

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS

Métodos Geométricos aplicados a la Teoría de Control No Lineal

Lic. Rubén Dario Figueredo.

Barquisimeto, 2007

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS

Métodos Geométricos aplicados a la Teoría de Control No Lineal

Trabajo de Grado Presentado como Requisito Parcial Para Optar al
Título de Magíster Scientiarum, Mención Matemática .

Autor: Lic. Rubén Dario Figueredo.

Tutor: Dr. Angel Mastromartino .

Barquisimeto, 2007

Dedicatoria

A mi esposa Elizabeth y a mi primogénito Jesús Alberto, mis dos tesoros. Todos mis esfuerzos y logros son una ofrenda a Uds.

Agradecimientos

- Al **Todo Poderoso**, principio absoluto de toda ciencia honesta. *En Él vivimos, nos movemos y existimos.*

- Al **Dr. Angel Mastromartino**, por la gran confianza depositada en mi, por su paciencia y estímulo constantes, en la elaboración de la tesis.

- Al **personal docente, administrativo y obrero**, que día a día hace posible el funcionamiento del programa de maestría en ciencias.

- A todos mis compañeros de clases, que con su ejemplo y amistad, me estimularon a lograr esta meta.

- A mis padres, hermanos, familiares y amigos de siempre, por su apoyo incondicional y por las plegarias en mi favor.

Resumen

En este trabajo se presenta una introducción a la teoría cualitativa de sistemas de control no lineal, haciendo énfasis en las propiedades de controlabilidad de tales sistemas. Se introduce el lenguaje geométrico de campos de vectores, corchete de Lie, distribuciones, foliaciones etc. Se analizan los problemas de controlabilidad básicos y se dan criterios para accesibilidad, controlabilidad y propiedades relacionadas.

Este enfoque general fue formulado usando ciertas álgebras de Lie de campos de vectores determinados por tales sistemas. Un problema de aproximación por caminos es considerado como una aplicación de la teoría desarrollada. Ilustramos nuestras consideraciones con algunos ejemplos de sistemas simples o sistemas que aparecen en aplicaciones.

Índice general

Introducción	VIII
1. Controlabilidad y Corchete de Lie	1
1.1. Sistemas de Control y problemas de Controlabilidad	2
1.2. Campos de Vectores y Flujos	3
1.3. Corchete de Lie y sus propiedades	7
1.4. Cambio de Coordenadas y Corchete de Lie	16
1.5. Campos de Vectores y Operadores Diferenciales	26
2. Órbitas, Distribuciones y Foliaciones	31
2.1. Distribuciones y Teorema Local de Frobenius	31
2.2. Subvariedades y Foliaciones	34
2.3. Órbitas de Familias de Campos de Vectores	36
2.4. Integrabilidad de Distribuciones y Foliaciones	39

3. Controlabilidad y Accesibilidad	42
3.1. Definiciones básicas	42
3.2. Álgebras de Lie de Sistemas de Control	45
3.3. Criterios de Accesibilidad	48
4. Controlabilidad y Aproximación por Caminos	53
4.1. Sistemas Tiempo-Reversible	53
4.2. Aproximación de Curvas por Trayectorias	61
Bibliografía	71

Introducción

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento. La teoría y la práctica del control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, civil y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles. Las ventajas del control eficiente en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los materiales de desecho, mayores niveles de seguridad y reducción de la contaminación.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Por

ejemplo, fenómenos no lineales se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante modelos lineales, una razón ineludible para el uso de modelos no lineales y el desarrollo de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control.

Alentada por la sofisticación de la tecnología actual, la teoría de sistemas no lineales de control ha experimentado en la década pasada una vigorosa expansión, reflejada por un número rápidamente creciente de monografías y libros de texto científicos de sistemas no lineales de control, entre los cuales destacan autores como, Isidori [5] y Sontag [6].

En este trabajo se presenta una introducción a la teoría cualitativa de sistemas de control no lineal usando definiciones y resultados de geometría diferencial (siguiendo esencialmente [7]), haciendo énfasis en el concepto de controlabilidad, que consiste básicamente en descifrar bajo qué condiciones un determinado estado puede efectivamente alcanzarse de manera exacta y qué tipo de controles intervienen en este proceso. Consideraremos principalmente, subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , en vez de conjuntos más generales como son las variedades diferenciales de orden n . Los resultados son presentados de forma detallada, pero ninguno de ellos es original para el ámbito de este proyecto.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo I se introduce la definición general de sistemas de control y se discuten temas básicos de variedades diferenciales como, campos de vectores, flujo, corchete de Lie, derivada de Lie, entre otros.

En el capítulo II se estudian los conceptos de distribuciones, foliaciones y órbitas. También se presentan una versión local y otra global del teorema de Frobenius, y se establece el teorema de órbita de Stefan y Sussmann.

El capítulo III comienza con el estudio de algunos conceptos básicos de la teoría de control como lo son, sistemas de control-afin, conjuntos alcanzables, controlabilidad y accesibilidad. Asimismo, se definen las álgebras de Lie de un sistema de control, y finalmente, en la última sección del capítulo, se presentan dos teoremas y un corolario que constituyen importantes criterios de accesibilidad para sistemas de control no lineales.

En el capítulo IV se definen los sistemas tiempo-reversibles y se establece la relación entre órbitas y conjuntos alcanzables, para concluir con el estudio de aproximación de curvas a través de las trayectorias de un sistema de control.

Capítulo 1

Controlabilidad y Corchete de Lie

Las propiedades de controlabilidad de un sistema de control son propiedades relacionadas con las siguientes preguntas. ¿Puede un sistema ser guiado desde un estado inicial x_0 dado, a un estado final x_1 ? ¿Puede ser hecho esto para cualquier par de estados inicial y final? ¿Qué tan grande es el conjunto de puntos para los cuales el sistema puede ser guiado desde un estado inicial x_0 ? ¿Cuáles trayectorias del sistema son realizables y cómo encontrar controles para su realización?.

Tales preguntas pueden ser motivadas por problemas prácticos y son básicas para cualquier estudio cualitativo de sistemas de control. Nuestro objetivo en este capítulo será desarrollar las herramientas que nos capaciten para contestar dichas preguntas y para entender las propiedades cualitativas de un sistema de control no lineal.

Veremos que una clase grande de problemas de sistemas de control pueden ser representados por una familia de campos de vectores. Las propiedades cualitativas de los sistemas de control dependen de las propiedades de los campos de vectores y las interacciones entre ellos. La herramienta básica que nos capacita para entender las interacciones entre los diferentes campos de vectores es el corchete de Lie.

1.1. Sistemas de Control y problemas de Controlabilidad

En esta sección definiremos un sistema de control y veremos algunos ejemplos que motivan el estudio de tales sistemas.

Definición 1.1. *Se denomina Sistema de Control a un sistema de la forma*

$$\Sigma : \dot{x} = f(x, u)$$

donde x , llamado estado de Σ , toma valores en un subconjunto abierto X de \mathbb{R}^n (o en una variedad diferenciable X de orden n) y u , llamado control, toma valores en un conjunto U . Los conjuntos X y U son llamados *Espacio Estado* y *Conjunto Control*, respectivamente.

Ejemplo 1.1. *(Bote a Motor sobre un Lago)*

Consideremos un bote a motor sobre un lago. Podemos escoger un sistema de coordenadas en el cual, el lago es identificado con un subconjunto X de \mathbb{R}^2 y el estado del bote con un punto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. El movimiento de dicho bote puede ser modelado por el sistema de control:

$$\dot{x} = u$$

donde el control $u = (u_1, u_2)$ es el vector velocidad, el cual pertenece al conjunto $U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| \leq m\}$, siendo $\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$ y m es la velocidad maximal del bote.

Ejemplo 1.2. *(Bote a Motor sobre un Río)*

Consideremos el problema anterior, pero en vez de un lago, supongamos que el bote navega sobre un río. Entonces el conjunto de velocidades del bote, $F(x)$, depende de la corriente del río en cada punto. Luego, la ecuación que modela el problema es:

$$\dot{x} = F(x) = f(x) + u$$

donde el control u es el vector velocidad del bote y $f(x)$ es el vector velocidad de la corriente del río en el punto x .

Observación 1.

Se puede conservar la ecuación $\dot{x} = u$ si el control es $\tilde{U}(x) = f(x) + U$.

Ejemplo 1.3. (Bote a Vela sobre un Lago)

Consideremos un bote a vela sobre un lago. Supongamos que el viento es estable, es decir, que tiene una dirección y fuerza constantes. Aquí, el movimiento del bote puede ser modelado por la ecuación

$$\dot{x} = V(\theta),$$

donde θ es el ángulo de los ejes del bote con respecto al viento. θ es tratado como control y toma valores en el conjunto $U = (\alpha, 2\pi - \alpha)$, siendo α el ángulo minimal con el cual el bote se mueve en contra del viento y V es la velocidad que depende de θ . Ahora bien, en este problema el control θ puede ser restringido solo a dos valores: $\theta = \pm\theta_{opt}$, donde θ_{opt} maximiza las paralelas a las componentes del viento de $V(\theta)$ (dirigido en contra del viento).

De este modo, el sistema se reduce a dos sistemas con dos velocidades posibles, $V^+ = V(\theta_{opt})$ y $V^- = V(-\theta_{opt})$.

Por el cambio de virajes y el tiempo gastado para cada viraje (derecho o izquierdo) proporcional a constantes λ_+ y λ_- , respectivamente, con $\lambda_+ + \lambda_- = 1$ el bote cambia su posición con una velocidad promedio

$$V_{prom} = \lambda_+ V(\theta_{opt}) + \lambda_- V(\theta_{-opt}).$$

1.2. Campos de Vectores y Flujos

A continuación daremos algunos conceptos básicos como son campos de vectores, grupo 1-parámetro y flujo.

Definición 1.2. Sea X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , posiblemente igual a \mathbb{R}^n (o X una variedad diferenciable). Un Campo de Vectores sobre X es una función f definida por:

$$X \ni p \mapsto f(p) \in T_p X ,$$

la cual asigna un vector tangente en p , a cualquier punto p en X . Una función análoga definida sobre un subconjunto abierto de X , solamente, será llamada *Campo de Vectores Parcial*.

Observación 2.

a) Considerando una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow X$ es posible escribir

$$f(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde cada $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ es la base asociada a x , $i = 1, 2, \dots, m$. Diremos que el campo de vectores f es diferenciable si las funciones a_i son diferenciables sobre U .

En el caso en que X es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n se tiene lo siguiente:

b) Se puede identificar $T_p X$ con \mathbb{R}^n (considerando a un vector tangente, como una determinada clase de equivalencia).

c) Para cualquier campo de vectores (o campo vectorial parcial) f , podemos escribir la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

d) El campo de vectores f puede ser expresado como un vector columna $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. Diremos que f es de clase C^k si sus componentes son de clase C^k .

En adelante, trabajaremos usualmente con campos de clase C^∞ . El espacio de tales campos de vectores, forma un espacio lineal denotado por $V(x)$.

Sea X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n (o X una variedad diferenciable). Tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.3. Se denomina *Transformación Diferenciable* (ó simplemente *Transformación*) de X , a un difeomorfismo de X sobre si mismo.

Definición 1.4. Un *Grupo 1-Parámetro de Transformaciones de X* es una función de $\mathbb{R} \times X$ en X , $(t, p) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \gamma_t(p) \in X$, la cual satisface las siguientes condiciones:

- 1) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_t : p \mapsto \gamma_t(p)$ es una transformación de X .
- 2) Para cada $t, s \in \mathbb{R}$ y $p \in X$, $\gamma_{t+s}(p) = \gamma_t(\gamma_s(p))$.

Definición 1.5. Sea I_ϵ un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$ y U un conjunto abierto de X . Un *Grupo 1-Parámetro de Transformaciones Locales de X* definido sobre $I_\epsilon \times U$ es una función de $I_\epsilon \times U$ en X , $(t, p) \in I_\epsilon \times U \mapsto \gamma_t(p) \in U$, la cual satisface las siguientes condiciones:

- 1) Para cada $t \in I_\epsilon$, $\gamma_t : p \mapsto \gamma_t(p)$ es un difeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $\gamma_t(U)$ de X .
- 2) Si $t, s, t + s \in I_\epsilon$ y $p, \gamma_s(p) \in U$, entonces, $\gamma_{t+s}(p) = \gamma_t(\gamma_s(p))$.

Observación 3.

a) Notemos que, $\gamma_{-t} = (\gamma_t)^{-1}$ y $\gamma_0 = I_d$.

b) Diremos que una curva diferenciable γ sobre X es una **curva integral** de X si $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, para cada t en el dominio de γ .

c) Cada Grupo 1-Parámetro de transformaciones γ_t induce un campo de vectores f como sigue: Para cada punto $p \in X$, X_p es el vector tangente a la curva $x(t) = \gamma_t(p)$, llamada la **órbita** de p , en $p = \gamma_0(p)$. De forma análoga, un Grupo 1-Parámetro de transformaciones locales induce un campo de vectores f definido sobre un abierto U de X . Para el caso en que X es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n tenemos que dicho campo de vectores está dado por:

$$f(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma_t(p).$$

Proposición 1.1. *Sea f un campo de vectores sobre una variedad diferenciable X . Para cada punto $p_0 \in X$, existe una vecindad U de p_0 , un número positivo ϵ y un grupo 1-parámetro de transformaciones locales $\gamma_t : U \mapsto X$, $t \in I_\epsilon$, el cual es inducido por el campo f dado.*

Demostración. Sea u_1, u_2, \dots, u_n un sistema de coordenadas local en una vecindad W de p_0 , tal que, $u_1(p_0) = u_2(p_0) = \dots = u_n(p_0) = 0$. Sea $f = \sum \xi_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \frac{\partial}{\partial u_i}$ en W . Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \xi_i(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

con funciones desconocidas $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$. Por el teorema fundamental de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe un único conjunto de funciones $g_1(t; u), g_2(t; u), \dots, g_n(t; u)$ definidas para $u = (u_1, \dots, u_n)$ con $|u_j| < \delta_1$ y para $|t| < \epsilon_1$, el cual forma una solución de la ecuación diferencial para cada u fijo y satisface la condición inicial $g_i(0; u) = u_i$.

Sea $\gamma_t(u) = (g_1(t; u), g_2(t; u), \dots, g_n(t; u))$ para $|t| < \epsilon_1$ y u en $U_1 = \{u; |u_j| < \delta_1\}$. Si $|t|, |s|$ y $|t + s|$ son todos menores que ϵ_1 y ambos u y $\gamma_s(u)$ están en U_1 , entonces las funciones $h_i(t) = g_i(t + s; u)$ son una solución de la ecuación diferencial para condiciones iniciales $h_i(0) = g_i(s; u)$. Por unicidad de las solución tenemos $h_i(t) = g_i(t; \gamma_s(u))$. Esto prueba que $\gamma_t(\gamma_s(u)) = \gamma_{t+s}(u)$. Ya que γ_0 es la transformación identidad de U_1 , existen $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, tales que, para $U = \{u; |u_j| < \delta\}$, $\gamma_t(U) \subset U_1$ si $|t| < \epsilon$. Luego, $\gamma_{-t}(\gamma_t(u)) = \gamma_t(\gamma_{-t}(u)) = \gamma_0(u) = u$, para todo $u \in U$ y $|t| < \epsilon$. Esto prueba que γ_t es un difeomorfismo de U para $|t| < \epsilon$. Así, γ_t es un grupo 1-parámetro de transformaciones locales de X definido sobre $I_\epsilon \times U$.

Por la construcción de γ_t , es evidente que γ_t induce el campo de vectores f en U .
□

Definición 1.6. *Sea X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n (o X una variedad diferenciable) y f un campo de vectores sobre X . La familia de transformaciones locales γ_t , del grupo 1-parámetro inducido por f es llamada *Flujo Local* (ó simplemente *Flujo*) del campo vectorial f . Además, si la solución $\gamma_t(p)$ está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y $p \in X$, entonces el campo de vectores f , es llamado *Completo*.*

Denotaremos el flujo local de un campo de vectores por γ_t^f o por $\exp(tf)$.

