrow M_1$ *de manera que* $b \circ a = id_{M_1}, a \circ b = id_{M2}$*, en este caso diremos que las variedades* M_1 *y* M_2 *son difeomorfas, esto nos dice que las correspondientes álgebras de funciones diferenciales son isomorfas.*

Ejemplo 3.5.6.

1. S^1 *ya ha sido construida como el cociente de* $\mathbb{R}$ *sobre Z y como subvariedd de* $\mathbb{R}^2$*.*

2. *El operador lineal* $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *será un difeomorfismo si* $det(A) \neq 0$*.*

3. Sea $\quad F_1 = C^\infty(M_1), F_2 = C^\infty(M_2)$, *la biyectividad de la función diferenciable* $|\varphi| : M_1 \to M_2$ *donde* $\varphi : F_2 \to F_1$ *no es suficiente para que la función sea un difeomorfismo, tómese por ejemplo:* $\quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \to x^3,$$

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x.$$

Teorema 3.5.1.

Sea $F(N)$ el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad diferencial N y $a : \mu \to N$ una función diferenciable Γ-invariante con respecto a la acción de Γ sobre M tal que $M/_\Gamma$ es una variedad diferenciable, entonces existe una única función $b : M/_\Gamma \to N$, para la cual el siguiene diagrama es conmutativo

Demostración

Debemos probar la existencia y unicidad de un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\beta : F(N) \to F^\Gamma,$$

para la cual el diagrama

Es conmutativo donde $a = |\alpha|$, claramente no hay más que tal β.

Ahora existe si y sólo si $Im(\alpha) = \alpha(F(N))$ consiste de elementos Γ-invariantes, pero para una función a Γ-invariante, este siempre es el caso: $\forall \gamma \in \Gamma, f \in F(N)$ tenemos

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha(f)) &= \alpha(f) \circ |\gamma| = f(|\alpha| \circ |\gamma|), \\ &= f(a \circ |\gamma|), \\ &= f(\gamma(a)) = f(a), \\ &= \alpha(f). \end{aligned}$$

Retornemos ahora al producto cartesiano, sean F_ℓ el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad $M_\ell, \ell = 1, 2$.

La proyección de funciones

$$\begin{aligned} \rho_\ell &: M_1 \times M_2 \to M_\ell, \\ &(a_1, a_2) \to a_\ell, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

es diferenciable, ya que $|\rho_\ell| = |\pi_\ell|$, donde el homomorfismo Π es la composición

$$F_\ell \xrightarrow{i_\ell} \overline{F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2} \xrightarrow{\theta} F_1 \otimes_{\mathbb{R}} F_2 = F(M_1 \times M_2),$$

donde θ es el homomorfismo de envolvente diferencial.

$$i_\ell(f) = \begin{cases} f \otimes 1 & \ell = 1 \\ 1 \otimes f & \ell = 2 \end{cases} \qquad \forall f \in F_\ell.$$

El par proyección (p_1, p_2) posee la siguiene propiedad universal. ■

Teorema 3.5.2.

Para toda variedad diferencial y todo par de funciones diferenciables

$$f_\ell : N \to M_\ell, \quad \ell = 1, 2.$$

existe una única función diferenciable $f : N \to M_1 \times M_2$*, completando el diagrama a conmutativo.*

Demostración

Denotemos el álgebra de funciones diferenciables sobre N por $F(N)$. Asumamos que $F_\ell = |\varphi_\ell|$, donde $\varphi_\ell \to F(N)$; es la función dual del homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Nuestro resultado será probado si establecemos la existencia y unicidad del siguiente diagrama

Por la propiedad universal de tensores "ver [9]" existe un único homomorfismo φ mostrado en el diagrama, ya que el $\mathbb{R}$-álgebra $F(N)$ es diferenciable, mientras que el homomorfismo de envolvente diferenciable tiene la propiedad universal dada en la Teorema 3.37, el homomorfismo φ está bien definido y es único. Fin de la Demostración. ■

Capítulo 4

Fibrados vectoriales

4.1. Fibrados Diferenciales

Hasta ahora hemos obtenido una noción de variedad diferenciable, sobre una $\mathbb{R}$-álgebra abstracta F, como parte de este capítulo se estudiará la estructura sobre el un punto z "la fibra sobre z" en la variedad $|F|$.

Se nos hace necesario entonces definir un fibrado diferenciable, definición denominada álgebraica, en vista de que nuestras variedades en consideración están definidas algebraicamente.

Definición 4.1.1. *(Los fibrados como extensión de una álgebra)*

Un fibrado diferenciable es un homomorfismo inyectivo de ***álgebras diferenciables*** *$i : A \to B$; la variedad $|A|$ es llamada la base del fibrado i, la variedad $|B|$ es el espacio total mientras que la función dual $|i| : |B| \to |A|$ es referida como la* ***proyección*** *del fibrado y para $z \in |A|$ la fibra sobre este punto geométricamente es $|i|^{-1}(z) \subset |B|$.*

Aclaremos esta definición con una serie de ejemplos.

Ejemplo 4.1.1.

Sean A y C álgebras diferenciables. Sea $B=\overline{A\otimes_{\mathbb{R}}C}$, *definimos la inclusión* $i:A\to B$ *por la regla* $a\to a\otimes 1$.

