Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado
Maestría en Ciencias - Mención Matemática

Atractores de Transformaciones que Preservan Potencias del Shift

Lcda. Dorka Chaves

Barquisimeto, Venezuela
2008

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado
Maestría en Ciencias - Mención Matemática

Atractores de Transformaciones que Preservan Potencias del Shift

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum Mención Matemáticas

Autora: Lcda. Dorka Chaves
Tutor: Dr. Neptalí Romero

Barquisimeto, Venezuela
2008

A Dios y A mi Familia

Agradecimientos

A Dios Omnisapiente, que sin su iluminación y guía no podría haber alcanzado esta meta.

A mis padres por darme la vida, en especial a mi madre por su confianza en que podría alcanzar esta meta.

A mi amado Jorge, que sin su amor, bondad, apoyo y confianza hacia mí el camino fuese sido más largo y tortuoso.

A mi hermano Daniel por su gran colaboración en el área computacional.

Al profesor Neptalí Romero, sus conocimientos y experiencia fueron invaluables en la realización del presente trabajo.

Al profesor Francisco Montes de Oca, por su incidencia en mi formación como matemática.

A mis amigos y colegas Yves Nogier y Elimar Marchán, por su consejo y atención hacia mi.

A todos mis compañeros de clase y mis colegas que de una u otra forma me han ayudado en mis estudios.

A todos los profesores que me impartieron clase y me formaron intelectualmente.

A la UCLA donde recibí mi formación profesional.

A todos aquellos que no nombro pero que han sido copartícipes en este trabajo, mil perdones por la omisión.

A todos mis más sinceras gracias.

Resumen

En este trabajo se consideran los sistemas dinámicos discretos generados por transformaciones que preservan potencias de las transformaciones shifts. En virtud del teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon in Topological Dynamics, tales transformaciones son denominadas $(k_1, \cdots, k_d) -$ *autómatas celulares*; donde $k_1, \cdots, k_d$ son los enteros positivos para los cuales una tal transformación $F : A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$ conmuta con $\sigma_i^{k_i}$ para todo $i = 1, \cdots, d$. Obviamente cuando $k_i = 1$ para cada $i = 1, \cdots, d$, F es , en efecto, un autómata celular $d -$ *dimensional*. Debido a la importancia del estudio de la dinámica de los autómatas celulares, como modelos discretos en diferentes problemas que aparecen en distintos campos del conocimiento científico, la relevancia del estudio de similares propiedades para los $(k_1, \cdots, k_d) -$ *autómatas celulares* en general es inmediata.

El primordial objetivo del presente trabajo consiste en presentar la extensión de la clasificación en términos de sus atractores y propiedades de equicontinuidad para autómatas realizadas por Hurley y Kůrka para k-autómatas celulares en el caso unidimensional, ver [11] y [14].

Índice general

Introducción

Los autómatas celulares fueron introducidos por Jhon von Neuman a inicios de los años 1950's, cuando se propuso desarrollar un robot que tuviese la capacidad de auto-reproducirse. Un autómata celular es un sistema dinámico que evoluciona a tiempo discreto, su espacio fase es un espacio producto de un alfabeto, la ley que gobierna la evolución del sistema se expresa mediante una regla local, la cual indica los cambios de estado en cada célula a partir de un número finito de células vecinas en una vecindad uniforme.

En 1969, G. A. Hedlund escribió un trabajo, ver [10], considerado pionero en la formalización matemática de la teoría de los autómatas celulares, estos son estudiados en términos de la dinámica simbólica, como endomorfismos en el espacio de sucesiones bi-infinitas con valores en un conjunto finito; allí se muestra una caracterización de los autómatas celulares. De hecho, una transformación continua es un autómata celular si y sólo si conmuta con la transformación *shift*.

Varios intentos de clasificación de los autómatas celulares se han venido realizando desde la década de los años 70 y 80 en el siglo XX. La primera de estas clasificaciones fue aportada por Wolfram, ver [17], la cual, desde el punto de vista computacional, ofrece una informal clasificación en cuatro clases de complejidad en el comportamiento de los autómatas celulares, dependiendo de su comportamiento sobre configuraciones finitas. Cabe destacar que el kernel del software Mathematica, el cual fue desarrollado por Wolfram, utiliza autómatas celulares. Posteriormente, Gilman, ver [8] y [9], introduce una clasificación de los autómatas celulares unidimensionales basado en el concepto de equicontinuidad. Luego Culik, Hurd y Yu, ver [5], clasificaron los autómatas celulares de acuerdo al comportamiento sobre finitas configuraciones; Hurley en [11] estudia los atractores en autómatas celulares, allí se hace una clasificación de los autómatas celulares en función de sus atractores y cuasi-atractores en el sentido de Conley. Finalmente, Kůrka en [13] y [14] hace un refinamiento de la clasificación realizada por Hurley, ésta se lleva a efecto empleando el concepto de lenguajes y ampliando la dinámica de aquellos que son equicontinuos.

El presente trabajo está desarrollado como sigue:

En el capítulo 1 se establecen los ingredientes que se necesitan para la definición rigurosa de autómata celular, los cuales se definen sobre un espacio fase o de configuraciones $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que es un espacio producto de un alfabeto $\mathcal{A}$, este último es un conjunto finito. Seguidamente señalamos la estructura topológica sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, el cual es un espacio de Cantor con la topología producto, que es equivalente a la topología inducida por la métrica de Cantor. Cabe destacar que se dedica especial atención a las transformaciones *shift* dado que son parte fundamental de los $(k_1, \cdots, k_d)-$ *autómatas celulares.* A continuación se establecen la definición, ejemplos y resultados importantes de los autómatas celulares $d-$dimensionales, para posteriormente establecer la extension de dichos resultados. Para cerrar, se da la definición de *atractores* propuesta por C. Conley y la definiciones de *atractores minimales, cuasi-atractores y recurrencia por cadenas* y algunos resultados relacionados con dichos conceptos.

En el capítulo 2 se da la definición rigurosa de k-autómata celular y la extensión del teorema de Hedlund para k-autómatas celulares, también se encuentran un par de resultados, junto con sus demostraciones, que serán usados en el capítulo 3.

En el capítulo 3 se encuentra el objetivo principal de este trabajo, las clasificación de los k-autómatas celulares en términos de sus atractores y la clasificación basada en la equicontinuidad que refina la primera. Se da inicio con el estudio de algunas propiedades básicas de los atractores de k-autómatas celulares, pasando por la extensión de la clasificación Hurley para k-autómatas celulares, para finalmente estudiar algunas propiedades dinámicas de los k-autómatas celulares, como son las nociones de equicontinuidad, transitividad y sensibilidad, estableciendo la extensión de la clasificación de Kůrka para k-autómatas celulares.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

La idea de este capítulo es presentar gran parte de la terminología, junto con algunos teoremas y definiciones, que vamos a usar en el presente trabajo.

1.1. Espacio de Configuraciones

Para llegar a establecer la definición clásica de autómata celular (AC) se requiere considerar un espacio topológico especial donde estos actúan.

***Definición* 1.1.** *Dado un conjunto finito cualquiera $\mathcal{A}$ con al menos dos elementos; fijado un entero positivo d, se considera el retículo*

$$\mathbb{Z}^d = \{(n_1, \ldots, n_d) : n_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d\}$$

donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de todos los enteros. Entonces el conjunto

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} = \prod_{\mathbb{Z}^d} \mathcal{A}$$

es llamado espacio de configuraciones*.*

El conjunto finito $\mathcal{A}$ se denomina *alfabeto*, y generalmente es el anillo de los enteros módulo N, esto es, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$. Así, un elemento en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es una sucesión d-infinita con valores en el alfabeto, cada elemento de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ se le conoce como una *configuración.*

Por ejemplo una configuración 1-dimensional sobre el alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ es toda sucesión $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de ceros y unos, mientras que una configuración 2-dimensional en $\mathcal{A}$ es cualquier sucesión $\{x(n, m)\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$; ver figura 1.1.

Consideremos sobre el alfabeto $\mathcal{A}$ la topología discreta, y dado que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un producto, puede asociarse una estructura topológica natural: la topología producto

	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cdots$	$X_{(-2,1)}$	$X_{(-1,1)}$	$X_{(0,1)}$	$X_{(1,1)}$	$X_{(2,1)}$	$\cdots$
$\cdots$	$X_{(-2,0)}$	$X_{(-1,0)}$	$X_{(0,0)}$	$X_{(1,0)}$	$X_{(2,0)}$	$\cdots$
$\cdots$	$X_{(-2,-1)}$	$X_{(-1,-1)}$	$X_{(0,1)}$	$X_{(1,1)}$	$X_{(2,1)}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Figura 1.1: Una configuración en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, cada $x(n,m) \in \mathcal{A}$, con $d = 2$.

De esta forma la topología producto en el espacio de configuraciones $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es la menor de todas las topologías en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que, para cada $\overline{n} \in \mathbb{Z}^d$ la proyección $\pi_{\overline{n}} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}$ dada por

$$\pi_{\overline{n}}\left(\{x(\overline{m})\}_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^d}\right) = x(\overline{n})$$

es una aplicación continua. Esto significa que la topología producto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tiene como una base, la colección de todos los subconjuntos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que son de la forma $\prod\limits_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d} V_{\overline{n}}$, donde

$$V_{\overline{n}} = \begin{cases} U_{\overline{n}} & \text{si } \overline{n} \in K \\ \mathcal{A} & \text{si } \overline{n} \notin K \end{cases}$$

siendo $U_{\overline{n}}$ un subconjunto unitario de $\mathcal{A}$ y K cualquier subconjunto finito de $\mathbb{Z}^d$. Nótese que al fijar un número $k \geq 1$ de entradas en $\mathbb{Z}$, digamos $\overline{n}_1, ..., \overline{n}_k$; y k letras de $\mathcal{A}$ (no necesariamente distintas), digamos $a_1, ..., a_k$, entonces el conjunto

$$C(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k; a_1, \ldots, a_k) = \{\{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d} / x(\overline{n}_j) = a_j \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k\} \tag{1.1.1}$$

es un elemento básico de la topología producto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$; de hecho, todos los elementos de la base que hemos descrito arriba son de esta forma. Todos los abiertos básicos como en (1.1.1) son denominados *cilindros*, los cuales, además de ser abiertos por definición, son también conjuntos cerrados en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ pues sus complementos son la unión (disjunta) finita de cilindros.

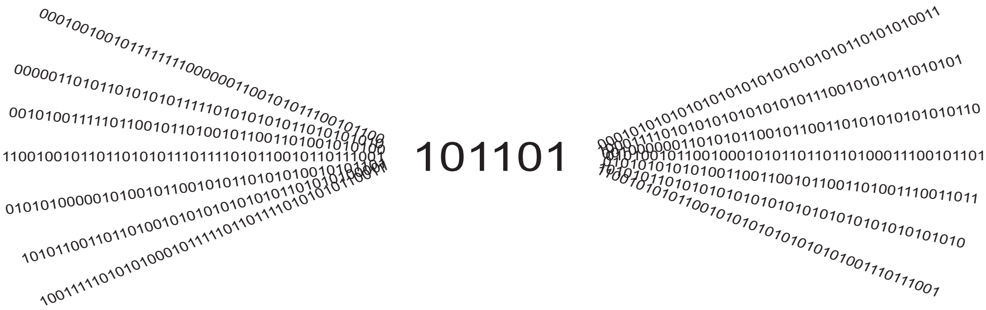

Figura 1.2: Cilindro tal que $\overline{n}_1 = 0, ..., \overline{n}_6 = 6$ y $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 1$. con $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

1.2. Propiedades Topológicas del Espacio $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$

Dado que $\mathcal{A}$ es un conjunto finito, si consideramos sobre él la topología discreta, entonces $\mathcal{A}$ es un conjunto compacto; sigue del teorema de Tychonoff, que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es compacto. Por otro lado, recordemos que un espacio topológico X es perfecto si no tiene puntos aislados. En nuestro caso, considerando un alfabeto no trivial; esto es, $\mathcal{A}$ con cardinal mayor o igual a 2, cada cilindro tiene más de un elemento, en consecuencia $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un espacio topológico perfecto con la topología producto. Veamos que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es totalmente disconexo; esto es, cualquier par de puntos distintos pueden ser separados por conjuntos que son al mismo tiempo abiertos y cerrados. En efecto, sean las configuraciones $x = \{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$ y $y = \{y(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que $x \neq y$, luego existe $\overline{m} \in \mathbb{Z}^d$ de manera que $x(\overline{m}) \neq y_{\overline{m}}$. Consideremos los cilindros $C(\overline{m}; x(\overline{m}))$ y $C(\overline{m}; y(\overline{m}))$, tales cilindros satisfacen que $x \in C(\overline{m}; x(\overline{m}))$ y $y \in C(\overline{m}; y(\overline{m}))$; y además son disjuntos.

Un espacio topológico se dice *espacio de Cantor* si es no vacío, compacto, perfecto y totalmente disconexo. De lo anterior se concluye que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un espacio de Cantor, además, es bien conocido que todos los espacios de Cantor son homeomorfos entre si.