Proposición 1.2. *Sobre una variedad compacta X , todo campo de vectores f es completo.*

Demostración. Para cada punto $p \in X$, sea $U(p)$ una vecindad de p y $\varepsilon(p)$ un número positivo tal que, el campo de vectores f genera un grupo 1-parámetro de transformaciones locales γ_t sobre $I_{\varepsilon(p)} \times U(p)$. Ya que X es compacto, el cubrimiento abierto $\{U(p); p \in X\}$ tiene un subcubrimiento finito $\{U(p_i); i = 1, \dots, k\}$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p_1), \dots, \varepsilon(p_k)\}$. Así, $\gamma_t(p)$ está definida sobre $I_\varepsilon \times X$ y por tanto sobre $\mathbb{R} \times X$. \square

Para ampliar y/o complementar los resultados presentados en esta sección, se puede consultar [1].

1.3. Corchete de Lie y sus propiedades

Un sistema de control puede ser considerado como una colección de campos de vectores parametrizados por un parámetro llamado control. Es natural esperar que las propiedades básicas de tales sistemas dependan de las interacciones entre los diferentes campos de vectores correspondientes a diferentes controles. Sobre tales campos se pueden hacer algunas operaciones algebraicas, como tomar combinaciones lineales y tomar un producto llamado corchete de Lie.

Existen tres definiciones equivalentes de corchete de Lie y daremos cada una de ellas posteriormente. En esta sección comenzaremos por dar la definición más sencilla en \mathbb{R}^n y algunas propiedades.

Definición 1.7. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y sean f y g campos de vectores sobre X . El Corchete de Lie de f y g es otro campo de vectores definido como sigue:*

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)g(x),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ denotan las matrices jacobianas de f y g . Llamaremos a

esto, *Definición Jacobiana del corchete de Lie.*

Observación 4.

El Corchete de Lie de dos campos de vectores, es otro campo de vectores que mide la "no conmutatividad" de los flujos de ambos campos de vectores.

Ejemplo 1.4. Sean $f = (1, 0)^T$ y $g = (0, x_1)^T$ dos campos de vectores sobre \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= \frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)g(x) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} f(x) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} g(x) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (0, 1)^T.
 \end{aligned}$$

Proposición 1.3. *El corchete de Lie de los campos de vectores f y g es idénticamente igual a cero, si y solo si, sus flujos conmutan; es decir,*

$$[f, g] \equiv 0 \iff \gamma_t^f \circ \gamma_s^g(p) = \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p), \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall p \in X,$$

donde la igualdad del lado derecho debe ser satisfecha por aquellos valores de s, t y p para los cuales ambos lados están bien definidos.

Luego, $[f, g] \equiv 0$ equivale a decir que, si comenzamos en un punto p y avanzamos a lo largo de la trayectoria de f para un tiempo t , entonces avanzando a lo largo

de la trayectoria de g para un tiempo s , e invirtiendo el orden de los campos f y g , obtenemos el mismo resultado. (ver figura 1.1)

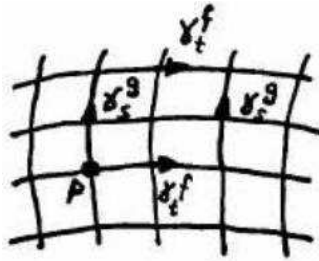


Figura 1.1:

La demostración se hará más tarde, pues aún no contamos con las herramientas necesarias para realizar dicha prueba.

Proposición 1.4. *Fijemos un $p \in X$ y consideremos la curva*

$$\alpha(t) = \gamma_{-t}^g \circ \gamma_{-t}^f \circ \gamma_t^g \circ \gamma_t^f(p)$$

entonces, $\alpha'(0) = 0$ y $\alpha''(0) = 2[f, g](p)$.

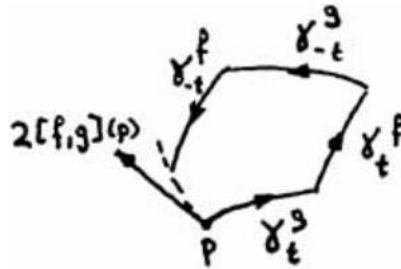


Figura 1.2:

De esta proposición podemos concluir que después de una conveniente reparametrización, el vector tangente a la curva $t \rightarrow \gamma(t)$, es igual a $2[f, g](p)$ (ver figura 1.2). Esto implica que los puntos alcanzables desde p por medio de los campos de vectores f y g se encuentran no solo en las direcciones de $f(p)$ y $g(p)$, sino también en la dirección del corchete de Lie $[f, g](p)$. Este hecho será de gran importancia en el estudio de las propiedades de controlabilidad de sistemas de control no lineal.

A continuación presentamos de una forma más detallada, la prueba que aparece en [2] (pag 224).

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned}\alpha_1(h, t) &= \gamma_h^g(\gamma_t^f(p)), \\ \alpha_2(h, t) &= \gamma_{-h}^f(\gamma_t^g(\gamma_t^f(p))), \\ \alpha_3(h, t) &= \gamma_{-h}^g(\gamma_{-t}^f(\gamma_t^g(\gamma_t^f(p))),\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\alpha(h) &= \gamma_{-h}^g(\gamma_{-h}^f(\gamma_h^g(\gamma_h^f(p))) \\ &= \alpha_3(h, h).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Más aún,

$$\begin{aligned}\alpha_2(0, h) &= \gamma_0^f(\gamma_h^g(\gamma_h^f(p))) \\ &= \gamma_h^g(\gamma_h^f(p)) \\ &= \alpha_1(h, h).\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(0, h) &= \gamma_0^g(\gamma_h^f(\gamma_h^g(\gamma_h^f(p))) \\ &= \gamma_{-h}^f(\gamma_h^g(\gamma_h^f(p))) \\ &= \alpha_2(h, h).\end{aligned}\tag{1.3}$$

y para cualquier función C^∞ $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{(h_1, t_1)} (\phi \circ \alpha_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\alpha_1(h_1 + t, t_1)) - \phi(\alpha_1(h_1, t_1))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_{h_1+t}^g(\gamma_{t_1}^f(p))) - \phi(\gamma_{h_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p)))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_t^g(\gamma_{h_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p))) - \phi(\gamma_{h_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p)))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_t^g(\alpha_1(h_1, t_1)) - \phi(\alpha_1(h_1, t_1))] \\ &= g(\phi(\alpha_1(h_1, t_1))).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial(\phi \circ \alpha_1)}{\partial h} = g(\phi \circ \alpha_1). \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{(h_1, t_1)} (\phi \circ \alpha_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\alpha_2(h_1 + t, t_1)) - \phi(\alpha_2(h_1, t_1))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_{-(h_1+t)}^f(\gamma_{t_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p)))) - \phi(\gamma_{-h_1}^f(\gamma_{t_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p))))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_{-t}^f(\gamma_{-h_1}^f(\gamma_{t_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p)))) - \phi(\gamma_{-h_1}^f(\gamma_{t_1}^g(\gamma_{t_1}^f(p))))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi(\gamma_{-t}^f(\alpha_2(h_1, t_1)) - \phi(\alpha_2(h_1, t_1))] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{-r} [\phi(\gamma_r^f(\alpha_2(h_1, t_1)) - \phi(\alpha_2(h_1, t_1))] \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} [\phi(\gamma_r^f(\alpha_2(h_1, t_1)) - \phi(\alpha_2(h_1, t_1))] \\ &= -f(\phi(\alpha_2(h_1, t_1))). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial(\phi \circ \alpha_2)}{\partial h} = -f(\phi \circ \alpha_1) \quad (1.5)$$

De forma análoga se obtiene que

$$\frac{\partial(\phi \circ \alpha_3)}{\partial h} = -g(\phi \circ \alpha_3). \quad (1.6)$$

observemos también que,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(0,t)} (\phi \circ \alpha_1) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(\alpha_1(0, t+s)) - \phi(\alpha_1(0, t))] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(\gamma_0^g(\gamma_{t+s}^f(p))) - \phi(\gamma_0^g(\gamma_t^f(p)))] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(\gamma_0^g(\gamma_s^f(\gamma_t^f(p)))) - \phi(\gamma_0^g(\gamma_t^f(p)))] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(\gamma_s^f(\gamma_t^f(p))) - \phi(\gamma_t^f(p))] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(\gamma_s^f(\alpha_1(0, t))) - \phi(\alpha_1(0, t))] \\
&= f(\phi(\alpha_1(0, t))).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \alpha)' &= \phi'(\alpha(0))\alpha'(0) \\
&= \phi'(\alpha_3(0, 0))\alpha'_3(0, 0) && \text{(por (1.1))} \\
&= (\phi \circ \alpha_3)'(0, 0) \\
&= D_1((\phi \circ \alpha_3)(0, 0)) + D_2((\phi \circ \alpha_3)(0, 0)) \\
&= D_1((\phi \circ \alpha_3)(0, 0)) + [D_1((\phi \circ \alpha_2)(0, 0)) + D_2((\phi \circ \alpha_2)(0, 0))] && \text{(por (1.3))} \\
&= D_1((\phi \circ \alpha_3)(0, 0)) + [D_1((\phi \circ \alpha_2)(0, 0)) + [D_1((\phi \circ \alpha_1)(0, 0)) \\
&\quad + D_2((\phi \circ \alpha_1)(0, 0))]] && \text{(por (1.2))} \\
&= D_1((\phi \circ \alpha_3)(0, 0)) + D_1((\phi \circ \alpha_2)(0, 0)) + D_1((\phi \circ \alpha_1)(0, 0)) \\
&= +D_2((\phi \circ \alpha_1)(0, 0)) \\
&= -g(\phi(\alpha_3(0, 0))) - f(\phi(\alpha_2(0, 0))) + g(\phi(\alpha_1(0, 0))) + f(\phi(\alpha_1(0, 0))) \\
&= -g(\phi(p)) - f(\phi(p)) + g(\phi(p)) + f(\phi(p)). \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$(\phi \circ \alpha)'(t) = \alpha'(t)(\phi)$$

(acción del vector tangente $\alpha'(t)$ sobre una función ϕ).

Luego, como $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es arbitraria, entonces

$$(\phi \circ \alpha)'(t) = 0 \Rightarrow \alpha'(0)(\phi) = 0 \Rightarrow \alpha'(0) = 0.$$

Probaremos ahora que $\alpha''(0, 0) = 2[f, g](p)$.

Observemos que,

$$\begin{aligned} (\phi \circ \alpha)''(0) &= D_1[D_1(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) + D_2(\phi \circ \alpha_3)(0, 0)] \\ &\quad + D_2[D_1(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) + D_2(\phi \circ \alpha_3)(0, 0)] \\ &= D_{1,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) + D_{1,2}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) \\ &\quad + D_{2,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) + D_{2,2}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) \\ &= D_{1,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) + 2D_{2,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) \\ &\quad + D_{2,2}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} D_{1,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) &= D_1[D_1(\phi \circ \alpha_3)(0, 0)] \\ &= D_1[-g\phi(\alpha_3(0, 0))] \\ &= -[-gg\phi(\alpha_3(0, 0))] \\ &= gg\phi(p). \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} 2D_{2,1}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) &= 2D_2[D_1(\phi \circ \alpha_3)(0, 0)] \\ &= 2D_1[-g\phi(\alpha_3(0, 0))] \\ &= 2[-D_1g\phi(\alpha_2)(0, 0) - D_2g\phi(\alpha_2)(0, 0)] \\ &= 2fg\phi(p) - 2D_2g\phi(\alpha_2(0, 0)) \\ &= 2fg\phi(p) - 2[D_1g\phi(\alpha_1(0, 0)) + D_2g\phi(\alpha_1(0, 0))] \\ &= 2fg\phi(p) - 2gg\phi(p) - 2fg\phi(p). \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
D_{2,2}(\phi \circ \alpha_3)(0, 0) &= D_1 D_1(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) + 2D_2 D_1(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) + D_2 D_2(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= D_1[-f\phi(\alpha_2(0, 0))] + 2D_2[-f\phi(\alpha_2(0, 0))] + D_2 D_2(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= ff\phi(p) - 2[D_1 f\phi(\alpha_1(0, 0)) + D_2 f\phi(\alpha_2(0, 0))] + D_2 D_2(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= ff\phi(p) - 2gf\phi(p) - ff\phi(p) + D_2 D_2(\phi \circ \alpha_2)(0, 0).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Además,

$$\begin{aligned}
D_2 D_2(\phi \circ \alpha_2)(0, 0) &= D_1 D_1[\phi(\alpha_1(0, 0))] + 2D_2 D_1[\phi(\alpha_1(0, 0))] + D_2 D_2[\phi(\alpha_1(0, 0))] \\
&= gg\phi(p) + 2fg\phi(p) + ff\phi(p).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Sustituyendo (1.9),(1.10),(1.11) y (1.12) en (1.8) se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \alpha)''(0) &= gg\phi(p) + [2fg\phi(p) - gg\phi(p) - 2fg\phi(p)] \\
&\quad + [ff\phi(p) - 2gf\phi(p) - 2ff\phi(p)] + [gg\phi(p) + 2fg\phi(p) + ff\phi(p)] \\
&= -2gf\phi(p) + 2fg\phi(p) \\
&= 2(fg\phi(p) - gf\phi(p)) \\
&= 2[f, g]_p \phi.
\end{aligned}$$

Pero, por definición

$$(\phi \circ \alpha)''(0) = \alpha''(0)\phi.$$

(acción del vector tangente $\alpha''(t)$ sobre la función ϕ). Entonces,

$$\alpha''(0) = 2[f, g](p).$$

□

Observación 5.

Notemos que $\alpha''(0) \in T_p X$; en efecto,

$$\begin{aligned}\alpha''(0)(\phi_1 \cdot \phi_2) &= ((\phi_1 \cdot \phi_2) \circ \alpha)''(0) \\ &= ((\phi_1 \circ \alpha)(\phi_2 \circ \alpha))''(0) \\ &= ((\phi_1 \circ \alpha)'(\phi_2 \circ \alpha) + (\phi_1 \circ \alpha)(\phi_2 \circ \alpha)')'(0) \\ &= (\phi_1 \circ \alpha)''(0)(\phi_2 \circ \alpha)(0) + (\phi_1 \circ \alpha)'(0)(\phi_2 \circ \alpha)(0)' \\ &\quad + (\phi_1 \circ \alpha)'(0)(\phi_2 \circ \alpha)''(0) + (\phi_1 \circ \alpha)(0)(\phi_2 \circ \alpha)''(0) \\ &= (\phi_1 \circ \alpha)''(0)(\phi_2 \circ \alpha)(0) + (\phi_1 \circ \alpha)(0)(\phi_2 \circ \alpha)''(0) \\ &= \alpha''(0)(\phi_1)\phi_2(p) + \alpha''(0)(\phi_2)\phi_1(p),\end{aligned}$$

donde la penúltima ecuación se debe al hecho de que $(\phi_1 \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0)\phi = 0$. Por tanto, $\alpha''(0)$ es una derivación. Veamos ahora que, $\alpha''(0)$ es lineal.

$$\begin{aligned}\alpha''(0)(\lambda\phi_1 + \beta\phi_2) &= ((\lambda\phi_1 + \beta\phi_2) \circ \alpha)''(0) \\ &= ((\lambda\phi_1 \circ \alpha) + (\beta\phi_2 \circ \alpha))''(0) \\ &= ((\lambda\phi_1 \circ \alpha)' + (\beta\phi_2 \circ \alpha)')'(0) \\ &= (\lambda(\phi_1 \circ \alpha)' + \beta(\phi_2 \circ \alpha)')'(0) \\ &= \lambda(\phi_1 \circ \alpha)'' + \beta(\phi_2 \circ \alpha)''(0) \\ &= \lambda\alpha''(0)\phi_1 + \beta\alpha''(0)\phi_2.\end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha''(0) \in T_p X.$$

1.4. Cambio de Coordenadas y Corchete de Lie

Con miras a introducir el corchete de Lie en función del flujo, consideremos un difeomorfismo $\phi : X \rightarrow X$.

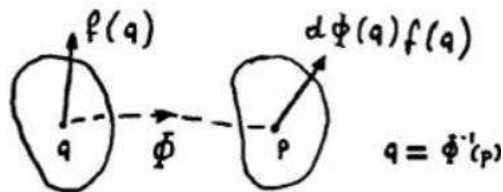


Figura 1.3:

Como los vectores tangentes son transformados a través de la función Jacobiana de un difeomorfismo, nuestro difeomorfismo define la siguiente transformación de un campo de vectores f . (ver figura 1.3)

$$Ad_{\phi}(f)(p) = D\phi(q)f(q) \tag{1.13}$$

donde, $q = \phi^{-1}(p)$ y $D\phi$ es la función tangente de ϕ (matriz jacobiana, en coordenadas).