Es claro que i es un fibrado diferenciable ya que B es un álgebra diferenciable.

Un concreto ejemplo de esta construcción es el fibrado del toro sobre el círculo definido como la extension $i:A\longrightarrow B$, *donde*

$$B=\{g\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)\big/ g(x+1,y)=g(x,y+1)=g(x,y)\}.$$

Es el álgebra de funciones dos veces periodicas en las dos variables y A es el subálgebra de B, consisitiendo de todas las funciones que no dependen de la variable y.

Se verifica que $\overline{A\otimes C}\cong B$. si

$A=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R})/f(x+1)=f(x)\}.$

$C=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R})/(f(y+1)=f(y)\}.$

Ya hemos mostrado que $|B|\cong$ toro y $|A|\cong S^1$, y tanto $A,\ B,C$ son álgebras diferenciables.

Sea $z\in|A|$, la fibra sobre este punto representa un círculo, en efecto

$$\begin{aligned}|i|^{-1}(z)&=\{(w_1,w_2)\in|B|:|i|(w_1,w_2)=z\},\\&=\{(w_1,w_2)\in|B|:(w_1,w_2)\circ i=z\}.\end{aligned}$$

Para $f\in A$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}&(w_1,w_2)\circ i(f)=z(f)\\&\Rightarrow i(f)(w_1,w_2)=f(z)\\&\Rightarrow f\otimes 1(w_1,w_2)=f(z)\\&\Rightarrow f(w_1)\,.\,1(w_2)=f(z)\qquad (\text{“}\textit{asociando}''\text{)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(w_1) = f(z)$$

$$\Rightarrow w_1 = z.$$

Por lo tanto $\quad |i|^{-1}(z) = \{w_1, w_2) \in |B| \quad /w_1 = z\}$.

Asi $|i|^{-1}(z)$ representa un círculo, ya que es una recta en el cuadrado $[0,1]^2$.

Ejemplo 4.1.2. ***(La Botella de Klein Fibrado sobre el círculo.)***

Consideremos las dos álgebras siguientes

$$A = \{F \in C^{\infty}(\mathbb{R})/f(x+1) = f(x)\}.$$

$$B = \{g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)/g(x+1,y) = -g(x_1,y+1) = g(x,y)\}.$$

Tomemos la siguiente inclusión de A en B, dada por la regla

$$f \to g : g(x,y) = f(x).$$

Ya hemos mostrado que $|A|$ es homeomorfo al círculo y $|B|$ homeomorfo a la Botella de Klein y que estas álgebras son diferenciables y es evidente que esta regla es un homomorfismo inyectivo. Por otro lado, para $z \in |A|, |i|^{-1}(z)$ representa un círculo, veamos esto.

$$|i|^{-1}(z) = \{w \in |B| : |i|(w) = z\} = \{w \in |B| : w \circ i = z\}.$$

Sea $f \in A$, luego,

$$w \circ i(f) = z(f) \Rightarrow$$

$$i(f)(w) = f(z) \Rightarrow$$

$$g(w_1, w_2) = f(z) \Rightarrow$$

$$f(w_1) = f(z) \Rightarrow w_1 = z.$$

Por lo tanto $|i|^{-1}(z) = \{(w_1, w_2) \in |B| / w_1 = z\}$, lo cual representa una circunferencia.

Ejemplo 4.1.3. ***(El 2-cubrimiento del círculo.)***

Esta es la función del álgebra diferenciable $A = \{f \in C^{\infty}(R) / f(x+1) = f(x)\}$, en si misma definida por la fórmula,

$$f \to g : g(x) = f(2x).$$

la cual es un homomorfismo inyectivo. Ahora dado $z \in |A| \cong S^1$, tenemos que $|i|^{-1}(z) = \{2^{-1} \centerdot z, (z_1)\}$, en efecto, si $w \in |i|^{-1}(z) \Rightarrow |i|(w) = z \Rightarrow w \circ i = z$.

Sea $f \in A$. Luego

$$w \circ i(f) = z \circ f \Rightarrow$$

$$i(f)(w) = f(z) \Rightarrow$$

$$f(2w) = f(z) \Rightarrow$$

$$w = 2^{-1} \centerdot z.$$

"$|i|(z_1) = z$"

Ejemplo 4.1.4. ***(El primer cubrimiento fibrado de la línea sobre el círculo.)***

Sea $B = C^{\infty}(\mathbb{R})$ y sea A consistiendo de todas las funciones $f \in B$ para la cual la función $x \to f(1/x)$ y todas sus derivadas tienen límite finito cuando $x \to 0$. Elijamos una función $I : A \to C^{\infty}(S^1)$ y tal isomorfismo I hace que la inclusión de A en B corresponda a la función siguiente

$$R \to S^1 = \{(x,x)/x^2 + y^2 = 1\},$$

$$t \to \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

La imagen de esta función es el círculo con un punto removido, mostremos entonces la correspondencia I,

$$I : A \to C^{\infty}(S^1),$$

$$f \to I(f).$$

donde

$$\begin{aligned} I(f)(\theta(t)) &= i(f)(t), \\ \theta(t) &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), \\ I(f)(-1,0) &= \lim_{t\to\infty} I(f)(t). \end{aligned}$$