La siguiente función $d : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to [0, +\infty)$ define una métrica, conocida como *métrica de Cantor*, compatible con la topología producto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x(n) = y(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^d \\ 2^{-i}, & \text{si } x \neq y \end{cases},$$

donde $i = \inf \left\{ \|n\| : n \in \mathbb{Z}^d,\, x(n) \neq y(n) \right\}$ y $\|n\| = \max \{|n_i| : 1 \leq i \leq d\}$ siempre que $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Note que para cualquier par de configuraciones $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que $x \neq y$, $d(x, y) < 2^{-i}$ si y sólo si $x(n) = y(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$ con $\|n\| \leq i$.

1.3. Transformaciones Shift

En el espacio de configuraciones $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe un conjunto de transformaciones, que son homeomorfismos, de especial importancia en la teoría general de los sistemas dinámicos, son la *transformaciones Shifts* o desplazamientos. Sea $1 \leq j \leq d$, denotamos por e_j al j-ésimo vector canónico en el retículo $\mathbb{Z}^d$, se define el shift en la dirección de e_j como $\sigma_j : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ dada por:

$$\sigma_j(x)(\overline{n}) = x(\overline{n} + e_j), \text{ para cada } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ y } \overline{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Para cada $1 \leq j \leq d$, σ_j es caótica en el sentido de Devaney; esto es;

1. transitivo: para cualquier par de abiertos no vacíos U y V en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe $n \geq 1$ tal que $\sigma_j^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

2. el conjunto de puntos periódicos es denso en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$; y

3. sensible a las condiciones iniciales: existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existen $y \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ (bola abierta, en la métrica de Cantor, centrada en x de radio ε) y $n \geq 1$ tales que $d\left(\sigma_j^n(x), \sigma_j^n(y)\right) \geq \delta$.

Es bien conocido, ver [3], que las dos primeras condiciones implican la tercera.

Antes es conveniente caracterizar el conjunto de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que para cada entero $k \geq 1$ fijo y $1 \leq j \leq d$ se cumple $\sigma_j^k(x) = x$. Cualquier configuración $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ puede ser interpretada como un arreglo $d-$dimensional infinito. Si $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, entonces $x(\overline{n}) = a_{n_1 \ldots n_d}$ con $a_{n_1 \ldots n_d} \in \mathcal{A}$, luego $\sigma_j^k(x)(\overline{n}) = x(\overline{n} + e_j) = x(\overline{n})$ implica que

$$a_{n_1 \ldots n_{j-1}(n_j+k)n_{j+1} \ldots n_d} = a_{n_1 \ldots n_{j-1} n_j n_{j+1} \ldots n_d}$$

Esto es fijados $d-1$ enteros: $n_1, \ldots, n_{j-1} n_{j+1}, \ldots, n_d$ en el renglón

$$\{(n_1, \ldots, n_{j-1}, m, n_{j+1}, \ldots, n_d) : m \in \mathbb{Z}\}$$

del retículo $\mathbb{Z}^d$, la sucesión unidimensional $\{a_{n_1, \ldots, n_{j-1}, m, n_{j+1}, \ldots, n_d}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es la concatenación infinita de una misma palabra ω de longitud k. Por ejemplo los arreglos 2-dimensionales infinitos dados en la siguiente figura:

	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\cdots$	a	b	a	b	$\cdots$
$\cdots$	c	d	c	d	$\cdots$
$\cdots$	a	b	a	b	$\cdots$
$\cdots$	c	d	c	d	$\cdots$
	⋮	⋮	⋮	⋮	

	⋮	⋮	⋮	
$\cdots$	b	d	f	$\cdots$
$\cdots$	a	c	e	$\cdots$
$\cdots$	b	d	f	$\cdots$
$\cdots$	a	c	e	$\cdots$
	⋮	⋮	⋮	

representan puntos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ que cumplen con $\sigma_1^2(x) = x$, la sucesión de la izquierda, y $\sigma_2^2(x) = x$, la de la derecha, de acá se sigue inmediatamente que para cada $k \geq 1$ y $1 \leq j \leq d$, σ_j tiene infinitos puntos que satisfacen $\sigma_j^k(x) = x$. Sin embargo, al considerar el problema de encontrar $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que $\sigma_j^k(x) = x$ para todo $1 \leq j \leq d$, encontramos que tal conjunto de configuraciones es no vacío y finito.

Transitividad: Sean $U = B_{2^{-r(x)}}$ y $V = B_{2^{-l(y)}}$, veamos que $\sigma_j^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para algún $m \geq 1$. Sea $z \in U$ luego $z(\overline{n}) = x(\overline{n})$ para todo $\| \overline{n} \| \leq r$.

Consideremos $\overline{n} \in \mathbb{Z}^d$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $\|\overline{n}\| < l$ y $|m| < l - \|\overline{n}\|$ entonces $\sigma_j^m(z)(\overline{n}) = y(\overline{n})$, es decir, $\sigma_j^m(z) \in V$.

Densidad de órbitas periódicas: Sean $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $\varepsilon > 0$ y $l \geq 1$ entero tal que $2^{-l} \leq \varepsilon$. Veamos que la bola $B_{2^{-l}}(x)$ hay puntos periódicos simultáneos de σ_j para todo $1 \leq j \leq d$. Consideremos el conjunto $W = \{\overline{n} : \|\overline{n}\| \leq l\}$ del retículo $\mathbb{Z}^d$ y sea $x\,|_W$ la restricción de x a tal bloque. Luego la sucesión w, construida concatenando la palabra $x\,|_W$ en todas la direcciones a partir de W, pertenece a la $B_{2^{-l}}(x)$; además $\sigma_j^{2l+1}(w) = w$ para todo $1 \leq j \leq d$.

Sensibilidad: dado que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tiene infinitos puntos y la transformación shift satisface las propiedades de transitividad y densidad de órbitas periódicas, esto implica que la transformación shift es sensitiva a las condiciones iniciales; ver [3].

1.4. Autómata Celular d-dimensional

Para introducir la definición clásica de autómata celular se requiere de una *regla local*, también conocida como *función bloque*.

***Definición* 1.2.** *Sea $\mathbb{V}$ cualquier subconjunto finito del retículo $\mathbb{Z}^d$. Consideremos el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{V}$ en $\mathcal{A}$, el cual denotaremos por $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$. Una* regla local *es cualquier función $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \to \mathcal{A}$.*

Nótese que con las topologías discretas en $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$ y $\mathcal{A}$, toda *función bloque* f es continua. Además, si el número de elementos en $\mathbb{V}$ es $k \geq 1$, entonces f puede entenderse como una función en k variables que recorren $\mathcal{A}$ y toma valores en $\mathcal{A}$.

***Ejemplo* 1.1.** *En el retículo $\mathbb{Z}$ sea $\mathbb{V} = \{-1, 0, 1\}$. Si $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, entonces $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$ puede ser entendido como el conjunto:*

$$\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

y una función bloque se interpreta como cualquier función f de $\mathcal{A}^3$ en $\mathcal{A}$. De modo que $f(x(-1), x(0), x(1)) = x(0) + x(1) \mod 2$ es una función bloque.

***Definición* 1.3.** *Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. Dados un conjunto finito no vacío $\mathbb{V} \subset \mathbb{Z}^d$ y una regla local $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \to \mathcal{A}$, el* autómata celular *(AC) generado por ellos es la transformación $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ definida como sigue: para toda configuración $x = \{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, la aplicación F le asocia la configuración $F(x) = y = \{y(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$, de forma que para cada $\overline{n} \in \mathbb{Z}^d$, $y(\overline{n}) = f(x|_{\mathbb{V}+\overline{n}})$, donde $x|_{\mathbb{V}+\overline{n}} : \mathbb{V} \to \mathcal{A}$ es definida por: $x|_{\mathbb{V}+\overline{n}}(\overline{k}) = x(\overline{n} + \overline{k})$ para todo $\overline{k} \in \mathbb{V}$.*

***Observación* 1.1.** *Consideremos el autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ generado por $\mathbb{V}$ y la función bloque $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \to \mathcal{A}$. Sea $x = \{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, su imagen por F, esto es, $F(x)$ informa cual ha sido la evolución de tal configuración una vez transcurrido una unidad de tiempo; el estado en cada célula de $x = \{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$; es decir, cada $x(\overline{n})$, evoluciona según la regla local f, cuyo valor dependerá de los valores que tenga sus células vecinas en la vecindad $\mathbb{V} + \overline{n}$.*

***Ejemplo* 1.2.** *Si consideramos en $\mathbb{Z}^2$ el conjunto finito*

$$\mathbb{V} = \{(0,0), (1,0), (-1,1), (0,1), (1,1)\}$$

⋮	⋮	⋮
(-1,1)	(0,1)	(1,1)
···	(0,0)	(1,0)
⋮	⋮	⋮

para saber la evolución del estado $x(n,m)$ con $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ de la configuración x, debemos ubicarla junto con sus vecinas según $\mathbb{V}$:

⋮	⋮	⋮
$X_{(n-1,m+1)}$	$X_{(n,m+1)}$	$X_{(n+1,m+1)}$
···	$X_{(n,m)}$	$X_{(n+1,m)}$
⋮	⋮	⋮

tal conjunto de valores es lo que se entiende como la función $x|_{\mathbb{V}+(n,m)}$; así que el valor $y(n,m) = F(x)(n,m)$ está definido por la asignación que haga la función bloque f allí.

***Ejemplo* 1.3** (Autómata Celular Elemental). *Los autómatas celulares elementales son aquellos cuya ley de evolución actúa sobre el espacio de configuraciones* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *y donde la vecindad* $\mathbb{V} = \{-1,0,1\}$. *Dado que el cardinal de* $\mathcal{A}$ *es* 2 *y el de* $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$ *es* 8, *entonces el número posible de autómatas celulares elementales es de* $256 = 2^8$. *S. Wolfram (ver [17]) introdujo una numeración entre* 0 *y* 255 *para los autómatas celulares elementales, tal numeración obedece a la fórmula:*

$$\sum_{x(-1),x(0),x(1)\in\mathcal{A}} f(x(-1),x(0),x(1))2^{\phi(x(-1),x(0),x(1))}$$

donde f *es la regla local del autómata celular y* ϕ *es la función dada por:*

$$\phi(x(-1),x(0),x(1)) = x(-1)2^2 + x(0)2^1 + x(1)2^0$$

o equivalentemente, el número asignado al AC *con función bloque* f *es:* $f(0,0,0)+2f(0,0,1)+4f(0,1,0)+8f(0,1,1)+16f(1,0,0)+32f(1,0,1)+64f(1,1,0)+128f(1,1,1)$

***Ejemplo* 1.4** (Autómata Celular Producto). *Este* AC *elemental es dado por la función bloque*

$$f(x(-1),x(0),x(1)) = x(-1)x(0)x(1)$$

esto es, para cada $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *la evolución de cada célula es:*

$$P(x)(n) = f(x|_{\mathbb{V}+n}) = f(x(n-1),x(n),x(n+1)) = x(n-1)x(n)x(n+1).$$

El número asignado al AC *producto es* 128. *Además,* P *tiene dos puntos fijos, a saber, las configuraciones constantes* $x(n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *o bien* $x(n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *(*$A = \{0,1\}$ *ya que* AC *es elemental). Ahora, consideremos una configuración* $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de manera que existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x(k) = 0$, *en la figura 1.3 observamos la evolución temporal, de esta configuración, hasta el tiempo* $n \geq 1$.

Dado que $P^n(x)(j) = 0$ *para* $k-n \leq j \leq k+n$, *se tiene que* $P^n(x) \to \{\mathcal{O}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *con* $\mathcal{O}(n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$, *esto es el* ω*-límite de* $\{\mathcal{O}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es todo* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *excepto la sucesión constante igual a* 1.

		k-n	.	.	.	k-1	k	k+1	.	.	.	k+n	
X	$\cdots$	*	$\cdots$	*	*	*	0	*	*	*	$\cdots$	*	$\cdots$
$P(x)$	$\cdots$	*	$\cdots$	*	*	0	0	0	*	*	$\cdots$	*	$\cdots$
$P^2(x)$	$\cdots$	*	$\cdots$	*	0	0	0	0	0	*	$\cdots$	*	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$P^n(x)$	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$

Figura 1.3: Acá se muestra la evolución temporal, hasta el tiempo $n \geq 1$, de una configuración cuyo estado en la célula k es 0.

***Ejemplo* 1.5** (Autómata Celular Shift o Desplazamiento σ_j)**.** *Para cada $j \in \{1, \ldots, d\}$, con $d \in \mathbb{Z}^+$ fijo, la regla local que define a σ_j es dada como sigue:*

$$f_j\left(x\left(\overline{n}-e_j\right), x\left(\overline{n}\right), x\left(\overline{n}+e_j\right)\right) = x\left(\overline{n}+e_j\right)$$

donde $\overline{n}$ es cualquier entero d-dimensional; esto es, $\sigma_j : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es tal que

$$\sigma_j\left(\{x(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}\right) = \{y(\overline{n})\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^d}$$

donde $y(\overline{n}) = x(\overline{n}+e_j)$.