Notemos que Ad_{ϕ} es lineal; en efecto:

$$\begin{aligned} Ad_{\phi}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(p) &= D\phi(p)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(q); \quad q = \phi^{-1}(p) \\ &= D\phi(p)(\lambda_1 f_1(q) + \lambda_2 f_2(q)); \quad q = \phi^{-1}(p) \\ &= D\phi(p)\lambda_1 f_1(q) + D\phi(p)\lambda_2 f_2(q); \quad q = \phi^{-1}(p) \\ &= \lambda_1 D\phi(p)f_1(q) + \lambda_2 D\phi(p)f_2(q); \quad q = \phi^{-1}(p) \\ &= \lambda_1 Ad_{\phi}(f_1)(p) + \lambda_2 Ad_{\phi}(f_2)(p). \end{aligned}$$

Además, si ψ es otro difeomorfismo global entonces,

$$\begin{aligned}
Ad_{\phi \circ \psi}(f)(p) &= D(\phi \circ \psi)(q)f(q); \quad q = (\phi \circ \psi)^{-1}(p) \\
&= D\phi(\psi(q))D\psi(q)f(q); \quad q = (\phi \circ \psi)^{-1}(p) \\
&= D\phi(\psi(q))Ad_{\psi}(f)(\psi(q)); \quad q = (\phi \circ \psi)^{-1}(p) \\
&= Ad_{\phi}Ad_{\psi}(f)(p).
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Proposición 1.5. *Consideremos el campo de vectores $Ad_{\phi}(f)$. El flujo local de este campo de vectores está dado por:*

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}.$$

Demostración. Probemos que σ_t satisface las condiciones de flujo:

$$\begin{aligned}
\sigma_{t_1} \circ \sigma_{t_2} &= (\phi \circ \gamma_{t_1} \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma_{t_2} \circ \phi^{-1}) \\
&= \phi \circ \gamma_{t_1} \circ Id \circ \gamma_{t_2} \circ \phi^{-1} \\
&= \phi \circ (\gamma_{t_1} \circ \gamma_{t_2}) \circ \phi^{-1} \\
&= \phi \circ \gamma_{t_1 \circ t_2} \circ \phi^{-1} \\
&= \sigma_{t_1+t_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{-t} &= \phi \circ \gamma_{-t} \circ \phi^{-1} \\
&= \phi \circ (\gamma_t)^{-1} \circ \phi^{-1} \\
&= \phi \circ (\gamma_t^{-1} \circ \phi^{-1}) \\
&= \phi \circ (\phi \circ \gamma_t)^{-1} \\
&= ((\phi \circ \gamma_t) \circ \phi^{-1})^{-1} \\
&= (\phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1})^{-1} \\
&= (\sigma_t)^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \phi \circ \gamma_0 \circ \phi^{-1} \\
&= \phi \circ \phi^{-1} \\
&= Id.
\end{aligned}$$

Entonces σ_t satisface las condiciones de grupo. Además,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1})(p) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi \circ (\gamma_t \circ \phi^{-1})(p) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi(\gamma_t(\phi^{-1}(p))) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\gamma_t \circ \phi^{-1})(p) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(p)) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma_t(\phi^{-1}(p)) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\phi_1(\phi^{-1}(p)), \dots, \phi_n(\phi^{-1}(p)))^T f(\phi^{-1}(p)) \\
&= \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi_1(\phi^{-1}(p)), \dots, \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi_n(\phi^{-1}(p)) \right)^T f(\phi^{-1}(p))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{\phi^{-1}(p)} \phi_1(\phi^{-1}(p)) f(\phi^{-1}(p)) \\
&= D\phi(\phi^{-1}(p)) f(\phi^{-1}(p)) \\
&= Ad_\phi f(p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$ induce el campo de vectores $Ad_\phi f(p)$ de la siguiente forma:

$$Ad_\phi f(p) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1})(p) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \sigma_t(p).$$

Definiremos ahora el corchete de Lie de f y g como la derivada con respecto a t , en $t = 0$, del campo de vectores g transformado por el flujo del campo de vectores f .

Definición 1.8. *Dados dos campos de vectores f y g sobre $X \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in X$ se define:*

$$\begin{aligned}
[f, g](p) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} D\gamma_{-t}^f(\gamma_t^f) g(\gamma_{-t}^f) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(p).
\end{aligned}$$

Observación 6.

Notemos que esta definición es equivalente a la definición jacobiana del corchete de Lie. En efecto:

$$\begin{aligned}
[f, g](p) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} D\gamma_{-t}(p)g(\gamma_0(p)) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} D(Id)(\gamma_t(p))g(p) + Id \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g(\gamma_t(p)) \right) \\
&= -Df(p)g(p) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g(p) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g(\gamma_t(p)) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \gamma_t(p) \\
&= -Df(p)g(p) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t g(p)f(p) \\
&= -Df(p)g(p) + Dg(p)f(p) \\
&= Dg(p)f(p) - Df(p)g(p).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Proposición 1.6. Si ϕ es un difeomorfismo de X , entonces

$$[Ad_\phi f, Ad_\phi g] = Ad_\phi [f, g].$$

Demostración. De la proposición anterior se tiene que el flujo del campo de vectores $Ad_\phi f$ es $\sigma_t = \phi \circ \gamma_t^f \circ \phi^{-1}$. Entonces por la definición anterior del corchete de Lie se tiene que:

$$\begin{aligned}
[Ad_\phi f, Ad_\phi g](p) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_{\phi \circ \gamma_{-t}^f \circ \phi^{-1}} Ad_\phi g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_\phi Ad_{\gamma_{-t}^f} Ad_{\phi^{-1}} Ad_\phi g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_\phi Ad_{\gamma_{-t}^f} Ad_{\phi \circ \phi^{-1}} g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_\phi Ad_{\gamma_{-t}^f} Ad_{Id} g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_\phi Ad_{\gamma_{-t}^f} D(Id)g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_\phi Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (D\phi(q)(Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(q)); \quad q = \phi^{-1}(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} D\phi(q)(Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(q) + D\phi(q) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(q) \\
&= D\phi(q)[f, g](q) \\
&= Ad_\phi[f, g](q).
\end{aligned}$$

□

Antes de establecer la siguiente proposición es importante notar que $Ad_{\gamma_t^f} f = f$; en efecto:

$$\begin{aligned}
(Ad_{\gamma_t^f} f)(p) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\gamma_t^f \circ \gamma_t^f \circ \gamma_{-t}^f)(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \gamma_t^f(p) \\
&= f(p).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Proposición 1.7. *Tenemos que*

$$\frac{\partial}{\partial t} Ad_{\gamma_t^f} g = -[f, Ad_{\gamma_t^f} g] = -Ad_{\gamma_t^f} [f, g].$$

Demostración. Observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} Ad_{\gamma_t^f} g &= \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} Ad_{\gamma_{h+t}^f} g \\
&= \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} Ad_{\gamma_h^f} Ad_{\gamma_t^f} g \\
&= - \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} Ad_{\gamma_{-r}^f} Ad_{\gamma_t^f} g \\
&= -[f, Ad_{\gamma_t^f} g].
\end{aligned}$$

Además, por la proposición anterior y por (1.16) se tiene que:

$$\begin{aligned} Ad_{\gamma_t^f}[f, g] &= [Ad_{\gamma_t^f}f, Ad_{\gamma_t^f}g] \\ &= [f, Ad_{\gamma_t^f}g]. \end{aligned}$$

De aquí nos queda, $-[f, Ad_{\gamma_t^f}g] = -Ad_{\gamma_t^f}[f, g]$ □

En adelante, consideraremos la siguiente notación:

$$ad_f g = [f, g].$$

Así, $ad_f g$ es un operador lineal en el espacio $V(X)$. Consideremos las siguientes iteraciones:

$$ad_f^0 g = g, \tag{1.17}$$

$$ad_f^i g = ad_f \dots ad_f g. \tag{1.18}$$

Por la proposición 1.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big| Ad_{\gamma_t^f} g &= -[f, Ad_{\gamma_t^f} g](p) \\ &= -(ad_f(Ad_{\gamma_t^f} g))(p). \end{aligned} \tag{1.19}$$

En el caso analítico tenemos también una fórmula de expansión de la relación anterior.

Proposición 1.8. *Si los campos de vectores f y g son analíticos reales, entonces tenemos la siguiente fórmula:*

$$(Ad_{\gamma_t^f} g)(p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} ad_f^i g(p).$$

donde la serie converge absolutamente, para t en una vecindad de cero.

Demostración. Ya que f y g son analíticas reales, se tiene que, aplicando iterativamente (1.19) y tomando en cuenta (1.17), (1.18) y que $\gamma_0^f = Id$, resulta

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i (Ad_{\gamma_t^f} g)(p) \Big|_{t=0} = (-1)^i ad_f^i g(p).$$

Luego, la serie de Maclaurin de la función $Ad_{\gamma_t^f}(p)$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (Ad_{\gamma_t^f} g)(p) \Big|_{t=0} \frac{t^i}{i!} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i ad_f^i g(p) \frac{t^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i ad_f^i g(p)}{i!}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(Ad_{\gamma_t^f} g)(p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} ad_f^i g(p).$$

□

A continuación presentamos la demostración de la proposición 1.3.

Demostración. (proposición 1.3)

(\Leftarrow) Observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\gamma_t^f \circ \gamma_s^g)(p) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left[\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_t^f(\gamma_s^g(p)) \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s^g(p) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left[\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_t^f(\gamma_s^g(p)) g(p) \right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_t^f(\gamma_s^g(p)) \right] g(p) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \gamma_t^f(\gamma_s^g(p)) \right] g(p) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} f(\gamma_s^g(p)) \right] g(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (f_1(\gamma_s^g(p)), \dots, f_n(\gamma_s^g(p)))^T g(p) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} f_1(\gamma_s^g(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} f_n(\gamma_s^g(p)) \right)^T g(p) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial s}(p) \right)^T g(p) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(p) g(p).
\end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene que,

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\gamma_s^g \circ \gamma_t^f)(p) = \frac{\partial g}{\partial x}(p) f(p).$$

De lo anterior, y ya que $\gamma_t^f \circ \gamma_s^g = \gamma_s^g \circ \gamma_t^f$, obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial x} g = \frac{\partial g}{\partial x} f$. Recordemos que aquí las parciales mixtas coinciden, pues las funciones son diferenciables.

Ahora bien, de esta última igualdad se deduce que

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) g(x) \equiv 0.$$

(\implies) Probaremos ahora el directo.

Por hipótesis, $[f, g] \equiv 0$ y por la proposición 1.7 nos queda que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big| Ad_{\gamma_t^f} = -Ad_{\gamma_t^f}([f, g]) = 0.$$

Por tanto, $Ad_{\gamma_t^f}$ no depende de t por ser constante. De Aquí,

$$\begin{aligned} Ad_{\gamma_t^f} g &= Ad_{\gamma_0^f} g \\ &= Ad_{Id} g \\ &= D(Id)g \\ &= g \\ &= Ad_{\gamma_s^g} g. \end{aligned}$$

(1.20)

Luego, por proposición 1.5, el flujo de $Ad_{\gamma_t^f} g$ es igual al flujo de $Ad_{\gamma_s^g} g$; esto es,

$$\gamma_t^f \circ \gamma_s^g \circ \gamma_{-t}^f = \gamma_s^g \circ \gamma_s^g \circ \gamma_{-s}^g = \gamma_s^g.$$

Entonces,

$$\gamma_t^f \circ \gamma_s^g \circ (\gamma_{-t}^f \circ \gamma_t^f) = \gamma_s^g \circ \gamma_t^f.$$

De lo anterior se sigue que,

$$\gamma_t^f \circ \gamma_s^g = \gamma_s^g \circ \gamma_t^f.$$

□

1.5. Campos de Vectores y Operadores Diferenciales

Un campo de vectores diferenciable f sobre X define un operador lineal L_f sobre el espacio de las funciones diferenciables $C^\infty(X)$ en la siguiente forma:

$$(L_f\phi)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi(\gamma_t^f(p)) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(p).$$

Este operador es llamado *derivada de Lie a lo largo de f* , y este es un operador diferencial de orden uno.

Recíprocamente, cualquier operador diferencial de orden uno con términos de orden distinto de cero puede ser escrito como

$$L = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y este define un único campo de vectores dado en coordenadas como $f = (a_1, \dots, a_n)^T$.

Esto significa que existe una única correspondencia

$$f \longrightarrow L_f$$

entre campos de vectores y operadores diferenciales de orden uno (para términos de orden distinto de cero).

Por la correspondencia anterior, usualmente se identifica el campo de vectores f con el correspondiente operador diferencial L_f y se escribe

$$L_f = f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sean f, g campos de vectores y L_f, L_g los correspondientes operadores diferenciales. Consideremos el conmutador de esos operadores definido por

$$[L_f, L_g] := L_f L_g - L_g L_f.$$

Proposición 1.9. *El operador $[L_f, L_g]$ es un operador diferencial de orden uno, el cual corresponde al corchete de Lie $[f, g]$, es decir,*

$$[L_f, L_g] = L_{[f, g]}.$$

Demostración. Dada cualquier función diferenciable ϕ , calculamos el operador diferencial compuesto sobre ϕ

$$L_f L_g \phi = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \right) = \sum_{ij} f_i g_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi + \sum_{ij} f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

La expresión análoga para $L_g L_f \phi$ tiene los mismos primeros sumandos, debido a la conmutatividad de las derivadas parciales con respecto a x_i y x_j , así tenemos

$$[L_f, L_g] \phi := L_f L_g \phi - L_g L_f \phi = \sum_{ij} f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \sum_{ij} g_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

Vemos que, $[L_f, L_g]$ es un operador diferencial de orden uno. Usando la definición jacobiana del corchete de Lie (definición 1.7) obtenemos la misma expresión

$$L_{[f, g]} \phi = \sum_j \left(\sum_i f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j},$$

lo cual significa que

$$[L_f, L_g] = L_{[f, g]}.$$

□

La proposición anterior sugiere que podemos definir equivalentemente el corchete de Lie como el conmutador

$$[f, g] = fg - gf = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} f_i - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Llamaremos a esto, **Definición Algebraica** del corchete de Lie. Claramente, esta definición coincide en un sistema de coordenadas con la definición Jacobiana, si usamos las identificaciones L_f y L_g .

Entonces, tenemos las siguientes propiedades del corchete de Lie:

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= -[g, f]. && \text{(Antisimetría)} \\
 [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= 0. && \text{(Identidad de Jacobi)} \\
 [\alpha f + \beta g, h] &= \alpha[f, g] + \beta[f, h], \text{ para escalares } \alpha \text{ y } \beta. \\
 [h, \alpha f + \beta g] &= \alpha[h, f] + \beta[h, g], \text{ para escalares } \alpha \text{ y } \beta. && \text{(Bilinealidad)}
 \end{aligned}$$

La primera propiedad es evidente. A continuación probaremos las dos restantes.

Consideremos una función arbitraria $\phi \in C^\infty(X)$.

Identidad de Jacobi

$$\begin{aligned}
 [f, [g, h]](\phi) + [h, [f, g]](\phi) &= (f[g, h](\phi) - [g, h]f(\phi)) + (h[f, g](\phi) - [f, g]h(\phi)) \\
 &= f(gh - hg)(\phi) - (gh - hg)f(\phi) \\
 &\quad + (h(fg - gf)(\phi) - (fg - gf)h(\phi)) \\
 &= (fgh - fhg)(\phi) - (ghf - hgf)(\phi) \\
 &\quad + (hfg - hgf)(\phi) - (fgh - gfh)(\phi) \\
 &= fgh(\phi) - fhg(\phi) - ghf(\phi) + hgf(\phi) \\
 &\quad + hfg(\phi) - hgf(\phi) - fgh(\phi) + gfh(\phi) \\
 &= -fhg(\phi) - ghf(\phi) + hfg(\phi) + gfh(\phi) \\
 &= (hfg(\phi) - fhg(\phi)) + (gfh(\phi) - ghf(\phi)) \\
 &= (hf - fh)g(\phi) + g(fh - hf)(\phi) \\
 &= [h, f]g(\phi) - g[h, f](\phi) \\
 &= [[h, f], g](\phi).
 \end{aligned}$$

Luego, despejando nos queda $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$.

