

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS

“Hiperbolicidad no Uniforme para
Atractores Hiperbólicos Singulares”

AUTOR: LIC. JUAN JOSÉ NOGUERA MATUSIAK
TUTOR: DR. WILMER COLMENÁREZ RODRIGUEZ (UCLA)

TRABAJO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad de Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Magíster Scientiae Matemática

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Noviembre, 2007

CONTENIDO

1. Introducción	1
2. El Atractor de Lorenz	5
3. Hiperbolicidad no Uniforme	18

CAPÍTULO 1

Introducción

En la categoría de flujos diferenciables, la hiperbolicidad uniforme falla, por ejemplo, cuando alguna singularidad hiperbólica del campo de vectores asociado es acumulada por órbitas periódicas hiperbólicas dentro de un atractor. Este fenómeno implica, en un primer lugar, algún tipo de hiperbolicidad parcial del sistema. La clase de atractores con la cual tratamos tienen singularidades (todas hiperbólicas) y son parcialmente hiperbólicos con dirección central que expande volumen. Mostraremos que si un tal atractor tiene órbitas periódicas densas, entonces toda órbita en el atractor, distinta de las variedades inestables de las singularidades, es hiperbólica no uniformemente en el sentido de [S]. Estos atractores fueron estudiados en [MPP] en conexión con una propiedad de transitividad robusta (vea también [MP]), y el principal y motivador ejemplo en esta clase de atractores es el conocido atractor de Lorenz clásico o expansor [G].

Ahora establecemos las definiciones precisas de los objetos y propiedades mencionadas anteriormente.

Sea X_t un flujo de clase C^r , $r \geq 2$, sobre una variedad Riemanniana tridimensional M con campo de vectores generador $X(q) = \frac{d}{dt}X_t(q)|_{t=0}$.

DEFINICIÓN 1 Un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ es llamado *atractor* si para alguna vecindad $U \supset \Lambda$ tenemos que $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$ (tal U es llamada una *región de atracción* de Λ) y $X_t|_\Lambda$ es *topológicamente transitivo*, esto es, Λ es el conjunto ω -límite de alguna órbita.

DEFINICIÓN 2 Un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ es *hiperbólico* si existe una descomposición invariante $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u \oplus E^X$ donde E^X (el espacio generado por el campo) es tangente al flujo X_t y los subfibrados E^u y E^s son expandido y contraído respectivamente por DX_t .

DEFINICIÓN 3 Diremos que Λ es *parcialmente hiperbólico* si existe una descomposición DX_t -invariante y continua $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ donde el subfibrado estable E_Λ^s es unidimensional, el subfibrado central E_Λ^c es bidimensional, contiene la dirección del flujo E_Λ^X y existen constantes positivas λ, c tales que, para todo $t \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \|DX_t|_{E_\Lambda^s}\| &\leq ce^{-\lambda t} \quad (E_\Lambda^s \text{ es contraído por } DX_t) \\ \|DX_t|_{E_\Lambda^s}\| \cdot \|DX_{-t}|_{E_\Lambda^c}\| &\leq ce^{-\lambda t} \quad (E_\Lambda^c \text{ es dominado por } E_\Lambda^s). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4 Un *atractor hiperbólico singular* es un atractor parcialmente hiperbólico que contiene singularidades, todas ellas hiperbólicas, y cuya dirección central E_Λ^c *expande volumen* en el sentido siguiente:

$$|\det(DX_t|_{E_\Lambda^c})| \leq ce^{\lambda t} \quad \text{para todo } t < 0. \quad (1.1)$$

Para espacios lineales o subfibrados vectoriales E_1 y E_2 de TM denotemos $\sphericalangle(E_1, E_2)$ al ángulo formado por E_1 y E_2 .

DEFINICIÓN 5 La órbita $\mathcal{O}_X(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ de un punto $p \in M$ bajo la acción del flujo X_t es llamada *hiperbólica no uniformemente* si para cada $t \in \mathbb{R}$ existe una descomposición continua (respecto de t),

$$T_{X_t(p)}M = E_{X_t(p)}^s \oplus E_{X_t(p)}^u \oplus E_{X_t(p)}^X$$

la cual es invariante por la diferencial DX_s , $s \in \mathbb{R}$, y existe un número real positivo η tal que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una función positiva C_ε continua a lo largo de $\mathcal{O}_X(p)$ satisfaciendo

1. $C_\varepsilon(X_t(p)) \leq e^{\varepsilon|t|}C_\varepsilon(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. $\sphericalangle(E_{X_t(p)}^s, E_{X_t(p)}^u), \sphericalangle(E_{E_t(p)}^{s,u}, E_{X_t(p)}^X) \geq C_\varepsilon(X_t(p))^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. $E_{X_t(p)}^u$ es expandido no uniformemente por DX_s , esto es, si $s, t \in \mathbb{R}$ con $s > 0$ entonces

$$\|DX_s(X_t(p))v\| \geq C_\varepsilon^{-1}(X_{t+s}(p))e^{\eta s}\|v\|, \quad \text{para } v \in E_{X_t(p)}^u.$$

4. $E_{X_t(p)}^s$ es contraído no uniformemente por DX_s , esto es, si $s, t \in \mathbb{R}$ con $s > 0$ entonces

$$\|DX_s(X_t(p))v\| \leq C_\varepsilon(X_{t+s}(p))e^{-\eta s}\|v\|, \quad \text{para } v \in E_{X_t(p)}^s.$$

Si la función C_ε es constante, llamamos a $\mathcal{O}_X(p)$ órbita hiperbólica (uniforme).

Sea $\text{sing}(X|_\Lambda)$ el conjunto de todas las singularidades del campo de vectores X contenidas en Λ . Si Λ es hiperbólico singular, entonces $\text{sing}(X|_\Lambda)$ es un subconjunto no vacío de Λ consistente de singularidades hiperbólicas, todas ellas tipo Lorenz como es demostrado en [MPP]. En particular, $\text{sing}(X|_\Lambda)$ es finito. Definamos $\Lambda^* = \Lambda \setminus W^u(\text{sing}(X|_\Lambda))$, donde $W^u(\text{sing}(X|_\Lambda))$ denota la unión de las variedades inestables de las singularidades en $\text{sing}(X|_\Lambda)$. Es claro de la definición que Λ^* es un conjunto residual de Λ .

El enfoque usual de hiperbolicidad no uniforme comienza con la existencia a priori de alguna medida de probabilidad invariante con soporte contenido en Λ . Entonces, algunas nociones de regularidad de órbitas y tasas de expansión (resp. contracción) son introducidas para un subconjunto con medida total. Luego, el Teorema de Oseledec es aplicado para mostrar la existencia de un subconjunto invariante de Λ con medida total sobre el cual el flujo es hiperbólico no uniformemente (vea por ejemplo [O],[P],[PS],[KM]).

La hiperbolicidad singular y $\dim(M) = 3$ implican que algún conjunto Λ^* de órbitas en Λ es hiperbólico no uniformemente. Más precisamente, la condición de expansión uniforme de volumen implica que las órbitas en Λ^* son regulares en el sentido de Lyapunov y los correspondientes *exponentes de Lyapunov*

$$\chi(x, v) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|DX_t(x) \cdot v\|$$

son no nulos para $v \notin \{s \cdot X(x) : s \in \mathbb{R}\}$ (vea definiciones en [P]).

1.1. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar la demostración dada en [C] para la hiperbolicidad no uniforme de las órbitas en un conjunto invariante residual (y no compacto) Λ^* , suponiendo que Λ tiene órbitas periódicas densas, siguiendo un procedimiento que no requiere la existencia a priori de alguna medida de probabilidad invariante con soporte grande.

Nuestro resultado es el siguiente:

TEOREMA 1 *Sea Λ un atractor hiperbólico singular con órbitas periódicas densas. Entonces, para todo $p \in \Lambda^*$ el espacio central a lo largo de la órbita $\mathcal{O}_X(p)$ de p admite una descomposición continua DX_s -invariante $E_{X_t(p)}^c = E_{X_t(p)}^X \oplus E_{X_t(p)}^u$, $s, t \in \mathbb{R}$ y existe un*

número η positivo tal que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una función positiva C_ε continua sobre $\mathcal{O}_X(p)$ tal que

1. $C_\varepsilon(X_t(p)) \leq e^{\varepsilon|t|} C_\varepsilon(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
2. $E_{X_t(p)}^u$ es expandido no uniformemente por DX_s ; esto es, si $s, t \in \mathbb{R}$ y $s > 0$ entonces

$$\|DX_{-s}(X_t(p))v\| \leq C_\varepsilon(X_{t-s}(p))e^{-\eta s}\|v\|, \text{ para } v \in E_{X_t(p)}^u,$$

3. $\langle E_{X_t(p)}^u, E_{X_t(p)} \rangle \geq C_\varepsilon(X_t(p))^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Este teorema se demostrará en el Capítulo 3 siguiendo algunas ideas de la demostración del Teorema de Oseledec dada en [M] y en las estimaciones en [KM] y el Lema en [MPP]. En resumen, la demostración seguirá un procedimiento basado en la transformada grafo, similar al utilizado en la demostración del Teorema de Oseledec en [M], con una transformada grafo construída sobre el flujo lineal de Poincaré [D].