$\theta(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$*, es una función inyectiva, en efecto,* *si* $\theta(t) = \theta(s)$*, entonces*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}\right), \\ &\Rightarrow (1+s^2)(1+t^2) = (1-s^2)(1+t^2) \quad \wedge \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2s}{1+s^2}, \\ &\Rightarrow s^2 = t^2 \quad \wedge \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2s}{1+s^2}, \\ &\Rightarrow s = t. \end{aligned}$$

por otro lado

$$I(f)(-1,0) = \lim_{t\to\infty} I(f)(\theta(t)) \in \mathbb{R}.$$

pues

$$\lim_{t\to\infty} I(f)(\theta(t)) = \lim_{t\to 0} I(f)(\theta(1/t)) = \lim_{t\to 0} i(f)(1/t) = \lim_{t\to 0} f(1/t) \in \mathbb{R},$$

ya que $f \in A$*. De esta forma tenemos que la función*

$$I : A \to C^{\infty}(S^1),$$

$$f \to I(f).$$

está bien definida.

Sea $g \in C^\infty(S^1)$, *luego la función* $g \circ \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *es diferenciable y además* $g \circ \theta(1/t) = g \circ \theta(t)$. *De manera que* $g \circ \theta \in A \subseteq B$, *y es notorio que* $I(g \circ \theta) \equiv g$, *la linealidad y la inyectividad son fáciles de deducir. Por lo tanto la función*

$$I : A \to C^\infty(S'),$$
$$f \to I(f).$$

donde $I(f)(\theta(t)) = i(f)(t)$, *es un isomorfismo y así* $A \cong C^\infty(S^1)$, *asi entonces deducimos que* $i : A \to B$, *es un fibrado vectorial diferenciable, pues* $C^\infty(S^1)$ *es un álgebra diferenciable.*

Ahora si $z \in |A|$, *entonces*

$$z = |I|(x,y),$$
$$= (x,y) \circ I. \quad *$$

pues, como I es un isomorfismo, entonces $|I| : S^1 \to |A|$, *es un homeomorfismo por lo tanto* $|I|$ *es biyectiva.*

Pero $|i|^{-1}(z) = \{w \in |B| : w \circ i = z\}. \quad **$

Así dada $f \in A$, entonces

$$
\begin{aligned}
I(f)(\theta(w)) &= i(f)(w) = f(w),\\
&= w(i(f)),\\
&= w \circ i(f),\\
&= z(f)\\
&= (x,y) \circ I(f),\\
&= I(f)(x,y),\\
&\Rightarrow \theta(w) = (x,y).
\end{aligned}
$$

De manera que $|i|^{-1}((-1,0) \circ I) = \phi$, de lo anterior deducimos que $w = z$.
por lo tanto $\quad |i|^{-1}(z) = \{z\}$ *si* $x \neq (-1,0) \circ I$.

Ejemplo 4.1.5.

Sea $\quad \Pi_{TM} : TM \to M.$

$$(z, \varepsilon) \to z.$$

El correspondiente homomorfismo de álgebra diferenciales $C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(TM)$ es inyectivo y por tanto un fibrado. Note Π_{TM} puede ser considerada como la proyección de fibrados y es muy evidente que la fibra sobre $z \in M$ es $T_zM \cong \mathbb{R}^n$. Sólo resta probar que TM es una variedad diferenciable.

Bien sabemos que $TM = \bigcup_{z \in M} T_zM$ donde $T_zM = \{w\ /w$ es un vector tangente aM en $\quad z\}$.
Una función $w : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$, es un vector tangente en un punto z si,

1. *Es R-lineal:* $w\left(\sum_{j=1}^{k} d_j f_i\right) = \sum_{j=1}^{k} d_j w(f_i), d_j \in \mathbb{R}, f_j \in C^{\infty}(M).$

2. *La regla local de Leibniz.*

   $w(f.g) = f(z)w(g) + g(z).w(f); \quad f,g \in C^{\infty}(M).$

Defínase:

$(w+w')(f)=w(f)+w'(f),$ *Suma.*

$(\lambda.w)(f)=\lambda w(f), \lambda\in\mathbb{R},$ *producto por escalar.*

Así es T_zM es un espacio vectorial.

Sea $(x_1,...,x_n)$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad U de z, entonces, en tal sistema todo vector tangente $w\in T_zM$ es de la forma $w=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_z;\ \alpha_i\in\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que M y N son Variedades Diferenciables, sea $\varphi: M\to N$ una función diferenciable, entonces $\eta=w\circ\varphi^*: C^\infty(N)\to\mathbb{R}$, es un vector tangente en el punto $\varphi(z)$ de la variedad N en efecto.