Bilinealidad

$$\begin{aligned} [\alpha f + \beta g, h](\phi) &= (\alpha f + \beta g)h(\phi) - h(\alpha f + \beta g)(\phi) \\ &= (\alpha fh + \beta gh)(\phi) - (h\alpha f + h\beta g)(\phi) \\ &= \alpha fh(\phi) + \beta gh(\phi) - \alpha hf(\phi) - \beta hg(\phi) \\ &= \alpha fh(\phi) - \alpha hf(\phi) + \beta gh(\phi) - \beta hg(\phi) \\ &= \alpha(fh - hf)(\phi) + \beta(gh - hg)(\phi) \\ &= [f, h](\phi) + [g, h](\phi) \\ &= ([f, h] + [g, h])(\phi). \end{aligned}$$

La otra ecuación se demuestra de forma totalmente análoga a la anterior.

Observación 7.

*La identidad de Jacobi puede ser escrita equivalentemente como la **Condición de Leibniz-Jacobi***

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h] + [g, [f, h]]. \quad (1.21)$$

Definición 1.9. *Un Álgebra de Lie es un espacio lineal L con una función bilineal $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$, la cual satisface las siguientes propiedades*

$$\begin{aligned} [f, g] &= -[g, f] && \text{(Antisimetría)} \\ [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= 0 && \text{(Identidad de Jacobi)} \end{aligned}$$

Un subespacio lineal K de L , cerrado bajo el producto $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$, es llamado una **subálgebra de Lie** de L .

Como una aplicación de la identidad de Leibniz-Jacobi (1.21) y de la antisimetría del corchete de Lie, tenemos la proposición siguiente. Sean f_1, \dots, f_k elementos de un álgebra de Lie L . Llamaremos **corchete de Lie iterado** de tales elementos a cualquier elemento de L obtenido aplicando iterativamente la operación corchete de Lie a los elementos de L en cualquier orden posible; por ejemplo,

$[[f_1, f_2], [f_3, f_1]]$. Llamaremos *corchete de Lie iterado izquierdo* a un corchete de la forma $[f_{i_1}, \dots, [f_{i_{k-1}}, f_{i_k}] \dots]$.

Proposición 1.10. *Cualquier corchete de Lie iterado de f_1, \dots, f_k es una combinación lineal de corchetes de Lie iterados izquierdos de f_1, \dots, f_k .*

La prueba es una consecuencia inmediata del lema 3.1 de la sección 3.

Capítulo 2

Órbitas, Distribuciones y Foliaciones

En este capítulo introducimos nociones y resultados, los cuales tienen un papel básico en la comprensión de la estructura de los sistemas de control no lineal. Dichos resultados están directamente ligados a las propiedades de controlabilidad de tales sistemas.

2.1. Distribuciones y Teorema Local de Frobenius

Denotaremos por X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n ó una variedad diferenciable de dimensión n .

Definición 2.1. *Una Distribución sobre X es, por definición, una función Δ , la cual asigna a cada punto en X un subespacio del espacio tangente en este punto; es decir,*

$$X \ni p \longrightarrow \Delta(p) \subset T_p X.$$

Observación 8.

La distribución Δ es llamada de clase C^∞ si, localmente alrededor de cada punto en X , existe una familia de campos de vectores $\{f_\alpha\}$ (llamados generadores

de Δ), la cual genera Δ ; es decir, $\Delta(p) = \text{span} f_\alpha(p)$. Δ es llamada **localmente finitamente generada**, si la familia de campos de vectores es finita. Finalmente, la distribución Δ se dice que es **de dimensión k** , si $\dim \Delta(p) = k$, para todo punto p en X .

En adelante, supondremos que nuestras distribuciones son de clase C^∞ .

Definición 2.2. Decimos que un campo de vectores f pertenece a una distribución Δ y escribimos $f \in \Delta$, si $f(p) \in \Delta(p)$, para todo $p \in X$. Una distribución Δ es llamada *Involutiva*, si para cualesquiera campos de vectores $f, g \in \Delta$, el corchete de Lie está también en Δ ; es decir, $[f, g] \in \Delta$. Si la distribución tiene, localmente, un número finito de generadores f_1, \dots, f_m la involutividad de Δ significa que

$$[f_i, f_j](p) = \sum_{k=1}^m \phi_{ij}^k(p) f_k(p), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

donde ϕ_{ij}^k son funciones C^∞ .

El concepto de involutividad juega un papel importante en la siguiente versión local del teorema de Frobenius.

Teorema 2.1. Si Δ es una distribución involutiva de clase C^∞ y de dimensión k sobre X entonces, localmente alrededor de cualquier punto en X , existe un cambio de coordenadas diferenciable, el cual transforma la distribución Δ a la siguiente distribución constante

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\},$$

donde e_1, \dots, e_k son los vectores constantes $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, con 1 en el i -ésimo lugar.

Demostración. La prueba consiste en dos pasos.

Paso 1.

Primero mostraremos que la distribución Δ está localmente generada por k campos de vectores que conmutan dos a dos. Fijemos un punto p en X y sean f_1, \dots, f_k campos de vectores cualesquiera, los cuales generan la distribución Δ en una vecindad

de p . Tratando los f'_i s como vectores columna, formamos la matriz $F = (f_1, \dots, f_k)$ de orden $n \times k$. Notemos que multiplicando F por el lado derecho por una matriz $k \times k$ de funciones diferenciables, no cambia la distribución generada por las columnas de F (esta cambia sus generadores, unicamente). Por una posible permutación de variables, conseguimos que la submatriz superior $k \times k$ de F , sea no singular. Multiplicando F por la derecha por una adecuada matriz invertible, obtenemos que esta submatriz es igual a la identidad; es decir, la nueva matriz F toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

donde "*"denota coeficientes no conocidos. Los nuevos campos de vectores formados por las columnas de esta matriz conmutan. En efecto, ya que sus primeros k coeficientes son constantes, los primeros k coeficientes de cualquier corchete de Lie se anulan (en la definición algebraica del corchete de Lie). Además, por la involutividad se sigue que el corchete de Lie es una combinación lineal de las columnas de F . Ambos hechos se cumplen solo cuando los coeficientes de dicha combinación lineal son iguales a cero. Esto se comprueba completando la base que genera a Δ hasta n y expresando los campos como combinación lineal de las parciales. Por tanto, los nuevos campos de vectores conmutan.

Paso 2.

Supongamos que los campos de vectores f_1, \dots, f_k generan la distribución Δ , localmente alrededor de p y ellos conmutan. Podemos escojer otros campos de vectores f_{k+1}, \dots, f_n , así que, f_1, \dots, f_n son linealmente independientes en p . Definimos entonces, la función Φ por

$$(t_1, \dots, t_n) \longrightarrow \gamma_{t_1}^{f_1} \circ \gamma_{t_2}^{f_2} \circ \dots \circ \gamma_{t_n}^{f_n}.$$

Como los flujos de los campos de vectores f_1, \dots, f_k conmutan, vemos que el orden de tomar esos flujos en la definición anterior puede ser cambiado. Luego, una curva integral de un campo de vectores $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, $1 \leq i \leq k$ es transformada en una curva integral del campo de vectores f_i (a medida que cambiamos de lugar al flujo de f_i hacia la izquierda). Se sigue que la función Φ envía los campos de vectores e_1, \dots, e_k a los campos de vectores f_1, \dots, f_k e inversamente actúa la función inversa Φ^{-1} . Esta función inversa es la función deseada, la cual transforma la distribución Δ generada por f_1, \dots, f_k en la distribución constante generada por e_1, \dots, e_k .

□

Antes de introducir la versión global del teorema de Frobenius y otros teoremas importantes, es necesario dar algunas definiciones básicas.

2.2. Subvariedades y Foliaciones

Definición 2.3. *Un subconjunto $S \subset X$ es llamado una Subvariedad Regular de X de dimensión k , si para cualquier $x \in S$, existe una vecindad U de x y un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ sobre un subconjunto abierto V , tal que,*

$$\Phi(U \cap S) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\}.$$

La clase de regularidad de esta subvariedad es, por definición, la clase de regularidad del difeomorfismo Φ (suponemos que esta regularidad es de orden C^∞ ó C^w).

Definición 2.4. *Llamaremos a un subconjunto $S \subset X$ una Subvariedad Inmersa de X de dimensión k , si*

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \text{ donde } S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S$$

y los S'_i s son subvariedades regulares de X de dimensión k .

Observación 9.

En el caso en que S es en sí mismo una subvariedad regular, podemos tomar $S_i = S$ y así, S es también una subvariedad inmersa.

Propiedad 1

Si dos campos de vectores f, g son tangentes a una subvariedad (inmersa) S , entonces también su corchete de Lie $[f, g]$ es tangente a esta subvariedad.

Esto se sigue de la definición geométrica del corchete de Lie. En efecto, si f es tangente a S , entonces su flujo transforma puntos de S en puntos de S , cuando el tiempo es suficientemente pequeño. Luego, la función tangente al flujo $D\gamma_t^f$, transforma los subespacios tangentes de S en subespacios tangentes de S ; en particular, este transforma los vectores tangentes $g(p)$ en vectores tangentes a S . Más aún, los vectores $v(t) = (Ad_{\gamma_{-t}^f} g)(p)$ están todos en el espacio tangente $T_p S$. Tomando la derivada con respecto a t en esta expresión, la cual aparece en la definición geométrica de $[f, g]$, resulta un vector tangente a S .

Definición 2.5. Una Foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X de dimensión k , es una partición

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$$

de X en subvariedades (inmersas) conexas disjuntas S_α , llamadas **hojas**, las cuales tienen la siguiente propiedad. Para cualquier $x \in X$ existe una vecindad U de x y un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ sobre un subconjunto abierto V , tal que,

$$\Phi((U \cap S_\alpha)_{cc}) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_{k+1} = c_\alpha^{k+1}, \dots, x_n = c_\alpha^n\},$$

donde P_{cc} denota una componente conexa del conjunto P y la propiedad anterior debe ser válida para cualquiera de tales componentes conexas, con constantes c_α^i dependiendo de la hoja y la escongenia de la componente conexa. Similarmente como para subvariedades, la regularidad de la foliación es definida por la regularidad del difeomorfismo Φ .

Propiedad 2

Supongamos que un campo de vectores g es tangente a una foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$, esto es, tangente a sus hojas. Entonces, si el flujo de otro campo de vectores f , localmente, preserva esta foliación, el corchete de Lie $[f, g]$ es tangente a esta foliación.

Al decir aquí que, el flujo del campo de vectores f , localmente, preserva esta foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$, entenderemos que para cualquier punto $p \in S_\alpha$ existe una vecindad U de p , tal que, la imagen de una pieza de una hoja $\gamma_t^f(S_\alpha \cap U)$ está contenida en una hoja de la foliación (dependiente de t), para cualquier t , suficientemente pequeño.

Para probar esta propiedad escogemos un sistema de coordenadas como en la definición de foliación y suponemos que γ_t^f localmente preserva $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Se sigue entonces que, la función tangente de γ_t^f mapea espacios tangentes a hojas en espacios tangentes a hojas. Por tanto, el vector $D\gamma_t^f(p)g(p)$ es tangente a las hojas y, en particular, sus últimas $n - k$ componentes son cero. Diferenciando con respecto a t en $t = 0$ resulta un vector con las últimas $n - k$ componentes iguales a cero (y así tangente a una hoja), la cual por la definición geométrica del corchete de Lie es igual a $[f, g](p)$.

2.3. Órbitas de Familias de Campos de Vectores

Consideremos una familia de campos de vectores (global o parcial) $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$ sobre X .

Definición 2.6. *Definimos la Órbita de un punto $p \in X$ de esta familia, como el conjunto de puntos de X alcanzables desde p , a trozos, por trayectorias de campos*

de vectores en la familia; es decir,

$$\text{Orb}(p) = \{\gamma_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(p) \mid k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in U, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\},$$

donde γ_t^u denota el flujo del campo de vectores f_u . Si algunos de los campos de vectores no son completos, entonces consideramos solamente los t_1, \dots, t_k para los cuales la expresión anterior tiene sentido.

Observación 10.

La relación, q pertenece a la órbita de p , es una relación de equivalencia. Se sigue entonces que, el espacio X es una unión disjunta de órbitas (clases de equivalencias)

Definición 2.7. Definimos Γ como la menor distribución sobre X , la cual contiene los campos de vectores en la familia \mathcal{F} (es decir, $f_u(p) \in \Gamma(p)$ para todo u) y es invariante bajo cualquier flujo γ_t^u , $u \in U$, esto es,

$$D\gamma_t^u(p)\Gamma(p) \subset \Gamma(\gamma_t^u(p)).$$

para todo $p \in X$, $u \in U$ y t , para los cuales la expresión anterior está bien definida.

Observación 11.

Equivalentemente, podemos escribir la propiedad de invarianza (usando campos de vectores parciales) en la forma:

$$g \in \Gamma \implies \text{Ad}_{\gamma_t^u} g \in \Gamma, \text{ para cualquier } u \in U \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema fué probado independientemente por H.J.Sussmann [10] y P.Stefan [11].

Teorema 2.2. (Teorema de Órbita)

Cada órbita $S = \text{Orb}(p)$ de una familia de campos de vectores $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$ es una subvariedad inmersa (de clase C^k si los campos de vectores f_u son de clase C^k). Más aún, el espacio tangente a esta subvariedad está dado por la distribución Γ ,

$$T_p S = \Gamma(p), \text{ para todo } p \in X.$$

Corolario 2.1. *Si los campos de vectores f_u son analíticos, entonces el espacio tangente a la órbita puede ser calculado como*

$$T_p S = L(p) = \{g(p) \mid g \in \text{Lie}\{f_u\}_{u \in U}\},$$

donde $\text{Lie}\{f_u\}_{u \in U}$ es la menor familia de campos de vectores (parciales), la cual contiene la familia \mathcal{F} y es cerrada bajo combinaciones lineales y corchete de Lie (en el caso en que los f_u s son campos de vectores globales, esta es el álgebra de Lie de campos de vectores generados por la familia $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$). En el caso diferenciable se cumple la siguiente inclusión

$$L(p) \subset \Gamma(p).$$

Demostración. Primero probaremos la inclusión. Usando la segunda forma de la propiedad de invarianza de Γ y la definición geométrica del corchete de Lie obtenemos la siguiente implicación

$$g \in \Gamma \implies [f_u, g] \in \Gamma.$$

Aplicando esta implicación iterativamente, deducimos que, los corchetes de Lie iterados izquierdos

$$[f_{u_k}, \dots, [f_{u_2}, f_{u_1}] \dots],$$

están en Γ . Como todos los corchetes de Lie iterados son combinaciones lineales de corchetes de Lie iterados izquierdos (proposición 1.10), se sigue que $L(p) \subset \Gamma(p)$ para $p \in X$.

Para probar la igualdad en el caso analítico notemos que por (1.13) y por la proposición 1.8 nos queda que

$$D\gamma_t^u(q)f_v(p) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-t)^i}{i!} \text{ad}_{f_u}^i f_v(p), \quad p = \gamma_t^u(q),$$

lo cual muestra que las transformaciones de vectores bajo las funciones tangentes a los flujos de f_u , pueden ser expresadas por tomar combinaciones lineales (infinitas) de corchetes de Lie. Esto implica que $\Gamma(p) \subset L(p)$.

□

Corolario 2.2. (*Chow y Rashevskii*)

Sea X conexo. Si $\dim L(p) = n$ para cualquier $p \in X$, entonces cualquier punto de X es alcanzable desde cualquier otro punto, a trozos, por trayectorias de $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U}$ (permitiendo tiempos positivos y negativos); es decir, $\text{Orb}(p) = X$ para cualquier p .

Demostración. Por hipótesis, y por el corolario anterior se sigue que $\Gamma(p)$ es igual a todo el espacio tangente $T_p X$ para cualquier p . Del teorema de órbita se sigue entonces que, la órbita de cualquier punto es de dimensión total; así, este es un subconjunto abierto de X . Concluimos que X es una unión de subconjuntos abiertos disjuntos y, como X es conexo, solamente uno de ellos puede ser no vacío. Luego, X consiste de una sola órbita y cualquier punto es alcanzable desde cualquier otro punto, a trozos, por trayectorias de nuestra familia de campos de vectores. \square

2.4. Integrabilidad de Distribuciones y Foliaciones

Los resultados anteriores, especialmente el teorema de órbita, permiten dar criterios para la integrabilidad de distribuciones y probar algunos teoremas clásicos.

Definición 2.8. Diremos que una distribución constante $p \rightarrow \Delta(p)$ sobre X es Integrable, si existe una foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre X , tal que, para cualquier $p \in X$,

$$T_p S = \Delta(p),$$

donde S es la hoja que pasa a través de p .