COROLARIO 1 *Sea Λ un atractor hiperbólico singular para un campo de vectores C^2 sobre una variedad tridimensional. Supongamos que Λ contiene órbitas periódicas densas. Entonces, toda órbita en Λ^* es hiperbólica no uniformemente.*

Demostración. Puesto que Λ es un conjunto compacto parcialmente hiperbólico, la condición de contracción no uniforme es satisfecha para una función constante cuyo valor es el número c en la definición de hiperbolicidad parcial. Similarmente, la compacidad y la hiperbolicidad parcial de Λ implican que el ángulo entre E^s y cualquier subfibrado invariante de E^c es acotado lejos de cero. El resto de las afirmaciones en el Corolario están explícitamente establecidas en el Teorema Principal (Teorema 1) y su demostración se dará en el capítulo 3. ■

CAPÍTULO 2

El Atractor de Lorenz

2.1. Introducción

Se dará la descripción del atractor de Lorenz clásico o expansor como uno de los ejemplos motivadores a la clase de atractores que se están estudiando en este trabajo.

Desde su aparición en [G], el atractor de Lorenz geométrico se constituyó en uno de los más interesantes objetos de la Teoría de Sistemas Dinámicos y de la Matemática en general en las últimas décadas, con profundas inspiraciones de carácter filosófico sobre el comportamiento caótico de la naturaleza. Su estudio ha dado lugar a importantes resultados matemáticos sobre su estructura, como también ha motivado generalizaciones y extensiones teóricas sobre los conceptos de atractor, nociones de estabilidad, técnicas unidimensionales, etc.

Una de las más recientes e importantes generalizaciones inspiradas en el atractor de Lorenz geométrico es presentada por Morales, Pacífico y Pujals en [MPP], la cual intenta capturar las propiedades débiles de hiperbolicidad del atractor de Lorenz mediante condiciones de hiperbolicidad parcial y expansión de volumen en la dirección central para atractores de campos de vectores con singularidades en dimensión tres.

En este capítulo estudiaremos algunos hechos básicos acerca del atractor geométrico de Lorenz, siguiendo las ideas de [R] y [GH]. Antes, recordemos algunas nociones dinámicas.

Sean M una variedad, X un campo de vectores de clase C^2 sobre M y $\varphi^t : M \rightarrow M$ el flujo asociado.

DEFINICIÓN 6 Un subconjunto Λ de M es *invariante* si para cada $x \in \Lambda$ se tiene que $\varphi^t(x) \in \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (en general consideraremos conjuntos compactos invariantes).

DEFINICIÓN 7 Si Λ es un conjunto compacto invariante para el flujo φ^t , decimos que el flujo, o Λ , es *transitivo* si existe algún punto $x \in \Lambda$ tal que su órbita positiva $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi^t(x) : t \geq 0\}$ es densa en Λ .

DEFINICIÓN 8 Un subconjunto compacto Λ de M que es invariante y transitivo para φ^t se dice *atractor* del flujo, si existe una vecindad U de Λ tal que

$$\varphi^t(U) \subset U \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } \Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U).$$

La vecindad U es llamada región de atracción.

2.2. El Sistema de Lorenz

Edward Lorenz, un meteorólogo del Massachusetts Institute of Technology (M.I.T), en la década de los '60, estaba interesado en el conocimiento a profundidad de la convección atmosférica. El fenómeno es el siguiente: El sol calienta el suelo y las capas inferiores se vuelven más calientes y menos densas que las capas superiores. Esto desencadena un movimiento ascendente del aire ligero y caliente, mientras que el aire frío y denso desciende. Este movimiento es el fundamento de la convección. Considerando el aire como un fluido, su estado en cada instante de tiempo puede ser representado por un punto del estado de fase que debe ser tomado en dimensión infinita, ya que se necesitarían infinitas variables para explicar los citados estados. En lugar de estudiar la evolución temporal de estas infinitas variables, Lorenz usó unas ecuaciones debidas a Boussinesq que describen el flujo de un fluido situado en una situación convectiva. Truncando hasta ciertos ordenes tales ecuaciones, simplificó las cosas y redujo el problema al estudio de una evolución temporal en tres dimensiones. Estas ecuaciones condujeron a Lorenz a enfatizar la posibilidad y la importancia de la dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales en modelos simplificados de fenómenos de la naturaleza. Simulaciones numéricas para un entorno abierto de los parámetros clásicos sugirieron que casi todo punto en el espacio de fase tiende a un atractor extraño. Un modelo geométrico del flujo de Lorenz fue introducido por John Guckenheimer a finales de los 60, el cual es una abstracción de las propiedades numéricas observadas en las soluciones de las ecuaciones de Lorenz. Tucker (vea [T]) en 2000 probó que las ecuaciones de Lorenz admiten un atractor extraño, esta conjetura planteada por Lorenz fue catalogada por Steven Smale en 1999 como uno de los problemas mas desafiantes del siglo XXI.

Lorenz, deseaba dar un pronóstico atmosférico a largo plazo. Para ello, escogió 12 ecuaciones, unas establecían el vínculo entre la velocidad y el viento, otras entre presión y temperatura, etc. Los resultados no fueron muy alentadores, un acercamiento estadístico parecía prometedor, sin embargo, estaba convencido que los métodos estadísticos de aquella época, especialmente la predicción por regresión lineal, eran poco precisos y no acordes con el problema planteado, ya que las ecuaciones de evolución estaban muy lejos de ser lineales.

Para probar sus ideas, él decidió comparar diferentes métodos aplicados a un modelo no lineal simplificado para el clima. El tamaño del modelo, número de ecuaciones y la complejidad fue un asunto delicado debido al limitado poder computacional existente para aquella época.

En 1963, Lorenz publica su famoso artículo “Deterministic non periodic flow”, en el Journal of Atmospheric Sciences, aparte de las implicaciones filosóficas en las ideas del determinismo y en la falta de predicibilidad de los fenómenos en la naturaleza, este artículo también fue causa de numerosas preguntas que han sido motivo de inspiración para el desarrollo extraordinario que ha tenido el campo de los Sistemas Dinámicos en las últimas décadas.

Luego de experimentar con muchos ejemplos, Lorenz aprendió de un trabajo de Saltzman (1962) concerniente a la convección del fluido termal, un elemento crucial sobre el clima, experimentos numéricos realizados a un sistema de siete ecuaciones, mostró que al escoger determinados parámetros, todas excepto tres variables tendían a cero cuando el tiempo tendía al infinito. En otras palabras, a pesar de que el espacio de fase tiene dimensión siete, muchas soluciones parecían converger a un atractor contenido en un subconjunto tridimensional del espacio de fase. Una simplificación del sistema de ecuaciones estudiado por Saltzman probó ser un modelo ideal, dando origen a las *ecuaciones de Lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - x, \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

donde $\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}^+$.

La variable x está relacionada con la intensidad de movimiento del fluido, mientras que la variable y mide la variación de la temperatura en la horizontal y z mide la variación de la temperatura en la vertical.

Las ecuaciones de Lorenz involucran tres parámetros: σ, ρ, β los cuales son proporcionales al Número de Prandtl, Número de Rayleigh y otras proporciones físicas de la región en consideración, respectivamente (vea [GH]).

Lorenz probó que para $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ y $\rho = 28$ (valores racionales para la atmósfera terrestre), hay un atractor cuyo aspecto geométrico está constituido por dos lóbulos (como una mariposa) con trayectorias moviéndose entre los lóbulos de manera arbitraria. En algún momento durante los cálculos realizados por Lorenz, él decidió detallar más una solución particular. Para ésta, repitió la integración usando algunos valores intermedios como nuevas condiciones iniciales. Para su sorpresa, el resultado divergía gradualmente del primero.

Los ambientes gaseosos, en particular la atmósfera terrestre, son muy complicados al involucrar varios tipos de interacciones entre un gran número de partículas. Por tanto, no debería ser sorpresa que su evolución sea difícil de predecir. Lo más impactante de las observaciones de Lorenz fue la simplicidad de las ecuaciones (2.1), combinadas con su origen de una manera natural de un fenómeno específico como la convección y que las soluciones de tal sistema de ecuaciones pueden ser sensibles respecto a las condiciones iniciales.

El flujo descrito por las ecuaciones (2.1) no es hiperbólico, ni estructuralmente estable (vea [G]).

2.3. Modelo Geométrico del Atractor de Lorenz

En 1976, Guckenheimer introdujo un modelo geométrico inspirado en el sistema de Lorenz, el cual es similar a los estudios realizados a las ecuaciones (2.1). Este modelo ha sido estudiado por muchos autores (vea por ejemplo, [G],[R],[VM]) y es inusual en el sentido de que contiene un punto de equilibrio (tipo silla) del campo de vectores el cual induce una discontinuidad en la transformación de Poincaré usada para pasar de un sistema dinámico continuo a uno discreto.