1. *La R-linealidad es obvia.*

2. *La regla de Leibniz.*

$$\begin{aligned}
n(f.g) &= w(\varphi^*(f.g)) = w(\varphi^*(f).\varphi^*(g))\\
&= w(\varphi^*(f))(\varphi^*(g)(z)+(\varphi^*(f)(z))w(\varphi^*(g))\\
&= n(f)g(\varphi(z))+f(\varphi(z))n(g).
\end{aligned}$$

Recordar que $\varphi^*: F_N\to F_M$.

$$f\to f\circ\varphi.$$

$$\varphi^*(f)=f\circ\varphi.$$

Definamos la siguiente función .

$$\begin{aligned}
d_z\varphi: T_z(M) &\to T_{\varphi(z)}(N).\\
w &\to w\circ\varphi^*\\
&= d_z\varphi(w).
\end{aligned}$$

Esta función es llamada la diferencial de la función φ *en el punto* $z \in M$*, la cual es obviamente lineal.*

Supongamos ahora que existen φ, K*; función diferenciable, K una variedad diferenciable respectivamente, tal que* $\psi : N \to K$*, entonces* $d_z(\psi \circ \varphi) = d_{\varphi_z}\psi \circ d_z\varphi$ *en efecto.*

Sea $w \in T_z(M)$ *y* $f \in C^\infty(N)$*, luego* $w(\psi \circ \varphi)^*(f) = w(f \circ \psi \circ \varphi)$*,*

$$
\begin{aligned}
&= w(\varphi^*(f \circ \psi)) = (w \circ \varphi^*)(f \circ \psi, \\
&= (w \circ \varphi^*)(\psi^*(f)), \\
&= d_{\varphi(z)}\psi(w \circ \varphi^*)(f), \\
&= d_{\varphi(z)}\psi d_z\varphi(w)(f);
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\quad d_z(\psi \circ \varphi) = d_{\varphi(z)}\psi \circ d_z\varphi.$

Dotemos a T_M *de una estructura diferenciable, para esto tengamos presente los siguientes hechos:*

1. *Si* $W \subset \mathbb{R}^n$ *es un dominio abierto de un espacio aritmético. Entonces* T_M *es naturalmente identificado con el dominio* $W \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$*. Con la siguiente correspondencia.*

   Si $z \in W, z = (z_1, ..., z_n)$ *y* $w \in T_zW$ *entonces hay la correspondencia natural I*

   $$w \Leftrightarrow (z_1, ..., z_n, \alpha_1, ..., \alpha_n), \quad si \quad w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} / \mathrm{z}.$$

2. *La función natural de conjuntos*

   $$
   \begin{aligned}
   \Pi_{TM} :& TM \to M, \\
   & w \to z, \qquad\qquad donde \quad w \in T_zM.
   \end{aligned}
   $$

3. *Si $U \subset M$ es abierto, entonces*

$$\Pi_{TM}^{-1}(U) = \bigcup_{z \in U} T_z M = \bigcup_{z \in U} T_z U = TU.$$

pues, si $\exists\ U$ tal que $f|_U = g|_U$, entonces, si w es un vector tangente $w(f) = w(g)$. Para probar esto basta demostrar que para una función f tal que $f|_U = 0$, tenemos que $w(f) = 0$; existe una función $g \in C^\infty(M)$ tal que $g|_U = 0$, $g|_{M \setminus U}$, no tiene ceros.

Luego $f = g.f$ y por la regla de Leibniz tenemos que

$$w(f) = w(g.f) = f(z)w(g) + g(z).w(f) = 0,$$

pues $g(z) = 0 = f(z)$, hemos supuesto que $z \in U$, consideremos ahora una carta (U,X) de la variedad M, igual que en la linea $*$ podemos generar la función $TX : TU \to TW \subset R^{2n}$; donde $W = X(U)$ pues $X : U \to X(U) \subset R^n$ es homomorfismo diferenciable.

Recordemos que.

a) *$TX\,(V) = d_z X(V) = V \circ X^* \in T_{x(z)}W$.*

b) *TX es lineal, por tanto transporta bases en bases.*

c) *Como $V = \sum_{i=1}^{n} d_i \left(\frac{\partial}{\partial_{\text{xi}}} \right) / (\text{z}) \Rightarrow TX(V) = \sum_{i=1}^{n} d_i TX \left(\frac{\partial}{\partial_{\text{xi}}} \right) / \text{x(z)}$. Deducimos que TX es biyectiva.*

   Si las cartas $(U,X);(U',Y)$ son compatibles sobre M, entonces las correspondientes cartas $(\Pi_{TM}^{-1}(U),TX);(\Pi_{TM}^{-1}(U'),TY)$ son compatibles.
   Veamos como es $TY \circ TX^{-1} : T(W) \to T(W')$, donde $W' = Y(U')$.

Note que si

$$w = \sum_{i=1}^{n} d_i \left(\frac{\partial}{\partial_{\mathrm{xi}}} \right) / (\mathrm{z}) \Rightarrow$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} w(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial_{\mathrm{xi}}} \right) / (\mathrm{z}).$$

Tomemos otra base de T_zM, $\quad \{\frac{\partial}{\partial x_i}/z\}_{i=1}^{n}$, *entonces*

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{n} w(x_i) . \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}/z && Ver[3] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} w(x_i) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial x_i}/z, \\ &= \sum_{i=1}^{n} B_k \frac{\partial}{\partial y_k}/z; \quad B_k = \sum_{i=1}^{n} w(x_i) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}/z, \\ TY(w) &= \sum_{i=1}^{n} B_k TY \big(\frac{\partial}{\partial y_k} \big) / y(z) \in TW', \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} TW & \xrightarrow{TY \circ TX^{-1}} & TW' \\ \downarrow I & & \downarrow I \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R}^{2n}. \end{array}$$