Observación 12.

La foliación que satisface la definición anterior es llamada **Foliación Integral**, y cada una de sus hojas es llamada **Variedad Integral** de la distribución.

Teorema 2.3. (*Teorema Global de Frobenius*)

Una distribución diferenciable de dimensión constante Δ es integrable, si y solo si, es involutiva. La foliación integral de Δ , es la partición de X en órbitas de la familia de campos de vectores $\{g \mid g \in \Delta\}$.

Demostración. Supongamos que nuestra distribución es integrable y escojamos dos campos de vectores f y g y cualquier punto p . Entonces, f y g son tangentes a la hoja S que pasa por p , por tanto, su corchete de Lie $[f, g]$ es también tangente a esta hoja por Propiedad 1. Como esto pasa para cualquier p , se sigue que $[f, g](p) \in T_p S = \Delta(p)$, para todo p ; y así, $[f, g] \in \Delta$.

Supongamos ahora que nuestra distribución es involutiva. Consideremos la familia de campos de vectores parciales $\mathcal{F} = \{f \mid f \in \Delta\}$. Debemos probar que la partición de X en orbitas de esta familias nos da la foliación deseada.

Sean $f_1, \dots, f_k \in \Delta$, los cuales generan esta distribución en una vecindad de p . Debemos probar que Δ es invariante bajo los flujos de los campos de vectores $f \in \Delta$, esto es, la distribución Γ en el teorema de orbita, coincide con Δ . Tenemos que probar que

$$D\gamma_t^f \Delta(p) = \Delta(q), \quad q = \gamma_t^f,$$

para $f \in \Delta$. El subespacio del lado izquierdo es generado por los campos de vectores

$$g_t^i = Ad_{\gamma_t^f} f_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

De la suposición de involutividad tenemos que $[f, f_i] = \sum_j \phi_{ij} f_j$. Consideremos las funciones $a_t^{ij} = -\phi_{ij} \circ \gamma_{-t}^f$. De la proposición 1.7 se sigue que los campos de vectores generadores satisfacen uno a uno el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t^i = -Ad_{\gamma_t^f} [f, f_i] = \sum_j g_t^j a_t^{ij}.$$

Como la solución de una ecuación diferencial depende linealmente de sus condiciones iniciales, se sigue que

$$g_t^i = \sum_j \psi_t^{ij} g_0^j = \sum_j \psi_t^{ij} f_j,$$

donde ψ_t^{ij} son funciones. Luego, el subespacio $D\gamma_t^f \Delta(p)$ es generado por los vectores $f_1(p), \dots, f_k(p)$, y así, este es igual a $\Delta(p)$.

Por el teorema de órbita se sigue que Δ da el espacio tangente a las órbitas.

Para completar la prueba es suficiente mostrar que las órbitas en verdad forman una foliación de X . Esto se sigue inmediatamente de la versión local del teorema de Frobenius (teorema 2.1). En efecto, nuestra distribución es constante en coordenadas apropiadas, y así también, las componentes conexas de intersecciones de hojas vistas en la definición de foliación.

□

En orden a definir integrabilidad de distribuciones, las cuales no son de dimensión constante, tenemos que debilitar la noción de foliación.

Definición 2.9. *Una Foliación con Singularidades es una partición*

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$$

de X en subvariedades inmersas tales que, localmente, existe una familia de campos de vectores $\{g_\beta\}_{\beta \in B}$, tal que, $T_p S_\alpha = \text{span}\{g_\beta(p) \mid \beta \in B\}$, para todo p y α .

Definición 2.10. *Una distribución sobre X es llamada Integrable, si existe una foliación con singularidades $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$, la cual satisface $T_p S = \Delta(p)$, para cualesquiera p y S , denotando las hojas que pasan a través de p .*

Teorema 2.4. *(Teorema de Nagano)*

Cualquier distribución involutiva analítica Δ es integrable.

Demostración. Tomamos la partición de X en órbitas de la familia de campos de vectores $\{f \mid f \in \Delta\}$, como candidato para la foliación integral. Del teorema de órbita y los corolarios de este, se sigue que el espacio tangente a la hoja que pasa a través de p , es igual a $\Gamma(p) = \mathcal{L}(p) = \Delta(p)$. La involutividad implica que, el espacio de campos de vectores $\{f \mid f \in \Delta\} = \mathcal{F}$ es cerrado bajo el corchete de Lie, y así, coincide con $\text{Lie}\{\mathcal{F}\} = \mathcal{L}$. Esto significa que la partición en órbitas, es realmente la foliación integral de Δ . □

Capítulo 3

Controlabilidad y Accesibilidad

En este capítulo abordaremos lo que constituye la parte principal del presente trabajo. Estudiaremos conceptos y criterios de controlabilidad y accesibilidad para un sistema de control no lineal.

3.1. Definiciones básicas

Como vimos en el primer capítulo, un punto de partida de la teoría de control es la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f(x, u)$, a la cual podemos agregar la condición inicial $x(0) = y \in \mathbb{R}^n$, donde $u \in U$ y U es llamado conjunto control. En general, se distinguen dos tipos de controles: **Lazo Abierto** y **Lazo Cerrado**.

Un control lazo abierto es una función arbitraria $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow U$, para la cual, la ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = y, \tag{3.1}$$

tiene solución definida.

Un control lazo cerrado es una función arbitraria $k(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, tal que, la

ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t))), \quad t \geq 0, \quad x(0) = y, \quad (3.2)$$

tiene solución definida.

Los controles también son llamados *estrategias* ó *entradas*, y las correspondientes soluciones de (3.1) y (3.2) son las *salidas* del sistema.

Consideremos una de colección $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{s-1} < t_s = T$ de tiempos; fijemos valores de control $c_1, c_2, \dots, c_s \in U$ y definamos el control $u = u_{t_1, t_2, \dots, t_s, c_1, c_2, \dots, c_s} : [0, T] \longrightarrow U$ por $u(t) = c_i$ si $t_{i-1} < t < t_i$ y $u(0) = 0$. LLamaremos a u , *control constante por trozos*.

A continuación presentamos el concepto básico de controlabilidad.

Definición 3.1. Diremos que un estado $z \in \mathbb{R}^n$ es Alcanzable desde x en un tiempo T , si existe un control lazo abierto $u(\cdot)$, tal que, para la salida $x(\cdot)$ se cumple que, $x(0) = y$ y $x(T) = z$. Si un estado arbitrario z es alcanzable desde un estado arbitrario x en un tiempo T , entonces diremos que el sistema (3.1) es Controlable.

Debemos tratar con dos clases de sistemas de control; los sistemas no lineales generales

$$\Sigma : \dot{x} = f(x, u),$$

donde $x(t) \in X$ y $u(t) \in U$, y los *sistemas de control-afín*

$$\Sigma_{aff} : \dot{x} = g_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) = g_0(x) + G(x),$$

donde $x(t) \in X$ y $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U$.

El espacio estado X es considerado un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n o una variedad diferenciable de dimensión n . El conjunto control U es un conjunto arbitrario (con al menos dos elementos), en caso del sistema Σ , y un subconjunto de \mathbb{R}^m , tal que $0 \in U$ y $span\{U\} = \mathbb{R}^m$ en el caso de Σ_{aff} .

Además, consideramos que, los campos de vectores $f_u = f(\cdot, u)$ definidos por Σ , son diferenciables (de clase C^∞). Similarmente, suponemos que los campos de vectores g_0, g_1, \dots, g_m definidos por Σ_{aff} son diferenciables. No necesitaremos regularidad de $f(x, u)$ en Σ con respecto a u , cuando trabajemos con controles constantes por trozos. En caso contrario, supondremos que $f(x, u)$ junto con la primera derivada parcial con respecto a u son diferenciables como funciones de x y continuas con respecto a (x, u) .

Damos ahora la definición de conjuntos alcanzables.

Definición 3.2. *Llamaremos al conjunto de todos los puntos alcanzables, desde $p \in X$, **Conjunto Alcanzable desde p por Σ** , y lo denotamos por $\mathcal{R}(p)$. Para la clase de controles constantes por trozos, éste es el conjunto de puntos*

$$\gamma_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(p), \quad k \geq 1, \quad u_1, \dots, u_k \in U, \quad t_1, \dots, t_k \geq 0.$$

*Cuando $t_1 + \dots + t_k = t$ diremos el **conjunto alcanzable en un tiempo t desde p** y lo denotaremos por $\mathcal{R}_t(p)$, y el conjunto de tales puntos con $t_1 + \dots + t_k \leq t$ será llamado **conjunto alcanzable en un tiempo máximo t desde p** y lo denotaremos por $\mathcal{R}_{\leq t}(p)$.*

Es de esperar que los conjuntos alcanzables de un sistema de control no lineal no tengan una estructura sencilla. Casi nunca serán subespacios lineales, aún cuando $X = \mathbb{R}^n$ y $U = \mathbb{R}^m$.

Por tanto, nuestro fin es establecer propiedades cualitativas de los conjuntos alcanzables.

Definición 3.3. *Diremos que el sistema Σ es **Accesible desde p** , si su conjunto alcanzable $\mathcal{R}(p)$, tiene interior no vacío. Similarmente, llamaremos a este sistema **Fuertemente Accesible desde p** , si el conjunto alcanzable $\mathcal{R}_t(p)$ tiene interior no vacío para cualquier $t > 0$.*

3.2. Álgebras de Lie de Sistemas de Control

Definición 3.4. Sea X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n (o X una variedad diferenciable). Un Álgebra de Lie de Campos de Vectores sobre X , es un subespacio lineal $S \subseteq V(X)$, el cual es cerrado bajo la operación corchete de Lie; es decir, $[f, g] \in S$ siempre que, f y g están en S .

Para un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq V(X)$, definimos \mathcal{A}_{LA} , el álgebra de Lie generada por \mathcal{A} , como la intersección de todas las álgebras de campos de vectores que contienen a \mathcal{A} . (El conjunto de tales álgebras es no vacío, ya que incluye $V(X)$.) Una intersección de álgebras de Lie es también un álgebra de Lie; por lo tanto, \mathcal{A}_{LA} es la menor álgebra de Lie de campos de vectores que contiene a \mathcal{A} .

Lema 3.1. Sea \mathcal{A} un subconjunto de $V(X)$. Denotamos $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$, y, recursivamente,

$$\mathcal{A}_{k+1} := \{[f, g] \mid f \in \mathcal{A}_k, g \in \mathcal{A}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y $\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$. Entonces, \mathcal{A}_{LA} es igual al subespacio generado por \mathcal{A}_∞ .

Demostración. Cualquier álgebra de Lie que contiene a \mathcal{A} debe contener a \mathcal{A}_∞ (pues, inductivamente, esta contiene a cada \mathcal{A}_k), y por tanto, también contiene su conjunto generador, el cual denotaremos por $\tilde{\mathcal{A}}$. Así, debemos probar solamente que $\tilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra de Lie; es decir, que es cerrada bajo la operación corchete de Lie. Ya que $[X, \cdot]$ es lineal, basta probar que

$$X \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad y \quad Y \in \mathcal{A}_k \quad \implies \quad [X, Y] \in \tilde{\mathcal{A}} \quad (*)$$

se cumple para todo k . Observemos que, como $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ puede escribirse como una combinación lineal de elementos de \mathcal{A}_∞ , y ya que $[\cdot, Y]$ es lineal, (*) es equivalente a la proposición de que $[X, Y] \in \tilde{\mathcal{A}}$ siempre que $X \in \mathcal{A}_\infty$, y $Y \in \mathcal{A}_k$. Probaremos (*) por inducción sobre k .

El caso $k = 0$ es evidente pues, para cualquier $f \in \mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$, por definición $[X, f] \in \mathcal{A}_{j+1}$ si $X \in \mathcal{A}_j$. Suponemos que la prueba se cumple para todos los

índices menores o iguales a k , y escojemos cualesquiera $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $Y \in \mathcal{A}_{k+1}$. Así podemos escribir $Y = [Y_0, f]$, para algún $f \in \mathcal{A}$ y $Y_0 \in \mathcal{A}_k$. La identidad de Jacobi nos da:

$$[X, Y] = [X, [Y_0, f]] = [[X, Y_0], f] - [[X, f], Y_0].$$

Por la hipótesis inductiva se tiene, $[X, Y_0] \in \tilde{\mathcal{A}}$; así, $[[X, Y_0], f] \in \tilde{\mathcal{A}}$ (por inducción nuevamente).

Similarmente, por inducción sabemos que $[[X, f], Y_0] \in \tilde{\mathcal{A}}$. Luego, como $\tilde{\mathcal{A}}$ es un subespacio, entonces $[X, Y] \in \tilde{\mathcal{A}}$. \square

El lema dice que todo elemento en el álgebra de Lie generada por un conjunto \mathcal{A} , puede ser expresado como una combinación lineal de corchetes de Lie iterados de la forma

$$[[\dots[f_1, f_2], f_3], \dots, f_\ell],$$

para algún $f_i \in \mathcal{A}$. Por convención, el corchete de Lie iterado para $\ell = 1$, es justamente, un elemento f_1 del conjunto \mathcal{A} . Equivalentemente, por antisimetría, podemos escribir cualquier elemento como una combinación lineal de corchetes $[f_i, \dots, [f_3, [f_2, f_1]]]$.

Consideremos ahora, las siguientes familias de campos de vectores asociadas al sistema Σ .

$$\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in U} \quad y \quad \mathcal{G} = \{f_u - f_v \mid u, v \in U\}.$$

donde $f_u = f(\cdot, u)$.

Definimos el **Álgebra de Lie del sistema** Σ , como el álgebra de Lie generada por \mathcal{F} ; es decir, \mathcal{F}_{LA} .

También, definimos el **Ideal de Lie del sistema** Σ , como el álgebra de Lie generada por \mathcal{G} ; es decir, \mathcal{G}_{LA} .

En adelante, usaremos la notación \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 en vez de \mathcal{F}_{LA} y \mathcal{G}_{LA} respectivamente.

Notemos que, gracias al lema anterior, ambas definiciones, \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 , pueden ser definidas equivalentemente, a través del corchete de Lie iterativo como sigue

$$\mathcal{L} = \text{span}\{[f_{u_1}, \dots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k}] \dots] \mid k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in U\},$$

$$\mathcal{L}_0 = \text{span}\{[f_{u_1}, \dots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k} - f_{u_{k+1}}] \dots] \mid k \geq 1, u_1, \dots, u_{k+1} \in U\},$$

Se sigue entonces que

$$\mathcal{L} = \text{span}\{f_{u^*}, \mathcal{L}_0\},$$

donde u^* es cualquier elemento fijo de U . En efecto, directamente de las definiciones obtenemos que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, y también $f_{u^*} \in \mathcal{L}$. La otra inclusión, $\mathcal{L} \subset \text{span}\{f_{u^*}, \mathcal{L}_0\}$ se sigue de las igualdades

$$f_{u_1} = f_{u^*} + f_{u_1} - f_{u_2}, \quad u_2 = u^*,$$

$$[f_{u_1}, \dots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k}] \dots] = [f_{u_1}, \dots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k} - f_{u_{k+1}}] \dots],$$

donde $u_{k+1} = u_{k-1}$.

Lema 3.2. *Para un sistema de control-afín Σ_{aff} , tenemos que, $\mathcal{F} = \{g_0, \dots, g_m\}_{L_A}$.*

Demostración. Es suficiente probar que los subespacios generados L_G de $\{g_0, \dots, g_m\}$ y L_A de $\mathcal{A} = \{f_u = f(\cdot, u), u \in U\}$ son iguales. Cada elemento $f_u = g_0 + \sum u_i g_i$ de \mathcal{A} es por definición una combinación lineal de g_i 's; de donde, es claro que $L_A \subseteq L_G$. Recíprocamente, usando $u = 0$ se tiene que $g_0 \in \mathcal{A}$, y así también que, $G(x)u = u_1 g_1(x) + \dots + u_m g_m(x) = f(x, u) - f(x, 0) \in L_A$, para cada $u \in U$. Para ver que $g_i \in L_A$, $i = \{1, \dots, m\}$, fijamos cualquiera de tales i , y escribimos el i -ésimo vector base canónico de \mathbb{R}^m como $e_i = \sum_{j \in J} \rho_j u_j$, para algún u_j en U y números reales ρ_j (recordemos que $0 \in U$ y U genera \mathbb{R}^m). Luego, $g_i = G(x)e_i = \sum_{j \in J} \rho_j G(x)u_j \in L_A$.