De la descripción del sistema (2.1) para los parámetros clásicos, $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ y $\rho = 28$, se sospecha la existencia de un atractor extraño. El punto $P = (0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio para (2.1) para todo valor de $\rho > 0$. Este equilibrio es globalmente estable (atractor) cuando $0 < \rho < 1$. En $\rho = 1$ hay una bifurcación y para $\rho > 1$ el origen es inestable y aparecen dos nuevos puntos de equilibrio

$$q^{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1).$$

Para $\rho = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{(\sigma-\beta-1)}$ ocurre una birfucación, $\rho = \frac{470}{19} \simeq 24,74$ (con $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$). Luego, si $1 < \rho < 24,74$, q^+ y q^- son estables; si $\rho > 24,74$, q^+ y q^- son inestables.

La birfucación anterior, ocurre para el punto fijo no trivial, ya que los autovalores de la matriz son

$$\lambda = -(\sigma + \beta + 1) \text{ y } \lambda = \pm i \sqrt{\frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - \beta - 1}}$$

A continuación, se dará una descripción geométrica del flujo para este modelo que está basado en la examinación de la transformación de retorno F del rectángulo Σ contenido en el plano $z = \rho - 1$.

Sea Σ la sección transversal para el flujo definida por un rectángulo contenido en el plano $z = \rho - 1$, que tiene lados opuestos que pasan por los puntos de equilibrio q^+ y q^- ; se puede verificar de manera inmediata que $\dot{z} < 0$ para todo punto en el interior de Σ .

Los puntos de equilibrio q^+ y q^- son puntos silla con variedades estables $W^s(q^+)$ y $W^s(q^-)$ unidimensionales, respectivamente, los cuales forman parte de los lados opuestos de la sección transversal Σ en este modelo geométrico.

Los autovalores inestables asociados a q^+ y q^- son complejos y como $\dot{z} < 0$ en el interior de Σ , todas las trayectorias pasan de arriba hacia abajo por la sección transversal, la mayoría se enroscan en forma de espiral alrededor de q^+ y q^- y regresan a Σ , pero entonces, debe existir una frontera D que separa las trayectorias que se enroscan en q^+ con las que lo hacen alrededor de q^- , esta frontera D , se supone, está sobre la variedad estable de un tercer punto de equilibrio P , el cual está por debajo de Σ , como se ve en la figura (2.1).

2.4. Condiciones del Modelo Geométrico

El atractor de Lorenz geométrico es un atractor que satisface las siguientes condiciones:

- i. Contiene una singularidad P del campo de vectores, la cual es un punto silla.
- ii. Contiene la variedad inestable de P , formada por P y las separatrices Γ_1 y Γ_2 .
- iii. Contiene todos los puntos cuyas órbitas intersectan a la sección transversal Σ .

Para describir el atractor de Lorenz geométrico a partir del flujo parcialmente descrito en la figura (2.1), se hacen cuatro suposiciones adicionales acerca del flujo:

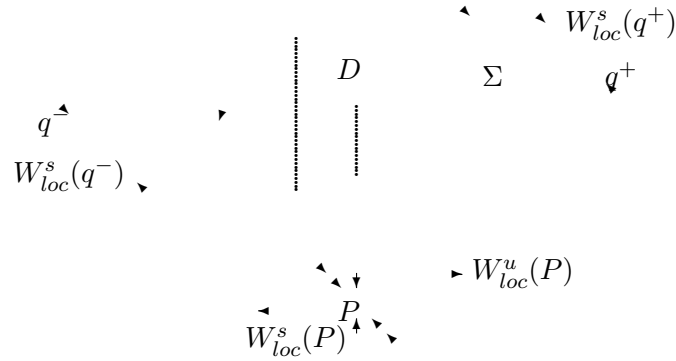


Figura 2.1: La sección transversal Σ

1. Los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ asociados a P satisfacen las condiciones $0 < -\lambda_1 < \lambda_2 < -\lambda_3$ donde λ_1 es el autovalor asociado al eje z , el cual se supone invariante bajo el flujo, es decir, todas las trayectorias que comienzan en el eje z , permanecen en él y tienden a P cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Existe una foliación \mathcal{F} que descompone a Σ en segmentos de rectas paralelas a D , que contienen a D y con la propiedad de que es invariante bajo la transformación de retorno F , es decir, si $\gamma \subset \mathcal{F}$, entonces $F(\gamma)$ está contenido en un elemento de \mathcal{F} , siempre que F esté definida en γ .
3. Todos los puntos en el interior de $\Sigma \setminus D$ retornan a Σ y F es suficientemente expansora en la dirección transversal a la foliación \mathcal{F} .
4. El flujo es simétrico con respecto a la rotación por π alrededor del eje z , es decir, si $(x(t), y(t), z(t))$ es una trayectoria del flujo, entonces $(-x(t), -y(t), z(t))$ también lo es.

Analíticamente, estas suposiciones significan que existe un sistema de coordenadas (u, v) en Σ tal que F posee las siguientes propiedades:

- a. Las curvas en la foliación \mathcal{F} están dadas por $u = \text{constante}$; D es el conjunto de los pares (u, v) tales que $u = 0$.

- b. Existen funciones f y g tales que $F(u, v) = (f(u), g(u, v))$ siempre que $u \neq 0$ y $F(-u, -v) = -F(u, v)$.
- c. $f'(u) > \sqrt{2}$ para $u \neq 0$ y $|f'(u)| \rightarrow \infty$ cuando $u \rightarrow 0$.
- d. $0 < \frac{\partial g}{\partial v} < c < 1$ para $u \neq 0$ y $\frac{\partial g}{\partial v} \rightarrow 0$ $u \rightarrow 0$.
- e. $f'(u) \cdot \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) < 1$ para $u \neq 0$.

2.5. Relación entre los autovalores y la gráfica de f

Haciendo un cambio de variables no lineal, el sistema (2.1) es conjugado diferenciablemente a las ecuaciones linealizadas en una vecindad de P ,

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_3 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \\ \dot{z} = \lambda_1 z \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores asociados a P y satisfacen la condición $0 < -\lambda_1 < \lambda_2 < -\lambda_3$ (vea [GH]).

La soluciones φ del sistema linealizado vienen dadas por

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_3 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \\ z(t) = z_0 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \quad (2.3)$$

para condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0) .

El propósito es estudiar a la solución φ a partir del momento en que el flujo pasa por un cierto punto, específicamente, desde el instante de tiempo cuando $z(t)$ es igual a $\rho - 1$, hasta que $y(t)$ es igual a algún $\pm y_1$ fijo.

Consideremos las secciones transversales

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x, y, \rho - 1) : |x|, |y| \leq r^+\} \\ \Sigma' &= \Sigma \setminus D = \Sigma \setminus \{(x, y, \rho - 1) : y = 0\} \\ S^\pm &= \{(x, \pm y_1, z) : |x| \leq r^+, 0 \leq z \leq \rho - 1\} \end{aligned}$$

Para $(x, y, \rho - 1) \in \Sigma'$, el tiempo τ tal que $\varphi_\tau(x, y, \rho - 1) \in S = S^+ \cup S^-$ está determinado por $|y(\tau)| = y_1$. Por tanto, τ está dado de manera implícita por la ecuación

$$e^\tau = \left(\frac{y_1}{|y|} \right)^{1/\lambda_2}. \quad (2.4)$$

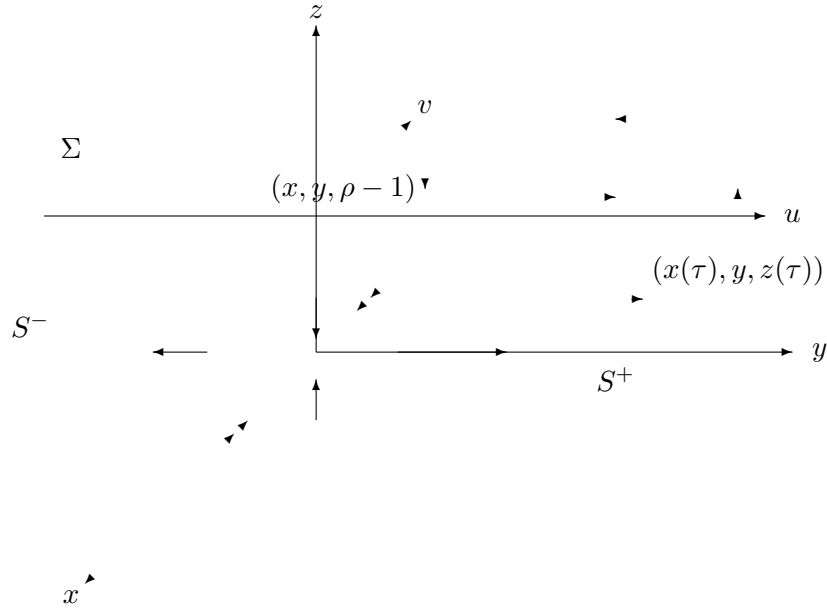


Figura 2.2: Secciones Transversales

Entonces, la transformación de Poincaré $P_1 : \Sigma' \rightarrow S$ está definida por $P_1(x, y) = (x(\tau), y(\tau))$. En virtud de (2.3) y (2.4) se sigue que

$$P_1(x, y) = (xy_1^{\lambda_3/\lambda_2}y^{-\lambda_3/\lambda_2}, (\rho - 1)y_1^{\lambda_1/\lambda_2}y^{-\lambda_1/\lambda_2}). \quad (2.5)$$

Nótese que si $y > 0$, entonces $P_1(x, y) \in S^+$, y si $y < 0$ entonces $P_1(x, y) \in S^-$. Además,

$$\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right| = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} > 1 \text{ y } \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} < 1. \quad (2.6)$$

En consecuencia, la región rectangular $\Sigma^+ = \{(x, y, \rho - 1) : |x| \leq r^+, 0 < y < r^+\}$ en Σ' se transforma en una cuña en S^+ .

Haciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{cases} u = y \\ v = -x \\ z = \rho - 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

tenemos que

$$\Sigma^+ = \{(u, v) : u > 0\} \quad \text{y} \quad \Sigma^- = \{(u, v) : u < 0\}$$

Nótese que $\Sigma' = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$.

El modelo geométrico para el atractor de Lorenz supone que la transformación de Poincaré $P_2 : S^\pm \rightarrow \Sigma$ manda rectas horizontales $z = z^*$ en rectas verticales $y = y^*$ (rectas verticales $u = y^*$, en el sistema de coordenadas (u, v)). Esta compatibilidad asegura que existe un conjunto coherentes de direcciones contractivas. Por lo tanto, supondremos que

$$DP_2(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Así, la transformación de retorno $F : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ viene dada por $F = P_2 \circ P_1$ y la imagen de Σ' bajo F se muestra en la figura (2.3).

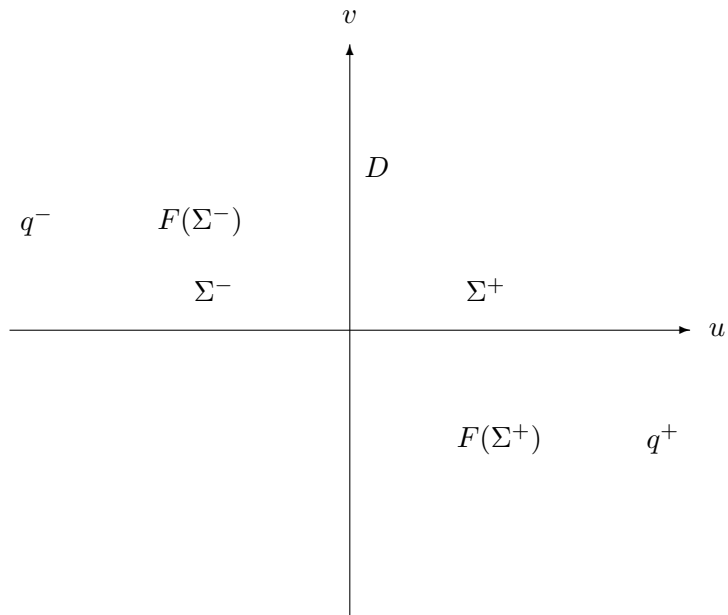


Figura 2.3: Gráfico de $\Sigma' = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ y $F(\Sigma^-)$

Por la propiedad (b), sabemos que $F(u, v) = (f(u), g(u, v))$, por tanto

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Usando el cambio de coordenadas (2.7) en (2.5) obtenemos

$$P_1(-v, u) = (-vy_1^{\lambda_3/\lambda_2} u^{-\lambda_3/\lambda_2}, (\rho - 1)y_1^{\lambda_1/\lambda_2} u^{-\lambda_1/\lambda_2}).$$

En consecuencia,

$$DP_1(u, v) = \begin{pmatrix} -vy_1^{\lambda_3/\lambda_2} \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) u^{-\lambda_3/\lambda_2-1} & -y_1^{\lambda_3/\lambda_2} u^{-\lambda_3/\lambda_2-1} \\ (\rho - 1)y_1^{\lambda_1/\lambda_2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) u^{-\lambda_1/\lambda_2-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ahora bien, $DF(u, v) = DP_2(P_1(u, v)) \cdot DP_1(u, v)$, por lo tanto, usando (2.8) y (2.10) tenemos que

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} -\xi(\rho - 1)y_1^{\lambda_1/\lambda_2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) u^{-\lambda_1/\lambda_2-1} & 0 \\ \pm \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) y_1^{\lambda_3/\lambda_2} v u^{-\lambda_3/\lambda_2-1} & \pm (-y_1)^{\lambda_3/\lambda_2} u^{-\lambda_3/\lambda_2-1} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Igualando (2.9) y (2.11) se sigue que

$$f'(u) = -\xi(\rho - 1)y_1^{\lambda_1/\lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) u^{\lambda_1/\lambda_2-1} \rightarrow \infty \text{ cuando } u \rightarrow 0^\pm$$

Debido a la propiedad (d) de F se sigue que $\frac{\partial F}{\partial v} \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 0$, por lo tanto, el límite es independiente de v cuando $u \rightarrow 0^+$ ó $u \rightarrow 0^-$.

Denotemos por

$$(r^+, t^+) = \lim_{u \rightarrow 0^-} F(u, v) \quad \text{y} \quad (r^-, t^-) = \lim_{u \rightarrow 0^+} F(u, v) \quad (2.12)$$

Por (2.12) y por la propiedad (b) de F tenemos que

$$\begin{cases} f(u) \rightarrow r^+ \text{ cuando } u \rightarrow 0^-, \\ f(u) \rightarrow r^- \text{ cuando } u \rightarrow 0^+, \\ f(u) = -f(-u), \\ r^+ = -r^- > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

La figura (2.4) expresa las condiciones obtenidas para f .

Recordemos que q^+ y q^- son puntos de equilibrio, de las ecuaciones de Lorenz, inestables para $\rho > 24, 74$, se puede verificar que el autovalor real asociado a estos puntos de equilibrio es negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva. En virtud de ésto, para el modelo geométrico supondremos que q^+ y q^- son inestables; por lo tanto, la gráfica de f se aproxima a $(C_1, f(C_1))$ y a $(C_2, f(C_2))$ con pendiente mayor que 1, es decir,

$$\lim_{u \rightarrow C_2^-} f'(u) > 1 \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow C_1^+} f'(u) > 1.$$

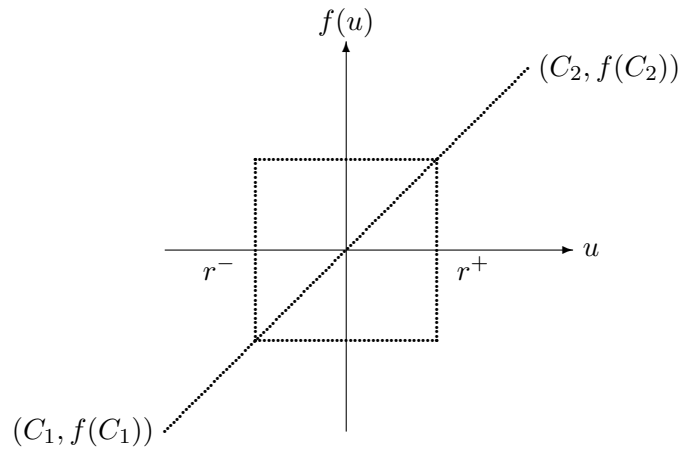


Figura 2.4: Comportamiento de f cerca de $C_1 = -\sqrt{\beta \cdot (\rho - 1)}$ y $C_2 = \sqrt{\beta \cdot (\rho - 1)}$

Además, f' es creciente si $u < 0$. En efecto, como F es un difeomorfismo, entonces DF es inyectiva y F manda rectas verticales en rectas verticales. Por lo tanto, f' es monótona creciente si $u < 0$. Y por simetría, se obtiene que f' es monótona decreciente si $u > 0$.

En 1980, Williams probó en su artículo “Structure of Lorenz Attractors” que f es localmente eventualmente sobreyectiva si $f' > \sqrt{2}$, esto es, si $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow I$, diremos que f es *localmente eventualmente sobreyectiva* si para todo $K \subset I$ intervalo abierto no vacío, existe $n > 0$ tal que $f^n(K) \supset I$. En tal caso, f es transitiva por el teorema de transitividad de Birkhoff (vea [GH]).