Sea la función $\theta = I \circ TY \circ TX^{-1} \circ I^{-1} : W \times \mathbb{R}^n \to W' \times \mathbb{R}^n.$

$$(x_1(z), ..., x_n(z), \alpha_1, ..., \alpha_n) \to (x_1(z), ..., y_{n(z)}, B_1, ...B_n).$$

Donde $B_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}/z,$

Fijémonos en lo siguiente:

$$TX^{-1}(I^{-1}(x_{1(z)}, ..., x_{n(z)}, \alpha_1, ..., \alpha_{n)} = TX^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i TX \frac{\partial}{\partial x_i}/x(z) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}/z,$$

Ahora

$$TY \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}/z \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i TY \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (y_k)}{\partial x_i}/z \frac{\partial}{\partial y_k} \right) / y(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}/z \right) TY \big(\frac{\partial}{\partial y_k} \big) / y(z).$$

Aplicando I, tenemos que:

$$I(TY\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}/z\right) = (y_1(z),...,y_n(z),B_1,...,B_n).$$

Concluimos así que $TY\circ TX^{-1}$ es un difeomorfismo de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$, esto en vista de la función Θ y su matriz de Jacobi que de la forma

$$\begin{pmatrix} j & k \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

donde j es la matriz de Jacobi de la función $Y\circ X^{-1} : X(U)\to Y(U')$.
(Recordemos que $U\cap U'\neq\phi$).

Esto Demustra que $(\Pi_{TM}^{-1}(U),TX)$ y $(\Pi_{TM}^{-1}(U'),TY)$ son compatibles si (U,X) y (U',Y) son compatibles.

Ahora si $A=\{(U_k,X_k)\}$ es un Atlas para M entonces $TA=\{(\Pi_{TM}^{-1}(U_k),TX_k)\}$ es un atlas para TM, con las mismas características y propiedades generadas por el atlas A, por lo tanto TM es u na variedad diferenciable.

4.2. Categorías de Fibrados

Un morfismo de fibrado $i_1 : A\to B_1$, en $i_2 : A\to B_2$ es un homomorfismo algebraico $\varphi : B_2\to B_1$, haciendo conmutar el diagrama

O equivalentemente a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} {|B_1|} \arrow[rr, "|e|"] \arrow[dr, "|i_1|"'] & & {|B_2|} \arrow[dl, "|i_2|"] \\ & {|A|} & \end{tikzcd}$$

sea commutativo.

Esto signitica que la función $|\varphi|$ toma la fibra de un fibrado y la incluye en otra fibra: $|\varphi|(|i_1|^{-1}(a)) \subset |i_2|^{-1}(a)$

$$\begin{aligned} & x \in |\varphi|(|i_1|^{-1}(a)), \\ & \Rightarrow x = |\varphi|(w), \qquad\qquad \text{“}|i_1|(w) = a\text{”} \\ & \Rightarrow x = w \circ \varphi, \\ & \Rightarrow x = w \circ i_1 \circ i_2^{-1}, \\ & \Rightarrow x = |i_2|^{-1}(a). \end{aligned}$$

Igualmente $\varphi(i_2(\mu_a).B_2) \subseteq (i.(\mu_a).B_1$ para todo punto $a \in |A|$.

Notar que $\varphi(B_2) \subset B_1$, $i_2(M_a) \subset\ B_2 i_1 = \varphi \circ i_2$;

por lo tanto $\varphi(i_2(M_a).B_2) = \varphi((i_2(M_a))\varphi(B_2) \subseteq \varphi(i_2(M_a)).B_1 = i_1(M_a).B_1$.

La totalidad de todos los fibrados sobre un álgebra $A = C^\infty(M)$, junto con todos los morfismos entre estos contituyen la categoría de fibrados sobre M.

Los fibrados i_1, i_2 son equivalentes cuando φ es un isomorfismo, el fibrado i_1 es llamado subfibrado del fibrado i_2 cuando φ es sobreyectivo, lo que corresponde a la propiedad de envedimiento de variedad $|B_1| \to |B_2|$.

Ejemplo: $\quad M \times F \xrightarrow{\Pi_1} M$; algebraicamente $i : C^\infty(M) \to \overline{A \otimes C}, \quad C = C^\infty(F)$.

Un fibrado equivalente a uno de este tipo es referido como un fibrado trivial, un por paquete es un fibrado que localmente es trivial.

Pasemos a otro punto.

Localización.

Sea A un anillo conmutativo con unidad y $S \subset A$ un conjunto multiplicativo, es decir, $0 \notin S, I \in S$ y S es cerrado con respecto a la multiplicación, en $A \times S$. Introduzcamos las siguiente relación:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S : s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0.$$

Denotaremos la clase de equivalencia del par (a, s) por $\frac{a}{s}$ y es llamada fracción formal, al conjunto de todas las clases será denotado por $S^{-1}A$, la suma y el producto de fracciones formales es la misma que en el conjunto de los números racionales.