Cuando $d > 1$, σ_j no es un autómata celular elemental, sin embargo, para $d = 1$, obtenemos el autómata celular elemental σ, el cual es conocido como shift bilateral *y constituye un ejemplo especial pues, como veremos, la definición de k-autómata celular puede ser expresada en términos de este desplazamiento, incluso cuando $\mathcal{A}$ es cualquier alfabeto finito y el retículo es $\mathbb{Z}^d$.*

Consideremos un espacio métrico X y $f : X \to X$ continua. Diremos que f es *topológicamente mixing* si para cualesquiera dos abiertos $A, B \subset X$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

En la sección 1.3 vimos que σ_j es caótico, en particular σ lo es, pero adicionalmente σ es topológicamente mixing.

Las siguientes son propiedades generales de los autómatas celulares, sus demostraciones pueden encontrarse en [10], [13] y [15].

***Proposición* 1.1.** *Si $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un autómata celular, entonces*

1. *F es continua; y*

2. *$F \circ \sigma_j = \sigma_j \circ F$.*

La propiedad de que una aplicación cualquiera F de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ en si mismo conmute con cada uno de los shifts σ_j con $j \in \{1, \ldots, d\}$ es bastante significativa.

***Proposición* 1.2.** *Sea $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ cualquier aplicación tal que $F \circ \sigma_j = \sigma_j \circ F$ para todo $j \in \{1, \ldots, d\}$. Entonces existe $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}$ tal que, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y cada $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ satisface que*

$$F(x)(n) = \left(F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \ldots \circ \sigma_d^{n_d}\right)(x)(n)$$

***Teorema* 1.1** (Teorema de Hedlund)**.** *Una transformación $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un* autómata celular *si y sólo si es continua y $F \circ \sigma_j = \sigma_j \circ F$ para todo $j \in \{1, \ldots, d\}$*

***Observación* 1.2.** *En virtud de este teorema podemos suponer que cualquier autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ proviene de una regla local $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \to \mathcal{A}$ donde $\mathbb{V} = \{n \in \mathbb{Z}^d : \|n\| \leq k\}$, una* vecindad de Moore, *esto es, $f : \mathcal{A}^{(2k+1)^d} \to \mathcal{A}$ para algún entero positivo k. Tal entero $k \geq 1$ se le conoce como el* radio del autómata.

***Proposición* 1.3.** *Todo autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es topológicamente conjugado a uno de radio 1.*

1.5. Atractores, Cuasi-atractores y Recurrencia por Cadenas

En esta sección introducimos los conceptos de *atractores, cuenca de atracción, puntos recurrentes por cadena y cuasi-atractores*, así como algunos resultados importantes en referencia a dichos conceptos, ver [4] y [11].

Existen varias definiciones de atractores, en este trabajo se considera la definición propuesta por C. Conley.

***Definición* 1.4.** *Dado un espacio métrico compacto X y un sistema dinámico discreto $f : X \to X$, con f continua; se dice que $A \subset X$, con $A \neq \emptyset$, es un* atractor *para f si:*

1. *A es cerrado.*

2. *Existe un abierto $U \subset X$ tal que*

   a) *$A \subset U$.*

   b) *$f(\overline{U}) \subset U$; donde $\overline{U}$ es la clausura de U.*

   c) *$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$.*

***Observación* 1.3.** *En la literatura de los sistemas dinámicos discretos pueden encontrarse variaciones u otras definiciones de atractores; por ejemplo, si el espacio métrico X no es compacto, además de la condición 2 anterior se anexa la propiedad de que A atrae las órbitas de puntos en U; esto es, para cada $x \in U$, $\lim_{n \to +\infty} \widehat{d}(f^n(x), A) = 0$, siendo $\widehat{d}$ la distancia en X*

***Proposición* 1.4.** *Si $A \subset X$ es un atractor para $f : X \to X$, entonces $f(A) = A$ y $\lim_{n \to +\infty} \widehat{d}(f^n(x), A) = 0$ para cada $x \in U$*

***Demostración*.** De la definición 1.4 se sigue que:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \bigcap_{n \geq N} f^n(U) \text{ para todo } N \geq 1;$$

luego $f(A) \subset A$. Recíprocamente, sea $x \in A$ cualquiera, para cada $k \geq 1$ existe $z_k = f^k(u_{k+1})$ con $u_{k+1} \in U$ tal que $f(z_k) = f(f^k(u_{k+1})) = x$ y $z_k \in f^k(U) = \bigcap_{n=0}^{k} f^n(U) \subset \bigcap_{n=0}^{k} f^n(U) := U_k$. Dado que $U_{k+1} \subset U_k$ existe $\{k_l\}_{l \geq 1}$ con $k_l \nearrow +\infty$ de manera que $z_{k_l} \to z$ cuando $l \to +\infty$, donde $z \in \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = A$, entonces por continuidad $x \in f(z)$ y por lo tanto se tiene $A \subset f(A)$.

Veamos que $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), A) = 0$. Consideremos el conjunto ω-límite de x; esto es:

$$\omega(x) = \{y : \exists\{k_l\}_{l\geq 1} \text{ con } k_l \nearrow +\infty \text{ y } \lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(x) = y\}.$$

Observe que si $\omega(x) \subset A$ para todo $x \in U$, entonces $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), A) = 0$. Veamos que $\omega(x) \subset A$. Sea $y \in \omega(x)$ cualquiera, luego existe $\{k_l\}_{l\geq 1}$ con $k_l \nearrow +\infty$ tal que $\lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(x) = y$. Dado que para cada $l \geq 1$ se tiene que $f^{k_l}(x) \in f^{k_l}(U) = \bigcap_{n=0}^{k_l} f^n(U)$, entonces $\lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(x) = y \in A$. □

***Observación* 1.4.** *Esta proposición lo que indica, entre otras cosas, es que un atractor absorbe la dinámica de las órbitas de todos los puntos de una vecindad abierta U de él.*

***Definición* 1.5.** *Dado un atractor A de $f : X \to X$. El conjunto*

$$\mathrm{B}(A) = \left\{x \in X : \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), A) = 0\right\}$$

se conoce como la cuenca de atracción *de A.*

***Observación* 1.5.** *Es fácil mostrar que si A es un atractor de $f : X \to X$ y U es una vecindad de A, como en la definición 1.4, entonces $\mathrm{B}(A) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$; en particular $\mathrm{B}(A)$ es un subconjunto abierto no vacío de X.*

***Proposición* 1.5.** *El número de atractores de f es numerable.*

***Demostración*.** Como X es compacto podemos considerar bases numerables, sean $\mathcal{U}$ una base numerable para X y $\mathcal{U}_1$ la colección de todos los abiertos que son unión finita de elementos en $\mathcal{U}$, luego $\mathcal{U}_1$ es numerable. Consideremos cualquier atractor A de f. Sea U una vecindad abierta de A como en la definición 1.4. Obviamente U es unión de elementos de $\mathcal{U}$; además tales abiertos constituyen un cubrimiento abierto de A, entonces, por compacidad, esta cobertura tiene una subcobertura finita. Sea $U(A)$ el abierto de X que es unión de los elementos en tal subcobertura, dado que $A \subset U(A)$ y $U(A) \subset U$ y como $f(A) = A$ (proposición 1.4) se obtiene que $A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U(A))$. Esto implica que la aplicación φ que asocia a cada atractor A de f el abierto $U(A)$ es inyectiva. De aquí se desprende que el conjunto de atractores de f es numerable pues $\mathcal{U}_1$ también lo es.

□

***Proposición* 1.6.** *Si A es un atractor de f, V es una vecindad abierta de A y K es un compacto contenido en $B(A)$, entonces existe un entero positivo n tal que $f^n(K) \subset V$.*

***Demostración*.** Sea U una vecindad abierta de A tal que $f\left(\overline{U}\right) \subset U$; $A = \bigcap_{k\geq 0} f^k(U)$ y $\mathrm{B}(A) = \bigcup_{m\geq 0} f^{-m}(U)$. Por compacidad, existe $l \geq 1$ tal que

$$K \subset \bigcup_{m=0}^{l} f^{-m}(U) \subset f^{-l}(U),$$

recuerde que $U \subset f^{-1}(U)$ pues $f(U) \subset f(\overline{U}) \subset U$.

Por otro lado, dado que $f\left(\overline{U}\right) \subset U$ y $A = \bigcap_{k\geq 0} f^k\left(\overline{U}\right)$, entonces existe $r \geq 1$ tal que

$$f^k\left(\overline{U}\right) = \bigcap_{k=0}^{r} f^k\left(\overline{U}\right) \subset V.$$

De esta inclusión y la anterior sigue que $f^n(K) \subset V$ donde $n = l + r$.

□

***Proposición* 1.7.** *Si G es una vecindad abierta de un atractor A de f, entonces existe un abierto $V \subset G$ tal que*

1. *$f(\overline{V}) \subset V$, y*
2. *$A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(V)$.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de A satisfaciendo las condiciones 1 y 2 de la definición 1.4. Sin perdida de generalidad, supongamos que G es una vecindad abierta de A y que $G \subset U$; luego, usando la proposición 1.4, se tiene que

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(A) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(G) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = A.$$

Afirmación: Existe un abierto W con $A \subset W \subset U$ tal que para cada $n \geq 0$ vale $f^n\left(\overline{W}\right) \subset G$.

Observe primero que como G contiene a A, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^m(U) \subset G$ para todo $m \geq N$. Supongamos ahora que la afirmación no es válida. Entonces podemos construir abiertos arbitrariamente próximos a A, conteniendo a A, de manera que para algún $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ se tiene que $f^n\left(\overline{W}\right) \nsubseteq G$. De esta manera se construye una sucesión $\{x_k\}$ con $x_k \to x \in A$ cuando $n \to +\infty$ así que para algún $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, $f^n(x_k) \notin G$. Sigue por tanto que para alguna subsucesión (usaremos el mismo índice) $\{x_k\}$ existe un entero $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ tal que $f^n(x_k) \notin G$ para todo k; lo cual contradice que $x_k \to x \in A$ y $f^n(x_k) \to f^n(x) \in A$ (note que W puede ser escogido dentro de G). De esta manera la afirmación está demostrada.

Sigue de la proposición 1.6 que existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^{n_0}\left(\overline{W}\right) \subset W$. Construiremos ahora el conjunto V que satisface las condiciones 1 y 2 del enunciado (la condición 2 se seguirá inmediatamente por construcción). Sea $V_0 = W$ y V_j $(1 \leq j \leq n_0 - 1)$ la δ-vecindad abierta de $f(V_{j-1})$, $V_j = B_\delta(f(V_{j-1}))$; y sea $V = V_0 \cup \cdots \cup V_{n_0-1}$. Note que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño $V \subset G$; además:

$$f\left(\overline{V}\right) \subset \bigcup_{k=0}^{n_0-1} f\left(\overline{V_k}\right) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_{n_0-1} \cup f\left(\overline{V_{n_0-1}}\right);$$

empleando la misma fórmula de recurrencia de los V_j se tiene que

$$f\left(\overline{V_{n_0-1}}\right) \subsetneq V_{n_0} = B_\delta(f(V_{n_0-1}));$$

ahora bien, dado que $f^{n_0}\left(\overline{W}\right) \subset W$; por continuidad podemos elegir $\delta > 0$ suficientemente pequeño de manera que $V_{n_0} \subset W$. Así, $f\left(\overline{V}\right) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_{n_0-1} \cup W = V$.

□

Ahora estudiaremos algunas relaciones básicas entre la *recurrencia por cadenas* y la *jerarquía de los atractores*, tales resultados son debidos a C. Conley.

***Definición* 1.6.** *Sean (X, d) un espacio métrico, no necesariamente compacto, y $f : X \to X$ continua. Dado $\varepsilon > 0$, una* ε-cadena ó ε-pseudo órbita, *para f es una secuencia (finita o infinita) de puntos $x_n \in X$ tales que, para todos los posibles valores de n, se cumple:*

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon.$$

***Observación* 1.6.** *Cuando una ε-cadena es finita, digamos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, se dice que va de x_0 hacia x_n.*

***Definición* 1.7.** *Un punto $x \in X$ se dice* recurrente por cadenas, *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena de x hacia x; es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existen $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x$ tales que $d(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ y algún $n > 1$.*

Dada una función $f : X \to X$ continua, al conjunto de puntos recurrentes por cadenas de f se denota como $\mathrm{CR}(f)$.

Si el espacio métrico (X, d) es compacto y $f : X \to X$ es cualquier aplicación continua, entonces existe una relación de equivalencia natural sobre $\mathrm{CR}(f)$; esta se define como sigue:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \varepsilon\text{-cadenas de } x \text{ hacia } y \text{ y de } y \text{ hacia } x.$$

Las clases de equivalencia dadas por esta relación son conocidas como *componentes por cadenas* de f.

Recordemos que cuando (X, d) es compacto, el conjunto $\omega-$límite de $x \in A$, $\omega_f(x)$ es cerrado, no vacío y $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$.

***Teorema* 1.2.** *Dados (X, d) espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua, el espacio X es particionado por los conjuntos* $\mathrm{B}(C)$*, donde*

$$\mathrm{B}(C) = \{x \in X \,:\, \omega_f(x) \subset C \text{ y } C \text{ es una componente por cadena de } f\}.$$

***Demostración*.** Sean $x \in X$ y $y \in \omega_f(x)$. Veamos que:

1. $\omega_f(x) \subset \mathrm{CR}(f)$, así $\mathrm{CR}(f) \neq \emptyset$; y

2. existe una única componente por cadena de f, digamos C, tal que $\omega_f(x) \subset C$.