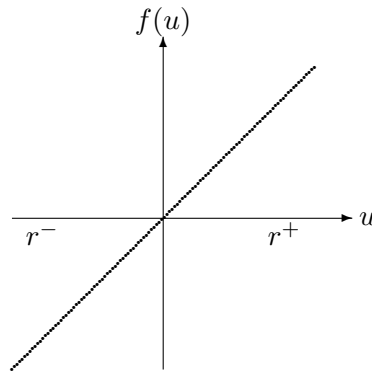
Así por lo anterior f tendrá el siguiente aspecto

Es decir, f satisface las siguientes propiedades

- i.) $f(-u) = -f(u)$, si $u \in [r^-, r^+] \setminus \{0\}$.
- ii.) f no está definida en 0.
- iii.) $f' > \sqrt{2}$ para $u \neq 0$.
- iv.) $f'(u) \rightarrow \infty$ cuando $u \rightarrow 0^\pm$.

Por la propiedad (d) de F , la franja vertical V de Σ definida por

$$V = \{(u, v) : r^- \leq u \leq r^+\}$$

Figura 2.5: Gráfica de f

es mandada por F en si misma, excepto en D donde F no está definida. Así, todos los puntos interiores de Σ tienen trayectorias que eventualmente entran en V y permanecen ahí, excepto las que terminan en D . De esta manera, restringiremos nuestro estudio a la franja V .

Consideremos el caso particular en que la variedad inestable requiere dar tres vueltas para que caiga sobre la variedad estable de P y sean $p_1 = (r^+, t^+)$ y $p_2 = (r^-, t^-)$.

Ya que $\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^+$, al aplicarle la Transformación de Poincaré F a Σ aparecen dos cuñas $F(\Sigma^-)$ y $F(\Sigma^+)$.

En la segunda iteración, observamos que en $F(\Sigma^-)$ aparece una cuña que comienza en D y finaliza en p_1 y aparece un rama que comienza en $F(p_2)$ y termina en p_1 . Por la simetría de la aplicación de retorno, se tiene un comportamiento análogo en $F(\Sigma^+)$.

En la tercera iteración, en la rama que comienza en $F(p_2)$ aparecen dos ramas que son las que estaban en el pedazo de cuña $F(\Sigma^+) \cap \Sigma^-$, y en la cuña mas pequeña en $F(\Sigma^-)$ aparece sólo una rama que va desde D hasta p_1 . Nuevamente, por simetría se repite el patrón en $F(\Sigma^+)$. Así, obtenemos en $F(\Sigma^-)$ tres ramas.

En el cuarto iterado, aparecen cinco ramas en $F(\Sigma^-)$, repartidas de la siguiente manera: tres ramas que van desde $F(p_2)$ hasta p_1 y dos ramas que van desde D hasta p_1 dentro de la rama de la cuña superior. En el iterado anterior salían tres ramas desde p_2 que es la misma cantidad de ramas que aparecen ahora en $F(p_2)$ y las dos ramas que salían de $F(p_2)$ son las que aparecen en la rama de la cuña superior.

Repitiendo sucesivamente el proceso anterior, en el iterado n -ésimo, para $n \geq 2$, hay tantas ramas en $F(\Sigma^-)$ como las que en el iterado anterior $(n - 1)$ nacen en p_2 , que son

las que van en la rama que comienza en $F(p_2)$, más las que nacen en $F(p_2)$ en el iterado $n - 1$, que van a generar ramas en la rama más pequeña que comienza en D .

Así, cuando repetimos este proceso infinitas veces lo que estamos generando es el Atractor Geométrico de Lorenz. Un hecho importante que podemos resaltar es que si nos situamos sobre un entorno pequeño del punto p_1 (o de p_2), el conjunto resultante es homeomorfo a un conjunto que es el producto entre un conjunto de Cantor en la vertical por un segmento de recta en la horizontal.

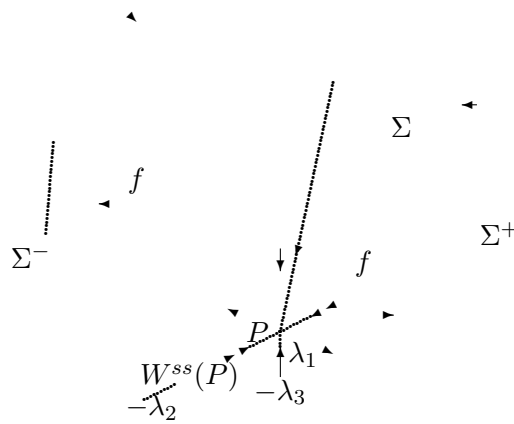


Figura 2.6: Modelo Geométrico de Lorenz

CAPÍTULO 3

Hiperbolicidad no Uniforme

3.1. Preliminares

Sea $\Lambda \subset M$ un atractor hiperbólico singular para un flujo tridimensional $\{X_t\}$ sobre M generado por un campo de vectores X de clase C^r con $r \geq 1$. Sea además $U \subset M$ una región de atracción de Λ . Denotemos por $E_{\Lambda^*}^c$ a la restricción a Λ^* del subfibrado central E_Λ^c (usaremos este tipo de notación a lo largo del trabajo). Para cualquier función g y cualquier subconjunto A del dominio de g denotaremos por $g|_A$ a la restricción de la función g a A y además denotaremos Id_E a la función identidad restringida a algún subconjunto E .

Recordemos el flujo lineal de Poincaré estudiado en [D]. Sea $\mathcal{R} = \Lambda \setminus \text{sing}(X|_\Lambda)$ el conjunto de los puntos regulares de Λ . Para cada $p \in \mathcal{R}$ sean $E_p = \{\alpha X(p) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ el espacio generado por $X(p)$ o *dirección del flujo en p* , y denotemos E_p^\perp al complemento ortogonal de E_p en T_pM . Definamos $E_{\mathcal{R}}$ y $E_{\mathcal{R}}^\perp$ como los subfibrados de $T_{\mathcal{R}}M$ con fibras E_p y E_p^\perp sobre $p \in \mathcal{R}$ respectivamente y provistos de las normas inducidas por la métrica Riemanniana sobre T_pM . Así el subfibrado unidimensional $F_{\mathcal{R}}$ con fibra $F_p = E_p^\perp \cap E_p^c$ sobre $p \in \mathcal{R}$ es el complementario a $E_{\mathcal{R}}$ en $E_{\mathcal{R}}^c$. Sea $\pi_p = \pi_{E_p^\perp} : T_pM \rightarrow E_p^\perp$ la proyección ortogonal.

El *flujo lineal de Poincaré* es un flujo $\{P_t^{X,\mathcal{R}}\}_{t \in \mathbb{R}}$ de automorfismos lineales fibrados del subfibrado normal $E_{\mathcal{R}}^\perp$ definido por

$$P_t^{X,\mathcal{R}}(p, \cdot) = \pi_{X_t(p)} \circ DX_t(p) : E_p^\perp \rightarrow E_{X_t(p)}^\perp.$$

Note que $P_t^{X,\mathcal{R}}$ sólo está definido en \mathcal{R} y no se extiende a todo el conjunto Λ .

En [MPP] (Lema 2.3) fue probado el siguiente resultado como una consecuencia directa de la propiedad de expansión de volumen. Aquí es establecido en extenso puesto que será empleado como punto de partida para la obtención de la condición de expansión

no uniforme, específicamente en la obtención de un exponente de Lyapunov positivo.

LEMA 1 *Sea Λ un conjunto parcialmente hiperbólico de X cuya dirección central expande volumen. Entonces, existen constantes $\lambda, k > 0$ tales que para todo $t > 0$ y todo $p \in \mathcal{R}$ tenemos*

$$\|P_t^{X, \mathcal{R}}(p, u)\| \cdot \|DX_t(p)v\| \geq ke^{\lambda t},$$

para vectores unitarios $u \in F_p$ y $v \in E_p$ donde λ es la tasa de expansión de volumen dada en (1.1). Como consecuencia, cualquier subconjunto compacto invariante $\Lambda' \subset \mathcal{R}$ es hiperbólico.

Demostración. Sea $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ una descomposición continua DX_t -invariante del espacio tangente sobre Λ . Decimos que la dirección central E_Λ^c en una descomposición parcialmente hiperbólica $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ expande volumen si existen constantes $t > 0$ y $k > 1$ tal que $|\det(DX_t|_{E_\Lambda^c})| > k$. Ahora, como Λ es compacto y E^c expande volumen, se tiene que

$$|\det(DX_t(p)v)| \geq ke^{\lambda t}, \quad v \in E^c \quad (3.1)$$

para todo $t \geq 0$ y $k, \lambda > 0$ fijos. Más aún, $E_{\Lambda^*}^c = F_{\Lambda^*} \oplus E_{\Lambda^*}^X$ por la definición de subfibrado normal.