El anillo resultante $S^{-1}A$ es referido como la localización del anillo A sobre el sistema multiplicativo S ver [7], análogamente se puede hacer un médulo B sobre A y agregando la multiplicación de un elemento de $S^{-1}P$ por un elemento de $S^{-1}A$ como sigue: $\frac{a}{s_1}.\frac{p}{s_2} = \frac{a.p}{s_1.s_2}$; hemos vuelto al conjunto $S^{-1}P$ en un $(S^{-1}A)$-módulo. Por otro lado, supongamos que $\varphi : P \to Q$, es un homomorfismo de A-módulos.

Luego la función

$S^{-1}(\varphi) : S^{-1}P \to S^{-1}Q$,

$\left(\frac{p}{s}\right) \to \frac{\varphi(p)}{s}$.

representa un homomorfismo de $(S^{-1}A)$-módulos.

Ejemplo 4.2.1.

1. *Si A no tiene divisores de cero y $S = A \diagdown \{0\}$, entonces $S^{-1}A$ es el campo cociente de A.*

2. *Sea $A = Z$ y $S = \{10^n, n \geq 1\}$, entonces $S^{-1}A$ consiste de todos los números racionales que tienen representación decimal finita, pues basta aplicar la relación $s(a_1 s_2 - a_1 s_1) = 0$.*

Teorema 4.2.1.

Sea U un subconjunto abierto en la variedad M. Supongamos

$$A = C^\infty(M) \quad y \quad S = \{f \in A / f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U\},$$

entonces $S^{-1}A \cong C^\infty(U)$, y el homomorfismo canónico
$i : C^\infty(M) \to C^\infty(U)$, coincide con la restricción $i(f) = f|_U$.

Demostración

Sea $\alpha; S^{-1}A \to C^\infty(U)$ dada por $\alpha\left(\dfrac{f}{s}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{s(x)}, f, s \in S, x \in U$.

a) α es $1-1$, pues si $\alpha\left(\dfrac{f_1}{s_1}\right) = \alpha(\dfrac{f_2}{s_2})$ entonces la función $f_1 s_2 - f_2 s_1 \equiv 0$, sobre U, por lema,existe una función $g \in C^\infty(M)$ tal que $g|_U \neq 0$, $\quad g|_{(M \setminus U)} = 0$, es decir $g \in S$, luego $g(f_1 s_2 - f_2 s_1)|_U = 0$ y $g(f_1 s_2 - f_2 s_1)|_{(M \setminus U)} = 0$. Por definición de clases $\dfrac{f_1}{s_1} = \dfrac{f_2}{s_2}$.

Para ver que α es sobreyectiva probemos el siguiente lema. ■

Lema 4.2.1.

Suponga que $U \subset M$ es abierto y $f \in C^\infty U$, entonces existe una función $g \in C^\infty(M)$, sin ceros en U, tal que el producto $f.g$ puede ser extendido a toda la variedad M, así $\quad f = \alpha\left(\dfrac{f.g}{g}\right)$.

Demostración:

Existe una función $g \in C^{\infty}(M)$ tal que $g|_U \neq 0$, y $g|_{(M\setminus U)} = 0$. Luego la función $f.g \in C^{\infty}(U)$ y en cierta forma $f.g$ se extiende hacia $\overline{U}$. La demosración se sigue del lema de Tietze diferencial o de extensión Ver[3]. ■

Con todo lo anterior ya estamos dispuestos a dar una definición algebraica de lo que es un fibrado por paquete.

Recordemos que un homomorfismo de k-álgebras $\varphi : A \to B$, cambia anillos.

Todo B-módulo R puede ser considerado como un A-módulo con la multiplicación $a.x = \varphi(a); x, q \in A, y \in R$, en particular la misma álgebra B puede ser considerada como un A-módulo, así pues dado un conjunto multiplicativo $S \subset A$, el $(S^{-1}A)$-módulo $S^{-1}B$ está definido.

Procedamos entonces a dar la definición mencionada.

Definición 4.2.1.

Sean A, B y F álgebras defirenciales un homomorfismo $i : A \to B$ es llamado un fibrado por paquete $|B|$ sobre $|A|$ con fibra $|F|$ si $\forall z \in |A|$ existe una vecindad $U_z \subset |A|$ sobre la cual la localización de i es equivalente al fibrado producto.

$S_z^{-1}A \to \overline{S_z^{-1}A \otimes F}$.

Donde $S_z \subset A$ es un sistema multiplicativo de U_z. Esto es el conjunto de todos los elementos de A sin ceros en U_z, más exactamente existe un isomorfismo algebraico

$P = S_z^{-1}B \to \overline{S_z^{-1} \otimes F}$ *que hace conmutar el triangulo.*

Donde $J(a) = a \otimes 1$.

Un por paquete Π *es trivial si y sólo si la previa condición es satisfecha por* $U_z = M$. *Hacemos ahora la definición geométrica y la equivalencia entre estas definiciones es obvia.En vista de que* $|C^{\infty}(M)| \cong M$.

4.3. Fibrados por Paquetes

En esta última sección se presenta la definición algebraica de lo que es un fibrado diferenciable por paquetes, haciéndose notorio la equivalencia con la definición geométrica ya conocida.

Definición 4.3.1.