□

En virtud de los dos lemas anteriores, tenemos que, el álgebra de Lie y el ideal de Lie del sistema de control-afín Σ_{aff} , están dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \text{Lie}\{g_0, g_1, \dots, g_m\}, \\ &= \text{span}\{[g_{i_1}, \dots, [g_{i_{k-1}}, g_{i_k}] \dots] \mid k \geq 1, 0 \leq i_1, \dots, i_k \leq m\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_0 = \text{span}\{[g_{i_1}, \dots, [g_{i_{k-1}}, g_{i_k}] \dots] \mid k \geq 1, 0 \leq i_1, \dots, i_k \leq m, i_k \neq 0\}.$$

Ejemplo 3.1. Para ilustración, calcularemos el álgebra de Lie y el ideal de Lie del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + \sum_{i=1}^m u_i b_i,$$

donde b_i son campos de vectores constantes, siendo columnas de la matriz B . Tomando en cuenta que $g_1 = b_1, \dots, g_m = b_m$, $f = g_0 = Ax$, y el corchete de Lie de campos de vectores constantes es cero, encontramos en la fórmula anterior para \mathcal{L}_0 , que los únicos iterados del corchete de Lie no nulos son

$$[Ax, b_i] = -Ab_i, \quad [Ax, [Ax, b_i]] = [Ax, -Ab_i] = A^2 b_i, \dots, ad_{Ax} \dots ad_{Ax} b_i = ad_{Ax}^j b_i = (-1)^j A^j b_i.$$

Luego, el ideal \mathcal{L}_0 consiste únicamente de campos de vectores constantes,

$$\mathcal{L}_0 = \text{span}\{A^j b_i \mid j \geq 0, 1 \leq i \leq m\},$$

y $\mathcal{L} = \text{span}\{Ax, \mathcal{L}_0\}$.

Los resultados presentados en esta sección, han sido extraídos en gran parte de [6] (pag 140-143), donde se puede ampliar su comprensión.

3.3. Criterios de Accesibilidad

Dada una familia de campos de vectores \mathcal{H} , usaremos la notación

$$\mathcal{H}(x) = \text{span}\{h(x) \mid h \in \mathcal{H}\}.$$

En particular, \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 denotarán los espacios de vectores tangentes en x definidos por el álgebra de Lie y el ideal de Lie del sistema Σ .

Teorema 3.1.

- (a) Si para un sistema diferenciable Σ (sistema cuyos campos asociados son C^∞) el álgebra de Lie es de rango total, $\dim \mathcal{L}(x_0) = n$, entonces el conjunto alcanzable en un tiempo máximo t , desde x_0 , tiene interior no vacío, y así, el sistema es accesible desde x_0 .
- (b) Si el sistema es analítico (sistema cuyos campos asociados son analíticos) y $\dim \mathcal{L}(x_0) < n$, entonces el sistema es no accesible desde x_0 .

Demostración.

- (a) En primer lugar, ya que $\dim \mathcal{L}(x_0) = n$, entonces $\dim \mathcal{L}(x) = n$, para x en una vecindad de x_0 (el rango total es realizado por n campos de vectores los cuales son linealmente independientes en una vecindad de x_0). También se sigue de la misma suposición, que existe un $u_1 \in U$, tal que, $f_{u_1}(x_0) \neq 0$. De otro modo, por la definición jacobiana del corchete de Lie, tendríamos que todos los campos de vectores en \mathcal{L} se anulan en x_0 , y así, $\dim \mathcal{L}(x_0) = 0$.

Las trayectorias $\gamma_{t_1}^{u_1}(x_0)$, $t \in V_1 = (0, \epsilon_1)$, $\epsilon_1 > 0$, forman una subvariedad uno dimensional de X , la cual denotamos por S_1 .

Afirmamos ahora que existe un $u_2 \in U$, tal que, los campos de vectores f_{u_1} y f_{u_2} son linealmente independientes en un punto $x_1 \in S_1$. En caso contrario, todos los campos de vectores en \mathcal{F} serían tangente a la subvariedad S_1 . Como, tomando combinaciones lineales y corchete de Lie de campos de vectores tangentes a una subvariedad dan vectores tangentes a esta subvariedad (propiedad 1), tendríamos que todos los campos de vectores en \mathcal{L} serían tangentes a S_1 , lo cual contradeciría $\dim \mathcal{L}(x_0) = n$ (si $n > 1$).

Sean f_{u_1} y f_{u_2} linealmente independientes en $x_1 = \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0) \in S_1$, $0 < t_1 < \epsilon_1$. Definimos la función

$$V_2 \ni (t_1, t_2) \longrightarrow x = \gamma_{t_2}^{u_2} \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0),$$

donde V_2 es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 : $V_2 = (0, \epsilon_1) \times (0, \epsilon_2)$, $\epsilon_2 > 0$. Para ϵ_2 suficientemente pequeño, la imagen de esta función contiene una subvariedad de X de dimensión 2 (esto se sigue de la independencia lineal de f_{u_1} y f_{u_2}), la cual denotamos por S_2 .

Por un argumento análogo al de arriba existe un $u_3 \in U$ y un punto $x_2 \in S_2$, tal que, el campo de vectores f_{u_3} no es tangente a S_2 en x_2 . Así, la imagen de la función

$$V_3 \ni (t_1, t_2, t_3) \longrightarrow x = \gamma_{t_3}^{u_3} \circ \gamma_{t_2}^{u_2} \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0),$$

(tomando $V_3 = (0, \epsilon_1) \times (0, \epsilon_2) \times (0, \epsilon_3)$) contiene una subvariedad S_3 de X de dimensión 3. Por supuesto, S_i , $i = 1, 2, 3$ son subconjuntos del conjunto alcanzable.

Después de repetir la construcción anterior n -veces, obtenemos una subvariedad S_n de X de dimensión n , es decir, un subconjunto abierto de X , el cual está contenido en el conjunto alcanzable $\mathcal{R}(x_0)$ y, más precisamente, en el conjunto alcanzable $\mathcal{R}_{\leq t}(x_0)$, donde $t = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$. Ya que, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ habrían podido ser tomados arbitrariamente pequeños, se sigue que cualquier conjunto alcanzable \mathcal{R}_t , $t > 0$ tiene interior no vacío.

- (b) De los corolarios (2.1) y (2.2) relativos al teorema de órbita, tenemos que, el espacio tangente a la órbita desde x_0 es igual a $\mathcal{L}(x_0)$. Cuando $\dim \mathcal{L}(x_0) < n$, se sigue que, esta órbita es una subvariedad de dimensión más pequeña que n . Así, su interior es vacío. Como el conjunto alcanzable es un subconjunto de la órbita, su interior también es vacío.

□

Ejemplo 3.2. Consideremos el sistema con control escalar $u \in U = \mathbb{R}$

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1^k, \quad k \geq 2.$$

Nuestro sistema es control-afín con $f = (0, x_1^k)^T$ y $g = (1, 0)^T$. Entonces

$$[g, f] = (0, kx_1^{k-1})^T, \quad [g, [g, f]] = (0, k(k-1)x_1^{k-2})^T, \quad ad_g^k f = (0, k!)^T,$$

y así $\dim \mathcal{L}_0(x) = \dim \mathcal{L}(x) = 2$ para todo x , en particular el sistema es fuertemente accesible desde el origen.

Si la dimensión del álgebra de Lie del sistema no es de rango total en algún punto, todavía tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Si el sistema Σ es analítico, entonces el interior en la órbita $Orb(x_0)$ del conjunto alcanzable $\mathcal{R}(x_0)$ es no vacío.*

Demostración. Si $\dim \mathcal{L}(x_0) = n$, entonces tenemos simplemente la parte (a) del teorema anterior. Cuando esta dimensión es menor, podemos restringir nuestro sistema a la órbita que pasa a través del punto inicial. Los corolarios (2.1) y (2.2) dicen que $\dim \mathcal{L}(x_0)$ es igual a la dimensión de la órbita. Así, nuestro sistema reducido a la órbita, satisface las hipótesis de la parte (a) del teorema anterior y de aquí se sigue nuestro resultado. \square

Existe una relación análoga entre el ideal de Lie \mathcal{L}_0 y el conjunto alcanzable en un tiempo t , la cual es establecida por el siguiente teorema, que fue probado por Sussmann y Jurdjevit en [9], y cuya prueba no está a nuestro inmediato alcance.

Teorema 3.2.

- (a) *Si el sistema es diferenciable y $\dim \mathcal{L}_0(x_0) = n$, entonces el conjunto alcanzable $\mathcal{R}_t(x_0)$ tiene interior no vacío para cualquier $t > 0$.*
- (b) *Si $\dim \mathcal{L}_0(x_0) < n$, entonces el interior del conjunto $\mathcal{R}_t(x_0) = \emptyset$, para cualquier $t > 0$.*

Ejemplo 3.3. *Consideremos el sistema sobre \mathbb{R}^2*

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = ux_1^2,$$

y tomemos $x_0 = (0, 0)$, y $U = \mathbb{R}$. Tenemos

$$\mathcal{F} = \{(1, ux_1^2)^T \mid u \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{G} = \text{span}\{(0, x_1^2)\}.$$

El álgebra de Lie \mathcal{L} contiene los campos de vectores

$$f_1 = (1, 0)^T, \quad f_2 = (1, x_1^2)^T, \quad f_3 = [f_1, f_2] = (0, 2x_1)^T, \quad [f_1, f_3] = (0, 2)^T.$$

Luego, $\dim \mathcal{L}(x_0) = 2$ y así el sistema es accesible desde x_0 .

Por otro lado, notemos que $\mathcal{L}_0(x_0) = \text{span}\{(0, 1)^T\}$; así, $\dim \mathcal{L}_0(x_0) = 1$. Entonces, por la parte (b) del teorema anterior tenemos que el interior del conjunto $\mathcal{R}_t(x_0)$ es vacío, y por tanto, el sistema no es fuertemente accesible.

Capítulo 4

Controlabilidad y Aproximación por Caminos

4.1. Sistemas Tiempo-Reversible

En general, el conjunto alcanzable es un subconjunto de la órbita. Es natural preguntarse en qué tipo de sistemas el conjunto alcanzable coincide con la órbita. Una clase de tales sistemas es llamada sistemas tiempo-reversible.

En adelante consideraremos controles continuos a trozos. Por definición, ellos serán funciones $u : [0, T] \rightarrow U$ definidas sobre intervalos finitos $[0, T]$ y continuas, excepto en un número finito de puntos, teniendo límites por la derecha y por la izquierda en tales puntos. Diremos que una función $g(x, u)$ es de clase $C^{k,0}$ (respectivamente de clase $C^{k,\emptyset}$) si U es un espacio métrico y g es continua como función de (x, u) junto con todas las derivadas parciales con respecto a x de orden no mayor que k (respectivamente, U es cualquier conjunto y $g(x, u)$ es de clase C^k con respecto a x , para cualquier $u \in U$ fijo).

Definición 4.1. *Llamaremos al sistema $\Sigma : \dot{x} = f(x, u)$, Tiempo-Reversible si existe una función $U \ni u \rightarrow v(u) \in U$ y una función positiva $\lambda(x, u)$ de clase*

$C^{1,0}$, tales que,

$$f(x, u) = -\lambda(x, u)f(x, v(u)) \text{ para cualquier } (x, u) \in X \times U.$$

Similarmente, Σ es llamada *Tiempo-Reversible Feedback*, si existen funciones $(x, u) \longrightarrow v(x, u) \in U$ y $\lambda(x, u)$ (positiva) de clase $C^{1,0}$, tales que,

$$f(x, u) = -\lambda(x, u)f(x, v(x, u)) \text{ para todo } (x, u) \in X \times U.$$

Proposición 4.1. *Para cualquier sistema Tiempo-Reversible con $f(x, u)$ de clase $C^{1,0}$ y controles constantes a trozos (respectivamente, para cualquier sistema tiempo-reversible feedback con f de clase $C^{1,0}$ y controles continuos a trozos) se tiene,*

$$\mathcal{R}(x_0) = Orb(x_0).$$

Demostración. En la definición de conjunto alcanzable no está permitido ir hacia atrás a lo largo de las trayectorias de los campos de vectores $f_u = f(\cdot, u)$, contrariamente al caso de la órbita. Esto significa que, para controles constantes a trozos, tenemos la inclusión $\mathcal{R}(x_0) \subset Orb(x_0)$ pero, posiblemente, no la inclusión contraria. El hecho de que un sistema tiempo-reversible avance hacia atrás, en un tiempo a lo largo de una trayectoria de f_u , puede ser reemplazado (sobre una escala de tiempo definida por λ) por avanzar hacia adelante con el control $v(u)$. Por tanto, para un sistema tiempo-reversible los puntos los cuales son alcanzables adelante-atrás a trozos, por trayectorias de f_u , $u \in U$, (definición de la órbita) son también alcanzables hacia adelante por tales trayectorias y se sigue la inclusión $\mathcal{R}(x_0) \supset Orb(x_0)$. Los mismos argumentos son válidos para probar esta inclusión en el caso de sistemas tiempo-reversible feedback, donde usamos el control $\tilde{u}(t) = v(x(t), u)$ en orden a ir hacia atrás a lo largo de la trayectoria de f_u . En el caso de controles continuos a trozos la inclusión $\mathcal{R}(x_0) \subset Orb(x_0)$ se sigue de la siguiente proposición. \square

Dicha proposición dice que, para controles continuos a trozos, las trayectorias de Σ comenzando desde $x_0 \in X$ no pueden salirse de la órbita $Orb(x_0)$.

Proposición 4.2. *Si U es un espacio métrico y $f(x, u)$ es de clase $C^{1,0}$ entonces, para controles continuos a trozos, tenemos la inclusión*

$$\mathcal{R}(x_0) \subset Orb(x_0).$$

En otras palabras, cualquier trayectoria de Σ correspondiente a un control continuo a trozos y comenzando desde x_0 , permanece en $Orb(x_0)$, para todo tiempo t , en el cual esté definida en X .

Demostración. Primero probaremos la siguiente afirmación. Si x_0 es un punto en X , $u : [0, T] \rightarrow U$ es un control continuo a trozos y $t_0 \in [0, T]$, entonces existe una vecindad I de t_0 en $[0, T]$, tal que, la trayectoria $x(t)$ de Σ correspondiente a $u(\cdot)$ satisfaciendo $x(t_0) = x_0$ está bien definida, para $t \in I$, y $x(t) \in Orb(x_0)$ para $t \in I$. Para probar esta afirmación notemos que $S := Orb(x_0)$ es una subvariedad, por el teorema de órbita, y $f(x, u) \in T_x S$, para cualquier $x \in S$ y $u \in U$. Esto significa que el sistema Σ puede ser restringido a $S =: \tilde{X}$ (en un sistema de coordenadas locales S apropiado, puede ser localmente identificado con un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k , donde $k = \dim S$). El lado derecho, $\tilde{f}(\tilde{x}, u)$, del sistema restringido, es también de clase $C^{1,0}$, así tenemos existencia (en S) y unicidad de solución de la ecuación $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$, con la condición inicial $\tilde{x}(t_0) = x_0$. Esta solución coincide con la solución única de $\dot{x} = f(x, u)$. Esto implica nuestra afirmación.