Dado $(v, u) \in E_{\Lambda^*}^c$, sean $R(v, u)$ el paralelogramo cuyos lados son v y u , y $\text{vol}(R)$ el volumen de $R(v, u)$. Entonces, $\text{vol}(R) = \|v\| \cdot \|u\|$. De esta forma tenemos que,

$$\text{vol}(DX_t(R)) = \|P_t^{X, \mathcal{R}}(p, u)\| \cdot \|DX_t(p)v\| \geq ke^{\lambda t}$$

por la definición de $P_t^{X, \mathcal{R}}$.

Así que, $\text{vol}(DX_t(R)) \geq ke^{\lambda t}$, y por tanto $|\det(DX_t(p)v)| \geq ke^{\lambda t}$. ■

3.2. Demostración del Teorema Principal (Teorema 1)

Tenemos que mostrar que el subfibrado $E_{\Lambda^*}^c$ se descompone como suma de la dirección del flujo E_{Λ^*} con un subfibrado unidimensional $E_{\Lambda^*}^u$ el cual es expandido no uniformemente por DX_t (esta es la condición (2) del Teorema). El subfibrado E^u será obtenido por métodos de transformada grafo como en [M], mientras que la expansión no uniforme es obtenida por la condición de expansión de volumen y el Lema 1.

Basta mostrar la hiperbolicidad no uniforme para la función tiempo uno del flujo $X_t|_{\Lambda^*}$ como en [O] (pag. 221). Realmente, usaremos la función tiempo -1 (tiempo menos uno) y mostraremos la propiedad de contracción no uniforme en lugar de la expansión no uniforme establecida en el numeral (2) del Teorema.

Para efectos de simplicidad usaremos las siguientes notaciones en la demostración

$$E = E_{\Lambda^*}^X, \quad F = F_{\Lambda^*}$$

$$f = X_{-1}|_{\Lambda^*} \text{ (inversa de la función tiempo uno del flujo } X_t|_{\Lambda^*}\text{)}$$

$$T(x) = Df(x)|_{E_x^c}, \quad x \in \Lambda^*$$

$$\Lambda^* = \Lambda \setminus W^u(\text{sing}(X|_{\Lambda}))$$

donde $W^u(\text{sing}(X|_{\Lambda}))$ denota la unión de las variedades inestables de elementos en $\text{sing}(X|_{\Lambda})$ y $\text{sing}(X|_{\Lambda})$ denota al conjunto de todas las singularidades del campo de vectores X .

Naturalmente la derivada T define un cociclo lineal sobre f como sigue

$$T(x, n) = \begin{cases} T(x, 0) = Id_{T_x M} & \text{si } n = 0 \\ T(f^{n-1}(x)) \circ \dots \circ T(f(x)) \circ T(x) & \text{si } n > 0 \\ T(f^{-n+1}(x))^{-1} \circ \dots \circ T(f^{-1}(x))^{-1} \circ T(x)^{-1} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

También denotaremos

$$T_E(x, n) = T(x, n)|_{E_x}$$

$$\widehat{T}(x, n) = P_{-n}^{X, \mathcal{R}}|_{F_x},$$

que por definición es $(\pi_{f^n(x)}|_{F_{f^n(x)}}) \circ T(x, n)$; y para $x \in \Lambda^*$ identificamos

$$\begin{aligned} T(x, 1) &= T(x) \\ T(x, -1) &= T(x)^{-1} \\ \widehat{T}(x, 1) &= \widehat{T}(x) \\ \widehat{T}(x, -1) &= \widehat{T}(x)^{-1} \end{aligned}$$

Queremos determinar un subfibrado E^u de $E_{\Lambda^*}^c$ tal que $E_{\Lambda^*}^c = E \oplus E^u$ sea una descomposición continua e invariante, y que además $T(x, n)$ sea contractor no uniformemente sobre E^u , puesto que tratamos la función tiempo menos uno. Cada E_x^u será obtenido como fibra invariante de la transformada grafo siguiendo los argumentos en la demostración del Teorema de Oseledec dada en [M].

En otras palabras, si denotamos $L(F_x, E_x)$ al conjunto de las funciones lineales de F_x en E_x , la demostración consiste en encontrar una función continua $\Lambda^* \ni x \mapsto A(x) \in L(F_x, E_x)$ tal que para $E_x^u = \text{graph}(A(x)) = \{u + A(x)u : u \in F_x\}$ tengamos que $T(x)E_x^u = E_{f(x)}^u$ para todo $x \in \Lambda^*$, de modo tal que $DX_t|_{E^u}$ satisfaga las condiciones del Teorema 1 para alguna función C_ε a ser determinada.

Escribamos $Q(x) = T(x) - \widehat{T}(x) : F_x \rightarrow E_{f(x)}$ de tal forma que

$$T(x)(u + v) = \widehat{T}(x)(u) + T(x)(v) + Q(x)(u) \text{ para } u \in F_x \text{ y } v \in E_x. \quad (3.2)$$

Sea \mathbb{L} el espacio de Banach de las secciones continuas del fibrado lineal L con fibra $L_x = L(F_x, E_x)$ sobre Λ^* . Definamos la transformada grafo $\Gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ como sigue

$$\Gamma(A)(x) = T(f(x))^{-1} \circ A(f(x)) \circ \widehat{T}(x) \text{ para } A \in \mathbb{L}. \quad (3.3)$$

Usemos la condición de invarianza para establecer una ecuación funcional en términos de A . Usando linealidad y la expresión (3.2) con $v = 0$ tenemos, para $A \in \mathbb{L}$ y $x \in \Lambda^*$, lo siguiente

$$\begin{aligned} T(x)(u + A(x)u) &= T(x)(u) + T(x)(A(x)u) \\ &= \widehat{T}(x)(u) + Q(x)(u) + T(x)(A(x)u) \\ &= \widehat{T}(x)(u) + Q(x)(u) + T(x)(A(x)u) + A(f(x))\widehat{T}(x)(u) - A(f(x))\widehat{T}(x)(u) \\ &= [\widehat{T}(x)(u) + A(f(x))\widehat{T}(x)(u)] + [Q(x)(u) + T(x)A(x)(u) - A(f(x))\widehat{T}(x)(u)] \\ &= [\widehat{T}(x)(u) + A(f(x))\widehat{T}(x)(u)] + T(x)[T(f(x))^{-1}Q(x) + A(x) - \Gamma(A)(x)](u) \end{aligned}$$

Nótese que el primer sumando del lado derecho está en F_x mientras que los dos últimos términos pertenecen a $E_{f(x)}$.

Así, el subespacio $\text{graph}(A(x))$ es invariante por T , en el sentido que $T(x)(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ si y sólo si

$$A(x) - \Gamma(A)(x) = -T(f(x))^{-1} \circ Q(x). \quad (3.4)$$

Denotemos por B a la sección en \mathbb{L} dada por $B(x) = -T(f(x))^{-1} \circ Q(x)$. La sección $A \in \mathbb{L}$ definida como la serie formal $A = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n(B)$ satisface la ecuación anterior (3.4). En efecto,

$$A - \Gamma(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{n+1}(B) = B = -T^{-1}Q.$$

El siguiente lema nos da una condición suficiente para la convergencia de la serie formal $\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n(B)$ cuya suma satisface (3.4).

LEMA 2 Existen una constante negativa α y una función continua $\varphi : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|\Gamma^n(B)(x)\| \leq \varphi(x)e^{\alpha n} \text{ para todo } n \geq 0, x \in \Lambda^*. \quad (3.5)$$

Demostración. Usemos el Lema 1 para estimar la tasa de crecimiento de \widehat{T} :

$$\lambda_1(\widehat{T}, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\|$$

Del Lema 1, existen constantes $\lambda, k > 0$ tales que para todo $t > 0$ y todo $p \in \mathcal{R}$ tenemos

$$\|P_t^{X, \mathcal{R}}(p, u)\| \cdot \|DX_t(p)v\| \geq k \exp(\lambda t),$$

para cualesquiera vectores unitarios $u \in F_p$ y $v \in E_p$, donde λ es la tasa de expansión de volumen. En la notación que hemos seguido, esta desigualdad puede ser escrita como

$$\|\widehat{T}(x, n)\| \cdot \|T_E(x, n)\| \leq k \exp(-\lambda n) \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } x \in \Lambda^*,$$

o en otras palabras

$$\frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| \leq \frac{1}{n} \log(k\|T_E(x, n)\|^{-1}) - \lambda \text{ para todo } n \geq 1. \quad (3.6)$$

Puesto que $T_E(x, n) = DX_{-n}|_{E_x}$ y la dirección del flujo E_x en $x \in \Lambda^*$ tiene exponente de Lyapunov nulo, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(k\|T_E(x, n)\|^{-1}) = 0 \text{ para todo } x \in \Lambda^*.$$

Entonces, tomando límites superiores en la desigualdad (3.6) tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| = \lambda_1(\widehat{T}, x) \leq -\lambda \text{ para todo } x \in \Lambda^*. \quad (3.7)$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ pequeño definamos las siguientes funciones (como [M] pp. 360 – 361)

$$G_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{\|T_E(f^n(x), -n)\|}{\exp(n\varepsilon)} \text{ y } K_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{\|\widehat{T}(x, n)\|}{\exp(n[\lambda_1(\widehat{T}, x) + \varepsilon])}$$