Obviamente de 1 y 2 se sigue el teorema.

Sea $y \in \omega_f(x)$, luego existe una sucesión de enteros $\{n_k\}_{k\geq 0}$ estrictamente creciente tal que $y = \lim_{n\to+\infty} f^{n_k}(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, por continuidad, existe $k_0 \geq 1$ tal que $d(f(y), f^{n_{k_0}+1}(x)) < \varepsilon$; además, existe $k_1 > k_0$ tal que $d(f^{n_k}(x), y) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_1$. Luego la secuencia $y, f^{n_{k_0}+1}(x), \cdots, f^{n_{k_1}-1}(x), y$ es una ε-cadena para f de y hacia y, así que $y \in \mathrm{CR}(f)$ para cualquier $y \in \omega_f(x)$.

Sean $y, z \in \omega_f(x)$ cualesquiera, veamos que $y \sim z$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena de y hacia z y de z hacia y. Sean $\{n_k\}$ y $\{m_l\}$ sucesiones de enteros positivos estrictamente crecientes tales que

$$\lim_{l\to+\infty} f^{m_l}(x) = z \text{ y } \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Consideremos enteros positivos k y l tales que $n_k < m_l$ y

$$d(f(y), f^{n_k+1}(x)) < \varepsilon \text{ y } d(f^{m_l}(x), z) < \varepsilon.$$

Luego la secuencia $y, f^{n_k+1}(x), \ldots, f^{m_l-1}(x), z$ es una ε-cadena de y hacia z. Análogamente se construye una ε-cadena de z hacia y.

Finalmente, supongamos que C y C' son dos componentes por cadena de f tales que $\mathrm{B}(C) \bigcap \mathrm{B}(C') \neq \emptyset$. Claramente si $x \in C \cap C'$, entonces $\omega_f(x) \subset C \cap C'$, por lo anterior se obtiene que $C = C'$.

$\square$

***Lema* 1.1.** *Sean (X, d) un espacio métrico (no necesariamente compacto) y $f : X \longrightarrow X$ continua. Dados $p \in X$, $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier ε-cadena de longitud n que se inicia en p, termina en un punto de la bola abierta $B_\delta(f^n(p))$. Además, si f es uniformemente continua, entonces $\varepsilon > 0$ puede ser escogido independientemente de p.*

Demostración. (Ver [12]) Procedamos por inducción sobre n. Para $n = 1$ la propiedad enunciada en el lema es válida; basta escoger $\varepsilon = \delta$. Ahora escojamos $n = k - 1$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\gamma > 0$ tal que $d(f(x), f^k(p)) < \delta/2$ siempre que $d(x, f^{k-1}(p)) < \gamma$; observe que γ puede ser escogido independientemente de p cuando f es uniformemente continua. Supongamos por hipótesis inductiva que el lema vale para p, γ y $n = k - 1$; es decir, existe $\varepsilon > 0$ (el cual puede ser escogido menor que $\delta/2$) tal que cualquier ε-cadena que comienza en p‘, con longitud $k - 1$, termina en la bola abierta $B_\gamma(f^{k-1}(p))$. Para tal $\varepsilon > 0$, sea $p, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ una ε-cadena. Dado que $p, x_1, \ldots, x_{k-1}$ es una ε-cadena de longitud $k - 1$ iniciándose en p, entonces $d(x_{k-1}, f^{k-1}(p)) < \gamma$, por la hipótesis inductiva. Luego

$$d(x_k, f^k(p)) \leq d(x_k, f(x_{k-1})) + d(f(x_{k-1}), f^k(p)) < \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

así que $x_k \in B_\delta(f^k(p))$

□

***Corolario* 1.3.** *Sean X y f como en el lema 1.1. Si $p \in X$ es recurrente por cadenas y no periódico, entonces la longitud requerida para una ε-cadena que comienza en p y retorna a p debe crecer a infinito cuando $\varepsilon \to 0$.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que tal longitud es acotada; es decir, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena de longitud $1 \leq k \leq N$ que comienza y termina en p. Sea $r = \min\limits_{1 \leq k \leq N} d(p, f^k(p)) > 0$. Escojamos $0 < \delta < r$ y usemos el lema 1.1 para p, δ y cualquier $1 \leq n \leq N$. Sigue por tanto que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada ε-cadena que se inicia y termina en p, se cumple $p \in B_\delta(f^n(p))$. Pero $r \leq d(p, f^n(p)) < \delta$, pues $1 \leq n \leq N$, lo cual es una contradicción.

□

***Lema* 1.2.** *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ continua y $U \subset X$ un abierto no vacío tal que $f\left(\overline{U}\right) \subset U$. Entonces existe $\delta > 0$ de manera que la bola abierta $B_\delta(y) \subset U$ para todo $y \in f\left(\overline{U}\right)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces podemos escoger sucesiones $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ tales que $y_n \in \overline{f(U)}$; $z_n \notin U$ y además $d(y_n, z_n) < 1/n$. Por compacidad podemos suponer (sin perder generalidad) que $z_n \to z$ cuando $n \to +\infty$. Haciendo uso de la desigualdad triangular sigue que $y_n \to z$ cuando $n \to +\infty$. Dado que $\overline{f(U)}$ es cerrado y $\overline{f(U)} \subset f\left(\overline{U}\right) \subset U$, entonces $z \in U$; por otro lado, como U es abierto y $z_n \notin U$, se tiene que $z \in \partial U$. Lo cual es una contradicción.

□

***Corolario* 1.4.** *Sean X, f y U como en el lema 1.2. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, ninguna ε-cadena puede ir desde un punto en $\overline{f(U)}$ hacia un punto en $X \setminus U$. En particular, esto implica que ningún punto del abierto $U \setminus \overline{f(U)}$ puede ser recurrente por cadena.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ como en el lema 1.2. Consideremos cualquier $0 < \varepsilon < \delta$ y cualquier ε-cadena $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tal que para algún $0 \leq j < n$ se tiene $x_j \in \overline{f(U)}$. En particular $x_j \in U$, de donde $f(x_j) \in f(U) \subset \overline{f(U)}$, luego como $d(f(x_j), x_{j+1}) < \varepsilon < \delta$, entonces $x_{j+1} \in U$. Del mismo argumento sigue que $x_k \in U$ para todo $j \leq k \leq n$; lo que muestra la primera parte del corolario.

Veamos ahora la segunda parte. Supongamos que existe $p \in U \setminus \overline{f(U)}$ recurrente por cadena. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena de p hacia p. Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \cap \overline{f(U)} \neq \emptyset$. Para tal ε sea $p, x_1, \ldots, x_n, p$ una ε-cadena; por la primera parte tenemos que $x_j \in U$ para todo $1 \leq j \leq n$, en particular $f(x_n) \in f(U) \subset \overline{f(U)}$. Ahora, por ser una ε-cadena, $d(f(x_n), p) < \varepsilon$; esto es, $f(x_n) \in B_\varepsilon(p)$, lo cual es imposible.

□

Estos dos lemas, junto con sus corolarios, permiten demostrar el siguiente teorema.

***Teorema* 1.5.** *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Si $\mathcal{A}(f)$ denota la colección de todos los atractores de f, entonces*

$$X \setminus \mathrm{CR}(f) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(f)} (\mathrm{B}(A) \setminus A)$$

Demostración. Sea A un atractor de f. Sea $p \in \mathrm{B}(A) \setminus A$. Mostraremos que p no puede ser recurrente por cadena; como consecuencia sigue que:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}(f)} (\mathrm{B}(A) \setminus A) \subset X \setminus \mathrm{CR}(f).$$

Sea $r > 0$ tal que la bola cerrada $\overline{B}_r(p)$ está contenida en el abierto $\mathrm{B}(A)$ y es disjunta de A. Entonces el abierto $\mathrm{B}(A) \setminus \overline{B}_r(P)$ contiene al atractor A; luego por la proposición 1.7 existe una vecindad abierta de A $U \subset \mathrm{B}(A) \setminus \overline{B}_r(P)$ tal que

1. $f\left(\overline{U}\right) \subset U$ y
2. $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$;

observe que $p \notin U$; pero como $p \in \mathrm{B}(A)$, existe $m \geq 1$ de manera que $f^m(p) \in U$; de hecho $f^k(p) \in U$ para todo $k \geq m$. Del lema 1.1 sigue que si $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, toda ε-cadena de longitud m que comienza en p y termina en U. Por otra parte, como ya hemos visto (corolario 1.4) si ε es suficientemente pequeño, entonces cualquiera de estas ε-cadenas al entrar en U los siguientes puntos de la ε-cadena permanecen en U, por tanto si ε es pequeño ninguna ε-cadena puede comenzar y terminar en p; esto es, $p \notin \mathrm{CR}(f)$.

Demostremos ahora que si $p \notin \mathrm{CR}(f)$, entonces existe un atractor A de f tal que $p \in \mathrm{B}(A) \setminus A$. En efecto, sea p un punto no recurrente por cadena de f. Luego para un cierto $\varepsilon > 0$, p no pertenece al conjunto

$$U_\varepsilon = \{y : \exists \varepsilon\text{-cadena desde } p \text{ hacia } y\}.$$

Es claro que $U_\varepsilon \neq \emptyset$, por ejemplo, todo $f^k(p)$ con $k \geq 1$ pertenece a U_ε, en este caso basta escoger la sucesión $\{p, f(p), \ldots, f^k(p)\}$ y ver que es una ε-cadena. Mostraremos que U_ε es abierto con $f(U_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$; de lo cual se tiene que $A_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 0} f(U_\varepsilon)$ es un atractor de f. Note que en tal caso $p \notin A_\varepsilon$ pues $p \notin U_\varepsilon$; sin embargo, como $f(p) \in U_\varepsilon$, entonces $p \in \mathrm{B}(A_\varepsilon) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U_\varepsilon)$, con lo cual la demostración estará completa.

Demostraremos entonces que U_ε es abierto y que $f\left(\overline{U_\varepsilon}\right) \subset U_\varepsilon$. Sean $y \in U_\varepsilon$ y $p = x_0, x_1, \ldots, x_n, y$ una ε-cadena; en particular tenemos que $d(f(x_n), y) = \delta < \varepsilon$. Sea $r = \varepsilon - \delta > 0$. Entonces $d(f(x_n), z) \leq d(f(x_n), y) + d(y, z) < \varepsilon$ para todo $z \in B_r(y)$; es decir, $p, x_1, \ldots, x_n, z$ es una ε-cadena; por tanto $B_r(y) \subset U_\varepsilon$ y U_ε es abierto. Ahora supongamos que $z \in \overline{U_\varepsilon}$, por continuidad podemos escoger $y \in U_\varepsilon$ de manera que $d(f(y), f(z)) < \varepsilon/2$. de acá tenemos que para cualquier punto $w \in B_{\varepsilon/2}(f(z))$, $x_0 = y$, $x_1 = w$ es una ε-cadena; pero como $y \in U_\varepsilon$ existe una ε-cadena de p hacia w para todo $w \in B_{\varepsilon/2}(f(z))$, siendo z cualquier punto de $\overline{U_\varepsilon}$; en otras palabras, tenemos $B_{\varepsilon/2}(f\left(\overline{U_\varepsilon}\right)) \subset U_\varepsilon$, en particular $f\left(U_\varepsilon\right) \subset U_\varepsilon$.

□

***Proposición* 1.8.** *Sea $h : X \to X$ un homeomorfismo que conmuta con f; es decir, $f \circ h = h \circ f$:*

1. *Si A es un atractor de f, entonces también lo es $h(A)$ y $\mathrm{B}(h(A)) = h(\mathrm{B}(A))$.*

2. *Si C es una componente por cadena de f, entonces también lo es $h(C)$, y $\mathrm{B}(h(C)) = h(\mathrm{B}(C))$.*

***Demostración*.** Dado que $f \circ h = h \circ f$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n \circ h = h \circ f^n$. Además, puesto que h es un homeomorfismo, entonces para cada subconjunto Y de X tenemos que

$$
\begin{aligned}
h\left(f^{-1}(Y)\right) &= h\left(f^{-1}\left(h^{-1}(h(Y))\right)\right) = h\left((h\circ f)^{-1}(h(Y))\right)\\
&= h\left((f\circ h)^{-1}(h(Y))\right) = h\left(h^{-1}\left(f^{-1}(h(Y))\right)\right)\\
&= f^{-1}(h(Y))
\end{aligned}
$$

y en consecuencia $h\left(f^{-n}(Y)\right) = f^{-n}(h(Y))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $Y \subset X$.

1. Supongamos que A es un atractor. Entonces A es un conjunto cerrado y no vacío y además existe un abierto U tal que $A \subset U$, $f\left(\overline{U}\right) \subset U$ y $A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$.

   Luego $h(A) \neq \emptyset$ y $h(A) \subset h(U)$. Dado que h es un homeomorfismo, entonces $h(A)$ es cerrado y $h(U)$ es abierto.