Supongamos que se cumple lo contrario; es decir, existe un control continuo a trozos $u : [0, T] \rightarrow U$ tal que la correspondiente trayectoria $x(t)$ se sale de la órbita $S := Orb(x_0)$ en un tiempo $t^* \in [0, T]$. Esto significa que, $[0, t^*)$ es el intervalo abierto por la derecha maximal, tal que, $x([0, t^*))$ está contenida en la órbita S . Supongamos que el punto $p^* := x(t^*)$ está en S . Tomando $p = p^*$ y $t_0 = t^*$ en la afirmación probada anteriormente, vemos que $x(t) \in S$ para $t > t^*$ suficientemente cercano a t^* . Esto contradice la maximalidad del intervalo $[0, t^*)$. Supongamos que $p^* = x(t^*)$ no está en S . Entonces p^* está en otra órbita, a saber, en $Orb(p^*)$. De nuevo escogemos p^* como punto inicial de la trayectoria $x(t)$, $x(t^*) = p^*$, correspondiente al control original. Entonces, por la afirmación, la trayectoria permanece en $Orb(p^*)$, para algún $t < t^*$. Ya que $S = Orb(x_0)$ y

$Orb(p^*)$ son disjuntas, esto contradice el hecho de que $x(t) \in S$, para todo $t < t^*$. \square

Proposición 4.3. *Para cualquier sistema tiempo-reversible y controles constantes a trozos (o sistema tiempo-reversible feedback y controles continuos a trozos), con los campos de vectores f_u de clase C^∞ , tenemos*

$$\dim \mathcal{L}(x_0) = n \implies x_0 \in \text{int} \mathcal{R}(x_0).$$

Demostración. De nuestros teoremas sobre accesibilidad de sistemas y álgebras de Lie, se sigue que $\dim \mathcal{L}(x_0) = n$ implica que, el conjunto alcanzable correspondiente a controles constantes a trozos tiene interior no vacío. Sea x_1 un punto en este interior, contenido junto con su vecindad W en el conjunto alcanzable. Así

$$x_1 = \gamma_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0)$$

para algún $k \geq 1$, $u_1, \dots, u_k \in U$ y $t_1, \dots, t_k \in (0, \infty)$, donde γ_t^u denota el flujo de f_u . Las trayectorias con tiempo hacia adelante de f_{u_1}, \dots, f_{u_k} pueden ser llevadas hacia atrás usando los controles $v_1 = v(u_1), \dots, v_k = v(u_k)$ (definidos en nuestra definición de sistemas tiempo-reversible), escogiendo tiempos positivos adecuados τ_1, \dots, τ_k , así que, el punto

$$x_2 = \gamma_{\tau_1}^{v_1} \circ \dots \circ \gamma_{\tau_k}^{v_k} \circ \gamma_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0) = \gamma_{\tau_1}^{v_1} \circ \dots \circ \gamma_{\tau_k}^{v_k}(x_1)$$

coincide con x_0 . Este punto está también en el interior del conjunto alcanzable cuando la composición de flujos $\gamma_{\tau_1}^{v_1} \circ \dots \circ \gamma_{\tau_k}^{v_k}$ es un difeomorfismo local y mapea la vecindad W de x_1 sobre una vecindad V de $x_2 = x_0$. Como W está contenida en el conjunto alcanzable $\mathcal{R}(x_0)$, V también está contenida en $\mathcal{R}(x_0)$. Se sigue entonces que x_0 está contenido en el conjunto alcanzable desde x_0 .

En el caso de un sistema tiempo-reversible feedback la prueba es similar. En este caso los flujos de los campos de vectores f_u correspondientes a controles constantes, deben ser reemplazados por los flujos de campos de vectores $f_{u(t)}$, correspondientes a controles continuos $t \rightarrow u(t)$. \square

Como un corolario obtenemos otra prueba del teorema de Chow-Rashevskii (esta prueba es independiente del teorema de órbita).

Corolario 4.1. *Si el sistema es tiempo-reversible, X es conexo, f_u son de clase C^∞ y $\dim \mathcal{L}(x) = n$ para todo $x \in X$, entonces cualquier punto de X es alcanzable hacia adelante, desde cualquier otro, por controles constantes a trozos; es decir, $\mathcal{R}(x) = X$ para cualquier $x \in X$.*

Demostración. De la proposición 4.1 se sigue que el conjunto alcanzable $\mathcal{R}(x)$ coincide con la órbita. Además, se sigue de la proposición 4.3 que, $\mathcal{R}(x)$ es abierto ya que, después de alcanzar cualquier punto, también podemos alcanzar una vecindad de este punto. Así, los conjuntos alcanzables coinciden con las órbitas y son subconjuntos abiertos de X . Como X es una unión disjunta de órbitas, entonces, es una unión disjunta de órbitas abiertas. De la conexidad de X se sigue que X consiste de una órbita. Entonces, para cualquier x_0 la órbita de x_0 es igual a X . Como los conjuntos alcanzables de x_0 coinciden con la órbita, estos son también iguales a X . \square

A continuación presentamos un interesante ejemplo, que ilustra de forma práctica, la teoría desarrollada hasta aquí.

Ejemplo 4.1. *(El carro de Nelson)*

Consideremos el siguiente modelo simple para la conducción de un vehículo.

Consideremos el conjunto \mathbb{R}^4 , como el espacio estado, donde un estado x cuenta con cuatro componentes (x_1, x_2, x_3, x_4) , en las que las dos primeras, (x_1, x_2) representan las coordenadas del centro del eje frontal del vehículo, la tercera, $x_3 = \theta$, el ángulo del vehículo con respecto al semieje positivo de las x medido en el sentido contrario a las agujas del reloj, y la cuarta $x_4 = \phi$, el ángulo de las ruedas delanteras con respecto a la orientación del vehículo (ver figura 4.1).

Las ruedas delanteras son entonces paralelas al vector $(\cos(\phi + \theta), \sin(\phi + \theta))$ de modo que, como la velocidad instantánea del centro del eje frontal es paralela a este vector, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = u_2(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) \end{pmatrix},$$

para alguna función escalar $u_2(t)$. Observemos que $\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) = u_2(t)^2$; así, u_2 es la velocidad del carro, la cual corresponde a un primer control.

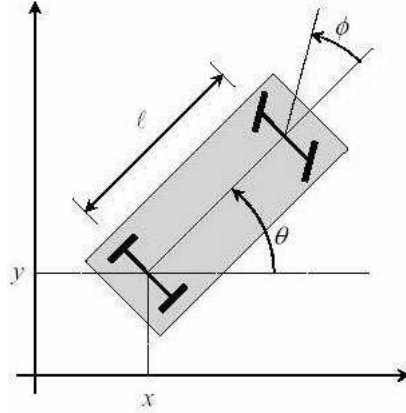


Figura 4.1:

El centro del eje trasero tiene coordenadas $(x_1 - \ell \cos \theta, x_2 - \ell \sin \theta)$, siendo ℓ la distancia entre los dos ejes. La velocidad de este punto ha de ser paralela a la orientación de las ruedas traseras $(\cos \theta, \sin \theta)$, de modo que:

$$\sin \theta \frac{d}{dt}(x_1 - \ell \cos \theta) - \cos \theta \frac{d}{dt}(x_2 - \ell \sin \theta) = 0.$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos que

$$\ell \dot{\theta} = u_2 \sin \phi.$$

Para evitar notación extra, suponemos desde ahora que $\ell = 1$. El ángulo ϕ cambia dependiendo de la posición de las ruedas delanteras; consideremos pues un

segundo control

$$u_1 = \dot{\phi}$$

En resumen, con el conjunto control $U = \mathbb{R}^2$, y escribiendo los controles como $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En la practica, el ángulo ϕ sería restringido a algún intervalo maximal $(-\phi_0, \phi_0)$; así podriamos tomar el espacio estado como $\mathbb{R}^3 \times (-\phi_0, \phi_0)$, lo cual no cambia las cosas. Es importante notar que, el ángulo de orientación θ solo tiene sentido con módulo menor o igual a 2π , es decir, los ángulos que difieren por 2π tienen la misma orientación física.

El modelo es un sistema control-afín donde

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dicho sistema es tiempo-reversible (tomando $\lambda \equiv 1$ y $v(u) = -u$).

Cuando $u_1 \equiv 0$ y $u_2 \equiv 0$ obtenemos las direcciones

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.1)

respectivamente. Su corchete de Lie proporciona la nueva dirección

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi + \theta) \\ \cos(\phi + \theta) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

(4.2)

cuyo corchete de Lie con el segundo de (4.1), proporciona a su vez la dirección

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4.3)

Teniendo en cuenta que el determinante de la matriz compuesta por los cuatro vectores (4.1)-(4.3) es idénticamente igual a 1, nos queda que $\dim \mathcal{L}(x) = 4$. Por lo tanto, el corolario previo al ejercicio, garantiza que el sistema es controlable.

En términos más generales, donde el espacio estado es una variedad diferenciable, en el ejemplo anterior, \mathbb{R}^4 podría ser sustituido por $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times (-\phi_0, \phi_0)$,

esto es, el ángulo ϕ es un elemento del círculo unitario. Si se quiere profundizar un poco más en este ejemplo, se puede consultar [6] (pag 160).

4.2. Aproximación de Curvas por Trayectorias

En esta sección mostraremos otras propiedades de controlabilidad de los sistemas, las cuales están relacionadas a sus órbitas. En particular, mostraremos que para un sistema tiempo-reversible, cualquier curva que yace en una órbita singular puede ser C^0 aproximada (sobre un tiempo de reparametrización) por trayectorias del sistema. Suponemos que $X \subset \mathbb{R}^n$.

Consideremos una curva continua

$$C : [0, 1] \longrightarrow X.$$

Denotaremos por $\text{Im}c = c([0, 1])$ la imagen de la curva en X y $p_0 := c(0)$.

Definición 4.2. Decimos que $c(\cdot)$ puede ser C^0 Aproximada por Trayectorias de Σ , si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $T > 0$, un control admisible $u : [0, T] \longrightarrow U$, y una función continua estrictamente creciente $\tau(t)$, $\tau(0) = 0$, $\tau(T) = 1$, tal que, $x(T, p_0, u(\cdot)) = c(1)$ y

$$\|x(T, p_0, u(\cdot)) - c(\tau(t))\| < \epsilon,$$

para todo $t \in [0, T]$, donde $x(T, p_0, u(\cdot))$ es la trayectoria comenzando en $t = 0$ desde p_0 , y $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana.

Las relaciones entre las siguientes condiciones serán discutidas después.

- (i) La imagen $\text{Im}c$ está en una órbita singular de Σ .
- (ii) La curva $c : [0, 1] \longrightarrow X$ puede ser C^0 aproximada por trayectorias de Σ .
- (iii) La imagen $\text{Im}c$ está en la clausura en X de una órbita singular de Σ .

Teorema 4.1.

- (a) Para $f(x, u)$ de clase $C^{1,0}$ y controles continuos a trozos tenemos (ii) \implies (iii), para cualquier curva continua $c : [0, 1] \longrightarrow X$.
- (b) Si Σ es tiempo-reversible, los campos de vectores $f_u = f(\cdot, u)$, $u \in U$, son analíticos y los controles son constantes a trozos, entonces (i) \implies (ii), para cualquier curva absolutamente continua $c : [0, 1] \longrightarrow X$. El requerimiento $f_u \in C^w$ puede ser reemplazado por $f_u \in C^\infty$ y $T_p \text{Orb}(p) = \mathcal{L}(p)$, para cualquier $p \in \text{Im}c$.

Demostración.

- (a) Supongamos que $\text{Im}c$ no está en la clausura de una órbita singular. Entonces existe $s^* \in [0, 1]$, tal que, $p^* := c(s^*)$ no está en $cl(S)$, donde $S = \text{Orb}(p_0)$. Esto significa que $\text{dist}(p^*, S) = \epsilon > 0$. Sin embargo, esta inecuación implica que la curva c no puede ser aproximada con exactitud mejor que ϵ por trayectorias comenzando desde p_0 (ya que todas dichas trayectorias permanecen en S , por proposición 4.2). Esto significa que (ii) implica (iii).
- (b) La implicación (i) \implies (ii) se seguirá del teorema Chow-Rashevskii presentado en el capítulo 2. Escojamos $\epsilon > 0$. Cubrimos $\text{Im}c$ con conjuntos conexos V_i en S , abiertos, cada uno contenido en una ϵ -bola en X con centro en $\text{Im}c$, tal que los $(V_i \cap S)$'s son conexos. Por la compacidad de $\text{Im}c$ podemos escojer un número finito de tales conjuntos abiertos V_0, \dots, V_r ordenados en tal forma que $p_0 = c(0) \in V_0$, $p_{r+1} := c(1) \in V_r$, y $V_{i-1} \cap V_i \cap \text{Im}c \neq \emptyset$, para $i = 1, \dots, r$ (esto es posible por la conexidad de $\text{Im}c$ y ya que los V_i 's son abiertos). Escojemos algunos puntos $p_i = c(s_i)$ en $V_{i-1} \cap V_i \cap \text{Im}c$, $i = 1, \dots, r$, así que, $0 := s_0 < s_1 < \dots < s_r \leq s_{r+1} := 1$. De la suposición $f_u \in C^w$ y el teorema de órbita se sigue que $T_p S = \mathcal{L}(p)$, para cualquier $p \in S$. Luego, el sistema Σ restringido a los subconjuntos abiertos V_i de la órbita S satisface la condición del rango del álgebra de Lie $\dim \mathcal{L}(p) = \dim \tilde{X}$, donde $\tilde{X} = V_i$. Además, del corolario 4.1 se sigue que $p_i \in V_i$ puede ser unido a $p_{i+1} \in V_i$, con una trayectoria que no se sale de V_i . Cada punto de esta trayectoria está a una distancia no mayor de 2ϵ desde cualquier punto del tramo $c([s_i, s_{i+1}])$ de $\text{Im}c$ (puesto que V_i tiene un diámetro no

mayor que 2ϵ y $c([s_i, s_{i+1}])$ está contenido en V_i por las suposiciones de que $p_i = c(s_i) \in V_i$, $p_{i+1} = c(s_{i+1}) \in V_i$ y $V_i \cap \text{Im}c$ son conexos). Concatenando las trayectorias consecutivas uniendo $p_0 = c(0)$ a p_1 en V_0 , entonces p_1 a p_2 en V_1 etc., y finalmente, p_r a $p_{r+1} = c(1)$ en V_r obtenemos una trayectoria la cual aproxima c con precisión 2ϵ (podemos definir la reparametrización de c , la cual aparece en la definición de aproximación C^0 , como una función lineal a trozos continua $[0, T] \ni t \longrightarrow s(t) \in [0, 1]$, la cual es lineal sobre los intervalos $[T_{i-1}, T_i]$ correspondientes a las trayectorias que unen p_{i-1} a p_i y satisface $s(T_i) = s_i$, $i = 0, \dots, r + 1$). Como ϵ fué escogido arbitrariamente, vemos que se cumple (ii).

Notemos que, en lugar de usar la analiticidad de f_u en la prueba anterior (lo cual implica que $T_p S = \mathcal{L}(p)$ para $p \in S$) es suficiente usar la suposición de que $T_p S = \mathcal{L}(p)$ para $p \in \text{Im}c$. A saber, esta suposición implica la igualdad $T_{p_i} S = \mathcal{L}(p_i)$, para $i = 0, \dots, p_{r+1}$, lo cual implica igualdades análogas en vecindades de p_i , así que podamos suponer que $T_p S = \mathcal{L}(p)$ se cumple sobre V_i . (La igualdad $T_{p_i} S = \mathcal{L}(p_i)$ implica las igualdades análogas en vecindades en S de p_i . Esto se sigue de dos hechos: (a) siempre tenemos $\mathcal{L}(p) \subset T_p S$, para $p \in S$; (b) la igualdad $\dim \mathcal{L}(p_i) = \dim S = k$ se extiende a una vecindad en S de p_i , ya que $\mathcal{L}(p_i)$ es generada por algún conjunto de k campos de vectores linealmente independientes, los cuales permanecen linealmente independiente en una vecindad de p_i).

□

Las condiciones (i) y (iii) en el teorema anterior pueden resultar difíciles de chequear. Sin embargo, dada una curva absolutamente continua $c : [0, 1] \longrightarrow X$, la siguiente condición suficiente para C^0 aproximación por trayectorias, puede ser más manejable.

(iv) Existe una vecindad W de imagen de c en X tal que $\dim \mathcal{L}(p) = \text{constante}$, para $p \in W$, y

$$\frac{\partial c}{\partial s}(s) \in \mathcal{L}(c(s))$$

para casi todo $s \in [0, 1]$.

Teorema 4.2.

- (a) Si f_u , $u \in U$ de clase C^∞ entonces (iv) \implies (i), para cualquier curva absolutamente continua $c : [0, 1] \longrightarrow X$.
- (b) Si Σ es tiempo-reversible, los campos de vectores $f_u = f(\cdot, u)$, $u \in U$, son analíticos y los controles son constantes a trozos, entonces (iv) \implies (ii), para cualquier curva absolutamente continua $c : [0, 1] \longrightarrow X$. El requerimiento $f_u \in C^w$ puede ser reemplazado por $f_u \in C^\infty$ y $T_p \text{Orb}(p) = \mathcal{L}(p)$, para cualquier $p \in \text{Im}c$.

Demostración.