Aplicando la definición (3.3) de la transformada grafo con $A = B$ y haciendo sustituciones obvias de las funciones G_ε y K_ε obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma^n(B)(x)\| &= \|T_E(f^n(x), -n) \circ B(f^n(x)) \circ \widehat{T}(x, n)\| \\ &\leq \|B(f^n(x))\| G_\varepsilon(f^n(x)) \exp(n\varepsilon) K_\varepsilon(x) \exp(n[\lambda_1(\widehat{T}, x) + \varepsilon]) \\ &= \|B(f^n(x))\| G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp(2n\varepsilon + n\lambda_1(\widehat{T}, x)) \\ &= \|B(f^n(x))\| G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp[n(2\varepsilon + \lambda_1(\widehat{T}, x))]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\Gamma^n(B)(x)\| \leq \|B(f^n(x))\| G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp[n(2\varepsilon + \lambda_1(\widehat{T}, x))].$$

Recordando que $B = -T^{-1}Q$ y que $\|Q\|$ y $\|T\|$ son acotadas sobre Λ^* tomemos una cota superior uniforme M de $\|B(f^n(x))\|$, $n \geq 0$, sobre Λ^* . De este modo

$$\|\Gamma^n(B(x))\| \leq M G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp[n(2\varepsilon + \lambda_1(\widehat{T}, x))] \quad (3.8)$$

Ahora, empleando las desigualdades

$$\frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| \leq \frac{1}{n} \log(k \|T_E(x, n)\|^{-1}) - \lambda \quad \text{para todo } n \geq 1$$

$$\lambda_1(\widehat{T}, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| \leq -\lambda \quad \text{para todo } x \in \Lambda^*$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma^n(B)(x)\| &\leq M G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp(n[2\varepsilon + \lambda_1(\widehat{T}, x)]) \\ &\leq M G_\varepsilon(f^n(x)) K_\varepsilon(x) \exp(2n\varepsilon) \exp(-n\lambda) \\ &= M \frac{G_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)} K_\varepsilon(x) \exp(3n\varepsilon - n\lambda) \\ &= M \frac{G_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)} K_\varepsilon(x) \exp(n[3\varepsilon - \lambda]) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\Gamma^n(B)(x)\| \leq M \frac{G_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)} K_\varepsilon(x) \exp(n[3\varepsilon - \lambda]). \quad (3.9)$$

Recordemos el siguiente resultado.

Lema 11,3 de [M]. *Sea T un automorfismo del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) y $C : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $C(x) - C(\varphi)$ es integrable. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} C(T^n(x)) = 0 \quad \text{para casi todo punto } x \in X.$$

Para obtener un estimado uniforme de $G_\varepsilon \circ f^n$ procedemos como sigue. Primero nótese que G_ε es uniformemente continua, pues T_E se extiende continuamente a todo Λ que es compacto. Esta función G_ε también tiene crecimiento subexponencial con respecto

a cualquier medida de probabilidad f -invariante (y en particular cualquier medida X_t -invariante) con soporte contenido en Λ^* (vea lema 11.3 en [M] anteriormente citado), es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log(G_\varepsilon \circ f^n(x)) = 0,$$

para μ -ctp $x \in \Lambda$ y toda medida de probabilidad f -invariante μ .

Puesto que el conjunto de las órbitas periódicas del flujo contenidas en Λ^* es denso en Λ , y cada una de ellas soporta una medida de probabilidad invariante y ergódica se obtiene, por continuidad, que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log(G_\varepsilon \circ f^n(x)) = 0, \text{ para todo } x \in \Lambda^*.$$

Este hecho implica que los factores

$$\frac{G_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)}, \quad n \geq 0$$

en la ecuación (3.9) son uniformemente acotados en n para todo $x \in \Lambda^*$.

Entonces, es posible definir las funciones reales

$$D_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{G_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)},$$

las cuales son finitas para todo $x \in \Lambda^*$. Así tenemos la siguiente estimación de (3.9) por los iterados de la transformada grafo

$$\|\Gamma^n(B)(x)\| \leq MD_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x) \exp[n(3\varepsilon - \lambda)]. \quad (3.10)$$

Finalmente tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que el número real $\alpha = 3\varepsilon - \lambda$ sea negativo, y definamos la función $\varphi : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(x) = MD_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x)$ la cual es continua sobre Λ^* . De ésto último y de (3.10) queda demostrado el Lema. ■

De esta manera, el lema anterior y el Teorema de Banach-Steinhaus (Acotación Uniforme [RN]) implican que la serie formal $\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n(B)$ converge a la sección $A \in \mathbb{L}$ definida como

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \Gamma^n(B)(x) \text{ para } x \in \Lambda^*.$$

Así, A satisface (3.4):

$$A - \Gamma(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{n+1}(B) = B = -T^{-1}Q.$$

Para cada $x \in \Lambda^*$ sea E_x^u el gráfico de $A(x)$. Por (3.4) el subfibrado lineal E^u con fibra E_x^u sobre $x \in \Lambda^*$ es invariante por $T = Df|_{E_{\Lambda^*}}$ (y también por DX_t), esto es,

$$T(x)(u + A(x)(u)) = \widehat{T}(x)(u) + A(f(x))\widehat{T}(x)(u) \quad \text{para todo } u \in F_x. \quad (3.11)$$

Denotemos por T_{E^u} a la restricción de T a E^u . En el siguiente Lema procederemos a estimar la tasa de crecimiento de T_{E^u} .

LEMA 3 *La desigualdad*

$$\lambda_1(T_{E^u}, x) \leq \lambda_1(\widehat{T}, x) \leq -\lambda \quad (3.12)$$

se cumple para todo $x \in \Lambda^*$, donde λ es un número positivo satisfaciendo la propiedad de expansión de volumen (1.1) para $DX_t|_{E^c}$.

Demostración. Sea $\tilde{A}(x) : F_x \rightarrow E_x^u$ la función gráfico dada por

$$\tilde{A}(x)(u) = I_{F_x}(u) + A(x)(u), \quad \text{para } u \in F_x$$

donde I_{F_x} es la función identidad restringida a F_x .

La propiedad de invarianza (3.11) puede ser expresada en términos de la función \tilde{A} como sigue:

$$T(x) \circ \tilde{A}(x) = \tilde{A}(f(x)) \circ \widehat{T}(x) \quad \text{para todo } x \in \Lambda^*,$$

lo cual es equivalente a escribir $T_{E^u}(x) = \tilde{A}(f(x)) \circ \widehat{T}(x) \circ \tilde{A}(x)^{-1}$, de acuerdo con la notación anterior. Por tanto, para $x \in \Lambda^*$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1(T_{E^u}, x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_{E^u}(x, n)\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x)) \circ \widehat{T}(x, n) \circ \tilde{A}(x)^{-1}\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x))\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(x)^{-1}\|, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(x)^{-1}\| &= 0 \quad \text{y} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{T}(x, n)\| &= \lambda_1(\widehat{T}, x) \leq -\lambda. \end{aligned}$$

La primera expresión se debe al hecho de que $\|\tilde{A}(x)^{-1}\|$ no depende de n , y la segunda por la ecuación (3.7) para todo $x \in \Lambda^*$. Debemos probar entonces que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{A}(f^n(x))\| = 0,$$

con lo cual mostraríamos la ecuación (3.12). Para mostrar este hecho bastará con probar que \tilde{A} tiene crecimiento subexponencial. Recordando que $A = \sum_{n \geq 0} \Gamma^n(B)$ y por el Lema 2 obtenemos

$$\|A(f^n(x))\| \leq \sum_{n \geq 0} \|\Gamma^n(B)(f^n(x))\| \leq \varphi(f^n(x)) \cdot \sum_{n \geq 0} e^{\alpha n} = \frac{\varphi(f^n(x))}{1 - e^\alpha} \quad (3.13)$$

Por otro lado notemos que $\tilde{A}(x)^{-1} = \pi_x|_{E_x^u}$ para todo $x \in \Lambda^*$, donde $\pi_x : E_x^c \rightarrow F_x$ es la proyección ortogonal, de modo que $\|\tilde{A}(x)^{-1}\| \leq 1$ y por tanto $\|\tilde{A}(x)\| \geq 1$. Ahora, combinando esto con $\tilde{A}(f^n(x)) = I_{F_{f^n(x)}} + A(f^n(x))$ y usando la desigualdad triangular obtenemos

$$1 \leq \|\tilde{A}(f^n(x))\| = \|I_{F_{f^n(x)}} + A(f^n(x))\| \leq 1 + \|A(f^n(x))\|.$$

De este resultado y de la ecuación (3.13) se deduce que

$$1 \leq \|\tilde{A}(f^n(x))\| \leq 1 + \frac{\varphi(f^n(x))}{1 - e^\alpha}. \quad (3.14)$$