   Por hipótesis $f\circ h = h\circ f$, así que

   $$f\left(\overline{h(U)}\right) \subset f\left(h\left(\overline{U}\right)\right) = h\left(f\left(\overline{U}\right)\right) \subset h(U)$$

   Además

   $$h(A) = h\left(\bigcap_{n\geq 0} f^n(U)\right) = \bigcap_{n\geq 0} h\left(f^n(U)\right) = \bigcap_{n\geq 0} f^n\left(h(U)\right)$$

   Por lo tanto $h(A)$ es un atractor.

   Finalmente, como $\mathrm{B}(A) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ y $\mathrm{B}(h(A)) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(h(U))$, entonces

   $$h(\mathrm{B}(A)) = h\left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)\right) = \bigcup_{n\geq 0} h\left(f^{-n}(U)\right) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}\left(h(U)\right) = \mathrm{B}(h(A))$$

2. Sean $p, q \in h(C)$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera, luego existen $x, y \in C$ tales que $p = h(x)$ y $q = h(y)$.

   Dado que $x, y \in C$, entonces para todo $\gamma > 0$ se tiene que existen γ-cadenas de y a x y de x a y, esto es, existen $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y\}$

y $\{y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = x\}$ tales que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y cada $j \in \{0, \ldots, m\}$

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \gamma \quad \text{y} \quad d(f(y_j), y_{j+1}) < \gamma$$

Como h es un homeomorfismo, existe $\delta > 0$ tal que si $d(a,b) < \delta$, entonces $d(h(a), h(b)) < \varepsilon$. Haciendo $\gamma = \delta$, tenemos que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y cada $j \in \{0, \ldots, m\}$

$$d(f(h(x_i)), h(x_{i+1})) = d(h(f(x_i)), h(x_{i+1})) < \varepsilon;$$

$$d(f(h(y_j)), h(y_{j+1})) = d(h(f(y_j)), h(y_{j+1})) < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\{h(x_0) = h(x) = p, h(x_1), \ldots, h(x_n) = h(y) = q\} \quad \text{y}$$

$$\{h(y_0) = h(y) = q, h(y_1), \ldots, h(y_m) = h(x) = p\}$$

son ε-cadenas de p a q y de q a p respectivamente. Por lo tanto existe una única componente por cadena de f que contiene a $h(C)$.

Sea $x \in \mathrm{CR}(f)$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera. Entonces, para cada $\gamma > 0$, existe una γ-cadena de x a x. Como consecuencia del resultado previo, existe una ε-cadena de $h(x)$ a $h(x)$, por lo tanto $h(x) \in \mathrm{CR}(f)$, luego $h(\mathrm{CR}(f)) \subset \mathrm{CR}(f)$, análogamente, usando h^{-1} en lugar de h, se tiene que $h^{-1}(\mathrm{CR}(f)) \subset \mathrm{CR}(f)$, esto es, $\mathrm{CR}(f) \subset h(\mathrm{CR}(f))$, así que $h(\mathrm{CR}(f)) = \mathrm{CR}(f)$.

Dado que h es un homeomorfismo, si $\{C_k\}_{k\in\Lambda}$ es la partición de $\mathrm{CR}(f)$ formada por las componentes por cadena de f, entonces $\{h(C_k)\}_{k\in\Lambda}$ es también una partición de $\mathrm{CR}(f)$. Sea D una componente por cadena de f distinta de C. Sean $x \in C$, $y \in D$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera. Supongamos que para cada $\gamma > 0$ existen γ-cadenas de $h(x)$ a $h(y)$ y de $h(y)$ a $h(x)$, en consecuencia, usando un razonamiento análogo al anterior, se tiene que existen ε-cadenas de y a x y de x a y, es decir, $D = C$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $h(C)$ es una componente por cadena de f.

Por otro lado, para cada $x \in X$ se tiene que $\omega_f(h(x)) = h(\omega_f(x))$. En efecto, sea $z \in \omega_f(h(x))$ cualquiera. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente de números enteros $\{k_l\}_{l\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{l\to+\infty} f^{k_l}(h(x)) = z$, pero $f^{k_l}(h(x)) = h\left(f^{k_l}(x)\right)$ y por ser h un homeomorfismo, se tiene que

$$z = \lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(h(x)) = \lim_{l\to+\infty} h\left(f^{k_l}(x)\right) = h\left(\lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(x)\right)$$

o equivalentemente

$$h^{-1}(z) = \lim_{l\to+\infty} f^{k_l}(x)$$

Por lo tanto $h^{-1}(z) \in \omega_f(x)$, así que $z \in h(\omega_f(x))$. En consecuencia

$$\omega_f(h(x)) = h(\omega_f(x))$$

Finalmente

$$\begin{aligned} h(\mathrm{B}(C)) &= \{z : z = h(x) \wedge x \in \mathrm{B}(C)\} \\ &= \{z : z = h(x) \wedge \omega_f(x) \subset C\} \\ &= \{z : z = h(x) \wedge h(\omega_f(x)) \subset h(C)\} \\ &= \{z : z = h(x) \wedge \omega_f(h(x)) \subset h(C)\} \\ &= \{z : \omega_f(z) \subset h(C)\} \\ &= \mathrm{B}(h(C)) \end{aligned}$$

□

***Proposición* 1.9.** *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Dados $n \in \mathbb{Z}^+$ y $A_1, \ldots, A_n$ atractores de f tales que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$, entonces $A = \bigcap\limits_{j\geq 0} f^j(U)$ es un atractor de f contenido en $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ donde $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, U_i es una vecindad de A_i dada en la definición 1.4.*

Demostración. Por definición 1.4, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que U_i es abierto; $A_i \subset U_i$; $f(\overline{U_i}) \subset U_i$ y $A_i = \bigcap_{j \geq 0} f^j(U_i)$.

Así que

$$A = \bigcap_{j\geq 0} f^j(U) = \bigcap_{j\geq 0} f^j\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \subset \bigcap_{j\geq 0}\bigcap_{i=1}^{n} f^j(U_i) = \bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j\geq 0} f^j(U_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Por otro lado $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es abierto; y es no vacío ya que

$$\emptyset \neq A_1 \cap \cdots \cap A_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = U$$

Además

$$A \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$$

Ahora bien

$$f\left(\overline{U}\right) = f\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} U_i}\right) = f\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f\left(\overline{U_i}\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$$

Finalmente, A es cerrado, en efecto,

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\bigcap_{j\geq 0} f^j(U)} = \bigcap_{j\geq 0} \overline{f^j(U)} \subset \bigcap_{j\geq 0} f^j\left(\overline{U}\right) \subset \bigcap_{j\geq 1} f^j\left(\overline{U}\right) \\ &\subset \bigcap_{j\geq 1} f^{j-1}(U) = \bigcap_{j\geq 0} f^j(U) = A\end{aligned}$$

Por lo tanto A es un atractor de f contenido en $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.

□

***Proposición* 1.10.** *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Si A y A' son atractores de f con $\mathrm{B}(A) \cap \mathrm{B}(A') \neq \emptyset$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{B}(A)\cap\mathrm{B}(A') \neq \emptyset$ y sea $x \in \mathrm{B}(A)\cap\mathrm{B}(A')$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x); A) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x); A') = 0$$

De aquí que todos los límites subsecuenciales de la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ están en $A \cap A'$.

Como $\{f^n(x)\}_{n\geq 0} \subset X$ y X es compacto, existen $\{f^{n_k}(x)\}_{k\geq 0}$ y $y \in X$ tales que $f^{n_k}(x) \to y$ cuando $k \to +\infty$. Dado que $A \cap A'$ es cerrado, entonces $y \in A \cap A'$, por lo tanto $A \cap A' \neq \emptyset$.

□

***Definición* 1.8.** *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua, $Q \subset X$ con $Q \neq \emptyset$ es un* cuasi-atractor *de f si Q es la intersección numerable de atractores de f. Un cuasi-atractor es* minimal *si no contiene propiamente a algún cuasi-atractor. En caso de que un cuasi-atractor minimal sea un atractor, lo llamaremos un* atractor minimal.

Antes de enunciar y demostrar la siguiente proposición, recordaremos algunos resultados que tienen que ver con la *métrica de Hausdorff*.

Consideremos un espacio métrico completo (X, d) (en particular, si X es compacto, funciona). Sea $\mathcal{H}(X)$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X. Para cada $A \in \mathcal{H}(X)$ y cada $\delta > 0$ denotamos por $A + \delta = \{x : d(x, A) < \delta\}$; recordamos que $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ define la distancia de un punto x al conjunto A; en el caso de A ser compacto, esta distancia es realizable por un punto $a \in A$; es decir, existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a) = \min\{d(x, y) : y \in A\}$. La *distancia de Hausdorff* entre dos conjuntos cualesquiera (no vacíos) se define como

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B + \delta\}.$$

Cuando tales conjuntos A y B son compactos, se muestra, sin dificultad, que

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\left\{\max_{x\in A} d(x, B), \max_{y\in B} d(y, A)\right\}.$$

Es necesario mencionar que sin imponer la restricción de compacidad, pueden encontrarse ejemplos de subconjuntos no vacíos A y B tales que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = +\infty$; además, también pueden construirse ejemplos de conjuntos no vacíos distintos de manera que su distancia de Hausdorff sea nula.

Esto es, la generalidad viola condiciones para que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ sea, en efecto, una métrica. Sin embargo, en $\mathcal{H}(X)$, la función $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ define una métrica la cual se conoce como *métrica de Hausdorff*.

Cerramos estos pequeños comentarios sobre la métrica de Hausdorff señalando algunas propiedades básicas:

- Para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y cada $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon \text{ y } B \subset A + \varepsilon.$$

- $(\mathcal{H}(X), \mathrm{dist}_{\mathcal{H}})$ es completo; además, si $\{K_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$, donde K es dado por:

$$K = \{x \in X : \exists \{x_n\} \text{ de Cauchy en } X \text{ y } x_n \to x \text{ si } n \to +\infty\}$$

  En particular, esto implica que si $\{K_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{H}(X)$ de manera que $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{K_n\}$ es de Cauchy y $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} K_n$.

Ahora tenemos las herramientas para demostrar la siguiente proposición.

***Proposición* 1.11.** *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Si Q_1 y Q_2 son cuasi-atractores disjuntos de f, entonces existen atractores A_1 y A_2 de f los cuales son disjuntos y $Q_i \subset A_i$ para $i = 1, 2$.*

Demostración. Dado que Q_1 y Q_2 son cuasi-atractores, podemos escribir, para cada $i = 1, 2$, $Q_i = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_{i,n}$, donde $A_{i,n}$ es un atractor de f. De los comentarios anteriores tenemos que para cada $i = 1, 2$ y cada $k \geq 1$, las sucesiones $\{T_{i,k}\}$, donde $T_{i,k} = \bigcap\limits_{n=1}^{k} A_{i,n}$, son de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y convergen justamente a Q_i. Por otro lado, como $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(Q_1, Q_2) > 0$ y $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(Q_i, T_{i,n}) \searrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(T_{1,n}, T_{2,n}) > 0$, en particular estos conjuntos son disjuntos. Ahora bien, $Q_i \subset T_{i,n}$ para $i = 1, 2$

y en virtud de la proposición 1.9, cada $T_{i,n}$ contiene un atractor de f, lo cual concluye la prueba.

$\square$

Capítulo 2

k-Autómatas Celulares: Generalidades

En este capítulo se presenta la definición de k-autómata celular, la extensión del teorema de Hedlund a k-autómatas y finalizamos con el resultado de que todo k-autómata celular es conjugado a un k-autómata de radio 1.

***Definición* 2.1.** *Una aplicación* $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *es un* k-autómata celular *con* $k \in \mathbb{Z}^+$, *si existen* k *reglas locales* $f_r : \mathcal{A}^{\mathbb{V}_r} \to \mathcal{A}$, *donde cada* $\mathbb{V}_r \subset \mathbb{Z}$ *es finito y no vacío, tales que para cada* $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *y cada* $n \in \mathbb{Z}$ *se cumple:*

$$F(x)(n) = f_r(x|_{\mathbb{V}_r+n}),$$

donde $n = r \mod k$ *y* $0 \leq r < k$.

***Observación* 2.1.** *Para cualquier k-autómata celular, la evolución del estado en cada célula de cualquier configuración* $x \in \mathcal{A}$ *depende de su localización en* $\mathbb{Z}$*; en efecto, su estado futuro es definido por una regla local específica, la cual actúa sobre una vecindad específica de ésta célula. Nótese que cada una de las reglas locales en la definición es una función continua.*

***Ejemplo* 2.1.** *Consideremos* $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{V}_0 = \mathbb{V}_1 = \{-1, 0, 1\}$ *y las reglas locales*

$$f_0(x, y, z) = z \quad y \quad f_1(x, y, z) = yz.$$

Entonces, el 2-autómata celular definido por estas reglas, es dado, para todo $x \in \mathcal{A}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$, *por:*

$$F(x)(n) = \begin{cases} x(n+1) & \textit{si } n \textit{ es par} \\ x(n)x(n+1) & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$$

La siguiente figura, muestra la evolución temporal de la configuración

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

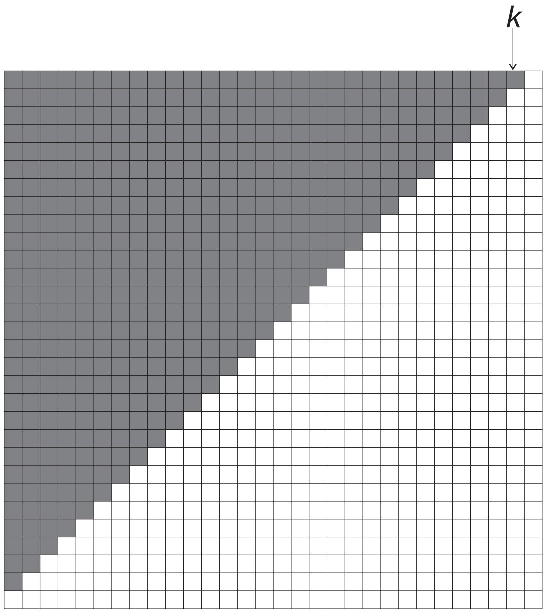

Figura 2.1: Los recuadros en gris indican 1, y los recuadros blancos indican 0

donde k es un entero fijo.