- (a) Tenemos que probar que $\text{Im}c$ está contenida en $S = \text{Orb}(p_0)$. Suponemos que lo contrario se cumple y sea s^* el infimo de $s \in [0, 1]$, tal que, $c(s)$ no está en S . Definimos $p^* := c(s^*)$. Ya que $c(s) \in S$ para todo $s < s^*$, tenemos $p^* \in \text{cl}(S)$, por continuidad de la curva. Consideremos una vecindad V de p^* en la cual $\dim \mathcal{L}(p) = \text{constante} = k$. Entonces la distribución $p \longrightarrow \mathcal{L}(p)$ es de dimensión constante sobre V e involutiva (pues $\mathcal{L} = \text{Lie}\{f_u\}_{u \in U}$ es un álgebra de Lie). Aplicando la versión del teorema local de Frobenius podemos suponer, después de un cambio de coordenadas, que en una vecindad V_1 de p^* tenemos $\mathcal{L}(p) = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$, donde e_i denota el i -ésimo vector coordenado. Esto implica que la k -subvariedad de V_1 definida por $\{x \in V_1 : x_{k+1} = p_{k+1}^*, \dots, x_n = p_n^*\}$, con p_i^* -coordenadas de p^* , está contenida en $\text{Orb}(p^*)$ (por el teorema de Chow-Rashevskii aplicado al sistema restringido a V_1). Ya que los vectores en $\mathcal{L}(p)$ tienen componente cero a lo largo de los últimos $n - k$ vectores, de la suposición $\frac{\partial}{\partial u_i} \partial c / \partial s(s) \in \mathcal{L}(c(s))$ se sigue que las últimas $n - k$ coordenadas de la curva c son constantes, igual a las coordenadas de p^* , para s suficientemente cercano a s^* . Esto implica que $c(s)$ está en $S = \text{Orb}(p^*) = \text{Orb}(p_0)$, para $s \geq s^*$ cercano a s^* . Pero esto contradice nuestra definición de s^* ; así, (iv) implica (i).

(b) De la proposición (a) se sigue que (iv) implica (i); y por la proposición (b) del teorema anterior tenemos que, (i) implica (ii). Luego, por transitividad, (iv) implica (ii).

□

El siguiente resultado muestra que, para cualquier sistema tiempo reversible, analítico, un punto $p \in X$ y un vector dado $v \in \mathcal{L}(p)$, existe un control constante que produce un movimiento infinitesimal del estado en la dirección v desde p .

Teorema 4.3. *Si Σ es tiempo-reversible y los campos de vectores f_u , $u \in U$, son diferenciables entonces, para cualquier $p \in X$ y $v \in \mathcal{L}(p)$, existe una familia 1-parámetro de controles constantes a trozos $u_\epsilon(t)$, tales que, para la correspondiente trayectoria $x_\epsilon(t)$ comenzando desde p tenemos*

$$x_\epsilon(T(\epsilon)) = p + \epsilon v + O(\epsilon^{1+1/N}),$$

para $\epsilon > 0$, donde $T(\epsilon)$ depende continuamente de ϵ y $T(\epsilon) \rightarrow 0$, si $\epsilon \rightarrow 0$. La constante N es el menor entero k , tal que, v es generado por los campos de vectores f_u , $u \in U$, y sus corchetes de Lie hasta el orden k , evaluados en p .

Para la demostración se requieren las dos proposiciones siguientes.

Sean $\Phi_\epsilon^1, \dots, \Phi_\epsilon^k$ familias de difeomorfismos de X las cuales son de clase C^r con respecto a (x, ϵ) , $r \geq 1$, y están definidos para ϵ cercano a 0. Supondremos que

$$\Phi_0^1 = \text{id}, \dots, \Phi_0^k = \text{id}.$$

De $\Phi_0^i = \text{id}$ se sigue que $\epsilon \rightarrow \Phi_\epsilon^i(p)$ es una curva C^r que pasa a través de p , para cada i y $p \in X$. Así podemos definir

$$f_1(p) = \left. \frac{\partial \Phi_\epsilon^1}{\partial \epsilon}(p) \right|_{\epsilon=0}, \dots, f_k(p) = \left. \frac{\partial \Phi_\epsilon^k}{\partial \epsilon}(p) \right|_{\epsilon=0},$$

donde f_1, \dots, f_k son campos de vectores sobre X de clase C^{r-1} .

Proposición 4.4. *Para cualesquiera constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Phi_{\lambda_1 \epsilon}^1 \circ \dots \circ \Phi_{\lambda_k \epsilon}^k (p) \right|_{\epsilon=0} = \lambda_1 f_1(p) + \dots + \lambda_k f_k(p).$$

Demostración. Definimos la función $h(\epsilon) = f(s_1(\epsilon), \dots, s_k(\epsilon))$, donde

$$f(s_1, \dots, s_k) = \Phi_{s_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{s_k}^k (p)$$

y $s_i(\epsilon) = \lambda_i \epsilon$. Entonces, la igualdad $f(0, \dots, s_i, \dots, 0) = \Phi_{s_i}^i (p)$ y la regla de la cadena nos da

$$\frac{d}{d\epsilon} h(0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial s_i} (0, \dots, 0) \lambda_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left. \frac{\partial \Phi_{s_i}^i}{\partial s_i} (p) \right|_{s_i=0} = \lambda_1 f_1(p) + \dots + \lambda_k f_k(p),$$

lo cual prueba la proposición. \square

Dados dos difeomorfismos Φ y Ψ de X , definimos su *Commutador* como el difeomorfismo

$$[\Phi, \Psi] = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi.$$

Si Θ es otro difeomorfismo de X y denotamos $\mathcal{X} = [\Phi, \Psi]$, definimos el conmutador de tercer orden como

$$[[\Phi, \Psi], \Theta] = \mathcal{X}^{-1} \circ \Theta^{-1} \circ \mathcal{X} \circ \Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi \circ \Theta^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi.$$

Análogamente, se definen los conmutadores de orden mayor de difeomorfismos, y, en particular, los conmutadores de nuestra familia de difeomorfismos $\Phi_\epsilon^1, \dots, \Phi_\epsilon^k$.

Proposición 4.5. *Si Φ_ϵ^i son de clase C^r con respecto a (x, ϵ) y $r \geq k+1$, entonces*

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^j [\dots [\Phi_\epsilon^1, \Phi_\epsilon^2], \dots, \Phi_\epsilon^k] (p) \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \text{para } 1 \leq j < k,$$

y

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^k [\dots [\Phi_\epsilon^1, \Phi_\epsilon^2], \dots, \Phi_\epsilon^k] (p) \right|_{\epsilon=0} = k! [f_k, \dots, [f_2, f_1] \dots] (p),$$

donde los conmutadores de los campos de vectores f_1, \dots, f_k son de clase C^{r-k} .

Demostración. Definimos la función $h(\epsilon) = f(s_1(\epsilon), \dots, s_k(\epsilon))$, donde

$$f(s_1, \dots, s_k) = [\dots[\Phi_{s_1}^1, \Phi_{s_2}^2], \dots, \Phi_{s_k}^k](p)$$

y $s_i(\epsilon) = \epsilon$. Entonces, la regla de la cadena nos da

$$\left(\frac{d}{d\epsilon}\right)^j h(0) = \sum_{j_1+\dots+j_k=j} \frac{j!}{j_1!\dots j_k!} \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial s_k}\right)^{j_k} f(0, \dots, 0).$$

Ya que el conmutador iterado es igual a la identidad si uno de los difeomorfismos $\Phi_{s_i}^i$ es la identidad, cualquier término en la sumatoria de la ecuación anterior es igual a cero si $j_i = 0$, para algún i . Esto implica que la derivada es igual a cero si $j < k$, lo cual prueba la primera igualdad en la proposición.

Si $j < k$ entonces solo un término con $j_i \neq 0$, para todo i , puede ser distinto de cero y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\epsilon^k} h(0) &= k! \frac{\partial}{\partial s_1} \dots \frac{\partial}{\partial s_k} f(0, \dots, 0) \\ &= k! \frac{\partial}{\partial s_1} \dots \frac{\partial}{\partial s_k} [\dots[\Phi_{s_1}^1, \Phi_{s_2}^2], \dots, \Phi_{s_k}^k](p) \Big|_{s_1=\dots=s_k=0}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad buscada, es consecuencia inmediata de la siguiente proposición (denotaremos $\Phi_* f = Ad_{\Phi} f$, ver capítulo 1). \square

Proposición 4.6.

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_1} [\dots[\Phi_{s_1}^1, \Phi_{s_2}^2], \dots, \Phi_{s_k}^k](p) \Big|_{s_1=\dots=s_k=0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_2} ((\Phi_{s_k}^k)_*^{-1} \dots (\Phi_{s_2}^2)_*^{-1} f_1)(p) \Big|_{s_2=\dots=s_k=0} = [f_k, \dots, [f_2, f_1] \dots](p).$$

Demostración. Para probar la primera igualdad usamos inducción con respecto a k . Denotamos $\Psi_{\bar{s}} := [\dots[\Phi_{s_1}^1, \Phi_{s_2}^2], \dots, \Phi_{s_{k-1}}^{k-1}]$, donde $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{k-1})$. Entonces, en $s_1 = \dots = s_k = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_1} [\Psi_{\bar{s}}, \Phi_{s_k}^k](p) &= \frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_1} (\Psi_{\bar{s}})^{-1} \circ (\Phi_{s_k}^k)^{-1} \circ \Psi_{\bar{s}} \circ \Phi_{s_k}^k(p) \\ &= \frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_1} (\Phi_{s_k}^k)^{-1} \circ \Psi_{\bar{s}} \circ \Phi_{s_k}^k(p). \\ &= \frac{\partial}{\partial s_k} \dots \frac{\partial}{\partial s_2} ((\Phi_{s_k}^k)^{-1})_* \frac{\partial}{\partial s_1} \Psi_{\bar{s}}(p), \end{aligned}$$

donde la ecuación intermedia se sigue del hecho de que $\Psi_{\bar{s}}|_{s_1=0} = id$; así, diferenciando con respecto a s_1 que aparece en $(\Psi_{\bar{s}})^{-1}$, da un término independiente de s_k y su derivada $\partial/\partial s_k$ de anula. Las derivadas $\partial/\partial s_i$, $i = 2, \dots, k-1$, conmutan con $(\Phi_{s_k}^k)^{-1}$, por tanto, la igualdad requerida se sigue de la fórmula inductiva, en $s_1 = \dots = s_{k-1} = 0$,

$$\partial/\partial s_{k-1} \dots \partial/\partial s_1 \Psi_{\bar{s}}(p) = \partial/\partial s_{k-1} \dots \partial/\partial s_2 ((\Phi_{s_{k-1}}^{k-1})_*^{-1} \dots (\Phi_{s_2}^2)_*^{-1} f_1)(p).$$

La segunda igualdad se sigue por inducción de la fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_m} ((\Phi_{s_k}^k)_*^{-1} \dots (\Phi_{s_m}^m)_*^{-1} [f_{m-1}, \dots, [f_2, f_1] \dots])(p) \Big|_{s_m=0} \\ = ((\Phi_{s_k}^k)_*^{-1} \dots (\Phi_{s_{m+1}}^{m+1})_*^{-1} [f_m, \dots, [f_2, f_1] \dots])(p), \end{aligned}$$

la cual es consecuencia de $(\partial/\partial s)(\Phi_s^m)_*^{-1} g = [f_m, g]$ (usando la definición 1.8) \square

Observación 13.

Notemos que:

a) *La fórmula de la proposición 4.4 puede ser equivalentemente escrita de la forma*

$$\Phi_{\lambda_1 \epsilon}^1 \circ \dots \circ \Phi_{\lambda_k \epsilon}^k(p) = p + \epsilon V(p) + O(\epsilon^2),$$

donde

$$V(p) = \lambda_1 f_1(p) + \dots + \lambda_k f_k(p).$$

Esto significa que la composición de tales difeomorfismos da movimientos infinitesimales a lo largo de los vectores $\lambda_1 f_1(p) + \dots + \lambda_k f_k(p)$.

b) *La fórmula de la proposición 4.5 es equivalente a la fórmula de Taylor*

$$[\dots[\Phi_\epsilon^1, \Phi_\epsilon^2], \dots, \Phi_\epsilon^k](p) = p + \epsilon^k V(p) + O(\epsilon^{k+1}),$$

y, después de una reparametrización,

$$[\dots[\Phi_{\epsilon^{1/k}}^1, \Phi_{\epsilon^{1/k}}^2], \dots, \Phi_\epsilon^k](p) = p + \epsilon^k V(p) + O(\epsilon^{1+1/k}),$$

donde

$$V(p) = [f_k, \dots, [f_2, f_1] \dots](p).$$

Esto significa que la conmutador de tales difeomorfismos da movimientos infinitesimales a lo largo de los vectores $[f_k, \dots, [f_2, f_1] \dots](p)$.

A continuación presentamos la demostración del teorema 4.3.

Demostración. Ya que $v \in \mathcal{L}(p)$ donde $\mathcal{L} = \text{Lie}\{f_u\}_{u \in U}$, podemos escribir

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r,$$

donde $v_i = V_i(p)$, y los V_i son algunos de los campos de vectores f_u , $u \in U$, y sus corchetes iterados. Como cualquier corchete de Lie es igual a una combinación lineal de corchetes de Lie iterados izquierdos (por la proposición 1.10) después, mediante un rearrreglo en la suma anterior podemos suponer que

$$V_i = [f_{u_{k(i)}^i}, \dots, [f_{u_2^i}, f_{u_1^i}] \dots]$$

para $i = 1, \dots, r$. Definimos la familia de difeomorfismos como conmutadores iterados de los flujos,

$$\Phi_\epsilon^i := [\dots[\exp(\epsilon f_{u_1^i}), \exp(\epsilon f_{u_2^i})], \dots, \exp(\epsilon f_{u_{k(i)}^i})].$$

Además, definamos

$$y(\epsilon) = \Phi_{\lambda_1 \epsilon^{1/k(1)}}^1 \circ \dots \circ \Phi_{\lambda_r \epsilon^{1/k(r)}}^r(p).$$

Tomando la derivada $dy/d\epsilon$ en $\epsilon = 0$ y usando las proposiciones 4.4 y 4.5 y la definición de Φ_ϵ^i obtenemos la fórmula

$$\frac{dy}{d\epsilon}(0) = \lambda_1 V_1(p) + \dots + \lambda_r V_r(p).$$

Resta probar que en la construcción anterior de la familia 1-parámetro de puntos $y(\epsilon)$ podemos usar ciertas trayectorias tiempo-hacia adelante del sistema Σ .

Notemos que los coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en la combinación lineal dada por v pueden ser tomados positivos. En efecto, si λ_i es negativo entonces podemos cambiar el orden de los campos de vectores $f_{u_1^i}$ y $f_{u_2^i}$ y por tanto V_i y λ_i cambian de signos. En la definición del difeomorfismo Φ_ϵ^i usamos conmutadores de flujos, donde aplicamos los flujos $\exp(-\epsilon f_u)$, con $\epsilon > 0$. Podemos reemplazar tales transformaciones por "movimientos tiempo-hacia adelante" por usar el control $v = v(u)$ dado por la definición de sistema tiempo reversible (si la función $\lambda(x, u)$ en esta definición no es constante, la porción de tiempo necesario para obtener el equivalente de la transformación $\exp(-\epsilon f_u)$ varía con las trayectorias). En esta forma podemos reemplazar todos los pasos tiempo-hacia atrás, por pasos tiempo-hacia adelante. Esto demuestra la fórmula principal del teorema. Lo demás se sigue de nuestra construcción de la prueba.

□

Bibliografía

- [1] Kobayashi, S and Nomizu, K(1996). Foundations of Differential Geometry, vol 1, Wiley Classics Library.
- [2] Spivak, M. (1970). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 1, second edition, Pulish or Perish, Inc, Berkeley.
- [3] Warner, F. W. (1971). Founddation of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag New York.
- [4] Lee, John M. (2003). Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag.
- [5] Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, London.
- [6] Sontag, Eduardo D.(1998). Mathematical Control Theory. Deterministic finite-dimensional systems, Springer-Verlag New York.
- [7] Jacubczyk, Bronislaw. (2001). Introducction to Geometry Nonlinear Control; Controllability and Lie Bracket, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland.
- [8] Zabczyk, Jerzy. (2001). Classical Control Theory, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland.
- [9] Sussmann, H.J and Jurdjevic, V. (1972). Controllability of Nonlinear Systems,J. Diff. Equations. 12,95.
- [10] Sussmann, H.J. (1973). Orbits of families of vectors fields and integrability of distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 180/ 171-188.

- [11] Stefan, P. (1974). Accessible sets, orbits, foliations with singularities, Proc. London Math. Soc, 29/699-713.