Sean E *y* M*, variedades diferenciable.*

Una función diferenciable $\Pi : E \to M$ *se dice que es un fibrado por paquete, si para cierta variedad* F*, las siguientes condiciones son dadas: Todo punto* $x \in M$ *tiene una vecindad* $U \subseteq M$*, para la cual existe un difeomorfismo trivializante.* $\varphi : \Pi^{-1}(U) \to U \times F$*, que cierra el diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "P"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

P *es la proyección sobre el primer factor* M, F *y* E *son referidos como la base, la fibra y el espacio total del fibrado por paquete , respectivamente , Sea* $x \in M$ *la fibra sobre* x *es* $\Pi_x = \Pi^{-1}(x)$*. La fibra sobre todo punto está equipada con la estructura de subvariedad de* E *es defeoforma a la otra fibra fija* F*.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.3.1.

El fibrado de la linea sobre el círculo,donde representamos el círculo como el conjunto de números complejos con módulo uno, definamos entonces la siguiente función

$$\Pi : \mathbb{R} \to S^1,$$
$$C \to e^{it}.$$

Sea $x \in S^{-1}$, *todo intervalo conteniendo al punto* x *puede ser tomado como la vecindad* U. *Para establecer la condición de trivialidad local veamos el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & U \times Z \arrow[dl, "\Pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(t+2k.\pi) = (e^{it}, k)$, *esto en vista de que la fibra sobre un punto* $x = e^{it}$ *es* $\Pi^{-1}(e^{it}) = \{t + 2n\pi, n \in z\}$, *así pues, los elementos de* $\Pi^{-1}(U)$ *son de la forma* $t + 2n.\pi$, *donde* $t \in \mathbb{R}$ $\quad, n \in Z$ *y* π *es un número real.* φ *es evidentemente un difeomorfismo tal que* $\pi_1 \circ \varphi = \pi$.

Ejemplo 4.3.2.

El fibrado $\Pi : S^n \to \mathbb{R}P^n \quad x \to Ł_{X_0}$ *toma un* $x \in S^n$ *y le asigna la recta que pasa por* x *y el origen, notemos que* $\Pi^{-1}(L_{x_o}) = \{x, -x\}$, *veamos el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\Pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$F = \{N, S\}$, *donde*

$$\varphi(x) = \begin{cases} (Lx_o, N) \quad si \quad (x, e_{n-1}) \geq 0 \\ (Lx_o, S) \quad si \quad (x, e_{n+1}) < 0 \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(Lx_o, N) = Lx_o \cap S^{n+},$$

$$\varphi^{-1}(Lx_o, S) = Lx_o \cap S^{n-}.$$

Esto es

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}P^n, N) = S^{n+}.$$

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}P^n, S) = S^{n-},$$

Es notorio que $\Pi_1 \circ \varphi = \Pi$ y es parte de un argumento para mostrar que φ es un difeomorfismo.

Ejemplo 4.3.3. ***(La Banda de Möbius M es un fibrado por paquete sobre el círculo.)*** *M es vista como la banda $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ con los puntos $(0,y)$ y $(1,-y)$ identificándose para todo número $y \in \mathbb{R}$, y el círculo es visto como el segmento $[0,1]$ que identifica los puntos finales* 0 *y* 1.

$$\phi : S^1 \leftarrow [0,1],$$
$$x \leftarrow t,$$
$$e^{2\pi i t} = x.$$

En la condición de trivialidad local;

si $x = 0, \quad U = \{x \in S : x \neq \frac{1}{2}\},$

Defendiendo $\begin{array}{l} \Pi : M \to S, \\ (x,y) \to x. \end{array}$

tenemos que $\Pi^{-1}(U) = [0,\frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2},1]) = M - \frac{1}{2} \times \mathbb{R} \quad$ *si* $x = 0.$

Definamos $\varphi : \Pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ *como sigue*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x,y) & si \quad x < \frac{1}{2} \\ (x,-y) & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

notemos que

$$\left(\varphi/_{\Pi^{-1}(x)}\right)_{x<\frac{1}{2}}(x,y) = {}^{(\mathrm{I(x),I(y)})}\!/_{[0,1/2)\times\mathbb{R}}.$$

$$\left(\varphi/_{\Pi^{-1}(x)}\right)_{x>\frac{1}{2}}(x,y) = {}^{(\mathrm{I(x),-I(y)})}\!/_{(1/2,1]\times\mathbb{R}}.$$

Así pues es notorio que φ es un difeomorfismo local, para el caso en que $x=0$ ó $x=1$ $\varphi = I_{\mathbb{R}_2}, U=[0,1)$ note que las fibras son líneas verticales lo que representa lazos.

Ejemplo 4.3.4.

(El fibrado por paquete total sobre las grasmaniana.)

Suponga que $\sigma_{n,k}$ es la variedad grasmaniana, donde los puntos son sub-espacios lineales k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$, sea E_nk el conjunto de todos los pares (x,L) tales que $x\in L\in\sigma_{n,k}$, así veremos a $E_{n,k}$ como una sub-variedad en $\mathbb{R}^n\times\sigma_{n,k}$, la correspondencia $\theta=\theta_{n,k}:E_{n,k}\to\sigma_{n,k}$; $(x,L)\to L$ define fibrado.