A continuación mostramos la caracterización de los k-autómatas celulares (extensión del Teorema de Hedlund) y la propiedad de su configuración topológica con k-autómatas celulares de radio 1.

***Proposición* 2.1.** *Si $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un k-autómata celular correspondiente a las reglas locales $f_r : \mathcal{A}^{\mathbb{V}_r} \to \mathcal{A}$ para $r \in \{0, \ldots, k-1\}$, entonces*

1. *F es continua.*

2. *$F \circ \sigma^k = \sigma^k \circ F$.*

Demostración. Al considerar la topología discreta, cada regla local es continua. Sea $\epsilon > 0$ luego existe $l \geq 1$ tal que $2^{-l} < \epsilon$. Sea m el primer entero positivo tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| \leq l$ y $r \in \{0, \cdots, k-1\}$ se tiene que $\mathbb{V}_r + n \subset \{p \in \mathbb{Z} : |p| \leq m\}$. Ahora para cada $x, y \in \mathbb{Z}$ con $d(x, y) < 2^{-m}$ se cumple que $x\,|_{\mathbb{V}_r+n} = y\,|_{\mathbb{V}_r+n}$ para todo $|n| \leq l$. De aquí que,

$F(x)(n) = F(y)(n)$ para cada $|n| \leq l$, luego $d(F(x), F(y)) < 2^{-l} < \epsilon$ con lo que obtenemos la parte (a).

Sea $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cualquier configuración.

$$\begin{aligned} F(\sigma^k(x))(n) &= f_r(\sigma^k(x) \mid_{\mathbb{V}_{r+n}}) \text{ si } n = qk + r \text{ y } q \in \mathbb{Z}. \\ &= f_r(x \mid_{\mathbb{V}_{r+n+k}}) \\ &= F(x)(n+k) \\ &= \sigma^k(F(x))(n) \end{aligned}$$

Luego la demostración está completa. □

***Teorema* 2.1** (Teorema de Hedlund. Teorema 3.4 en [10]). *Toda transformación continua $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es un autómata celular si y sólo si $F\sigma_j = \sigma_j F$ para cada $j \in \{1, \ldots, d\}$.*

La demostración de este resultado en realidad es bastante simple, sencillamente es una consecuencia de la compacidad del espacio fase y del hecho que para toda transformación $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ (continua o no) que conmute con los shifts canónicos, existe una función $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}$ tal que para cada $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ y todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ se cumple $F(x)(\overline{n}) = F_0 \sigma_1^{n_1} \cdots \sigma_d^{n_d}$.

Antes de proseguir, supongamos que se tiene el k-autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ generado por las vecindades $\mathbb{V}_r = \{n_1^r < \cdots < n_{m_r}^r\}$ y las reglas locales $f_r : \mathcal{A}^{\mathbb{V}_r} \longrightarrow \mathcal{A}$; esto es, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$:

$$F(x)(n) = f_r\left(x\left(n_1^r + n\right), \ldots, x\left(n_{m_r}^r + n\right)\right),$$

si $n = qk + r$ con $q \in \mathbb{Z}$. Ahora consideremos a $d \geq 1$ como el menor entero positivo tal que el intervalo $[-d\,,\,d] = \{n \in \mathbb{Z} : -d \leq n \leq d\}$ contiene a todos los conjuntos $\mathbb{V}_r$. Para cada $0 \leq r \leq k$ definimos $\widetilde{f_r} : \mathcal{A}^{2d+1} \longrightarrow \mathcal{A}$ por:

$$\widetilde{f_r}(a_{-d} \ldots a_d) = f_r(a_{n_1^r} \ldots a_{n_{m_r}^r}).$$

Sea $G : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el k-autómata celular definido, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$, por:

$$G(x)(n) = \widetilde{f_r}(x(-d+n) \ldots x(d+n)).$$

Es simple verificar que $G = F$; es decir, $F(x)(n) = G(x)(n)$ para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

En otras palabras, las reglas locales de todo k-autómata celular pueden suponerse que dependen de una misma vecindad. Al entero $d \geq 1$ se le conoce como *radio* del k-autómata celular.

Teorema 2.2. *Todo k-autómata celular es topológicamente conjugado a un k-autómata celular de radio 1.*

Demostración. Sea $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un k-autómata celular; suponemos que F es de radio $\ell \geq 1$; es decir,

$$F(x)(n) = f_r(x(n-\ell), \ldots, x(n+\ell)),$$

si $n = qk + r$.

Consideremos el alfabeto $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\ell}$; las configuraciones z en $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ son tales que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $z(n)$ tiene ℓ componentes: $z(n) = z^0(n) \cdots z^{\ell-1}(n)$. Ahora definimos $\Phi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$, para cada $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$, por:

$$\Phi(x)(n) = x(\ell n)x(\ell n+1) \cdots x(\ell(n+1)-1).$$

Es simple verificar que Φ es un homeomorfismo. Observe además que para cada $z = \{z(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ con $z(n) = z^0(n) \cdots z^{\ell-1}(n)$ se tiene $\Phi^{-1}(z) = x$, si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $x(n) = z^j(m)$ siempre que $m \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq j < \ell$ satisfagan $n = m\ell + j$. Sea $G : \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$, dada por $G = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. Veamos que existen reglas locales $g_0, \cdots, g_{k-1} : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$ mediante las cuales se expresa G; esto es, $G(z)(n) = g_{n_k}(z(n-1), z(n), z(n+1))$ para cada $z \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$, recuerde que $n_k = n \mod k$. Observe que para cada $z \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$ vale:

$$G(z)(n) = F(\Phi^{-1}(z))(\ell n)F(\Phi^{-1}(z))(\ell n+1) \cdots F(\Phi^{-1}(z))(\ell(n+1)-1).$$

Por otra parte, dado que para $0 \leq j \leq \ell - 1$ vale:

$$F\left(\Phi^{-1}(z)\right)(\ell n + j) =$$
$$\varphi_{(\ell n+j)_k}(z^j(n-1), \cdots, z^{\ell-1}(n-1), z^0(n), \cdots, z^{\ell-1}(n), z^0(n+1), \cdots, z^j(n+1))$$

sigue que el valor de $G(z)(n)$ sólo depende de $z(n-1), z(n)$ y $z(n+1)$. Finalmente, cualesquiera sean $u = u^0 \cdots u^{\ell-1}$, $v = v^0 \cdots v^{\ell-1}$, $w = w^0 \cdots w^{\ell-1}$ en $\mathcal{B}$ y $0 \leq r \leq k-1$, definimos

$$g_r(u,v,w) = g_r^0(u,v,w) g_r^1(u,v,w) \cdots g_r^{\ell-1}(u,v,w)$$

siendo que para todo $0 \leq j \leq \ell$:

$$g_r^j(u,v,w) = \varphi_{(\ell r+j)_k}(u^j, \cdots, u^{\ell-1}, v^0, \cdots, v^{\ell-1}, w^0, \cdots, w^j)$$

luego la demostración sigue. $\square$

Capítulo 3

Clasificación de k-Autómatas Celulares

En este capítulo se estudiará una adaptación para k-autómatas celulares de la clasificación para atractores en autómatas celulares de M. Hurley, ver [11], esta adaptación es uno de los resultados principales de este trabajo. Seguidamente, estudiamos otra adaptación para los k-autómatas celulares; se trata de la clasificación bajo equicontinuidad de Kůrka, ver [14], la cual es un refinamiento de la clasificación hecha por Hurley. Existe una extensión del refinamiento que ofrece Kůrka a dimensiones mayores que 1, dicha extensión fue hecha por E. Gamber y puede encontrarse en [7].

3.1. Atractores en k-Autómatas Celulares

Pasaremos ahora a estudiar algunas propiedades básicas de los atractores de k-autómatas celulares.

***Teorema* 3.1.** *Sea $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un k-autómata celular. Si A_0 y A_1 son atractores disjuntos de F, entonces cualquier atractor de F contiene un par de atractores disjuntos; consecuentemente F tiene un continuo de cuasi-atractores minimales.*

***Demostración*.** Sean $C \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un atractor cualquiera de F, $\mathrm{B}(C)$, $\mathrm{B}(A_0)$ y $\mathrm{B}(A_1)$ las cuencas de atracción de C, A_0 y A_1 respectivamente. Se considera la transformación shift σ^k. Dado que todas las cuencas son conjuntos abiertos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, como σ^k es topológicamente mixing, existe un entero $m \geq 1$ tal que

$$\sigma^{km}(\mathrm{B}(A_i)) \cap \mathrm{B}(C) \neq \emptyset, \text{ para } i = 0, 1.$$

De la proposición 1.8 tenemos que $\sigma^k(A_i)$, con $i = 0, 1$, es un atractor para F; además, $\mathrm{B}(\sigma^{km}(A_i)) = \sigma^{km}(\mathrm{B}(A_i))$ para $i = 0, 1$. Luego, de la proposición

1.10, se sigue que

$$\sigma^{km}(A_i) \cap C \neq \emptyset \text{ para cada } i = 0, 1.$$

Ahora, como $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ y σ^k es un homeomorfismo entonces $\sigma^{km}(A_0) \cap \sigma^{km}(A_1) = \emptyset$. Por la proposición 1.9 tenemos que C contiene un par de atractores: uno de ellos contenido en $\sigma^{km}(A_0) \cap C$ y el otro en $\sigma^{km}(A_1) \cap C$ claramente tales atractores son disjuntos. En particular, existen atractores A_{00} y A_{01} disjuntos contenidos en A_0; y A_{10} y A_{11} disjuntos contenidos en A_1. Recursivamente, para cada $p \geq 1$, existen atractores disjuntos $A_{i_0 \dots i_{p-1}0}$ y $A_{i_0 \dots i_{p-1}1}$ contenidos en el atractor $A_{i_0} \dots i_{p-1}$. Luego por cada sucesión $\rho = \{i_p\}_{p \geq 0}$ de $0's$ y $1's$ los conjuntos $A_{i_0} \supset A_{i_0 i_1} \supset \cdots A_{i_0 i_1 \dots i_p} \supset \cdots$ son atractores de F; por lo que para tal sucesión ρ, el conjunto $\bigcap\limits_{p \geq 0} A_{i_0 \dots i_p}$ es un cuasi-atractor de F; el cual, contiene un cuasi-atractor minimal. De esta forma, F admite, al menos, el mismo número de cuasi-atractores minimales como sucesiones de $0's$ y $1's$ existen; esto es, F tiene un continuo de cuasi-atractores minimales. $\square$

Pasemos ahora a considerar la posibilidad que un k-autómata celular posea órbitas periódicas atractoras.

Teorema 3.2. *Sea $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un k-autómata celular. Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un punto periódico atractor (x es atractor de F^p para algún $p \geq 1$), entonces $\sigma^k(x) = x$ y $F(x) = x$.*

Demostración. Sea $p \geq 1$ el período de x, así que $F^p(x) = x$ y $F^j(x) \neq x$ para $0 < j < p$. Como x es un atractor para F^p, existe un abierto U de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, con $x \in U$, tal que

1. $F^k(\overline{U}) \subset U$.
2. $\{x\} = \bigcap\limits_{n \geq 0} F^{np}(U)$.

Es claro que para cada $y \in U$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F^{np}(y) = x$.

Como σ^k es mixing, existe $N \geq 1$ tal que $\sigma^{km}(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo $m \geq N$.

Sea $y \in \sigma^{kN}(U) \cap U$. Entonces $y \in U$ y existe $z \in U$ tal que $\sigma^{kN}(z) = y$. Luego

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} F^{np}(y) = \lim_{n\to+\infty} F^{np}(\sigma^{kN}(z) = \lim_{n\to+\infty} \sigma^{kN}(F^{np}(z)) \\ &= \sigma^{kN}(\lim_{n\to+\infty} F^{np}(z)) = \sigma^{kN}(x). \end{aligned}$$

De manera análoga se muestra $x = \sigma^{k(N+1)}(x)$. Así que

$$\sigma^{kN}(x) = x = \sigma^{k(N+1)}(x) = \sigma^{kN}(\sigma^k(x)).$$

Dado que σ^k es un inyectiva, obtenemos $\sigma^k(x) = x$ y en consecuencia la configuración x es la concatenación de una palabra de longitud k.

Además,$F(x) = F(\sigma^k(x)) = \sigma^k(F(x))$; por tanto la configuración $F(x)$ es también la concatenación de una palabra de longitud k.