Pero, recordemos además que $\varphi(f^n(x)) = MD_\varepsilon(f^n(x))K_\varepsilon(f^n(x))$, donde D_ε y K_ε son funciones con crecimiento subexponencial. Entonces también φ tiene crecimiento subexponencial, y concluimos de (3.14) que también \tilde{A} posee crecimiento subexponencial como habíamos afirmado. Luego, la desigualdad (3.12) queda establecida y el Lema demostrado. ■

Continuando con la demostración del teorema principal, en lo que sigue denotaremos $E_q^c = E_q \oplus E_q^u$, donde $E_q^u = \text{graph}(A(q))$ es el gráfico de $A(q)$ para q en la f -órbita de $x \in \Lambda^*$, recordando que $f = X_{-1}|_{\Lambda^*}$. Para esta descomposición comprobaremos las condiciones del teorema. Para este propósito sólo tenemos que chequear las correspondientes versiones discretas de estas condiciones, esto es, para $t = n \in \mathbb{Z}$ mostraremos la existencia de $\eta > 0$ y una función continua C_ε (para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño) tal que

1. $C_\varepsilon(f^n(x)) \leq e^{\varepsilon|n|} C_\varepsilon(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;
2. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ y $m > 0$, entonces

$$\|T(f^n(x), m)v\| \leq C_\varepsilon(f^{n+m}(x))e^{-\eta m} \|v\|, \quad \text{para } v \in E_{f^n(x)}^u,$$

$$3. \angle(E_{f^n(x)}^u, E_{f^n(x)}) \geq C_\varepsilon (f^n(x))^{-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Primero notemos que, en general, $x \mapsto \|A(x)\|$ no es una función acotada, lo cual significa que el ángulo $\angle(E_q^u, E_q)$ entre E_q^u y E_q no es acotado inferiormente por alguna constante positiva porque

$$\angle(E_{f^n(x)}^u, E_{f^n(x)}) \geq \|A(f^n(x))\|^{-1} \quad (3.15)$$

No obstante, esta función siempre tiene un crecimiento subexponencial. Recordemos el siguiente lema:

LEMA 4 *Lema Tempering-Kernel (S.2.12 en [KM], pag. 668). Sea $f : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida de un espacio de Lebesgue (X, μ) . Si $K : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible satisfaciendo*

$$K(x) > 0 \quad \text{y} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log(K(f^m(x))) = 0$$

entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una transformación medible $K_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$K_\varepsilon(x) > K(x) \quad \text{y} \quad e^{-\varepsilon} \leq \frac{K_\varepsilon(x)}{K_\varepsilon(f(x))} \leq e^\varepsilon$$

Entonces, por el lema anterior, existe una función continua $C_{1,\varepsilon} : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|A(x)\| \leq C_{1,\varepsilon}(x) \quad (3.16)$$

y

$$e^{-\varepsilon} < \frac{C_{1,\varepsilon}(x)}{C_{1,\varepsilon}(f(x))} < e^\varepsilon \quad (3.17)$$

para todo $x \in \Lambda^*$. De (3.15) y (3.16) obtenemos

$$\angle(E_{f^n(x)}^u, E_{f^n(x)}) \geq \|A(f^n(x))\|^{-1} \geq C_{1,\varepsilon}(f^n(x))^{-1}$$

mientras que de (3.17) y por recursión obtenemos que $C_{1,\varepsilon}$ satisface

$$C_{1,\varepsilon}(f^n(x)) \leq C_{1,\varepsilon}(x) e^{|n|\varepsilon} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, las condiciones (1) y (3) del Teorema Principal, así como las condiciones (1) y (3) enunciadas anteriormente, son verdaderas con la función $C_{1,\varepsilon}$.

Por otro lado, del Lema 3 tenemos

$$\lambda_1(T_{E^u}, x) \leq \lambda_1(\widehat{T}, x) \leq -\lambda,$$

lo cual implica que para cada $\varepsilon > 0$ el número

$$\sup_{m \geq 0} \frac{\|T_{E^u}(x, m)\|}{\exp[m(-\lambda + \varepsilon)]}$$

es finito. Definamos la función \tilde{C}_ε sobre Λ^* por

$$\tilde{C}_\varepsilon = \sup_{m \geq 0} \frac{\|T_{E^u}(x, m)\|}{\exp[m(-\lambda + \varepsilon)]}.$$

Fijemos un número positivo $\eta < \lambda$ y supongamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que $2\varepsilon < \lambda - \eta$. Entonces, dados m, n (números enteros) con $m \geq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(f^n(x), m)v\| &\leq \tilde{C}_\varepsilon(f^n(x))e^{[m(-\lambda+\varepsilon)]}\|v\| \\ &\leq \tilde{C}_\varepsilon(f^n(x))e^{-m\varepsilon}e^{-\eta m}\|v\| \end{aligned}$$

para todo $v \in E_{f^n(x)}$ y $x \in \Lambda^*$. Además, la función \tilde{C}_ε tiene crecimiento subexponencial con respecto a cualquier medida f -invariante, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\tilde{C}_\varepsilon \circ f^n(x)) = 0$$

(vea Proposición 11.2 en [M]). Argumentando como en la demostración del Lema 3 se obtiene que esta función \tilde{C}_ε tiene crecimiento subexponencial sobre todo Λ^* . Entonces, el Lema Tempering-Kernel nos da una función $C_{2,\varepsilon}$ tal que $\tilde{C}_\varepsilon(x) \leq C_{2,\varepsilon}(x)$ y $C_{2,\varepsilon}(f^n(x)) \leq C_{2,\varepsilon}(x)e^{|n|\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular, $C_{2,\varepsilon}(f^n(x))e^{-m\varepsilon} < C_{2,\varepsilon}(f^{n+m}(x))$, por lo tanto

$$\|T(f^n(x), m)v\| \leq C_{2,\varepsilon}(f^{n+m}(x))e^{-\eta m}\|v\|.$$

Así, las condiciones (1) y (2) del Teorema Principal así como las condiciones (1) y (2) enunciadas anteriormente (caso discreto) son verdaderas con la función $C_{2,\varepsilon}$.

Finalmente, la función C_ε definida como

$$C_\varepsilon = \max\{C_{1,\varepsilon}, C_{2,\varepsilon}\},$$

satisface simultáneamente todas las condiciones en el enunciado y el Teorema Principal queda demostrado. ■

Bibliografía

- [C] W. COLMENAREZ. *Nonuniform Hyperbolicity for Singular Hyperbolic Attractors*. Transactions of the American Mathematical Society. **357** (2005), 4131–4140.
- [D] C. DOERING. *Persistently Transitive Vector Fields on Three-dimensional Manifolds*. Dynamical Systems and Bifurcation Theory. Pitman Research Notes in Math. Series. **160** (1987), 59–89.
- [G] J. GUCKENHEIMER. *A strange strange attractor*. In: The Hopf bifurcation and its applications. Marsden, J. and McCracken (Eds.). Applied Mathematical Series **9**, Springer Verlag. Berlin, 1976.
- [GH] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Series **42**, Springer Verlag. New York, 1983.
- [KM] A. KATOK AND L. MENDOZA. *Dynamical Systems with Nonuniform Hyperbolic Behavior*. Supplement in KATOK AND HASSELBLATT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press. 1995.
- [M] R. MAÑÉ. *Introdução à teoria ergódica*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.
- [MP] C. MORALES AND M. J. PACIFICO. *Sufficient Conditions for Robustness of Attractors*. Preprint at <http://arxiv.org/pdf/math/.DS/0303310>.
- [MPP] C. MORALES, M. J. PACIFICO AND E. PUJALS. *Singular Hyperbolic Sets*. Proc. Amer. Math. Soc. **127**, (1999) 3393–3401.
- [O] V. I. OSELEDEC. *A Multiplicative Ergodic Theorem. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems*. Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), 197–231.

- [P] YA. PESIN. *Families of Invariant Manifolds Corresponding to non-zero Characteristic Exponents*. Math. USSR-Izv. **10** (1976), 1261–1305.
- [PS] C. PUGH AND B. SHUB. *Ergodic Attractors*. Trans. Amer. Math. Soc. **312**, (1989), 1–54.
- [RN] F. RIESZ AND B. NAGY. *Functional Analysis*. Dover Publ. 1990.
- [R] C. ROBINSON. *Dynamical Systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC Press, New York 1999.
- [S] YA. SINAI. *Dynamical Systems II*. Encyclopedia of Mathematical Science vol. 2, Ya. G. Sinai (Ed.) Springer Verlag. Berlin, 1989.
- [T] W. TUCKER. *The Lorenz attractor exists*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I: 1197–1202, 1999.
- [V] M. VIANA. *Dynamics: A Probabilistic and Geometric Perspective*. Documenta Mathematica. Extra volume ICM Berlin, 1998.
- [VM] M. VIANA. *What's new on Lorenz Strange Attractors?*. Math. Intelligencer, 22(3): 6–19, 2000.