Para probar que es un fibrado por paquete usaremos un cubrimiento abierto $\{U_I\}$ de la variedad $\sigma_{n,k}$, los conjuntos abiertos U_I donde $I=\{i_1,...,i_k\}\quad 1\leq i_k\leq 1$ son por definición el conjunto de k-planos que no se degeneran bajo la proyección sobre $\mathbb{R}^k_I$ a lo largo de $\mathbb{R}^{n-k}_{\widetilde{I}}$, donde $\widehat{I}=\{1_1,...,n\}\diagdown I$.
$\mathbb{R}^k_j$ son k-planos generados por vectores básicos con etiquetas en j.

Si $x\in L\in U_I$ entonces para el par (x,L) le asignamos el par $(\widetilde{x},L)$ donde $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^k_I\cong\mathbb{R}^k$ es la proyección de x a lo largo de $\mathbb{R}^{n-k}_{\widehat{I}}$ sobre $\mathbb{R}^k_I$. “$P(x)=\widetilde{X}$”.

Observe que $x = \sum_{i=1}^{k} x^i e^i + \sum_{i=k+1}^{n} x^i.e^i$.

$$\begin{tikzcd} E_{n,k} \supset \theta^{-1}(U_I) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & & U_I \times \mathbb{R} \arrow[dl, "\Pi_1"] \\ & U_I & \end{tikzcd}$$

$\varphi(x,L) = (\mathbb{P}(x), L)$. *"En términos de base se deduce la biyección de* φ*".*

Se deduce que φ *es un difeomorfismo, pues* $\mathbb{P}^{-1}(x) \in L_{\widetilde{x}}$*, donde* $L_{\widetilde{x}}$ *contiene al punto x, tal que* $\mathbb{P}(x) = \widetilde{x}$*.*

Ejemplo 4.3.5. *El fibrado por paquete tangente* $\Pi_{TM} : TM \to M$ *si* (U, X) *es una carta sobre M, el correspondiente difeomorfismo trivializante*

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} TU, (z,q) \xrightarrow{\phi} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial x_i} / z \in T_z M \subset TU.$$

Recordemos que $\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial x_i} / z \in T_z M \subset TU$ *y* $\Pi_{TM}^{-1}(U) = \bigcup_{z \in U} T_z U = TU$

$TU \xrightarrow{I} \Pi_{TM}^{-1}(U)$*, así* $\varphi = I \circ \phi$ *es un difeomorfismo.*

Al notar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi^{-1}"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\Pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ I^{-1}$

$\Pi_1(\phi^{-1} \circ I^{-1})(v) = \Pi_1(\phi^{-1}(v|_U)) = \Pi_1(z,q) = z = \Pi(v)$

concluimos que $\Pi_1 \circ \varphi^{-1} = \Pi$.

Definición 4.3.2.

Una sección de un fibrado por paquete $\Pi : E \to M$ *es una función diferenciable* $S : M \to E$ *que asigna a cada punto* $x \in M$ *un elemento de la fibra sobre este punto:* $S(x) \subset \Pi_x$*, en otros términos es la condición de que* $\Pi \circ S = Id_{(M)}$*, el conjunto de todas las secciones es denotado por* $\Gamma(\Pi)$*, en el lenguaje algebraico una sección de un por paquete* $i : A \to B$ *es representada por un homomorfismo algebraico.*

$h : B \to A$ *de inverso izquierdo a i, esto es* $h \circ i = Id_a$*.*

Ejemplo 4.3.6.

El fibrado por paquete de $\Pi : \mathbb{R} \to S^1,$

$$t \to e^{it}.$$

no tiene secciones, pues si suponemos que $f : S^1 \to \mathbb{R}$*, es una función diferenciable y* $\Pi \circ S = I_d S^1$ *entonces, esto implica que la restricción* $\Pi_{f(S^1)} : f(S^1) \to S^1$*, es un difeomorfismo del conjunto* $f(S^1) \subset \mathbb{R}$ *en* S^1*, Ahora, la imagen de la función continua* $f : S^1 \to \mathbb{R}$ *es ciertamente un segmento* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, y esto no puede ser un homeomorfismo sobre círculo.*

Ejemplo 4.3.7.

Las secciones del fibrado por paquete tangente son interpretadas como campos de vectores sobre M*.*

Bibliografía

[1] LIMA E., (1973) *Variedades Diferenciables* , IMPA, Río de Janeiro.

[2] SPIVAK M., (2000) *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[3] LEE M. JOHN, *Introduction to Smooth Manifolds*,(2003), Spring-Verlag.

[4] JAMES MUNKRES, *Topología* ,(2000),Segunda Edición, Prentice-Hall

[5] HUSEMOLLE DALE, *Fibre dundles* ,(1994),Tercera Edición. Springer-Verlag.

[6] NESTRUEV JET, *Manifolds and Observables*,(2003), Spring-Verlag.

[7] ATIYAH M.F., MACDONALD I. G., *Álgebra Conmutativa*,(1973), Publicaciones Reverté.

[8] JORGE SÁENZ, *Introducción a las Variedades Diferenciables*(1995), Departamento de Matemáticas, Decanato de Ciencis y Tecnología.

[9] HUNGERFORD W., THOMAS, *Álgebra*,(1980), Springer.

[10] GREUB W.H, *Multilinear Algebra*,(1967), Spring-Verlag.