Veamos que $F(x) = x$. Dado que $F(x)$ es un atractor para F^p, se tiene que existe un abierto $V \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que

1. $F(x) \in V$,
2. $F^p(\overline{V}) \subset V$ y
3. $\{F(x)\} = \bigcap\limits_{n\geq 0} F^{np}(V)$.

Como antes, para cada $y \in V$, se cumple $\lim\limits_{n\to+\infty} F^{np}(y) == F(x)$.

Dado que $x \in U$ y $F(x) \in V$, y tales conjuntos son abiertos, entonces existe $m \geq 1$ tal que:

- Si $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es tal que $z(n) = x(n)$ para $|n| \leq m$, entonces $z \in U$; y
- Si $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es tal que $z(n) = F(x)(n)$ para $|n| \leq m$, entonces $z \in V$.

En efecto, si $x \in U$ y $F(x) \in V$, entonces existen $m_1, m_2 > 0$ tales que:

$$B_{\delta_1}(x) = \{z : d(z,x) < \delta_1\} \subset U; \text{ y}$$
$$B_{\delta_2}(F(x)) = \{z : d(z,F(x)) < \delta_2\} \subset V$$

con $\delta_1 = 2^{-m_1}$ y $\delta_2 = 2^{-m_2}$.

Sea $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$. Consideremos $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que para todo $|n| \leq m$ se tiene que $z(n) = x(n) = F(x)(n)$.

Luego $d(z,x) < 2^{-m} \leq 2^{-m_1} = \delta_1$; y $d(z,F(x)) < 2^{-m} \leq 2^{-m_2} = \delta_2$ (ver sección 1.2). Así que

$$z \in B_{\delta_1}(x) \subset U \quad \text{y} \quad z \in B_{\delta_2}(x) \subset V$$

Sea $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } |n| \leq m \\ F(x)(n) & \text{si } |n| > m \end{cases}$.

Obsérvese que para[1] $l = 2\left(1 + \left[\!\left[\frac{m}{k}\right]\!\right]\right)$ se tiene $\sigma^{lk}(y) \in V$. Además $y \in U$, de donde

$$\lim_{n\to+\infty} F^{np}(y) = x$$

Hagamos $z = \sigma^{lk}(y) \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} F^{np}(y) = \lim_{n\to+\infty} F^{np}(\sigma^{-lk}(z)) = \sigma^{-lk}(\lim_{n\to+\infty} F^{np}(z)) \\ &= \sigma^{-lk}(F(x)) = F(x) \end{aligned}$$

Así la demostración está completa.

$\square$

***Ejemplo* 3.1.** *Consideremos el 2-autómata celular del ejemplo 2.1; es fácil verificar que no es un autómata celular; en efecto:*

$$\begin{aligned} \sigma(F(x))(n) &= F(x)(n+1) \\ &= \begin{cases} x((n+1)+1), & \textit{si } n+1 \textit{ es par} \\ x(n+1)x((n+1)+1), & \textit{si } n+1 \textit{ es impar} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x(n+2), & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ x(n+1)x(n+2), & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}. \end{aligned}$$

[1]Dado $x \in \mathbb{R}$, $[\![x]\!] = n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $n \leq x < n+1$.

Pero

$$F(\sigma(x))(n) = \begin{cases} \sigma(x)(n+1), & \text{si } n \text{ es par} \\ \sigma(x)(n)\sigma(x)(n+1), & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x(n+2), & \text{si } n \text{ es par} \\ x(n+1)x(n+2), & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Por lo tanto existen configuraciones $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tales que $F(\sigma(x)) \neq \sigma(F(x))$.

También es simple chequear que los puntos fijos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de F, son de una de las siguientes clases:

1. *$x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
2. *$x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
3. *Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 2k \\ 1, & \text{si } n \geq 2k \end{cases}$.*

Obsérvese que ninguno de estos puntos fijos es atractor, pero $A = \bigcap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ es un atractor (global) para F. La figura 3.1 muestra la evolución temporal de una configuración particular.

Teorema 3.3. *Sea $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un k-autómata celular. Si A es un atractor minimal de F; esto es, no existen atractores propios contenidos en A, entonces $\sigma^k(A) = A$; además, su cuenca de atracción es densa en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y A está contenido en todo atractor de F.*

Demostración. Sea $B \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cualquier otro atractor de F. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces del teorema 3.1, A contendría dos atractores disjuntos, lo cual no puede ser ya que A es minimal, así $A \cap B \neq \emptyset$ para todo atractor B de F. Por la proposición 1.9 se deduce que $A \subset B$.

Veamos que $\sigma^k(A) = A$ y que B(A) es densa en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Dado que σ^k es un homeomorfismo que conmuta con F, al igual que σ^{-k}, de la proposición 1.8, se sigue que $\sigma^k(A)$ y $\sigma^{-k}(A)$ son atractores de F, luego $A \subset \sigma^k(A)$ y $A \subset$

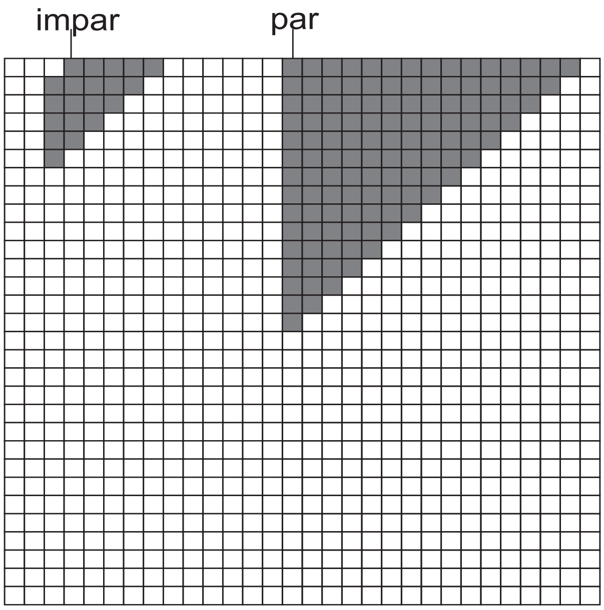

Figura 3.1: *Esta figura permite visualizar que los puntos fijos del tipo 3 no son atractores*

$\sigma^{-k}(A)$, de donde $A = \sigma^k(A)$. Finalmente, sea $\mathrm{B}(A)$ la cuenca de atracción de A. Sabemos que $\mathrm{B}(A)$ es abierto; además, como $A = \sigma^k(A)$, se entonces de la misma proposición 1.8 $\sigma^k(\mathrm{B}(A)) = \mathrm{B}(A)$, más aun, $\sigma^{kn}(\mathrm{B}(A)) = \mathrm{B}(A)$ para todo entero $n \geq 1$. Ahora bien, como σ^k es transitivo, de hecho mixing, entonces, para cualquier abierto U de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, existe $m \geq 1$ tal que $\sigma^{km}(\mathrm{B}(A)) \cap U \neq \emptyset$, de donde $\mathrm{B}(A) \cap U \neq \emptyset$; con lo cual se tiene la densidad de la cuenca de atracción de A. $\square$

3.2. Extensión de la Clasificación de Hurley

El siguiente es uno de los resultados principales de este trabajo y es la adaptación del teorema de clasificación de M. Hurley, ver [11], para los k-autómatas celulares, con base en sus atractores.

***Teorema* 3.4.** *Cualquier k-autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ está en exactamente una de las clases determinadas por las siguientes propiedades.*

(A1) *Existen dos atractores de F disjuntos, en consecuencia F tiene un continuo de cuasi-atractores minimales.*

(A2) *Existe un único cuasi-atractor minimal Q de F, que no es un atractor, el cual satisface que $\sigma^k(Q) = Q$ y está contenido en cualquier atractor de F.*

(A3) *Existe un único atractor minimal de F, por lo tanto contenido en cada una de los atractores de F.*

Demostración. Cualquiera sea el par de estas propiedades que tomemos, ellas no se satisfacen simultáneamente. Demostremos esta afirmación.

Supongamos que (A1) se cumple, por teorema 3.1, F tiene un continuo de cuasi-atractores minimales, lo que implica que (A2) no se cumple. Por lo tanto, (A1) y (A2) no se satisfacen simultáneamente.

Si se cumple (A3), entonces existe un único atractor minimal contenido en cada uno de los cuasi-atractores de F, así que cualquier par de atractores de F tiene intersección no vacía, con lo que (A1) no se cumple. Obviamente (A2) y (A3) no se cumplen de manera simultánea.

Supongamos que (A1) no se cumple, es decir, cualquier par de atractores de F tiene intersección vacía; mostraremos que se satisface (A2) o (A3).

Es claro que F tiene un único cuasi-atractor minimal, pues de lo contrario existirían al menos dos cuasi-atractores minimales distintos, digamos Q_1 y Q_2. Si $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, entonces $Q_1 \cap Q_2$ es un cuasi-atractor de F contenido propiamente en Q_1 y Q_2, lo que contradice la minimalidad de Q_1 y Q_2. Así que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, y por la proposición 1.11, existen dos atractores disjuntos de F, lo que contradice la hipótesis.

Sea $Q = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, con $I \subset \mathbb{Z}^+$ y A_α atractor de F para cada $\alpha \in I$, el único cuasi-atractor minimal de F. Entonces, para cada $\alpha \in I$, $\sigma^k(A_\alpha)$ y $\sigma^{-k}(A_\alpha)$ son atractores de F (usando la proposición 1.8 y dado que $\sigma^k \circ F = F \circ \sigma^k$); además,

$$\sigma^k(Q) = \sigma^k\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} \sigma^k(A_\alpha), \quad \text{y}$$

$$\sigma^{-k}(Q) = \sigma^{-k}\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}\sigma^{-k}(A_\alpha);$$

así que $\sigma^k(Q)$ y $\sigma^{-k}(Q)$ son cuasi-atractores de F, los cuales deben contener a un cuasi-atractor minimal de F, y por ser Q el único cuasi-atractor de F, se tiene que $Q \subset \sigma^k(Q)$ y $Q \subset \sigma^{-k}(Q)$, de donde $Q = \sigma^k(Q)$.

El conjunto de los cuasi-atractores de F es numerable, y la intersección de todos estos es un cuasi-atractor de F y por lo tanto contiene a Q, así que Q está contenido en todos los atractores de F. Si Q no es un atractor de F, entonces (A2) se cumple, de lo contrario, tenemos que (A3) se cumple. $\square$

3.3. Extensión de Clasificación de Kůrka

En esta sección mostraremos el segundo resultado principal del trabajo, se trata, en el marco de los k-autómatas celulares, de la extensión de la clasificación dada por Kůrka, ver [14], de los autómatas celulares en términos de propiedades de equicontinuidad; la cual es a su vez una modificación a la clasificación dada por Gilman en [9].

Antes de enunciar, y demostrar, tal resultado recordamos algunas propiedades de equicontinuidad en espacios métricos generales; así como en el marco de los k-autómatas celulares; remitimos a [15] para más detalles. Es importante mencionar que la clasificación de Kůrka fue recientemente expuesta por E. Gamber en [7] para autómatas celulares en dimensiones mayores que uno.

***Definición* 3.1.** *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ continua. Un punto $x \in X$ es* Lyapunov estable o equicontinuo*, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ con $, d(y, x) < \delta,$ y todo $n \geq 0$ se cumple que $d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon$*

Denotaremos por $\mathrm{Eq}(f)$ al conjunto de puntos equicontinuos, o estables de Lyapunov, de f; es decir, al conjunto de puntos donde la familia $\{f^n\}_{n\geq 0}$ es equicontinua. Diremos que f es equicontinua si la familia $\{f^n\}_{n\geq 0}$ es equicontinua en X.

***Observación* 3.1.** *Como consecuencia directa de la definición 3.1 tenemos:*

1. $\mathrm{Eq}(f) = \emptyset$ *si y sólo si para todo* $x \in X$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $\delta > 0$ *se cumple que existen* $y \in X$ *con* $d(y,x) < \delta$ *y* $n_0 \geq 0$ *tales que* $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \varepsilon$.

2. $\mathrm{Eq}(f) \neq X$ *si y sólo si existen* $x \in X$ *y* $\varepsilon > 0$ *tales que para todo* $\delta > 0$ *se cumple que existen* $y \in X$ *con* $d(y,x) < \delta$ *y* $n_0 \geq 0$ *tales que* $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \varepsilon$.

***Definición* 3.2.** *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $f : X \to X$ *continua.*

1. f *es* positivamente expansiva *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $x \in X$ *y* $y \neq x$ *se cumple que existe* $n_0 \geq 0$ *tal que* $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \varepsilon$.

2. f *es* sensible a las condiciones iniciales, *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $x \in X$ *y* $\delta > 0$ *se cumple que existen* $y \in X$, *con* $d(y,x) < \delta$, *y* $n_0 \geq 0$ *tales que* $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \varepsilon$. *Por comodidad se dice que* f *es* sensible.

***Observación* 3.2.** *Claramente* (2) *implica que* $\mathrm{Eq}(f) = \emptyset$, *que a su vez implica que* $\mathrm{Eq}(f) \neq X$. *Si* X *no tiene punto aislados ó* X *es perfecto, entonces* (1) *implica* (2).

Para la demostración de los resultados previos a la clasificación de los k-autómata según equicontinuidad es necesario la siguiente definición.

***Definición* 3.3.** *Sean* $f_0, \ldots, f_{k-1} : \mathcal{A}^{[n,n+m]} \to \mathcal{A}$, *con* $m > 0$, *reglas locales. Dados* $s \geq 1$ *y* $0 \leq j < k$, la potencia s de la regla local f_j *es la aplicación* $f_j^s : \mathcal{A}^{ms+1} \to \mathcal{A}$ *dada recursivamente por:*

$$f_j^s(b_0, \ldots, b_{ms}) = f_j\left(f^{s-1}_{(j+n)_k}(b_0, \ldots, b_{(s-1)m}), \ldots, f^{s-1}_{(j+n+m)_k}(b_m, \ldots, b_{ms})\right)$$

la potencia 1 *es la propia regla local, donde* m_k *denota el entero* m *tomado módulo* k.

Dados enteros $m \leq n$ y un bloque $u \in \mathcal{A}^{n-m+1}$; esto es, una palabra de longitud $n-m+1$, $[u]_{[m,n]}$ denotará el cilindro de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ formado por todas la configuraciones x tales que $x_{[m,n]} = u$; donde $x_{[m,n]}$ es la restricción de x al intervalo de enteros entre m y n.

Supongamos que $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un k-autómata celular no sensitivo, entonces para cada entero $L \geq 0$ existen un entero $M \geq 0$ y un bloque u en $\mathcal{A}^{2M+1}$ tales que, para todo $x, y \in [u]_{[-M,M]}$ se tiene $F^n(x)_{[-L,L]} = F^n(y)_{[-L,L]}$ cualquiera sea $n \geq 0$.

***Lema* 3.1.** *Sean $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un k-autómata celular y $u \in \mathcal{A}^{2M+1}$ tal que para todo $x, y \in [u]_{[-M,M]}$ y $n \geq 0$ se cumple $F^n(x)(0) = F^n(y)(0)$. Si p es un entero con $pk > M$, y $U = [uvu]_{[-pk-M,pk+M]}$ donde v es cualquier bloque en $\mathcal{A}^{2(pk-M)-1}$, entonces para todo $x, y \in U$ y cada $n \geq 0$ se tiene $F^n(x)_{[-pk,pk]} = F^n(y)_{[-pk,pk]}$.*

Demostración. Supongamos que F es de radio 1, ver teorema 2.2. Sean $f_0, \cdots, f_{k-1} : \mathcal{A}^3 \to \mathcal{A}$ las reglas locales que definen a F; es decir, cualesquiera sean $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $m \in \mathbb{Z}$ con $m = r \mod k$, se tiene $F(x)(m) = f_r(x(m-1), x(m), x(m+1))$. Para cada $0 \leq j < k$ y $n \geq 1$ consideremos la potencia n-ésima de la regla local f_j; es decir, $f_j^n : \mathcal{A}^{2n+1} \to \mathcal{A}$ dada por

$$
\begin{aligned}
&f_j^n(a_0, \cdots, a_{2n}) = \\
&\qquad f_j\left(f^{n-1}_{(j-1)_k}(a_0, \cdots, a_{2n-2}), f^{n-1}_{j_k}(a_1, \cdots, a_{2n-1}), f^{n-1}_{(j+1)_k}(a_2, \cdots, a_{2n})\right).
\end{aligned}
$$

donde $s_k = s \mod k$ para $s \in \mathbb{Z}$. Sean $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $n \geq 1$ y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&F^n(x)(m) = f^n_{m_k}\left(x_{[m-n,m+n]}\right) = \\
&f_{m_k}\left(f^{n-1}_{(m-1)_k}(x_{[m-n,m+n-2]}), f^{n-1}_{m_k}(x_{[m-n+1,m+n-1]}), f^{n-1}_{(m+1)_k}(x_{[m-n-2,m+n]})\right) \\
&\qquad = f_{m_k}\left(F^{n-1}(x)(m-1), F^{n-1}(x)(m), F^{n-1}(x)(m+1)\right). \quad (3.3.1)
\end{aligned}
$$

En efecto, sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Dado que $F(x)(m) = f_{m_k}\left(x_{[m-1,m+1]}\right)$ para cada

$m \in \mathbb{Z}$, entonces dado $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} F^2(x)(m) = F(F(x))(m) &= f_{m_k}\left(F(x)_{[m-1,m+1]}\right) \\ &= f_{m_k}(F(x)(m-1), F(x)(m), F(x)(m+1)) \\ &= f_{m_k}\left(f_{(m-1)_k}\left(x_{[m-2,m]}\right), f_{m_k}\left(x_{[m-1,m+1]}\right), f_{(m+1)_k}\left(x_{[m,m+2]}\right)\right) \\ &= f^2_{m_k}\left(x_{[m-2,m+2]}\right) \end{aligned}$$

Supongamos que para cada $m \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$F^{n-1}(x)(m) = f^{n-1}_{m_k}\left(x_{[m-n+1,m+n-1]}\right)$$

Así que para cada $m \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} F^n(x)(m) = F\left(F^{n-1}(x)\right)(m) &= f_{m_k}\left(F^{n-1}(x)_{[m-1,m+1]}\right) \\ &= f_{m_k}\left(F^{n-1}(x)(m-1), F^{n-1}(x)(m), F^{n-1}(x)(m+1)\right) \\ &= f_{m_k}\left(f^{n-1}_{(m-1)_k}\left(x_{[m-n,m+n-2]}\right), f^{n-1}_{m_k}\left(x_{[m-n+1,m+n-1]}\right), f_{(m-n+2)_k}\left(x_{[m,m+n]}\right)\right) \\ &= f^n_{m_k}\left(x_{[m-n,m+n]}\right) \end{aligned}$$

Fijemos $w \in [u]_{[-M,M]}$. Note que para todo $z \in U$ vale

$$F^n(z)(-pk) = F^n(z)(pk) = F^n(w)(0), \text{ para todo } n \geq 0,$$

esto sigue del hecho que $\sigma^{-pk}(z)_{[-M,M]} = \sigma^{pk}(z)_{[-M,M]} = u$. Haciendo uso de (3.3.1) se verifica fácilmente que para $|m| < pk$ y $0 \leq n \leq pk + M - |m|$ se cumple que $F^n(x)(m) = F^n(y)(m)$ para cada par $x, y \in U$. Dado que para $0 \leq m < pk$ se cumple

$$F^{pk+M+1-m}(x)(m) = f_{m_k}\left(F^{pk+M-m}(x)(m-1), F^{pk+M-m}(x)(m), F^{pk+M-m}(x)(m+1)\right),$$

$$F^{pk+M-m}(x)(m+1) = f_{(m+1)_k}\left(F^{pk+M-1-m}(x)(m), F^{pk+M-1-m}(x)(m+1), F^{pk+M-1-m}(x)(m+2)\right),$$

$$\vdots$$

$$F^{M+2}(x)(pk-1) = f_{k-1}\left(F^{M+1}(x)(pk-2), F^{M+1}(x)(pk-1), F^{M+1}(x)(pk)\right);$$

mientras que para $-pk < m \leq 0$ se tiene:

$$F^{pk+M+1+m}(x)(m) = \\ f_{m_k}\left(F^{pk+M+m}(x)(m-1), F^{pk+M+m}(x)(m), F^{pk+M+m}(x)(m+1)\right),$$

$$F^{pk+M+m}(x)(m-1) = \\ f_{(m-1)_k}\left(F^{pk+M-1+m}(x)(m-2), F^{pk+M-1+m}(x)(m-1), F^{pk+M-1+m}(x)(m)\right),$$

$$\vdots$$

$$F^{M+2}(x)(-pk+1) = \\ f_1\left(F^{M+1}(x)(-pk), F^{M+1}(x)(-pk+1), F^{M+1}(x)(-pk+2)\right),$$

entonces para todo $x, y \in U$ se cumple $F^n(x)(m) = F^n(y)(m)$ cualesquiera sean $|m| < pk$ y $0 \leq n \leq pk + M + 1 - |m|$.

Haciendo uso exactamente de la misma estrategia, se va aumentando el número de iterados para los cuales las órbitas de las configuraciones en U coinciden parcialmente. Por tanto, la demostración del lema termina por inducción. $\square$

***Teorema* 3.5.** *Si F un k-autómata celular no sensitivo, entonces el conjunto de equicontinuidad es residual.*

***Demostración*.** Sean $M \geq 0$ y $u \in \mathcal{A}^{2M+1}$ tales que para cada par $x, y \in [u]_{[-M,M]}$ se tiene $F^n(x)(0) = F^n(y)(0)$ cualquiera sea $n \geq 0$. Por otro lado, para todo entero $\ell \geq 1$ denotamos por U_ℓ al conjunto de todo $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para los cuales existen ℓ enteros positivos $M < p_1 < \cdots < p_\ell$, con $p_{j-1} + M < p_j - M$ para $j = 2, \cdots, \ell$, tales que z coincide con u en cada $[-p_j - M, -p_j + M]$ y $[p_j - M, p_j + M]$. Claramente U_ℓ es abierto (unión de cilindros) y denso en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Del lema anterior sigue que toda configuración en el conjunto $V = \bigcap_{\ell \geq 1} U_\ell$ es equicontinua. $\square$

Con este resultado se obtiene, de la misma forma como en [14], una clasificación equicontinua de los k-autómatas celulares.

***Teorema* 3.6.** *Todo k-autómata celular $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ satisface una sóla de las siguientes propiedades:*

E1. *F es equicontinuo, esto es, $\mathrm{Eq}(F) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.*

E2. *$\emptyset \neq \mathrm{Eq}(F) \neq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.*

E3. *F es sensible a las condiciones iniciales, pero no positivamente expansivo.*

E4. *F es positivamente expansivo.*

Demostración. Veamos que E1, E2, E3 y E4 no se cumplen simultáneamente dos a dos.

Supongamos E1: $\mathrm{Eq}(F) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Luego E2 no se cumple. Además, en virtud de la observación 3.2, ni E3 ni E4 se cumplen.

Supongamos E2: $\emptyset \neq \mathrm{Eq}(F) \neq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Luego E1 no se cumple. Nuevamente en virtud de la observación 3.2, obtenemos que E3 no se cumple. Como F no es sensible y $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es perfecto, entonces E4 no se cumple (de nuevo por la observación 3.2).

Supongamos E3: F es sensible pero no positivamente expansivo. Así que claramente E4 no se cumple. Además $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$, en consecuencia ni E1 ni E2 se cumplen.

Supongamos E4: F es positivamente expansivo. Como $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es perfecto, F es sensitivo, esto es, $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$, así que ni E1 ni E2 se cumplen. Evidentemente E3 no se cumple.

Veamos ahora que se cumple E1, E2, E3 ó E4.

Supongamos que ni E1 ni E2 ni E3 se cumplen. Supongamos además que F no es sensitivo. Luego $\mathrm{Eq}(F)$ es un conjunto residual, lo cual es una contradicción ya que $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$ y $\mathrm{Eq}(F) \neq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, así que F es positivamente expansivo.

$\square$

Bibliografía

[1] I. Arcaya. *Sobre Transformaciones que Preservan Potencias del Shift.* Trabajo de Maestría, (2007).

[2] I. Arcaya and N. Romero. *On Hedlund´s Theorem and Place-dependent Cellular Automata.* A ser publicado en Divulgaciones Matemáticas.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey. *On Devaney's Definition of Chaos.* Amer. Math. Month. **99** (1992) 332–334.

[4] C. Conley. Isolated Invariant Sets and Morse Index. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I. **38** (1978).

[5] K. Culik; L.P. Hurd and S. Yu. *Computation Theoretic Aspects of Cellular Automata.* Physica D. **45**, (1990) 357–378.

[6] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, New York. (1989)

[7] E. Gamber. *Equicontinuity Propieties of D-Dimensional Cellular Automata.* Topology Proceedings **30(1)**, (2006) 197–222.

[8] R. H. Gilman. *Classes of Cellular Automata.* Ergod. Th. Dynam. Sys. **7**, (1987) 105–118.

[9] R. H. Gilman. *Periodic Behavior of Linear Cellular Automata.* Lecture Notes in Mathematics **1342**, Springer-Verlag Berlin (1988) 216–219.

[10] G. Hedlund. *Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical Systems.* Math. Sys. Th. **3**, (1969) 320–375.

[11] M. Hurley. *Attractors in Cellular Automata.* Ergodic Theory and Dynamical Systems **10**, (1990) 131–140.

[12] M. Hurley. *Chain recurrence and Attraction in Non-Compact Space.* Ergodic Theory and Dynamical Systems **11**, (1991) 709–729.

[13] P. Kůrka. *Topological and Symbolic Dynamics. Cours Spéciallisés*. Société Mathématique de France **11**, (2003).

[14] P. Kůrka. *Languages, Equicontinuity and Attractors in Cellular Automata*. Ergodic Theory and Dynamical Systems **17**, (1997) 417–433.

[15] N. Romero *Dinámica Topológica y Autómatas Celulares*. Publicación del Postgrado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela (2006).

[16] F. Villafañe. *Atractores en Autómatas Celulares*. Trabajo de Grado. Postgrado Interinstitucional en Matemáticas UCLA-UNEXPO-UPEL, (1995).

[17] S. Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore (1986).